Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

7 Cálculo II

Funciones diferenciables de varias variables

En el curso este tema no se explica tal y como aparece aquí. Sin embargo, hay definiciones, como las de derivadas parciales y derivadas direccionales, que se utilizarán en temas posteriores.

24 · 01 · 2024

Funciones diferenciables

Una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable (o Fréchet diferenciable) en $\mathbf{a} \in \mathring{A}$ (un punto interior de A) si existe una aplicación lineal $L_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ que verifica

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - L_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}-\mathbf{a})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|} = 0.$$

A veces se escribe $Df(\mathbf{a}) = L_{\mathbf{a}}$. La aplicación lineal $L_{\mathbf{a}}$ está definida por una matriz de orden $n\times m$. Si $f = (f_1, \dots, f_m)$, se verá más adelante que dicha matriz (se llama matriz Jacobiana) es el valor en $\mathbf{a}$ de

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Ejemplo. En el caso de una función $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, se tiene que f es diferenciable en $a \in \mathring{A}$ si existe una función lineal $L_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifica

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - L_a(x-a)}{|x-a|} = 0,$$

es decir

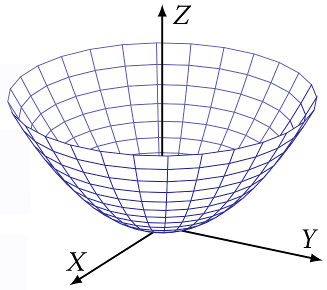
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - L_a(x-a)}{x-a} = 0.$$

Por tanto L_a es una matriz de orden 1×1 (un número) que verifica

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=L_a(1)=f'(a).$$

Ejemplo. En el caso de la función $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=x^2+y^2$, se puede comprobar si es diferenciable en $(0,0)$. Para ello se trata de encontrar una aplicación lineal $L_{(0,0)}:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ que verifica

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-L_{(0,0)}(x-0,y-0)}{\|(x,y)-(0,0)\|}=0.$$



Gráfica de $f(x,y)=x^2+y^2$

Se trata pues de saber si existen números p y q tales que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2-px-qy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

ya que $L_{(0,0)}$ está dada por una matriz 2×1,

$$L_{(0,0)}(x,y)=\begin{pmatrix} x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix} p\\ q\end{pmatrix}=px+qy.$$

Basta elegir $p=q=0$ y se cumple

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2-px-qy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

y así f es diferenciable en $(0,0)$ y la aplicación lineal $L_{(0,0)}$ es la función cero.

Si se elige otro punto, por ejemplo $(3,4)$, para comprobar si f es diferenciable en él habrá que encontrar qué aplicación lineal $L_{(3,4)}$ verifica

$$\lim_{(x,y)\to(3,4)}\frac{f(x,y)-f(3,4)-L_{(3,4)}(x-3,y-4)}{\|(x,y)-(3,4)\|}=0,$$

equivalentemente, habrá que encontrar qué números p y q verifican

$$\lim_{(x,y)\to(3,4)}\frac{x^2+y^2-(3^2+4^2)-p(x-3)-q(y-4)}{\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}}=0.$$

Si se eligen $p=6$, $q=8$ entonces

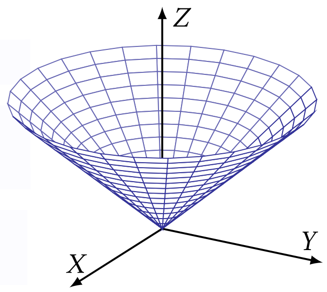
$$\lim_{(x,y)\to(3,4)}\frac{x^2+y^2-(3^2+4^2)-6(x-3)-8(y-4)}{\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}}=$$
$$\lim_{(x,y)\to(3,4)}\frac{x^2+y^2-25-6x+18-8y+32}{\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}}=$$
$$\lim_{(x,y)\to(3,4)}\frac{x^2+y^2-6x-8y+25}{\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}}=\lim_{(x,y)\to(3,4)}\frac{(x-3)^2+(y-4)^2}{\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}}=0.$$

En el punto $(3,4)$ la función f es diferenciable, y la aplicación líneal es

$$L_{(3,4)}(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = 6x + 8y.$$

Ejemplo. En el caso de la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, se puede comprobar que no es diferenciable en $(0,0)$. Es imposible que existan números p y q que verifiquen

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{0^2+0^2} - p(x-0) - q(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = 0.$$



Gráfica de $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

De existir tales p y q verificando esa igualdad, tomando $y = 0$ y $x \longrightarrow 0$ se tiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x| - px}{|x|} = 0 = 1 - p \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|},$$

que es imposible.

En cambio, esta misma función es diferenciable en el punto $(1,2)$, ya que existen p y q que verifican

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{1^2+2^2} - p(x-1) - q(y-2)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}} = 0.$$

La elección de p y q no es difícil de adivinar: las derivadas parciales de f en el punto $(1,2)$

$$p = \frac{1}{\sqrt{5}}, \; q = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Propiedades de las funciones diferenciables

Proposición. *Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es $f = (f_1, \ldots, f_m)$ entonces f es diferenciable en $\mathbf{a}$ si y sólo si cada $f_i : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ lo es y se tiene $Df(\mathbf{a}) = (Df_1(\mathbf{a}), \ldots, Df_m(\mathbf{a}))$.*

Este resultado permite en muchos casos estudiar la diferenciabilidad de funciones sólo considerando funciones escalares. La demostración es evidente. Basta escribir $f = (f_1, \ldots, f_m)$ es la definición de diferenciabilidad: f es diferenciable en $\mathbf{a}$ si existe una aplicación lineal $L_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $L_{\mathbf{a}} = (L_{\mathbf{a},1}, \ldots, L_{\mathbf{a},m})$ que verifica

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - L_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}-\mathbf{a})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|} = 0$$

que es equivalente a que se cumpla

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{f_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{a}) - L_{\mathbf{a},i}(\mathbf{x}-\mathbf{a})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|} = 0$$

para $i = 1, \ldots, m$.

Proposición. *Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en* $\mathbf{a}$ *entonces la aplicación lineal $L_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ que verifica*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - L_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}-\mathbf{a})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|} = 0$$

es única.

Demostración. Si existen dos aplicaciones lineales $L_{\mathbf{a}}$ y $M_{\mathbf{a}}$ que verifican la igualdad anterior, entonces

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{(L_{\mathbf{a}} - M_{\mathbf{a}})(\mathbf{x}-\mathbf{a})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|} = 0.$$

Así $\varphi = L_{\mathbf{a}} - M_{\mathbf{a}}$ es una aplicación lineal que verifica

$$\lim_{\mathbf{z}\to 0} \frac{\varphi(\mathbf{z})}{\|\mathbf{z}\|} = 0$$

para todo $z \in \mathbb{R}^n$. Para cualquier $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$0 = \lim_{t\to 0^+} \frac{\varphi(t\mathbf{b})}{\|t\mathbf{b}\|} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t\varphi(\mathbf{b})}{t\|\mathbf{b}\|} = \frac{\varphi(\mathbf{b})}{\|\mathbf{b}\|} \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{t} = \frac{\varphi(\mathbf{b})}{\|\mathbf{b}\|}$$

y se sigue que $\varphi(\mathbf{b}) = 0$. Por tanto $L_{\mathbf{a}} = M_{\mathbf{a}}$. □

Esta demostración anterior es una consecuencia de un resultado más general, que puede verse en la sección «Una nota sobre funciones lineales» al final de este capítulo.

Proposición. *Toda función $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ lineal es diferenciable en cada punto* $\mathbf{a}$ *y además $Df(\mathbf{a}) = f$.*

Demostración. Como f es lineal, entonces $f(\mathbf{x}-\mathbf{a}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})$ y entonces

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{x}-\mathbf{a})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|} = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{a})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|} = 0. \qquad \square$$

Este resultado dice, por ejemplo, que la función lineal $f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow 3x \in \mathbb{R}$ es diferenciable y en cada punto x_0 su derivada es la propia función: $f'(x_0) = f$. Esta función f se identifica con una matriz 1×1 cuyo único elemento es el número 3, que define la aplicación lineal $x \longrightarrow 3x$.

Proposición. *Toda función $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ constante es diferenciable en cada punto* $\mathbf{a}$ *y $Df(\mathbf{a}) = 0$.*

Demostración. Como f es constante, entonces $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = 0$ y entonces se puede elegir $L_{\mathbf{a}} = 0$ ya que

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - 0(\mathbf{x}-\mathbf{a})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|} = 0. \qquad \square$$

Proposición. *Si $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ son diferenciables en* $\mathbf{a}$ *entonces también $\lambda f + \mu g$ es diferenciable en* $\mathbf{a}$ *y*

$$D(\lambda f + \mu g)(\mathbf{a}) = \lambda Df(\mathbf{a}) + \mu Dg(\mathbf{a}).$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

La demostración es evidente. Para el producto (y cociente) de funciones no hay reglas en general, salvo en el caso especial de funciones escalares.

Proposición. *Si $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ son diferenciables en* $\mathbf{a}$ *entonces $f \cdot g$ es diferenciable en* $\mathbf{a}$ *y*

$$D(f \cdot g)(\mathbf{a}) = Df(\mathbf{a}) \cdot g(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a}) \cdot Dg(\mathbf{a}).$$

Si además $g(\mathbf{a}) \neq 0$, entonces f/g es diferenciable en $\mathbf{a}$ *y*

$$D(f/g)(\mathbf{a}) = \frac{Df(\mathbf{a}) \cdot g(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a}) \cdot Dg(\mathbf{a})}{g^2(\mathbf{a})}.$$

La demostración es similar a la ya vista para funciones de una variable.

Proposición (se conoce como regla de la cadena). *Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en* $\mathbf{a}$ *y $g : B \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ es diferenciable en $f(\mathbf{a})$ entonces $g \circ f$ es diferenciable en* $\mathbf{a}$ *y se tiene*

$$D(g \circ f)(\mathbf{a}) = Dg(f(\mathbf{a})) \circ Df(\mathbf{a}) = M[Df(\mathbf{a})] \cdot M[Dg(f(\mathbf{a}))]$$

donde $M[Df(\mathbf{a})] \cdot M[Dg(f(\mathbf{a}))]$ representa el producto de las matrices correspondientes.

Ejemplo. Sean $f : t \in \mathbb{R} \longrightarrow (t, t^2) \in \mathbb{R}^2$ y $g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow x^2 - 3y + 1 \in \mathbb{R}$.

Como $(g \circ f)(t) = g(t, t^2) = t^2 - 3t^2 + 1 = -2t^2 + 1$ se tiene $D(g \circ f)(t) = -4t$. Utilizando la regla de la cadena, resulta

$$Df(t) = (1, 2t), \quad Dg(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -3 \end{pmatrix}, \quad Dg(f(t)) = Dg(t, t^2) = \begin{pmatrix} 2t \\ -3 \end{pmatrix}$$

y por tanto

$$D(g \circ f)(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ -3 \end{pmatrix} = 2t - 6t = -4t.$$

A veces se escribe $f(t) = (x(t), y(t))$ y $u = g(f(t)) = g\,(x(t), y(t))$, y la regla de la cadena dice

$$\frac{du}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Si $x = x(t, s)$, $y = y(t, s)$, para la función escalar $u = g(x(t, s), y(t, s))$ se tiene

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

es decir,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

Ejemplo. Sean $f:(x,y)\in\mathbb{R}^2\longrightarrow(y,x)\in\mathbb{R}^2$ y $g:(x,y)\in\mathbb{R}^2\longrightarrow(x,\operatorname{sen}y)\in\mathbb{R}^2$. Como $(g\circ f)(x,y)=g(y,x)=(y,\operatorname{sen}x)$, se tiene

$$D(g\circ f)(x,y)=\begin{pmatrix}0&\cos x\\1&0\end{pmatrix}.$$

Utilizando la regla de la cadena,

$$Df(x,y)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad Dg(x,y)=\begin{pmatrix}1&0\\0&\cos y\end{pmatrix},\quad Dg(f(x,y))=\begin{pmatrix}1&0\\0&\cos x\end{pmatrix}$$

y por tanto

$$D(g\circ f)(x,y)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&\cos x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\cos x\\1&0\end{pmatrix}.$$

Proposición. *Si $f:A\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ es diferenciable en $\mathbf{a}$ entonces f es continua en $\mathbf{a}$.*

Demostración. Sea $L_{\mathbf{a}}$ la aplicación lineal que verifica

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\frac{f(\mathbf{x})-f(\mathbf{a})-L_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}-\mathbf{a})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}=0.$$

Entonces

$$0=\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}f(\mathbf{x})-f(\mathbf{a})-L_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}-\mathbf{a})=\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}f(\mathbf{x})-f(\mathbf{a})$$

($L_{\mathbf{a}}$ es continua trivialmente) que es la continuidad de f en $\mathbf{a}$. □

La función $f:(x,y)\in\mathbb{R}^2\longrightarrow\sqrt{x^2+y^2}\in\mathbb{R}$ es continua y no diferenciable en $(0,0)$, lo que prueba que el resultado anterior no es reversible: hay funciones continuas no diferenciables.

Derivadas direccionales y derivadas parciales

Si $f:A\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ es diferenciable en $\mathbf{a}$ entonces

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\frac{f(\mathbf{x})-f(\mathbf{a})-Df(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}=0.$$

Por tanto, dado un vector normalizado $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n$, para $t\in\mathbb{R}$ se elige $\mathbf{x}=\mathbf{a}+t\mathbf{u}$ y se tiene

$$\lim_{t\to0}\frac{f(\mathbf{a}+t\mathbf{u})-f(\mathbf{a})-Df(\mathbf{a})(t\mathbf{u})}{\|t\mathbf{u}\|}=0$$

y así

$$\lim_{t\to0}\frac{f(\mathbf{a}+t\mathbf{u})-f(\mathbf{a})}{t}=Df(a)(u),$$

que se llama *derivada direccional* de f en $\mathbf{a}$ según la dirección del vector $\mathbf{u}$. Se suele escribir $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a})=Df(a)(\mathbf{u})$. Para un vector no normalizado $\mathbf{u}$ se utiliza $\mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$.

En el caso particular de $\mathbf{u}=\mathbf{e}_1=(1,0,\ldots,0)$ se tiene

$$D_{\mathbf{e}_1}f(\mathbf{a})=Df(a)(\mathbf{e}_1)=\lim_{t\to0}\frac{f(\mathbf{a}+t\mathbf{e}_1)-f(\mathbf{a})}{t}$$

que se llama derivada parcial de f con respecto de x_1 (con respecto de la primera variable) en $\mathbf{a}$, y se denota
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) = D_{\mathbf{e}_1} f(\mathbf{a}) = Df(a)(\mathbf{e}_1) = D_1 f(\mathbf{a})$$
(es la primera fila de la matriz $Df(\mathbf{a})$).

Como $Df(\mathbf{a})$ es lineal, para cada $u = u_1e_1 + \ldots u_ne_n$ se tiene
$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a}) = Df(a)\left(u_1e_1 + \cdots + u_ne_n\right),$$
y cada derivada direccional se puede escribir como
$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a}) = u_1 D_1 f(\mathbf{a}) + u_2 D_2 f(\mathbf{a}) + \ldots + u_n D_n f(\mathbf{a}).$$

Si f es una función escalar se llama *gradiente* de f a
$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \ldots\right)$$
y con esta notación
$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a}) = \nabla f(a) \cdot \mathbf{u}.$$

En general, para una función escalar f diferenciable, la derivada direccional según cualquier vector $\mathbf{u}$, normalizado o no, es
$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a}) = \nabla f(a) \cdot \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}.$$

Ejemplo. En el caso de una función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, las derivadas parciales son
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t, y) - f(x, y)}{t}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x, y+t) - f(x, y)}{t}.$$
La derivada direccional según un vector unitario $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ es
$$D_{\mathbf{v}} f(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv_x, y + tv_y) - f(x, y)}{t} = v_x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + v_y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

En conclusión, si f es diferenciable en $\mathbf{a}$ (se llama también diferenciable en el sentido de Fréchet), entonces en dicho punto $\mathbf{a}$ se tiene

1. f es continua,
2. f tiene derivadas direccionales en todas las direcciones, y
3. las derivadas direccionales verifican
$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a}) = u_1 D_1 f(\mathbf{a}) + u_2 D_2 f(\mathbf{a}) + \ldots + u_n D_n f(\mathbf{a}).$$

Esta igualdad permite conocer todas las derivadas direccionales a partir de las derivadas parciales.

Además, la aplicación lineal $L_{\mathbf{a}}$ que aparece en la definición de diferenciabilidad de f en $\mathbf{a}$ está formada por las derivadas parciales de f en dicho punto, y se conoce como matriz Jacobiana,

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Sin embargo la existencia de derivadas parciales no garantiza que la función sea diferenciable, ni continua. Y la existencia de todas las derivadas direccionales verificando la ecuación anterior tampoco implica la diferenciabilidad de la función.

Si f es diferenciable entonces f verifica 1 + 2 + 3. Cabe preguntarse si estas tres condiciones son suficientes para asegurar que f sea diferenciable. La respuesta es sí para el caso de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Para el resto de casos la respuesta es no, como se muestra con los ejemplos que siguen.

Ejemplo. Para la función $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \sqrt{|xy|} \in \mathbb{R}$ es fácil comprobar que tiene derivadas parciales iguales a 0 en $(0, 0)$ pero no existe la derivada direccional según la dirección $(1, 1)$.

Ejemplo. La función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

no es continua en $(0, 0)$ (y por tanto no es diferenciable) pero tiene derivadas parciales en $(0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Ejemplo. La función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

tiene derivadas parciales, y se verifica

$$D_1 f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0$$
$$D_2 f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0.$$

Sin embargo,

$$D_{(1,1)} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t/\sqrt{2}, t/\sqrt{2}) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2t}$$

no existe. Luego f no puede ser diferenciable.

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Ejemplo. La función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

tiene derivadas parciales, y se verifica ((a,b) es un vector normalizado, es decir, $a^2+b^2=1$)

$$D_1 f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0,$$
$$D_2 f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0,$$
$$D_{(a,b)} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(ta,tb)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{t^3a^2b}{t^2(a^2+b^2)}}{t} = \frac{a^2b}{a^2+b^2} = a^2b.$$

Luego f no puede ser diferenciable pues $D_{(a,b)} f(0,0) \neq \nabla f(0,0) \cdot (a,b)$ y por tanto no se cumple la condición 3 anterior.

Ejemplo. Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Esta función es continua en $(0,0)$, ya que $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$, y así

$$\left| \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq |x|.$$

Es trivial comprobar (basta aplicar la definición) que las dos derivadas parciales son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Para cualquier vector (a,b) normalizado ($a^2+b^2=1$)

$$D_{(a,b)} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{ta \cdot |t| \cdot |b|}{|t| \cdot t\sqrt{a^2+b^2}} = a|b|.$$

Por tanto, f no es diferenciable en $(0,0)$, ya que no cumple la condición 3.

(Esta función tampoco es diferenciable en otros puntos. Por ejemplo, si se corta la gráfica con el plano $x=1$ se obtiene una curva, $z = |y|/(1+y^2)$, que no diferenciable en $y=0$. Se deja como ejercicio representar esa curva y comprobar lo dicho anteriormente.)

En resumen, la existencia de derivadas parciales en un punto no garantiza la diferenciabilidad (ni la continuidad) de la función en dicho punto. Sólo para el caso de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ se tiene la equivalencia. En general, ser diferenciable en un punto significa tener derivadas

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

parciales en ese punto y *además* que esas derivadas parciales cumplan la condición que aparece en la definición de función diferenciable: definen una función lineal que hace que cierto límite sea cero. Esto obliga a que ese límite es cero para las direcciones rectas (existen las derivadas direccionales) y se obtiene una relación entre esas derivadas direccionales y las derivadas parciales.

El siguiente resultado da una condición suficiente para ser diferenciable. La mayoría de las funciones elementales, sus relaciones entre ellas, como suma, resta, composición,... verifican estas hipótesis.

Teorema. *Si f es una función continua y sus derivadas parciales existen y son continuas en un conjunto abierto A entonces f es diferenciable en cada punto de A.*

Se llaman funciones Gateaux diferenciables a aquellas que tienen derivadas direccionales en todas las direcciones y que además verifican

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = u_1 D_1 f(\mathbf{a}) + u_2 D_2 f(\mathbf{a}) + \ldots + u_n D_n f(\mathbf{a})$$

o, para el caso de funciones escalares, también se puede escribir

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = \nabla f(a) \cdot \mathbf{u}$$

para todo vector **u** normalizado. Por tanto, toda función diferenciable lo es también en el sentido de Gateaux.

La situación general para una función f es (las implicaciones son todas estrictas)

Derivadas parciales continuas	$\Longrightarrow$	Fréchet diferenciable	$\Longrightarrow$	Gateaux diferenciable
		$\Downarrow$		$\Downarrow$
		Continua		Existen las derivadas parciales

Hay funciones no diferenciables que son diferenciables en el sentido de Gateaux. Por ejemplo, $f : B(0,1) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, donde

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{(x^2+y^2)^{3/2}}{|x| + y^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

es continua y Gateaux diferenciable en $(0,0)$ pero no es diferenciable en dicho punto.

La función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

no es continua, y por tanto no es Fréchet diferenciable, en $(0,0)$. Las derivadas direccionales son todas iguales a 0 y la función es Gateaux diferenciable en $(0,0)$.

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Ya se ha visto algún ejemplo de función no continua en $(0,0)$ que sí tiene derivadas parciales en dicho punto. Luego no hay implicación, en ningún sentido, entre ser continua y tener derivadas parciales.

Unas notas sobre aplicaciones lineales

1. Sea $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal en el espacio normado E. Son equivalentes

- **a)** f es continuo,
- **b)** $N(f)$ es cerrado.

La demostración a) $\Rightarrow$ b) es trivial: $N(f) = f^{-1}\{0\}$.

Para ver b) $\Rightarrow$ a), se considera $N(f)$ cerrado. Por tanto $N(f)^c$ es abierto y no vacío (salvo el caso trivial $f = 0$.) Sea $x_0 \in N(f)^c$, y se supone $f(x_0) > 0$ (el caso $f(x_0)$ es idéntico). Se tiene que existe $B(x_0, r) \subset N(f)^c$ y por tanto $f(x) > 0$ para todo x en dicha bola. Esto es así porque si $f(x_1) < 0$ para algún $x_1 \in B(x_0, r)$, entonces para $t = f(x_0)/(f(x_0) - f(x_1)) \in [0,1]$, el elemento $x_t = (1-t)x_0 + tx_1 \in B(x_0, r)$ y cumple $f(x_t) = 0$, y no puede ocurrir.

Por tanto $f(x_0 - rz) > 0$ para $z \in B(0,1)$, y así f es continuo: $|f(x)| \leq \dfrac{f(x_0)}{r}\|x\|$ para $x \in E$.

2. Sea $\varphi : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal entre espacios normados. Se tienen los siguientes resultados (que son independientes de la elección de las normas en E y F):

a) Si existe $L = \lim_{z\to 0} \dfrac{\varphi(z)}{\|z\|}$, entonces $L = 0$ y $\varphi = 0$.

Demostración. Sea $z \in E$ no nulo. Se tiene

$$L = \lim_{t\to 0^+} \frac{\varphi(tz)}{\|tz\|} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\varphi(-tz)}{\|-tz\|} = -L.$$

Por tanto $L = 0$. De aquí se sigue además que

$$0 = \lim_{t\to 0^+} \frac{\varphi(tz)}{\|tz\|} = \frac{\varphi(z)}{\|z\|},$$

y se concluye que $\varphi = 0$. □

b) Consecuencia de a). Si φ es lineal y $\varphi \neq 0$, entonces no existe $\lim_{z\to 0} \dfrac{\varphi(z)}{\|z\|}$.

Nótese que si φ fuese continua entonces $\|\varphi(z)\| \leq M\|z\|$ y todos los cocientes del límite anterior estarían acotados.

Ejemplo. La función $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $\varphi(x) = x$ es lineal. Por tanto el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$$

no puede existir.

Ejemplo. La función $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ con $\varphi(x,y) = x + y$ es lineal. Se sigue entonces que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{|x|+|y|}$$

no existen.

En general, para $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ con $\varphi(x, y, \dots) = ax + by + \dots$ no existe el límite

$$\lim_{(x,y,\dots)\to(0,0,\dots)} \frac{ax + by + \dots}{\|(x, y, \dots)\|}.$$

Esto lo dicen los resultados anteriores, aunque puede hacerse directamente: de existir el límite también existiría para $x \to 0$ y las demás variables $y = z = \dots = 0$. Pero en ese caso se tendría la existencia del límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{ax}{\|(x, 0, 0, \dots)\|} = \lim_{x\to 0} \frac{ax}{|x| \cdot \|e_1\|},$$

que es imposible, salvo $a = 0$.