Funciones de varias variables

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

En este tema se van a tratar funciones de dos variables $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como $F(x,y)=x+y^2$, y funciones de tres variables $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ como $F(x,y,z)=xy+e^z$. Para estos tipos de funciones se estudiará (aunque no en este orden forzosamente)

a) qué son y cómo se representan
b) límites y continuidad
c) derivadas y aplicaciones
d) integrales y aplicaciones.

Las expresiones con varias variables, como por ejemplo $x+y^2$, suelen escribirse indicando qué función se está utilizando: no es lo mismo $F(x,y)=x+ay^2$ que $F(x,y,a)=x+ay^2$. La primera es una función de dos variables y la segunda es de tres variables.

Se define la *derivada parcial* con respecto a una de las variables como el resultado de derivar considerando que esa variable es la única y las demás son constantes. Por ejemplo, la derivada parcial con respecto a x es el resultado de derivar como si esa fuese la única variable y las demás son constantes. Se utilizará $\partial F/\partial x$ para esa derivada parcial.

$$F(x,y,z)=xy+z^2 \quad \begin{array}{l} \nearrow \ \dfrac{\partial F}{\partial x}=y \\ \to \ \dfrac{\partial F}{\partial y}=x \\ \searrow \ \dfrac{\partial F}{\partial z}=2z \end{array}$$

Ejemplo: tabla de derivadas parciales

expresión	$\partial/\partial x$	$\partial/\partial y$	$\partial/\partial z$
$\dfrac{x}{y}=xy^{-1}$	y^{-1}	$x(-1)y^{-2}=-xy^{-2}$	0
xy^2z^3	y^2z^3	$x2yz^3=2xyz^3$	$xy^23z^2=3xy^2z^2$
$x\operatorname{sen}(yz^2)$	$\operatorname{sen}(yz^2)$	$xz^2\cos(yz^2)$	$2xyz\cos(yz^2)$

Para una función de varias variables $F(x,y,\ldots)$ se llama *gradiente* a

$$\nabla F=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\ldots\right).$$

Se suele decir que ∇F es el gradiente de la función *potencial* F.

Ejemplo. Para calcular el gradiente de una función se hacen las derivadas parciales, escritas en orden una detrás de otra.

$$\begin{array}{lcl} F(x,y)=x^2+y^2 & \longrightarrow & \nabla F=(2x,2y) \\ F(x,y)=x & \longrightarrow & \nabla F=(1,0) \\ F(x,y)=\boxed{\quad ? \quad} & \longleftarrow & \nabla F=(1,1) \\ F(x,y)=\boxed{\quad ? \quad} & \longleftarrow & \nabla F=(y,0) \end{array}$$

El proceso inverso, calcular el potencial, si existe, se verá más adelante.

Las *derivadas parciales de orden superior* (de orden 2 en este caso) son

$$F(x,y) \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \end{cases} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{cases} \end{cases}$$

Ejemplo:
Las cuatro derivadas parciales de orden 2 de la función

$$F(x,y) = \frac{x}{y}$$

son

$$F(x,y) = \frac{x}{y} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = y^{-1} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = -y^{-2} \end{cases} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = -xy^{-2} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -y^{-2} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2xy^{-3} \end{cases} \end{cases}$$

Una función de dos variables tiene dos derivadas parciales y cuatro derivadas parciales de orden 2.
Una función de tres variables tiene tres derivadas parciales y nueve derivadas parciales de orden 2.
También existen otras derivadas parciales de orden superior, si $F(x,y,z) = x + yz^2$, la expresión

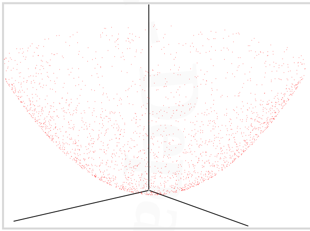
$$\frac{\partial^4 F}{\partial x \partial z \partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial y}(2yz)\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial z}2z\right) = \frac{\partial}{\partial x}2 = 0$$

es una derivada parcial de orden 4.

Gráficas y curvas de nivel

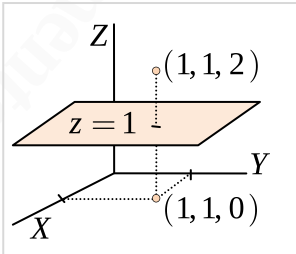
Una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de una variable tiene su gráfica $y=f(x)$ en el plano $\mathbb{R}^2$. Una función de dos variables $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tiene su gráfica $z=F(x,y)$ en el espacio $\mathbb{R}^3$. Las funciones de tres o más variables tienen gráficas que no se pueden dibujar.

Para dibujar la gráfica $y=f(x)$ de una función de una variable se van dando valores a la variable x, se obtienen los valores correspondientes de y obteniendo una tabla de valores, que al dibujarlos van enseñando cómo es la gráfica. Además existen otras herramientas, como el cálculo de los puntos de corte con los ejes, asíntotas, máximos y mínimos,…



Para dibujar la gráfica $z=F(x,y)$ de una función de dos variables se debería proceder igual, solo que dibujar en el espacio colocando puntos de una tabla de valores no da casi ningún resultado, como se puede ver en la gráfica de la derecha.

Para hacer el dibujo de la gráfica se suele utilizar el método en el que se calculan y dibujan las *curvas de nivel*. Este método consiste en dar cortes horizontales a la gráfica y a partir de esos cortes se reconstruye la gráfica[1].



Conviene recordar cómo se dibujan objetos en el espacio $\mathbb{R}^3$, como los elementos que se han colocado en el dibujo de la derecha: los puntos $(1,1,2)$ y $(1,1,0)$ y el plano $z=1$, que es paralelo al plano XY y cuya ecuación es $z=0$.

Ejemplo: gráfica de $f(x,y)=x^2+y^2$.

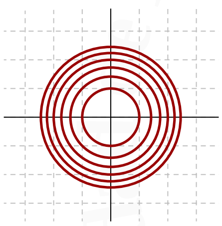
Hacer cortes de la gráfica con planos horizontales es hacer cortes de la gráfica $z=x^2+y^2$ con planos $z=r$ donde r va variando según sea la altura del corte:

$$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ z=r \end{cases}$$

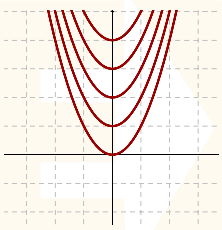
dan como resultado circunferencias $x^2+y^2=r$ centradas en el origen de radio $\sqrt{r}$. Si se dan cortes con planos como el plano XZ o paralelos, se obtienen curvas

$$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ y=r \end{cases}$$

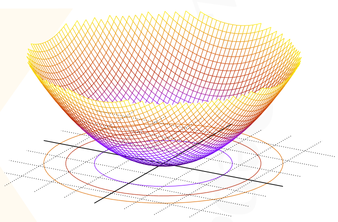
que son parábolas $z=x^2+r^2$.



Cortes con planos horizontales



Cortes con planos paralelos al XZ



Gráfica de la función $f(x,y)=x^2+y^2$ con algunas curvas de nivel

Esta gráfica se llama *paraboloide de revolución*. Es la forma que tienen las antenas parabólicas, y tiene una propiedad muy interesante.

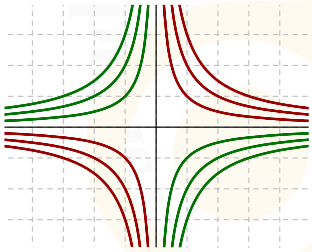
Gráficas y curvas de nivel

Ejemplo: gráfica de $f(x,y) = xy$.

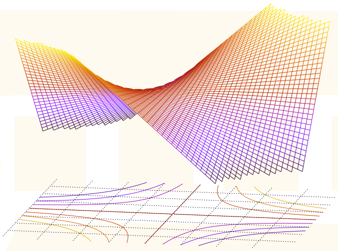
Los cortes con planos paralelos al suelo (se llama así al plano de ecuación $z=0$) dan como resultado las curvas

$$\begin{cases} z = xy \\ z = r \end{cases}$$

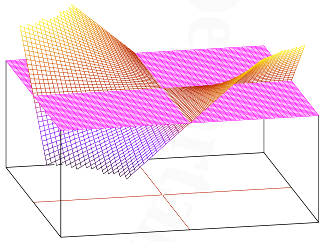
que son hipérbolas equiláteras, y están dibujadas más abajo.



Curvas de nivel



Gráfica de la función y curvas de nivel



Gráfica de la función y plano $z=0$

[1] Ver por ejemplo http://es.wikipedia.org/wiki/Isolínea

Derivadas parciales, gradientes y potenciales

Para una función de varias variables $F(x,y,\ldots)$ se llama derivada parcial con respecto a x a

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,\ldots)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h,y,\ldots)-F(x,y,\ldots)}{h}$$

siempre que este límite exista. Análogamente se define la derivada parcial con respecto a y como

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,\ldots)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x,y+h,\ldots)-F(x,y,\ldots)}{h}.$$

En el caso de una función $f(x)$ de una sola variable la única derivada parcial se llama derivada

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x)=\frac{df}{dx}(x)=f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Las propiedades de las derivadas parciales con respecto a las operaciones habituales de suma y resta, producto y cociente, regla de la cadena,... son idénticas a las propiedades de las derivadas de funciones de una variable:

$$\frac{\partial(F\pm G)}{\partial z}=\frac{\partial F}{\partial z}\pm\frac{\partial G}{\partial z}$$

$$\frac{\partial(F\cdot G)}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial y}G+F\frac{\partial G}{\partial y}$$

$$\frac{\partial(F/G)}{\partial x}=\frac{\frac{\partial F}{\partial x}G-F\frac{\partial G}{\partial x}}{G^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(F\circ G(x,y,\ldots))=\frac{\partial}{\partial y}(F(G(x,y,\ldots)))=\frac{\partial F}{\partial y}(G(x,y,\ldots))\cdot\frac{\partial G}{\partial y}(x,y,\ldots)$$

Para funciones de varias variables, el gradiente es una función vectorial

Función (potencial)		Gradiente
$f(x,y)=xy$	$\longrightarrow$	$\nabla f(x,y)=(y,x)$
no hay	$\longleftarrow$	$(y,0)$
$f(x,y)=xy^2$	$\longrightarrow$	$\nabla f(x,y)=\left(y^2,2xy\right)$
$f(x,y)=x+y+16$	$\longleftarrow$	$\nabla f(x,y)=(1,1)$

Ya no es tan sencillo el proceso potencial $\to$ gradiente y gradiente $\to$ potencial. El primero consiste en hacer las derivadas parciales, pero el segundo no es tan simple. Incluso hay expresiones que no tienen potencial.

Ejemplo: para calcular el potencial de la expresión $(0,2y)$ hay que encontrar alguna función $f(x,y)$ que cumpla

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=2y$$

De la primera ecuación se tiene que la función debe ser $f(x,y)=C+\varphi(y)$, es decir, una constante más una expresión que no contenga a la variable x. Utilizando esto y la segunda igualdad de más arriba se sigue que

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=2y=\varphi'(y)$$

y así la función buscada es $f(x,y)=C+y^2$.

Ejemplo: para calcular el potencial de la expresión $(y,0)$ se trata de encontrar alguna función $f(x,y)$ que cumpla

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0$$

De la primera ecuación se tiene que la función debe ser $f(x,y) = xy + \varphi(y)$. Utilizando esto y la segunda igualdad de más arriba se sigue que

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 = x + \varphi'(y)$$

que es imposible (la función φ sólo depende de la variable y). Así pues, la expresión $(y,0)$ no tiene potencial, es decir, no es un gradiente.

Existe una herramienta que permite saber de forma rápida si una expresión tiene o no potencial, es decir, para saber si es o no un gradiente. Esta herramienta se llama teorema de Schwarz y en ella aparecen las derivadas de orden superior.

Para una función F de varias variables, las derivadas parciales son funciones que pueden volver a derivarse, y se obtienen derivadas de orden superior, que suelen escribirse como

$$\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x} \quad \frac{\partial F}{\partial x}}_{\substack{\text{derivadas parciales} \\ \text{(de orden 1)}}} \quad \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}_{\substack{\text{derivadas parciales} \\ \text{de orden 2}}} \quad \cdots$$

(hay derivadas de órdenes 3, 4,...)

Teorema de Schwarz. *Si una función $F(x,y,\ldots)$ tiene derivadas cruzadas de orden 2 y son continuas entonces coinciden:*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

(estas derivadas parciales de orden 2 se llaman derivadas parciales cruzadas, y el teorema dice que coinciden en la práctica totalidad de funciones que se utilizan)

Ejemplo: para la función $F(x,y) = x \operatorname{sen} xy$ se obtienen las derivadas parciales siguientes (las derivadas parciales cruzadas se han resaltado, y coinciden tal y como dice el teorema de Schwarz)

$$F(x,y) = x \operatorname{sen} xy \to \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \operatorname{sen} xy + xy \cos xy \to \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2y \cos xy - xy^2 \operatorname{sen} xy \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = 2x \cos xy - x^2 y \operatorname{sen} xy \end{cases} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = x^2 \cos xy \to \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 2x \cos xy - x^2 y \operatorname{sen} xy \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -x^3 \operatorname{sen} xy \end{cases} \end{cases}$$

El teorema de Schwarz también puede aplicarse para derivadas de órdenes 3, 4, ... La regla es que el proceso de derivación parcial es conmutativo (para las funciones cuyas parciales sean continuas).

Ejemplo: para la función $F(x,y) = x + yz^3$ se obtiene, haciendo cambios de dos en dos

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x \partial z \partial y \partial z} = \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y \partial z^2} = \frac{\partial^4 F}{\partial y \partial x \partial z^2} = \frac{\partial^4 F}{\partial y \partial z^2 \partial x} = 0$$

Otra aplicación del teorema de Schwarz es poder decidir si una expresión es o no un gradiente, es decir, si tiene o no potencial. Para ello hay que darse cuenta que si se parte de una función potencial y se calcula su gradiente,

$$\begin{array}{ccccccc} F(x,y,\dots) & \longrightarrow & \nabla F = & \Big(\dfrac{\partial F}{\partial x} & , & \dfrac{\partial F}{\partial y} \Big) \\ & & & \frac{\partial}{\partial y}\downarrow & & \downarrow\frac{\partial}{\partial x} \\ & & & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & = & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{array}$$

al hacer las derivadas parciales cruzadas debe salir el mismo resultado. Esta propiedad la tienen las expresiones que son gradientes de alguna función. Por ejemplo, para saber si (y,x) es un gradiente basta comprobar cómo son las derivadas parciales cruzadas:

$$\begin{array}{ccc} (y & , & x) \\ \frac{\partial}{\partial y}\downarrow & & \downarrow\frac{\partial}{\partial x} \\ 1 & = & 1 \end{array}$$

Se trata entonces de una expresión que sí es un gradiente (después de saber que es un gradiente se puede calcular el potencial). En cambio, la expresión $(y,0)$ no es un gradiente, pues

$$\begin{array}{ccc} (y & , & 0) \\ \frac{\partial}{\partial y}\downarrow & & \downarrow\frac{\partial}{\partial x} \\ 1 & \neq & 0 \end{array}$$

En este caso ya no hay que continuar los cálculos de un posible potencial, ya que no existe.

Esta consecuencia del teorema de Schwarz se puede resumir así:

(en el caso de dos variables) Para que una expresión (P,Q) sea un gradiente se tiene que cumplir

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

(en el caso de tres variables) Para que una expresión (P,Q,R) sea un gradiente se tienen que cumplir las tres condiciones

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

Ejemplo: para saber si la expresión $(y^2, 2xy)$ basta hacer las derivadas cruzadas,

$$\begin{array}{ccc} (y^2 & , & 2xy) \\ \frac{\partial}{\partial y}\downarrow & & \downarrow\frac{\partial}{\partial x} \\ 2y & = & 2y \end{array}$$

y, como son iguales, se tiene que sí hay función potencial. Esta función se calcula a partir de

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x} = y^2 \quad \longrightarrow \quad F(x,y) = xy^2 + \varphi(y) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow \frac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2xy \quad \longleftarrow \quad 2xy + \varphi'(y) \end{array}\right.$$

y se obtiene $F(x,y) = xy^2$.

Ejemplo: para saber si la expresión $\left(1, z^2, 2yz\right)$ hay que hacer todas las comparaciones por parejas:

$$\frac{\partial 1}{\partial y} = \frac{\partial z^2}{\partial x}$$
$$\frac{\partial 1}{\partial z} = \frac{\partial 2yz}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z^2}{\partial z} = \frac{\partial 2yz}{\partial y}$$

Como las tres coinciden (si hubiera fallado alguna la expresión no sería un gradiente) existe una función potencial. Esa función se puede calcular mediante las ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 1 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = z^2 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 2yz \end{array}\right.$$

y así $F(x,y,z) = x + yz^2$.

Un ejemplo sobre el teorema de Schwarz–Clairaut

Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida mediante

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(y^2-x^2)}{y^2+x^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq 0\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=0\end{cases}$$

En cada punto $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ existen las derivadas parciales $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, pero

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0).$$

Esto no contradice el teorema de Schwarz–Clairaut. Lo que ocurre es que no se cumple la continuidad de las derivadas segundas en $(0,0)$. En cualquier otro punto $(x,y)\neq(0,0)$ las derivadas parciales cruzadas sí coinciden.

Los cálculos son sencillos. Por una parte,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=0.$$

Luego, las funciones derivadas primeras son

$$f_x(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y\left(x^2-y^2\right)}{y^2+x^2}+\dfrac{2x^2y}{y^2+x^2}-\dfrac{2x^2y\left(x^2-y^2\right)}{\left(y^2+x^2\right)^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

y

$$f_y(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\left(x^2-y^2\right)}{y^2+x^2}-\dfrac{2xy^2}{y^2+x^2}-\dfrac{2xy^2\left(x^2-y^2\right)}{\left(y^2+x^2\right)^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

Las derivadas segundas cruzadas en $(0,0)$ son

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f_y(t,0)-f_y(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^3}{t^3}=1$$

y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f_x(0,t)-f_x(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-t^3}{t^3}=-1.$$

Ejemplos de derivadas parciales

$$f(x,y) = \cos\left(x \operatorname{sen}\left(y\right)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\operatorname{sen}\left(x \operatorname{sen}\left(y\right)\right) \operatorname{sen}\left(y\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x \operatorname{sen}\left(x \operatorname{sen}\left(y\right)\right) \cos\left(y\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -\operatorname{sen}\left(y\right)^2 \cos\left(x \operatorname{sen}\left(y\right)\right)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -x \operatorname{sen}\left(y\right) \cos\left(x \operatorname{sen}\left(y\right)\right) \cos\left(y\right) - \operatorname{sen}\left(x \operatorname{sen}\left(y\right)\right) \cos\left(y\right)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -x \operatorname{sen}\left(y\right) \cos\left(x \operatorname{sen}\left(y\right)\right) \cos\left(y\right) - \operatorname{sen}\left(x \operatorname{sen}\left(y\right)\right) \cos\left(y\right)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -x^2 \cos\left(x \operatorname{sen}\left(y\right)\right) \cos\left(y\right)^2 + x \operatorname{sen}\left(x \operatorname{sen}\left(y\right)\right) \operatorname{sen}\left(y\right)$$

$$f(x,y) = xy^3 + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^3$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3\,xy^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3\,y^2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3\,y^2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6\,xy$$

$$f(x,y) = \frac{\cos\left(x\right)}{\operatorname{sen}\left(y\right)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\operatorname{sen}\left(x\right)}{\operatorname{sen}\left(y\right)}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\cos\left(x\right)\cos\left(y\right)}{\operatorname{sen}\left(y\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{\cos\left(x\right)}{\operatorname{sen}\left(y\right)}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\operatorname{sen}\left(x\right)\cos\left(y\right)}{\operatorname{sen}\left(y\right)^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\operatorname{sen}\left(x\right)\cos\left(y\right)}{\operatorname{sen}\left(y\right)^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\cos\left(x\right)}{\operatorname{sen}\left(y\right)} + 2\,\frac{\cos\left(x\right)\cos\left(y\right)^2}{\operatorname{sen}\left(y\right)^3}$$

$$f(x,y) = \frac{(x-y)^3}{x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2\,\frac{(x-y)^3}{x^3} + 3\,\frac{(x-y)^2}{x^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -3\,\frac{(x-y)^2}{x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6\,\frac{(x-y)^3}{x^4} - 12\,\frac{(x-y)^2}{x^3} + 6\,\frac{(x-y)}{x^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6\,\frac{(x-y)^2}{x^3} - 6\,\frac{(x-y)}{x^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6\,\frac{(x-y)^2}{x^3} - 6\,\frac{(x-y)}{x^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6\,\frac{(x-y)}{x^2}$$

$$f(x,y) = ye^{x-y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{x-y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -ye^{x-y} + e^{x-y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = ye^{x-y}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -ye^{x-y} + e^{x-y}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -ye^{x-y} + e^{x-y}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = ye^{x-y} - 2\,e^{x-y}$$

$$f(x,y) = x^2 2^{\frac{x}{y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2 2^{\frac{x}{y}} \log(2)}{y} + 2\,x 2^{\frac{x}{y}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x^3 2^{\frac{x}{y}} \log(2)}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\,2^{\frac{x}{y}} + \frac{x^2 2^{\frac{x}{y}} \log(2)^2}{y^2} + 4\,\frac{x 2^{\frac{x}{y}} \log(2)}{y}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\frac{x^3 2^{\frac{x}{y}} \log(2)^2}{y^3} - 3\,\frac{x^2 2^{\frac{x}{y}} \log(2)}{y^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{x^3 2^{\frac{x}{y}} \log(2)^2}{y^3} - 3\,\frac{x^2 2^{\frac{x}{y}} \log(2)}{y^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{x^4 2^{\frac{x}{y}} \log(2)^2}{y^4} + 2\,\frac{x^3 2^{\frac{x}{y}} \log(2)}{y^3}$$

$$f(x,y) = \cos(y+\cos(x))$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \operatorname{sen}(y+\cos(x))\operatorname{sen}(x)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\operatorname{sen}(y+\cos(x))$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\operatorname{sen}(x)^2\cos(y+\cos(x)) + \operatorname{sen}(y+\cos(x))\cos(x)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \operatorname{sen}(x)\cos(y+\cos(x))$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \operatorname{sen}(x)\cos(y+\cos(x))$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\cos(y+\cos(x))$$

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x-y}}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x-y}y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\sqrt{x-y}}{y^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x-y}y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{4}\frac{1}{(x-y)^{\left(\frac{3}{2}\right)}y}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x-y}y^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{(x-y)^{\left(\frac{3}{2}\right)}y}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x-y}y^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{(x-y)^{\left(\frac{3}{2}\right)}y}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\frac{\sqrt{x-y}}{y^3} + \frac{1}{\sqrt{x-y}y^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{(x-y)^{\left(\frac{3}{2}\right)}y}$$

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x+y}}{(x-y)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{1}{(x-y)\sqrt{x+y}} - \frac{\sqrt{x+y}}{(x-y)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{1}{(x-y)\sqrt{x+y}} + \frac{\sqrt{x+y}}{(x-y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{4}\frac{1}{(x-y)(x+y)^{\left(\frac{3}{2}\right)}} - \frac{1}{(x-y)^2\sqrt{x+y}} + 2\frac{\sqrt{x+y}}{(x-y)^3}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = -\frac{1}{4}\frac{1}{(x-y)(x+y)^{\left(\frac{3}{2}\right)}} - 2\frac{\sqrt{x+y}}{(x-y)^3}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{4}\frac{1}{(x-y)(x+y)^{\left(\frac{3}{2}\right)}} + \frac{1}{(x-y)^2\sqrt{x+y}} + 2\frac{\sqrt{x+y}}{(x-y)^3}$$

En este último ejemplo se ha omitido una derivada parcial cruzada sólo para ahorrar espacio, aunque deben coincidir por el teorema de Schwarz, tal y como se indica

$$f(x,y) = x\cos(y) + y\,\mathrm{sen}(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\cos(x) + \cos(y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x\,\mathrm{sen}(y) + \mathrm{sen}(x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -y\,\mathrm{sen}(x)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = -\mathrm{sen}(y) + \cos(x)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = -\mathrm{sen}(y) + \cos(x)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x\cos(y)$$

$$f(x,y) = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x^2} + \frac{1}{y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2\,\frac{y}{x^3}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\,\frac{x}{y^3}$$

$$f(x,y) = (y-1)x + (x-2)\sqrt{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + \sqrt{y} - 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{1}{2}\,\frac{(x-2)}{\sqrt{y}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{y}} + 1$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{y}} + 1$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{4}\,\frac{(x-2)}{y^{\left(\frac{3}{2}\right)}}$$

Estos ejemplos se han creado con SAGE (www.sagemath.org). Otra forma de hacer derivadas parciales es con WxMAXIMA: cortando y pegando hay que crear un fichero `Derivadas.wxm` y abrirlo desde WxMAXIMA.

```
/* [wxMaxima batch file version 1] [ DO NOT EDIT BY HAND! ]*/
/* [ Created with wxMaxima version 0.8.3 ] */

/* [wxMaxima: input   start ] */
f:x^2+y^3;
/* [wxMaxima: input   end   ] */

/* [wxMaxima: input   start ] */
'derivative(f,x)=derivative(f,x);'derivative(f,y)=derivative(f,y);
/* [wxMaxima: input   end   ] */

/* [wxMaxima: input   start ] */
'derivative('derivative(f,x),x)=derivative(derivative(f,x),x);
/* [wxMaxima: input   end   ] */

/* [wxMaxima: input   start ] */
'derivative('derivative(f,x),y)=derivative(derivative(f,x),y);
/* [wxMaxima: input   end   ] */

/* Maxima can't load/batch files which end with a comment! */
"Created with wxMaxima"$
```

El resultado en el programa WxMAXIMA debe ser similar a esto:

(%i6) `f:x^2+y^3;`

(%o6) $$y^3 + x^2$$

(%i2) `'derivative(f,x)=derivative(f,x);'derivative(f,y)=derivative(f,y);`

(%o2) $$\frac{d}{d\,x}\left(y^3 + x^2\right) = 2\,x$$

(%o3) $$\frac{d}{d\,y}\left(y^3 + x^2\right) = 3\,y^2$$

(%i4) `'derivative('derivative(f,x),x)=derivative(derivative(f,x),x);`

(%o4) $$\frac{d^2}{d\,x^2}\left(y^3 + x^2\right) = 2$$

(%i5) `'derivative('derivative(f,x),y)=derivative(derivative(f,x),y);`

(%o5) $$\frac{d^2}{d\,x\,d\,y}\left(y^3 + x^2\right) = 0$$

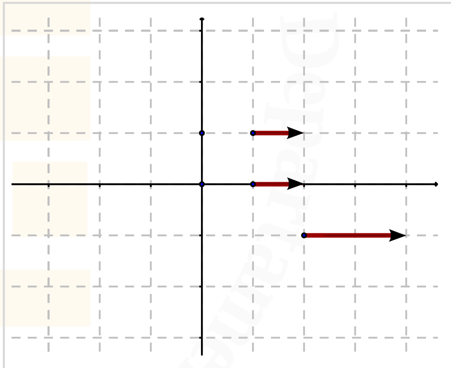
Sólo se han puesto dos derivadas parciales de orden 2. Con las evidentes modificaciones se hacen las demás

El gradiente como campo de vectores

Una función de dos variables $F(x,y)$ se puede representar dibujando su gráfica $z=F(x,y)$ en el espacio $\mathbb{R}^3$. Su gradiente es una función vectorial (tiene dos componentes) y para representarla se suele dibujar el campo de vectores asociado. Esta técnica permite hacerse una idea de cómo es la función y qué relación tiene con su función potencial.

Para dibujar una función vectorial $G(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$ con dos componentes, en cada punto (x,y) del plano se dibuja el vector $G(x,y)$. Se consigue así un campo vectorial. Por ejemplo, para la función $G(x,y)=(x,0)$, hay que dibujar lo siguiente:

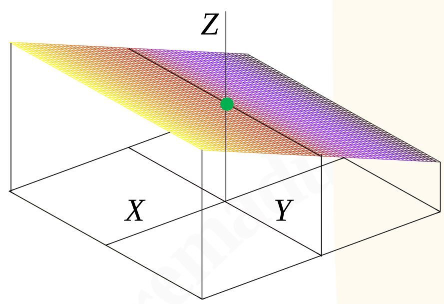
en el punto $(0,0)$ se dibuja el vector $G(0,0)=(0,0)$,
en el punto $(1,0)$ se dibuja el vector $G(1,0)=(1,0)$,
en el punto $(0,1)$ se dibuja el vector $G(0,1)=(0,0)$,
en el punto $(1,1)$ se dibuja el vector $G(1,1)=(1,0)$,
en el punto $(2,-1)$ se dibuja $G(2,-1)=(2,0),\ldots$

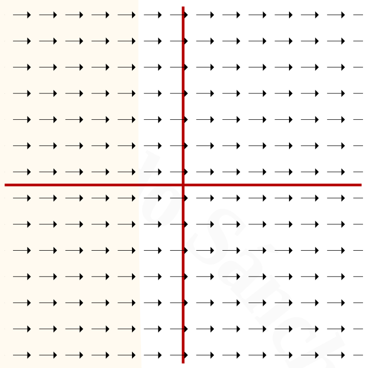


Dibujando varios vectores va apareciendo qué aspecto tiene el campo de vectores asociado a la función. Esta técnica no tiene demasiada dificultad.

En el caso de una función $F(x,y)$ y su gradiente ∇F se pueden representar la gráfica de la primera y el campo de vectores de la segunda. ¿Qué relación puede haber entre ambas representaciones? Para tratar de responder a esta pregunta se van a representar algunas funciones y sus gradientes.

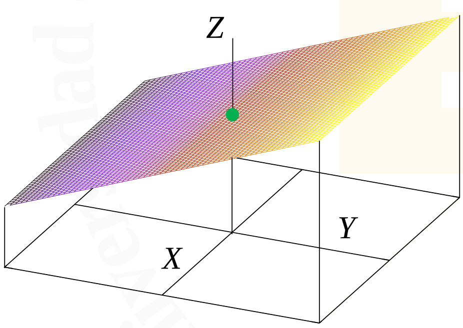
Ejemplo. La función $F(x,y)=x$ tiene como gráfica un plano, de ecuación $z=x$. Su gráfica

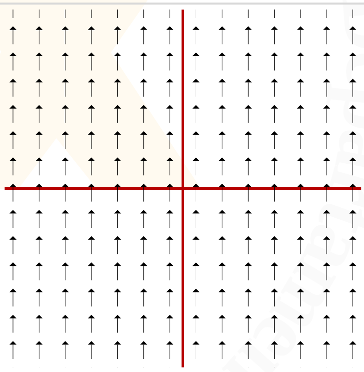




puede verse a la izquierda. Su gradiente es la función $\nabla F(x,y)=(1,0)$, cuyo campo de vectores es muy sencillo: todos los vectores apuntan hacia la derecha y tienen módulo igual a 1.

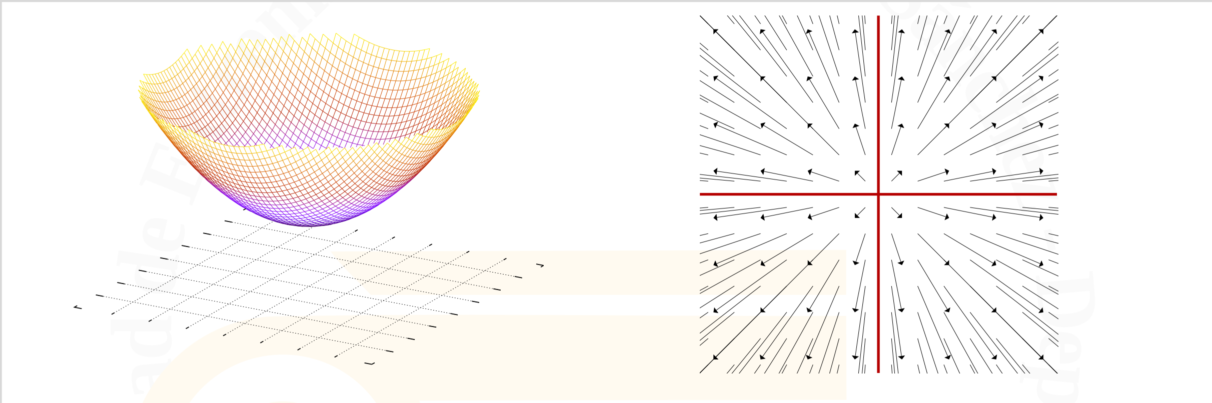
Ejemplo. La función $F(x,y)=y$ tiene como gráfica un plano, $z=y$, representada a la

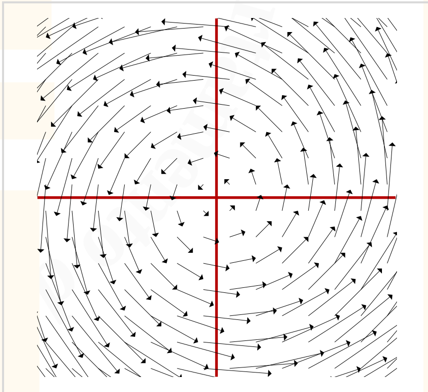




izquierda y su gradiente $\nabla F(x,y)=(0,1)$ es un campo de vectores que está dibujado a la derecha. Los vectores apuntan hacia arriba (en la dirección positiva del eje Y) y tienen módulo igual a 1.

Ejemplo. Para la función $F(x,y)=x^2+y^2$ y su gradiente $\nabla F(x,y)=(2x,2y)$ se obtienen





También se pueden representar campos de vectores de funciones que no tienen potencial, como $G(x,y)=(-y,x)$. Esta función no tiene potencial ya que las parciales cruzadas no coinciden. Aún así, se puede representar como un campo vectorial, como se ve en el gráfico de la derecha.

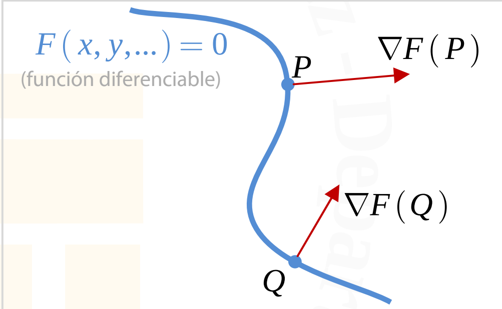
Máxima ganancia. Una propiedad que tiene el vector gradiente es la siguiente: en cada punto P el vector gradiente $\nabla F(P)$ indica la dirección en la cual la función aumenta más rápidamente de valor. La dirección contraria $-\nabla F(P)$ indica la dirección de máxima pérdida. La dirección perpendicular indica aquella en la que no hay ganancia ni pérdida.

Ejemplo: un objeto está situado en el punto $P(1,2)$ de una placa metálica en la que en cada punto (x,y) de la placa la temperatura viene dada por $T(x,y)=100-x+y^2$. El objeto está a una temperatura de $T(1,2)=100-1+2^2=103$. Si quiere ganar temperatura lo antes posible tendrá que seguir la dirección $\nabla T(1,2)=(-1,4)$, ya que $\nabla T(x,y)=(-1,2y)$. Si quiere perder temperatura lo antes posible, la dirección mejor es $-\nabla T(1,2)=(1,-4)$. Una dirección perpendicular $(4,1)$ o $(-4,-1)$ es la que debe seguir para no cambiar su temperatura.
Para un objeto situado en otro punto $Q(3,1)$, cuya temperatura es $T(3,1)=100-3+1^2=98$, la dirección para perder temperatura lo antes posible es $-\nabla T(3,1)=(1,-2)$.

El gradiente como perpendicular

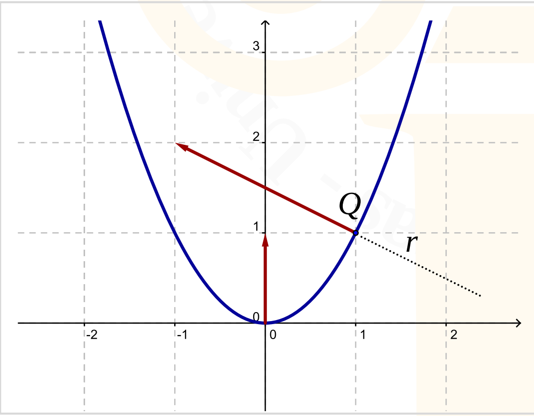
Hay muchos objetos que pueden representarse con una ecuación $F(x,y,...)=0$. Por ejemplo, en el plano $\mathbb{R}^2$ la ecuación $y=x^2$ es una parábola y $3x-2y=1$ es una recta. En el espacio $\mathbb{R}^3$ la ecuación $z=x^2+y^2$ es un paraboloide de revolución y $3x-2y=1$ es un plano. Todos estos objetos están definidos por una función F. Para la primera parábola es $F(x,y)=y-x^2=0$, y el paraboloide es $F(x,y,z)=x^2+y^2-z=0$.

Propiedad fundamental del gradiente. En cada punto P de un objeto $F(x,y,...)=0$ el vector gradiente $\nabla F(P)$ atraviesa al objeto perpendicularmente.



Lógicamente, si se quiere atravesar $F(x,y,...)=0$ perpendicularmente en otro punto Q habrá que tomar el vector $\nabla F(Q)$.

Ejemplo. Para atravesar perpendicularmente la parábola de ecuación $y=x^2$ hay que proceder así:



se escribe el objeto $F(x,y)=y-x^2=0$, cuyo gradiente es $\nabla F(x,y)=(-2x,1)$. En el punto $P(0,0)$ hay que elegir el vector $\nabla F(0,0)=(0,1)$ y en el punto $Q(1,1)$ el vector $\nabla F(1,1)=(-2,1)$, como se muestra en el dibujo de la izquierda.

Este proceso permite incluso calcular las rectas perpendicular y tangente en cada punto. Por ejemplo, en el punto $Q(1,1)$ la recta perpendicular r es aquella que pasa por dicho punto y que tiene como vector director a $(-2,1)$. La recta tangente pasa por ese punto pero su vector es perpendicular al vector $(-2,1)$, es decir, tiene como vector director al vector $(1,2)$. Así, la recta r es

$$\begin{cases} x=1+\lambda(-2) \\ y=1+\lambda(1) \end{cases}$$

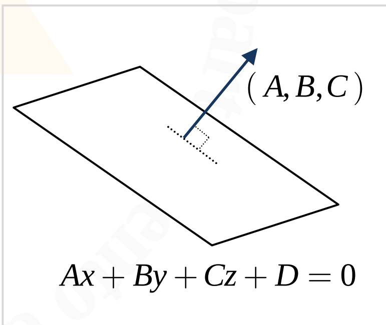
y, despejando λ en ambas ecuaciones, se tiene $x+2y=3$. La recta tangente a la parábola que pasa por el punto Q es

$$\begin{cases} x=1+\lambda(1) \\ y=1+\lambda(2) \end{cases}$$

que se puede escribir como $2x-y=1$.

Ejemplo. Una recta en el plano tiene como ecuación $ax+by+c=0$ y es fácil calcular el vector perpendicular: basta hacer el gradiente de $F(x,y)=ax+by+c$, que es $\nabla F(x,y)=(a,b)$. Por ejemplo, la recta $3x-5y=23$ tiene como vector perpendicular a $(3,-5)$.

Ejemplo. Un plano en el espacio $Ax+By+Cz+D=0$ tiene como vector perpendicular a $\nabla F(x,y,z)=(A,B,C)$ donde $F(x,y,z)=Ax+By+Cz+D$.



Esto permite conocer rápidamente la ecuación de un plano conociendo su vector perpendicular y un punto por el que pasa. Por ejemplo, un plano perpendicular al vector $(3,-4,7)$ tiene como ecuación $3x-4y+7z+D=0$. El valor D se calcula si conocemos un punto del plano. Por ejemplo, si el plano contiene al punto $(1,1,0)$ entonces $3\cdot1-4\cdot1+7\cdot0+D=0$.

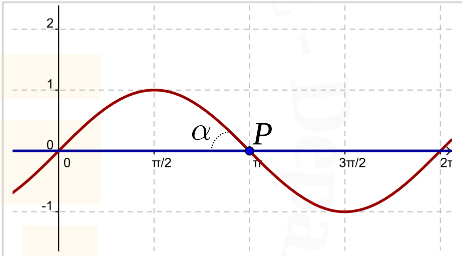
Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura
Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

El gradiente como perpendicular

Esta propiedad de perpendicularidad del vector gradiente permite además conocer el ángulo de corte entre objetos. Para ello sólo hace falta saber la ecuación de cada uno de los objetos y el punto (o los puntos) de corte.

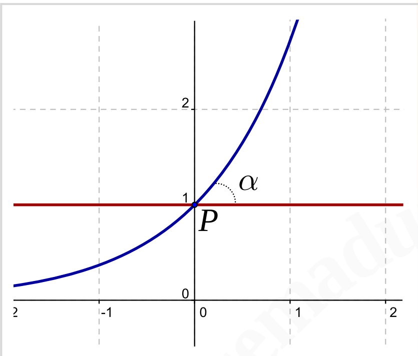
En cada punto de corte P de los objetos $F(x,y,\ldots)=0$ y $G(x,y,\ldots)=0$ el ángulo de corte es el mismo que forman los vectores $\nabla F(P)$ y $\nabla G(P)$.

Ejemplo. La gráfica de la función $\operatorname{sen} x$ y el eje X se cortan en el punto $P(\pi,0)$ formando un ángulo α que se puede calcular. Para ello hay que escribir las ecuaciones de ambos objetos. La gráfica de $\operatorname{sen} x$ tiene como ecuación $y=\operatorname{sen} x$, es decir, $F(x,y)=\operatorname{sen} x-y=0$. El eje X tiene como ecuación $G(x,y)=y=0$.En ese punto de corte, el ángulo que se forma es el ángulo que forman los vectores gradientes en dicho punto. Con lo cual, sólo hay que saber determinar qué vectores son esos. Como $\nabla F(x,y)=(\cos x,-1)$ y $\nabla G(x,y)=(0,1)$, entonces $\nabla F(\pi,0)=(-1,-1)$ y $\nabla G(\pi,0)=(0,1)$ y así



$$\alpha=\measuredangle((-1,-1),(0,1))=\arccos\frac{|(-1)\cdot 0+(-1)\cdot 1|}{|(-1,-1)|\cdot|(0,1)|}=\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}$$

Ejemplo. Calcular el ángulo de corte de la gráfica de la función e^x y la recta $y=1$. Calcular las rectas perpendicular y tangente a la gráfica de e^x en ese punto de corte.



Se trata de calcular el ángulo de corte entre los objetos

$$\begin{cases} F(x,y)=e^x-y=0 \\ G(x,y)=y-1=0 \end{cases}$$

El punto de corte es la solución al sistema

$$\begin{cases} e^x-y=0 \\ \quad y-1=0 \end{cases}$$

es decir, el punto $P(0,1)$. Como

$$\nabla F(x,y)=\left(e^x,-1\right),\quad \nabla G(x,y)=(0,1)$$

se tiene

$$\alpha=\measuredangle((1,-1),(0,1))=\arccos\frac{|1\cdot 0+(-1)\cdot 1|}{|(1,-1)|\cdot|(0,1)|}=\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}$$

La recta perpendicular a $y=e^x$ que pasa por el punto $(0,1)$ es

$$\begin{cases} x=0+\lambda(1) \\ y=1+\lambda(-1) \end{cases}$$

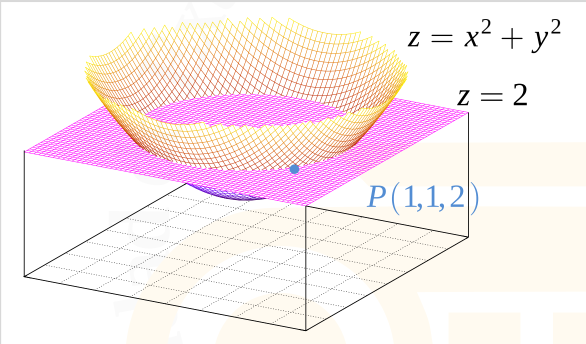
y su ecuación queda como $x+y=1$.
La recta tangente en ese mismo punto es

$$\begin{cases} x=0+\lambda(1) \\ y=1+\lambda(1) \end{cases}$$

es decir, la recta $x-y+1=0$.

El gradiente como perpendicular

Ejemplo. Las superficies $z = x^2 + y^2$ (paraboloide de revolución) y $z = 2$ (plano horizontal a altura 2) se cortan en el punto $P(1,1,2)$. Calcular el ángulo de corte. Determinar en ese punto el plano tangente a la primera superficie.



Para calcular el ángulo de corte sólo hay que ver cuáles son los vectores gradientes. Como las superficies son

$$\begin{cases} F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z = 0 \\ G(x,y,z) = z - 2 = 0 \end{cases}$$

entonces

$$\begin{cases} \nabla F(x,y,z) = (2x, 2y, -1) \\ \nabla G(x,y,z) = (0,0,1) \end{cases}$$

y se trata de calcular el ángulo que forman los vectores gradientes $\nabla F(1,1,2) = (2,2,-1)$ y $\nabla G(1,1,2) = (0,0,1)$, y se obtiene un ángulo

$$\arccos \frac{|(2,2,-1)\cdot(0,0,1)|}{|(2,2,-1)|\cdot|(0,0,1)|} = \arccos\frac{1}{3} \approx 70^\circ$$

El plano tangente a la superficie $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z = 0$ en el punto $P(1,1,2)$ es aquel que es perpendicular al vector gradiente $\nabla F(1,1,2) = (2,2,-1)$ y así la ecuación del plano es

$$2x + 2y - z + D = 0$$

y el valor D se puede calcular pues el punto $P(1,1,2)$ pertenece al plano, y así

$$2\cdot 1 + 2\cdot 1 - 2 + D = 0\,.$$

El plano tangente es

$$2x + 2y - z = 2$$

Puntos extremos: máximos y mínimos

Un punto P es crítico para la función f si $\nabla f(P) = 0$. Son puntos en los que el plano tangente es horizontal, y sólo pueden ser de tres tipos: máximos, mínimos o puntos de silla. Para determinar el tipo de punto crítico que es P se toma

$$M = \begin{pmatrix} A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) & B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P) \\ C = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P) & D = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) \end{pmatrix}$$

con $\det(M) = A \cdot D - B \cdot C = A \cdot D - B^2$. Entonces P es máximo, mínimo o punto de silla según la siguiente tabla:

$\det(M) < 0$		P es un punto de silla
$\det(M) > 0$	$A < 0$	P es un máximo
	$A > 0$	P es un mínimo
$\det(M) = 0$		El criterio no decide: puede ser máx, mín o p. de silla

En la matriz de derivadas parciales de orden 2 se debe cumplir $B = C$ por el teorema de Schwarz. Cuando el criterio no decida, se deben mirar los valores de la función en el punto P y en los puntos próximos para saber si es máximo, mínimo o punto de silla. Por ejemplo, es fácil comprobar que la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ tiene un único punto crítico $P(0,0)$. Sin calcular la matriz de derivadas de orden 2 se sabe que este punto es mínimo, ya que la función siempre es positiva y además $f(P) = 0$ (la función alcanza en P el menor valor posible).

Ejemplo. Para hallar los extremos de $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20$ se plantea el sistema

$$\begin{cases} 4x + 8 = 0 \\ 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

y se obtiene el punto crítico $(-2, 3)$ que es un mínimo.

Ejemplo. Lo mismo para

a) $f(x, y) = y^2 - x^2$
b) $f(x, y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$
c) $f(x, y) = x^2 y^2$

Soluciones.

a) El sistema de ecuaciones de los puntos críticos de $f(x, y) = y^2 - x^2$ es

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -2x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \end{cases}$$

y el único punto es $P(0,0)$. La matriz de derivadas de orden 2 es

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que en el punto $P(0,0)$ es

$$M(P) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como $\det(M(P)) < 0$ se trata de un punto de silla.

b) El sistema de ecuaciones de los puntos críticos de $f(x,y)=-x^3+4xy-2y^2+1$ es

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=-3x^2+4y=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=4x-4y=0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación se sigue que $y=x$, y así la primera ecuación queda $-3x^2+4x=0$. Por tanto $x(-3x+4)=0$. Las soluciones son $P(0,0)$ y $Q(4/3,4/3)$. La matriz de derivadas de orden 2 es

$$M=\begin{pmatrix} -6x & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

En el punto $P(0,0)$ se obtiene

$$M(P)=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es negativo. Se trata de un punto de silla.
En el punto $Q(4/3,4/3)$ la matriz es

$$M(Q)=\begin{pmatrix} -6\dfrac{4}{3} & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Como $\det(M(Q))>0$ y el primer término de la matriz (en rojo) es negativo, el punto Q es un máximo.

c) El sistema de ecuaciones de los puntos críticos de $f(x,y)=x^2y^2$ es

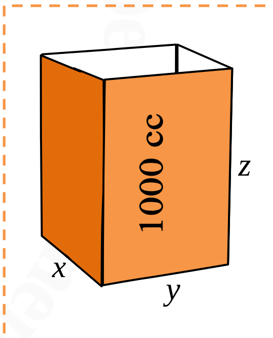
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=2xy^2=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=2x^2y=0 \end{cases}$$

cuyas soluciones son todos los puntos $P(x,y)$ es los que alguna coordenada es cero. Es un conjunto formado por infinitos puntos: son los dos ejes, el eje X y el eje Y del plano. En cada uno de esos puntos el valor de la función es cero. Como la función es positiva en todos los demás puntos, se trata de puntos extremos, ya que son todos mínimos.
La matriz de derivadas de orden 2 es

$$M=\begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{pmatrix}$$

y su determinante es cero es cada punto crítico, por lo que este criterio no decide.

Ejemplo. Calcular las dimensiones de un recipiente como el de la imagen para que tenga la menor superficie lateral.



Se trata de hallar la mínima superficie lateral $xy+2xz+2yz$ sabiendo que $xyz=1000$ es decir, el mínimo de $xy+2000/y+2000/x$. Se calculan las dos derivadas parciales y se igualan a cero, y resulta
$x=y=10\sqrt[3]{2},\quad z=5\sqrt[3]{2}$.
Se trata de un mínimo y se puede comprobar por comparación con otros valores o aplicando el criterio de las derivadas parciales de orden 2.

Problema. Una caja rectangular descansa en el plano XY con uno de sus vértices en el origen. El vértice opuesto está en el plano $6x+4y+3z=24$. Hallar el volumen máximo que puede tener la caja.

Problema. Un fabricante de artículos determina que la ganancia en euros al producir x unidades del producto A e y unidades del producto B viene dada por

$$G(x,y)=8x+10y-0.001\left(x^2+xy+y^2\right)-10000$$

Hallar el nivel de producción para una ganancia o beneficio máximo. ¿Cuál es esa ganancia?

Ejemplo. Para calcular la distancia del punto $(2,0)$ a la hipérbola $xy=1$ hay que encontrar el mínimo de la expresión

$$(x-2)^2+\frac{1}{x^2}=x^2-4x+4+\frac{1}{x^2}$$

Derivando e igualando a cero se obtiene

$$x^4-2x^3-1=0$$

cuya solución (positiva, la negativa no puede ser la que dé un mínimo) es $x=2.10691934\ldots$
El punto buscado de la hipérbola es $x_0=2.10691934\ldots$, $y_0=0{,}4746266\ldots$ y la distancia pedida es

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}((x_0,y_0),(2,0))&=\sqrt{(x_0-2)^2+(y_0-0)^2}\\&=\sqrt{0.10691934\ldots^2+0.4746266\ldots^2}\\&=0{,}48652\ldots\end{aligned}$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Propiedades del gradiente

► El gradiente como dirección de máximo crecimiento

Se llama *derivada direccional* de f en $\mathbf{a}$ según la dirección del vector normalizado $\mathbf{u}$ al límite

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) \;=\; \lim_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{a}+t\mathbf{u})-f(\mathbf{a})}{t}.$$

Si se elige un vector no normalizado entonces hay que tratar con $\mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$. Se puede probar que si f es diferenciable de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, entonces

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) \;=\; \mathbf{u}\cdot\nabla f(\mathbf{a})$$

(se trata de un producto escalar). Este es el caso de las funciones que se verán en este curso. Al tratar con funciones elementales (que son diferenciables) cada derivada direccional se calcula con esa fórmula

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) \;=\; \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}\cdot\nabla f(\mathbf{a}).$$

• En el caso de una función $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ (de dos variables), en cada punto (x,y) la derivada direccional según la dirección $\mathbf{u}=(u_x,u_y)$ es

$$D_{(u_x,u_y)}f(x,y) \;=\; (u_x,u_y)\cdot\nabla f(x,y) = u_x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+u_y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

(Se entiende que el vector está normalizado, en caso contrario se divide por su módulo $\sqrt{u_x^2+u_y^2}$).

Ejemplo. Para $f(x,y)=xe^y+2$, se pueden calcular las derivadas direccionales en el punto $\mathbf{a}=(0,0)$. Por ejemplo, si $\mathbf{u}=(1,3)$, entonces

$$D_{(1,3)}f(0,0) \;=\; \frac{(1,3)}{\sqrt{10}}\cdot\nabla f(0,0) \;=\; \frac{(1,3)}{\sqrt{10}}\cdot(1,0)=\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Si $\mathbf{u}=(2,-1)$, entonces

$$D_{(2,-1)}f(0,0) \;=\; \frac{(2,-1)}{\sqrt{5}}\cdot\nabla f(0,0) \;=\; \frac{(2,-1)}{\sqrt{5}}\cdot(1,0)=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

• En el caso de una función $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ (de tres variables), en cada punto (x,y,z) la derivada direccional según la dirección $\mathbf{u}=(u_x,u_y,u_z)$ es

$$D_{(u_x,u_y,u_z)}f(x,y,z) \;=\; (u_x,u_y,u_z)\cdot\nabla f(x,y,z) = u_x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+u_y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+u_z\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z).$$

(Se entiende que el vector está normalizado, en caso contrario se divide por su módulo $\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}$).

Ejemplo. Sea $f(x,y,z)=1+xy-z^2$ y $\mathbf{a}=(1,-1,2)$. En ese punto $\mathbf{a}$ se pueden calcular las derivadas direccionales, según sea el vector $\mathbf{u}=(u_x,u_y,u_z)$. Por ejemplo, si $\mathbf{u}=(2,4,4)$, entonces

$$D_{(2,4,4)}f(1,-1,2) \;=\; \frac{(2,4,4)}{\sqrt{36}}\cdot\nabla f(1,-1,2) \;=\; \frac{(2,4,4)}{\sqrt{36}}\cdot(-1,1,-4) \;=\; \frac{-14}{6}.$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Consecuencias. **1**) En el caso especial en que $\mathbf{u} = (1,0)$ o $\mathbf{u} = (0,1)$ se tiene

$$\begin{aligned} D_{(1,0)}f(x,y) &= (1,0)\cdot\nabla f(x,y) = (1,0)\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\\ D_{(0,1)}f(x,y) &= (0,1)\cdot\nabla f(x,y) = (0,1)\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y). \end{aligned}$$

Las derivadas parciales son casos especiales de derivadas direccionales. Para funciones $f(x,y,z)$ de tres variables ocurre lo mismo: las derivadas parciales son

$$D_{(1,0,0)}f(x,y,z) = \tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z),\quad D_{(0,1,0)}f(x,y,z) = \tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z),\quad D_{(0,0,1)}f(x,y,z) = \tfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z).$$

2) De la definición de producto escalar se sigue que

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = \mathbf{u}\cdot\nabla f(\mathbf{a}) = \left\|\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}\right\|\cdot\|\nabla f(\mathbf{a})\|\cos\alpha = \|\nabla f(x,y)\|\cos\alpha,$$

donde $\alpha = \measuredangle\Big(\mathbf{u}, \nabla f(\mathbf{a})\Big)$. Por tanto,

$$-\|\nabla f(\mathbf{a})\| \le D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) \le \|\nabla f(\mathbf{a})\|.$$

En cada punto $\mathbf{a}$ todas las derivadas direccionales están comprendidas entre estos dos valores $-\|\nabla f(\mathbf{a})\|$ y $\|\nabla f(\mathbf{a})\|$. Estos valores máximo y mínimo se alcanzan justamente cuando se elige $\mathbf{u} = \nabla f(\mathbf{a})$ y $u = -\nabla f(\mathbf{a})$. Esas direcciones se llaman de *máxima ganancia* y *máxima pérdida* respectivamente.

Ejemplo. Para $f(x,y) = xe^y + 2$ ya se han visto en el punto $\mathbf{a} = (0,0)$ varias derivadas direccionales:

$$D_{(1,3)}f(0,0) = \frac{1}{\sqrt{10}} = 0'3162\ldots,\qquad D_{(2,-1)}f(0,0) = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0'8944\ldots$$

La mayor de todas estas derivadas direccionales se consigue eligiendo como vector el gradiente en el punto: $\mathbf{u} = \nabla f(0,0) = (1,0)$. En ese caso

$$D_{(1,0)}f(0,0) = 1.$$

La menor de las derivadas direccionales se consigue en $\mathbf{u} = -\nabla f(0,0) = (-1,0)$, y se obtiene $D_{(-1,0)}f(0,0) = -1$. Si se elige un vector perpendicular al gradiente en dicho punto, por ejemplo $\mathbf{u} = (0,1)$, la derivada direccional se anula. Todas las demás derivadas direccionales $D_{\mathbf{u}}f(0,0)$ están comprendidas entre -1 y 1.

► El gradiente como perpendicular

En cada punto P del objeto de ecuación $F(x,y,\ldots) = 0$ el gradiente $\nabla F(P)$ es perpendicular a dicho objeto (F debe ser una función diferenciable)

La demostración es así (en dos variables): para cada curva $(x(t), y(t))$ contenida en la superficie $F(x,y) = 0$ que pasa por P se tiene $F(x(t),y(t)) = 0$. Por la regla de la cadena $\nabla F(x(t),y(t))\cdot(x'(t),y'(t)) = 0$.

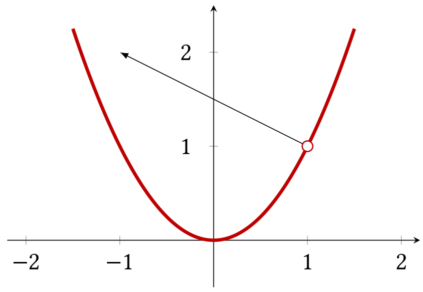
Como consecuencia, se pueden calcular rectas y planos tangentes, ángulos entre objetos,...

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Ejemplo. La curva $y = x^2$ se puede escribir como

$$F(x, y) = y - x^2 = 0.$$

Es una parábola. Si se elige un punto de ella, por ejemplo, $\mathbf{a} = (1, 1)$, el vector $\nabla F(1, 1) = (-2, 1)$ indica la dirección que atraviesa perpendicularmente a la parábola en ese punto.



► Puntos extremos

Si P es un máximo o mínimo relativo de una función $F(x, y, \ldots)$ entonces $\nabla F(P) = 0$. Estos puntos que anulan al gradiente se llaman puntos críticos.

La demostración es parecida a la de funciones de una variable: si $P = (x, y, z, \ldots)$, por definición

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P) = \lim_{t\to 0} \frac{F(x+t,\, y,\, z, \ldots) - F(x,\, y,\, z, \ldots)}{t}.$$

Si este límite fuese positivo entonces para valores de t suficientemente pequeños todos los cocientes

$$\frac{F(x+t,\, y,\, z, \ldots) - F(x,\, y,\, z, \ldots)}{t}$$

serían positivos. Así $F(x + t,\, y,\, z, \ldots) > F(x,\, y,\, z, \ldots)$ si $t > 0$ y $F(x + t,\, y,\, z, \ldots) < F(x,\, y,\, z, \ldots)$ si $t < 0$. Luego P no podría ser ni máximo ni mínimo. La misma idea si el límite fuese negativo.

Ejemplo. Los puntos críticos de la función $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$ se encuentran entre las soluciones del sistema $\nabla f(x, y) = 0$, es decir,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} &= 2x - 2y = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y} &= -2x + 4y = 0. \end{cases}$$

Las únicas soluciones verifican $x = y = 0$.

Ejemplo. Hay funciones, como $f(x, y, z) = \cos 2x + 3y^3 + z$, que no tienen puntos críticos.

Ejemplo. Para calcular los puntos críticos de la función $f(x, y) = x^3y^2$ se buscan las soluciones del sistema $\nabla f(x, y) = 0$, es decir,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2y^2 = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y} &= 2x^3y = 0. \end{cases}$$

Hay infinitas soluciones: todos los puntos en los que $x = 0$ o $y = 0$. Por ejemplo $(0, 7)$, $(-3, 0)$, $(0, 0)$,...

Estos ejemplos muestran que además de resolver el sistema $\nabla f(x, y, \ldots) = 0$ hay que determinar qué clase de punto crítico es cada uno de ellos. ¿Es un máximo, un mínimo? ¿Puede ser otra clase de punto?

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Método para determinar el carácter de los puntos críticos

Para calcular los puntos críticos de una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ se hace lo siguiente:

1) Se resuelve el sistema $\nabla f = 0$. De aquí se obtienen los puntos críticos, que pueden ser máximos, mínimos o puntos de silla.

2) Se clasifica cada punto obtenido en el paso anterior. Esto puede hacerse "a ojo", por comparación de cuánto vale la función en cada punto y en sus alrededores. A veces esto no es sencillo y se recurre a la matriz hessiana.

La matriz hessiana está formada por todas las derivadas parciales de orden 2 de la función:

$$M(x_1, x_2, \dots) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

que es una matriz simétrica por el teorema de Schwarz.

En cada punto del paso 1) se evalúa la matriz hessiana, y según sea esta matriz se puede clasificar el punto en máximo, mínimo o punto de silla:

- ▷ Si todos los menores principales (los menores formados en la diagonal principal) son mayores que 0, entonces f alcanza un mínimo relativo en dicho punto. Se dice que la matriz es definida positiva.
- ▷ Si los menores principales tienen valores alternos negativo, positivo, empezando con negativo, entonces f alcanza el máximo relativo en el punto. Se dice que la matriz es definida negativa.
- ▷ Si los menores principales son todos distintos de 0, y no es ninguno de los casos anteriores, es un punto de silla.
- ▷ Cuando algún menor principal es igual a 0, entonces el criterio no dice nada. Hay que estudiar la naturaleza de ese punto crítico de forma particular.

Caso $n = 2$. Para una función de dos variables $f(x, y)$, se puede decir algo más preciso que lo anterior. Para calcular los puntos críticos de $f(x, y)$

1) Se resuelve el sistema (de dos ecuaciones) $\nabla f = 0$

2) Para cada solución de este paso 1) se evalúa la matriz hessiana

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

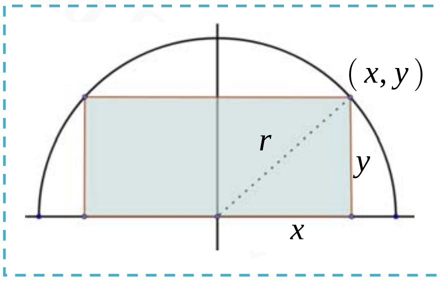
Si $\mathbf{P}$ es solución de 1), hay que mirar el determinante de la matriz, y se tiene

- ▷ Si $\det(M(\mathbf{P})) < 0$ entonces $\mathbf{P}$ es un punto de silla
- ▷ Si $\det(M(\mathbf{P})) > 0$ y $A < 0$ entonces $\mathbf{P}$ es un máximo $\left(A = \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{P})}{\partial x^2} \right)$
- ▷ Si $\det(M(\mathbf{P})) > 0$ y $A > 0$ entonces $\mathbf{P}$ es un mínimo
- ▷ Si $\det(M(\mathbf{P})) = 0$, el criterio no dice nada sobre $\mathbf{P}$

(en este caso $n = 2$ el criterio se mejora: si el primer menor principal es 0 y el determinante es negativo, entonce se trata de un punto de silla)

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Máximos y mínimos condicionados



Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en una semicircunferencia de radio r.

Para resolver este problema se trata de maximizar la función

$$F(x,y)=2xy$$

con la condición

$$x^2+y^2=r^2.$$

Una forma de resolverlo es despejando una variable en esta última expresión y sustituir en la función de arriba. Este procedimiento de despejar una variable no siempre es posible y no siempre lleva a resolver el problema por el camino más corto.

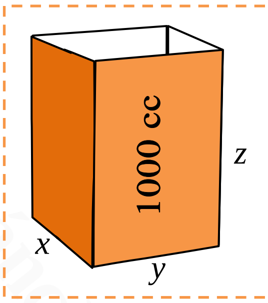
El **método de los multiplicadores de Lagrange** trata este tipo de problemas, en el que hay que maximizar o minimizar una función sujeta a una o varias condiciones. Cualquier solución P del problema

$$\begin{cases} \max/\min \quad F(x,y,\ldots) \\ G_1(x,y,\ldots)=0 \\ \qquad\vdots \\ G_n(x,y,\ldots)=0 \end{cases}$$

verifica

$$\nabla F(P)=\lambda_1\nabla G_1(P)+\ldots+\lambda_n\nabla G_n(P).$$

A partir de esta nueva ecuación se calculan las soluciones del problema de máximos y mínimos condicionados. Los valores $\lambda_1,\lambda_2,\ldots$ que aparecen se llaman multiplicadores de Lagrange.



Ejemplo. Calcular las dimensiones de un recipiente como el de la imagen para que tenga la menor superficie lateral.

La superficie lateral es $S=xy+2xz+2yz$ ya que no hay tapadera superior. Se trata pues de resolver el problema

$$\begin{cases} \max/\min \qquad xy+2xz+2yz \\ \qquad\text{si} \qquad xyz=1000 \end{cases}$$

Para el cual basta plantear el sistema de ecuaciones $\nabla F(x,y,z)=\lambda\nabla G(x,y,z)$ y encontrar sus soluciones, que son $x=y=10\sqrt[3]{2},\quad z=5\sqrt[3]{2}$. La superficie lateral que se obtiene es

$$xy+2xz+2yz=x^2+x^2+x^2=3x^2=3\cdot 100\sqrt[3]{4}=476{,}22\ \text{cm}^2.$$

Se puede comprobar que esta solución corresponde a un mínimo.

Ejemplo. Resolver

$$\begin{cases} \max/\min \quad F(x,y,z)=xz+y^2 \\ \text{si} \qquad\quad G(x,y,z)=x+y+z=100 \end{cases}$$

Otros ejemplos.

a) Dimensiones de una lata cilíndrica de refrescos que contiene 33 cl. con mínima superficie lateral

b) Distancia del plano $x+2y+3z=6$ al origen

c) Calcular la distancia del origen a la recta

$$\begin{cases} x+y+z=10 \\ 2x+2y-z=2 \end{cases}$$

Problema. Resolver

$$\begin{cases} \max/\min & F(x,y,z) = xz + y^2 \\ \text{si} & G(x,y,z) = x + y + z = 100 \end{cases}$$

Solución.

$\boxed{\text{1ª forma}}$. Despejando una variable ($z = 100 - x - y$) el problema se convierte en

$$\max \quad x(100 - x - y) + y^2$$

Se trata de encontrar el máximo de una función de dos variables $f(x,y) = 100x - x^2 - xy + y^2$ y basta resolver la ecuación (sistema) $\nabla f(x,y) = 0$ es decir

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 100 - 2x - y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y = 0 \end{cases}$$

cuya solución es $x = 2y = 40$. Al comprobar la matriz de las derivadas parciales de orden dos se comprueba que se trata de un punto de inflexión.

$\boxed{\text{2ª forma}}$. Por el método de los multiplicadores de Lagrange, basta resolver el sistema que resulta al escribir $\nabla F(x,y,z) = \lambda \nabla G(x,y,z)$, es decir

$$\begin{cases} z = \lambda \\ 2y = \lambda \\ x = \lambda \end{cases}$$

y se obtiene $x = 2y = z$. Más adelante se verá cómo clasificar este punto.

Problema. Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en una semicircunferencia de radio r (se trata del problema indicado al inicio de la página anterior que se va a resolver por dos métodos)

Solución. Se trata de resolver

$$\begin{cases} \max & F(x,y) = 2xy \\ \text{si} & G(x,y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0 \end{cases}$$

Solución.

$\boxed{\text{1ª forma}}$. Si despejamos una variable $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ en la condición, el problema queda como

$$\max g(x) = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$$

Para resolverlo se deriva y se iguala a cero,

$$2\sqrt{r^2 - x^2} + 2x\frac{1}{2}(-2x)\frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0$$

y se obtiene que la solución del problema se consigue para

$$x = \frac{r}{\sqrt{2}} \quad \left(\text{y por tanto } y = \frac{r}{\sqrt{2}} \right).$$

y el área máxima vale r^2.

$\boxed{\text{2ª forma}}$. Por el método de los multiplicadores de Lagrange, basta resolver el sistema que resulta al escribir $\nabla F(x,y) = \lambda \nabla G(x,y)$. Como $\nabla F(x,y) = (2y, 2x)$, $\nabla G(x,y) = (2x, 2y)$ sale

$$\begin{cases} 2y = \lambda 2x \\ 2x = \lambda 2y \end{cases}$$

cuya solución es $x = y$. Como además $x^2 + y^2 = r^2$ se tiene

$$x = y = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

El área máxima resultante es r^2. Se sabe que este valor es máximo por comparación con otros valores (x, y) que cumplan $x^2 + y^2 = r^2$. Por ejemplo, para $\left(r/\sqrt{3}, r\sqrt{2}/\sqrt{3}\right)$ se obtiene un área de $2r^2\sqrt{2}/\sqrt{3}$, que es aproximadamente, $1{,}633 \cdot r^2$

Problema. Calcular la distancia del origen a la recta

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ 2x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

Solución. Se trata del problema

$$\begin{cases} \min & \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} \\ \text{si} & \begin{cases} x + y + z = 10 \\ 2x + 2y - z = 2 \end{cases} \end{cases}$$

que es equivalente a

$$\begin{cases} \min & x^2 + y^2 + z^2 \\ \text{si} & \begin{cases} x + y + z = 10 \\ 2x + 2y - z = 2 \end{cases} \end{cases}$$

1ª forma. Se despeja una variable de una de las condiciones, $z = 10 - x - y$, y el problema se reescribe como

$$\begin{cases} \min & x^2 + y^2 + (10 - x - y)^2 \\ \text{si} & 2x + 2y - (10 - x - y) = 2 \end{cases}$$

es decir

$$\begin{cases} \min & 2y^2 + 2xy - 20y + 2x^2 - 20x + 100 \\ \text{si} & 3x + 3y = 12 \end{cases}$$

Se despeja de nuevo otra variable de la condición, $y = 4 - x$, y el problema se traduce en

$$\min \quad x^2 + (4 - x)^2 + 36$$

Se deriva y se iguala a cero y se obtiene $x = 2$ y así $y = 2,\ z = 6$.

2ª forma. El sistema $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla G_1(x, y, z) + \mu \nabla G_2(x, y, z)$ es

$$\begin{cases} 2x = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 2 \\ 2y = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 2 \\ 2z = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot (-1) \end{cases}$$

y así $x = y$. Como además $x + y + z = 10,\quad 2x + 2y - z = 2$ se tiene

$$\begin{cases} 2x + z = 10 \\ 4x - z = 2 \end{cases}$$

y las soluciones son $x = 2,\ y = 2,\ z = 6$. La distancia al origen es $\sqrt{2^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{44}$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Método de los multiplicadores de Lagrange

Teorema 1 (Condición necesaria para la existencia de extremos condicionados)

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y $f, g_1, \ldots, g_m : A \to \mathbb{R}$, con $m < n$, funciones con derivadas parciales continuas en A. Sea $M = \{x \in A : g_1(x) = 0, \ldots, g_m(x) = 0\}$. Sea $P \in M$ un punto que verifica

a) *rango* $\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(P) & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(P) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(P) & \ldots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(P) \end{pmatrix} = m$ *(es decir, la matriz tiene rango máximo), y*

b) *f tiene extremo local condicionado en P, es decir o bien existe un entorno $B(P,r)$ de P tal que $f(\mathbf{x}) \leq f(P)$ para todo $\mathbf{x} \in B(P,r) \cap M$ (máximo local condicionado), o bien existe un entorno $B(P,r)$ de P tal que $f(\mathbf{x}) \geq f(P)$ para todo $\mathbf{x} \in B(P,r) \cap M$ (mínimo local local condicionado).*

Entonces, existen unos únicos números reales $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ (llamados multiplicadores de Lagrange*) tales que*

$$\nabla f(P) \;=\; \lambda_1 \nabla g_1(P) + \ldots + \lambda_m \nabla g_m(P),$$

es decir, $\nabla f(P)$ es combinación lineal de los gradientes $\nabla g_1(P), \ldots, \nabla g_m(P)$, o también

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(P) & = & \lambda_1 \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}(P) + \ldots + \lambda_m \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1}(P) \\ & \vdots & \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(P) & = & \lambda_1 \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n}(P) + \ldots + \lambda_m \dfrac{\partial g_m}{\partial x_n}(P). \end{array} \right.$$

Este teorema suele enunciarse brevemente como

$$P \text{ solución de } \left\{ \begin{array}{l} \text{max/min } f(x_1, x_2, \ldots) \\ \text{si } \left\{ \begin{array}{l} g_1(x_1, x_2, \ldots) = 0 \\ \quad\vdots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots) = 0 \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \nabla f(P) \;=\; \lambda_1 \nabla g_1(P) + \ldots + \lambda_m \nabla g_m(P).$$

La implicación contraria, en general, no es cierta. Este sistema

$$\nabla f(P) \;=\; \lambda_1 \nabla g_1(P) + \ldots + \lambda_m \nabla g_m(P)$$

es el que se utiliza para calcular los posibles máximos o mínimos condicionados. Para cada solución P hallada hay que determinar si se trata de un máximo o un mínimo.

En el caso especial de un problema de optimizar una función con una sola condición,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{max/min } f(x_1, x_2, \ldots) \\ \text{si } g_1(x_1, x_2, \ldots) = 0, \end{array} \right.$$

las soluciones cumplen $\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$, es decir, los gradientes son proporcionales en esos puntos.

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Teorema 2 (Condición suficiente para la existencia de extremos condicionados)

Sea P verificando las condiciones necesarias del teorema anterior. Si además A es convexo y $f, g_1, \ldots, g_m$ tienen derivadas parciales hasta orden 2 continuas en P, se considera la función definida en A (llamada función de Lagrange):

$$L(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) - \lambda_1 g_1(x_1, \ldots, x_n) - \ldots - \lambda_m g_m(x_1, \ldots, x_n)$$

y la matriz simétrica (llamada hessiana de L en P):

$$H(P) = \left[\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(P)\right] \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Entonces:

***1**) Si $H(P)$ es definida positiva, es decir, todos los menores principales (los menores formados en la diagonal principal) son mayores que 0, entonces f tiene en P mínimo local condicionado.*

***2**) Si $H(P)$ es definida negativa, es decir, los menores principales tienen valores alternos negativo y positivo, empezando con negativo, entonces f tiene en P máximo local condicionado.*

En muchos casos la función f es continua y el conjunto M es compacto, con lo cual se garantiza la existencia de máximo y mínimo absoluto de la función sobre dicho conjunto. Esto hace que en algunas ocasiones se puedan clasificar los posibles puntos extremos por simple comparación: viendo cómo son sus valores y por tanto el de mayor valor será máximo; el de menor valor, mínimo.

Otras veces la naturaleza del problema permite clasificar cada punto en máximo o mínimo sin tener que recurrir a la matriz hessiana.

Ejemplo. Sobre todos los puntos de la recta $x + y = 10$ calcular aquellos que hagan mínimo el valor $x^2 + y^2$.

Este problema puede plantearse así:

$$\begin{cases} \max/\min\, x^2 + y^2 \\ \quad \text{si } x + y = 10. \end{cases}$$

Para resolverlo se plantea el sistema $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$, donde $f(x, y) = x^2 + y^2$ y $g(x, y) = x + y - 10$. Queda entonces

$$\begin{cases} 2x &= \lambda \cdot 1 \\ 2y &= \lambda \cdot 1. \end{cases}$$

La única solución es $P = (5, 5)$ (para el cual se tiene $\lambda = 10$). ¿Se trata de un máximo o un mínimo?

En este caso no existe máximo: a medida que nos alejamos del origen, los puntos (x, y) de la recta $x + y = 10$ tienen alguna coordenada que va creciendo cada vez mas. Por ejemplo, puntos como $(10, 0), (100, -90), (1000, -990), \ldots$ cuyos valores $x^2 + y^2$ se hace cada vez más grande. Este razonamiento dice que el problema no tiene máximo.

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

La función de Lagrange es $L(x,y) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = x^2 + y^2 - 10(x+y-10)$. Es la función cuyo gradiente es $\nabla L(x,y) = (2x-10, 2y-10)$ y verifica $\nabla L(5,5) = 0$. La matriz hessiana

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

es definida positiva en $(5,5)$. Se trata de un mínimo local condicionado.

Varios ejemplos sobre el teorema de los multiplicadores de Lagrange

Ejemplo. De todos los puntos de la circunferencia unidad del plano, hallar los que hagan máximo o mínimo el producto de sus coordenadas.

Se trata de resolver el problema

$$\begin{cases} \max/\min\ f(x,y) = xy \\ \text{si}\ \ g(x,y) \equiv x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

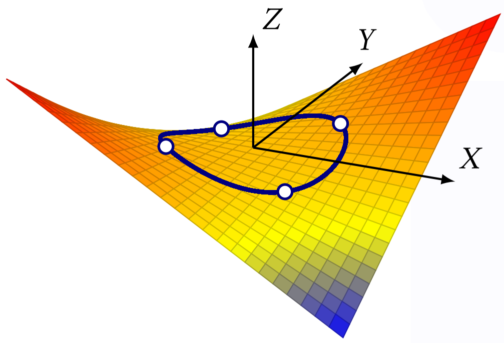
El sistema $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$ es

$$\begin{cases} y &= \lambda \cdot 2x \\ x &= \lambda \cdot 2y. \end{cases}$$

Sus soluciones son

$$P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \lambda = 1/2, \qquad P_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right),\ \lambda = 1/2,$$

$$P_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right),\ \lambda = -1/2, \qquad P_4 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \lambda = -1/2.$$



Como f es continua y $x^2 + y^2 = 1$ define un conjunto compacto, entonces f alcanza el máximo y el mínimo absoluto en dicho conjunto. Además

$$f(P_1) = f(P_2) = 1/2,$$

$$f(P_3) = f(P_4) = -1/2.$$

Los dos primeros son máximos y los otros dos son mínimos.

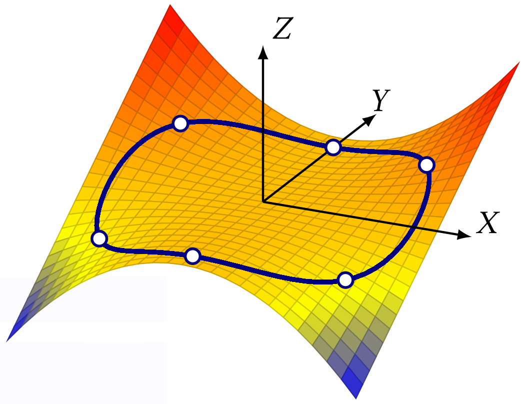
La función de Lagrange es $L(x,y) = f(x,y) - \frac{1}{2}g(x,y)$ para los dos primeros y $L(x,y) = f(x,y) + \frac{1}{2}g(x,y)$ para los otros dos.

La matriz hessiana en todos los casos tiene determinante igual a cero y no dice nada de cómo son los puntos. En este ejemplo hay que utilizar otro argumento (como el de la continuidad y compacidad) para determinar cuáles son máximos y cuáles mínimos.

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Ejemplo. Encontrar los extremos condicionados del problema

$$\begin{cases} \max/\min\ f(x,y) = x^2 y \\ \text{si}\ \ g(x,y) \equiv x^2+y^2 = 3. \end{cases}$$



A la derecha puede verse cómo es la gráfica de la función f y cómo son los valores de f en los puntos de la curva $x^2+y^2=3$. Se trata de encontrar los máximos y mínimos sobre esta curva.
Para ello se plantea el sistema

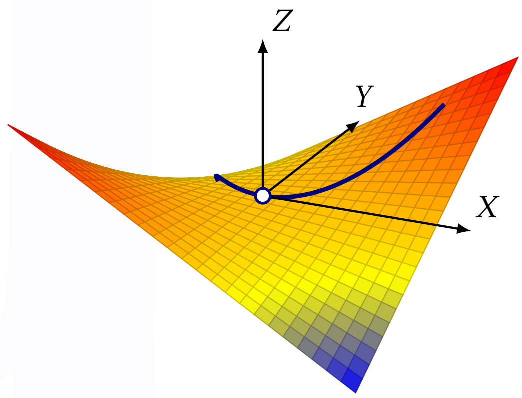
$$\nabla f(x,y) = \lambda \cdot \nabla g(x,y),$$

cuyas soluciones son los puntos

$$(\sqrt{2}, 1),\ (-\sqrt{2}, 1),\ (\sqrt{2}, -1),\ (-\sqrt{2}, -1),\ (0, \sqrt{3}),\ (0, -\sqrt{3}).$$

Los valores de f sobre ellos son 2, 2, −2, −2, 0 y 0. Los dos primeros son máximos (son los puntos $(\sqrt{2}, 1, 2)$ y $(-\sqrt{2}, 1, 2)$ en la gráfica), los otros dos son mínimos, y los dos últimos son mínimo y máximo respectivamente. Este ejemplo muestra que clasificar los puntos por simple comparación puede llevar a errores.

Ejemplo. La función $f(x,y) = xy$ no tiene ni máximo ni mínimo sobre los puntos de la curva $y = x^2$, a pesar de que el método de los multiplicadores de Lagrange da como posible valor extremo el punto $(0,0)$.
Las imágenes sobre los puntos de esta curva forman otra curva: son los puntos de la forma (x, x^2, x^3), que se han representado en la gráfica de la derecha.



Ejemplo. Para calcular los valores extremos de $f(x,y) = x^3y^3$ sobre los puntos de la curva $g(x,y) \equiv x^2+y^2 = 1$ se resuelve $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$.

Aparecen cuatro soluciones $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ y $(-1,0)$ que no son ni máximos ni mínimos. Por ejemplo, la función f vale 0 en $(0,1)$ y alcanza valores positivos y negativos en un entorno de $(0,1)$, según que el punto esté en el primer o segundo cuadrante. La matriz hessiana en ellos no dice nada, y por simple comparación con otros valores se podría haber llegado a una conclusión falsa.

También aparecen otras cuatro soluciones

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

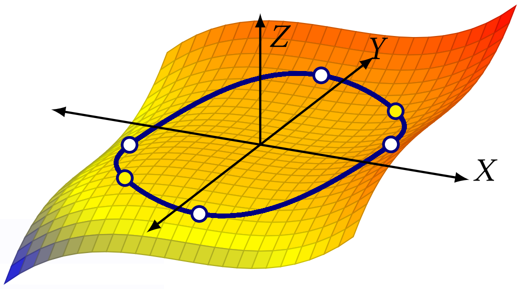
Es fácil comprobar que todos son máximos o mínimos.

Ejemplo. Para calcular el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

se plantea el sistema

$$\begin{cases} \max/\min\ f(x,y) = x^3+y^3 \\ \text{si}\ \ g(x,y) \equiv x^2+y^2 = r^2. \end{cases}$$



A la derecha puede verse cómo es la gráfica de la función f y cómo son los valores de f en los puntos de cada curva $x^2+y^2=r^2$. Se trata de encontrar los máximos y mínimos sobre esta curva.

Para ello se plantea el sistema $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$. Las soluciones se corresponden con los puntos de la gráfica de f siguientes:

$$A\left(r,0,r^3\right),\ B\left(-r,0,-r^3\right),\ C\left(0,r,r^3\right),\ D\left(0,-r,-r^3\right),\ E\left(\frac{r}{\sqrt{2}},\frac{r}{\sqrt{2}},\frac{r^3}{\sqrt{2}}\right),\ F\left(\frac{-r}{\sqrt{2}},\frac{-r}{\sqrt{2}},\frac{-r^3}{\sqrt{2}}\right).$$

Los puntos A, C, F son máximos, y B, D, E son mínimos. Esto puede comprobarse con la matriz hessiana, teniendo en cuenta que cada punto tiene un valor λ distinto, por ejemplo para A se obtiene $\lambda = 3r/2$.

Además, A y C son máximos absolutos sobre los puntos $x^2+y^2=r^2$. Esto dice que

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \le \frac{r^3}{r^2}$$

y por tanto el límite de arriba es igual a 0.

Cuando se estudien coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\,\text{sen}\,\varphi \end{cases}$$

se puede escribir

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3\varphi + r^3\,\text{sen}^3\varphi}{r^2} = \lim_{r\to 0} r(\cos^3\varphi + \text{sen}^3\varphi) = 0.$$

Esta misma forma de proceder (tanto con los multiplicadores de Lagrange como con las coordenadas polares) sirve para probar

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0, \qquad \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} = 0.$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura