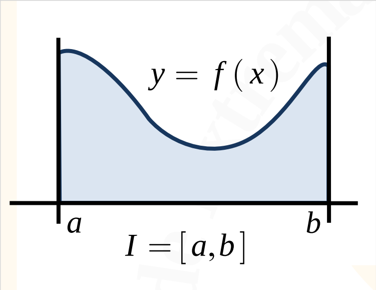
Integración sobre conjuntos sencillos

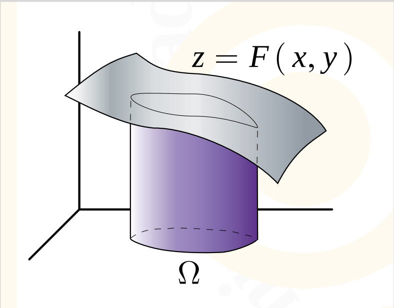
Para funciones de una variable, el área que encierra la gráfica de la función sobre un intervalo se puede medir con



$$\text{“área”} = \int_I f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

(se han puesto las comillas intencionadamente ya que la integral mide la diferencia de áreas por encima y por debajo del eje X). Para hacer el cálculo de la integral se halla una primitiva de la función y se aplica la regla de Barrow.

En el caso de funciones de dos variables, la integral



$$\iint_\Omega F(x,y)\,dx\,dy$$

mide el “volumen” del sólido que tiene a Ω como suelo y a la gráfica de la función como techo (se han puesto comillas en la palabra volumen porque la integral mide diferencia de volúmenes). El cálculo de la integral doble requiere colocar los límites de integración del conjunto Ω, es decir, colocar los valores en los que varían las dos variables x e y, y luego calcular primitivas de la función. La principal novedad con respecto a integrales de una variable es que ya no es inmediato (ni fácil) colocar los límites de integración. El esquema es el siguiente:

❶ Límites de integración

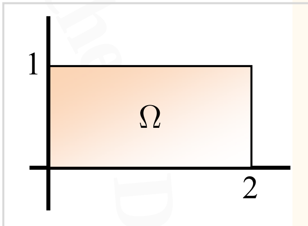
$$\iint_\Omega F(x,y)\,dx\,dy \longrightarrow \Omega = \begin{cases} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{cases} \begin{array}{l} \nearrow \int_a^b \int_c^d F(x,y)\,dy\,dx \\ \searrow \int_c^d \int_a^b F(x,y)\,dx\,dy \end{array}$$

❷ Cálculo de primitivas

Los límites de integración y los diferenciales dentro de la integral deben escribirse siempre siguiendo el esquema límite externo con diferencial externa y límite interno con diferencial interno (marcados con colores distintos más arriba)

Ejemplo. Para el rectángulo $\Omega = [0,2]\times[0,1]$ los límites de integración son

$$\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$



y así

$$\iint_\Omega (x+y^2)\,dx\,dy = \int_0^2\int_0^1 (x+y^2)\,dy\,dx = \int_0^2 \left[xy + \frac{y^3}{3}\right]_0^1 dx$$

$$= \int_0^2 \left(x + \frac{1}{3}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}\right]_0^2 = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

Además, según el teorema de Fubini, se puede hacer cambiando el orden de los límites y los diferenciales:

$$\iint_\Omega (x+y^2)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^2 (x+y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + xy^2\right]_0^2 dx$$

$$= \int_0^1 (2+2y^2)\,dx = \left[2y + \frac{2y^3}{3}\right]_0^1 = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

Ejemplo. Para el rectángulo $\Omega=[0,1]\times[0,3]$ se tiene

$$\iint_{\Omega}\left(e^x-y\right)dx\,dy=\int_0^1\int_0^3\left(e^x-y\right)dy\,dx=\int_0^1\left[e^x y-\frac{y^2}{2}\right]_0^3 dx$$

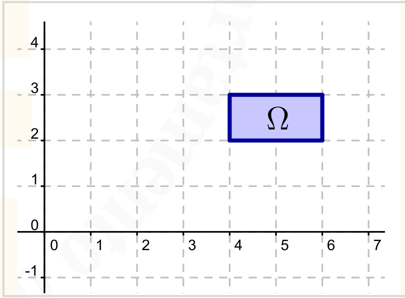
$$=\int_0^1\left(3e^x-\frac{9}{2}\right)dx=\left[3e^x-\frac{9x}{2}\right]_0^1=3e-\frac{9}{2}-3$$

También

$$\iint_{\Omega}\left(e^x-y\right)dx\,dy=\int_0^3\int_0^1\left(e^x-y\right)dx\,dy=\int_0^3\left[e^x-xy\right]_0^1 dy$$

$$=\int_0^3(e-y-1)\,dy=\left[e\cdot y-\frac{y^2}{2}-y\right]_0^3=3e-\frac{9}{2}-3$$

Ejemplo. Para el rectángulo $\Omega=[4,6]\times[2,3]$



$$\iint_{\Omega}\frac{x}{y}\,dx\,dy=\int_4^6\int_2^3\frac{x}{y}\,dy\,dx=\int_4^6\left[x\ln y\right]_2^3 dx$$

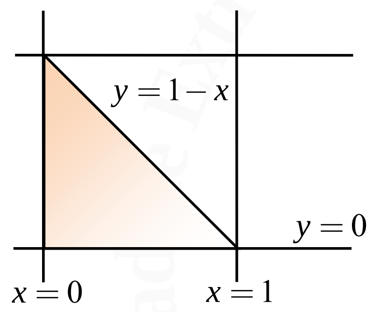
$$=\int_4^6 x\ln\frac{3}{2}\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln\frac{3}{2}\right]_4^6=10\ln\frac{3}{2}$$

Además,

$$\iint_{\Omega}\frac{x}{y}\,dx\,dy=\int_2^3\int_4^6\frac{x}{y}\,dx\,dy=\int_2^3\left[\frac{x^2}{2y}\right]_4^6 dy$$

$$=10\int_2^3\frac{1}{y}\,dy=\left[10\ln y\right]_2^3=10\left(\ln 3-\ln 2\right)=10\,\ln\frac{3}{2}$$

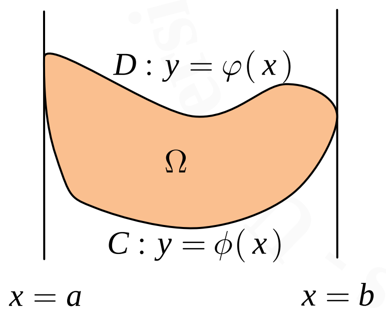
Los rectángulos son conjuntos cuyos límites de integración, izquierda-derecha y abajo-arriba son cuatro números. Son los únicos conjuntos que tienen esta propiedad. Cualquier otro tipo de conjunto tiene los límites de integración algo más complicado y alguno de ellos no será un número. Por ejemplo, el triángulo dibujado a la izquierda no tiene límites de integración tan sencillos. Se trata de escribir las condiciones



$$\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1-x\end{cases}$$

que cumplen los puntos de ese triángulo.

En general, para un conjunto Ω en el plano, los límites izquierdo y derecho son las dos rectas verticales que delimitan al conjunto. Estas dos rectas son las que marcan el valor izquierdo y derecho de los límites de integración.



En las ecuaciones de la curvas C y D, al despejar la variable y se obtiene $y=\phi(x)$ para C (es el límite de abajo) y $y=\varphi(x)$ para la otra. En resumen,

$$\Omega=\begin{cases}a\le x\le b\\ \phi(x)\le y\le\varphi(x)\end{cases}$$

Ejemplos de integrales dobles sobre conjuntos sencillos

$$\int_0^1\int_0^3 (x+y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[xy+\frac{1}{2}y^2\right]_0^3 dx \;=\; \int_0^1 \left(3\,x+\frac{9}{2}\right) dx \;=\; \left[\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x\right]_0^1 \;=\; 6$$

$$\int_0^3\int_0^1 (x+y)\,dx\,dy = \int_0^3 \left[\frac{1}{2}x^2+xy\right]_0^1 dy \;=\; \int_0^3 \left(y+\frac{1}{2}\right) dy \;=\; \left[\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y\right]_0^3 \;=\; 6$$

$$\int_{-1}^1\int_0^\pi x^2 cos(y)\;dy\,dx = \int_{-1}^1 \left[x^2\mathrm{sen}\,(y)\right]_0^\pi\;dx \;=\; \int_{-1}^1 0\;\;dx \;=\; 0$$

$$\int_0^\pi\int_{-1}^1 x^2 cos(y)\;dx\,dy = \int_0^\pi \left[\frac{1}{3}x^3\cos(y)\right]_{-1}^1 dy \;=\; \int_0^\pi \frac{2}{3}\cos(y)\;dy \;=\; \left[\frac{2}{3}\,\mathrm{sen}\,(y)\right]_0^\pi \;=\; 0$$

$$\int_0^2\int_3^4 \frac{x+1}{y+1}\,dy\,dx = \int_0^2 \left[(x+1)\log(y+1)\right]_3^4 dx \;=\; \int_0^2 (-(x+1)(\log(4)-\log(5)))\;dx \;=$$
$$= \left[-\frac{1}{2}(\log(4)-\log(5))(x^2+2\,x)\right]_0^2 \;=\; -4\,\log(4)+4\,\log(5)$$

$$\int_3^4\int_0^2 \frac{x+1}{y+1}\,dx\,dy = \int_3^4 \left[\frac{1}{2}\,\frac{x^2+2\,x}{y+1}\right]_0^2 dy \;=\; \int_3^4 \left(4\,\frac{1}{y+1}\right) dy \;=$$
$$= \left[4\,\log(y+1)\right]_3^4 \;=\; -4\,\log(4)+4\,\log(5)$$

$$\int_{-1}^1\int_{-2}^3 (x^2+y^2)\,dy\,dx = \int_{-1}^1 \left[x^2y+\frac{1}{3}y^3\right]_{-2}^3 dx \;=\; \int_{-1}^1 \left(5\,x^2+\frac{35}{3}\right) dx \;=\; \left[\frac{5}{3}x^3+\frac{35}{3}x\right]_{-1}^1 \;=\; \frac{80}{3}$$

$$\int_{-2}^3\int_{-1}^1 (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_{-2}^3 \left[\frac{1}{3}x^3+xy^2\right]_{-1}^1 dy \;=\; \int_{-2}^3 \left(2\,y^2+\frac{2}{3}\right) dy \;=\; \left[\frac{2}{3}y^3+\frac{2}{3}y\right]_{-2}^3 \;=\; \frac{80}{3}$$

$$\int_0^1\int_{-2}^2 ye^x\;dy\,dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2e^x\right]_{-2}^2 dx \;=\; \int_0^1 0\;\;dx \;=\; 0$$

$$\int_{-2}^2\int_0^1 ye^x\;dx\,dy = \int_{-2}^2 \left[ye^x\right]_0^1\,dy \;=\; \int_{-2}^2 (e-1)y\;\;dy \;=\; \left[\frac{1}{2}(e-1)y^2\right]_{-2}^2 \;=\; 0$$

$$\int_{-3}^3\int_1^2 (x^2y-1/y)\,dy\,dx = \int_{-3}^3 \left[\frac{1}{2}x^2y^2-\log(y)\right]_1^2 dx \;=\; \int_{-3}^3 \left(\frac{3}{2}x^2-\log(2)\right) dx \;=$$
$$= \left[\frac{1}{2}x^3-x\log(2)\right]_{-3}^3 \;=\; -6\,\log(2)+27$$

$$\int_1^2\int_{-3}^3 (x^2y-1/y)\,dx\,dy = \int_1^2 \left[\frac{1}{3}x^3y-\frac{x}{y}\right]_{-3}^3 dy \;=\; \int_1^2 \left(6\,\frac{(3\,y^2-1)}{y}\right) dy \;=$$
$$= \left[9\,y^2-6\,\log(y)\right]_1^2 \;=\; -6\,\log(2)+27$$

Estos ejemplos se han creado con SAGE (www.sagemath.org). Otra forma de hacer integrales es con WxMAXIMA: cortando y pegando hay que crear un fichero `Prueba.wxm` y abrirlo desde WxMAXIMA.

```
/* [wxMaxima batch file version 1] [ DO NOT EDIT BY HAND! ]*/
/* [ Created with wxMaxima version 0.8.3 ] */

/* [wxMaxima: input   start ] */
f(x,y):=(x+y);
a: 0;
b: 1;
c: 0;
d: 3;
/* [wxMaxima: input   end   ] */

/* [wxMaxima: input   start ] */
print ('integrate('integrate(f(x,y), y, c, d), x, a, b), " = ",
'integrate(integrate(f(x,y), y, c, d), x, a, b), " = ",
integrate(integrate(f(x,y), y, c, d), x, a, b));
/* [wxMaxima: input   end   ] */

/* Maxima can't load/batch files which end with a comment! */
"Created with wxMaxima"$
```

El resultado en el programa WxMAXIMA debe ser similar a esto:

```
(%i1) f(x,y):=(x+y);
a: 0;
b: 1;
c: 0;
d: 3;
```

(%o1) $f(x,y) := x + y$

(%o2) 0

(%o3) 1

(%o4) 0

(%o5) 3

```
(%i6) print ('integrate('integrate(f(x,y), y, c, d), x, a, b), " = ",
'integrate(integrate(f(x,y), y, c, d), x, a, b), " = ",
integrate(integrate(f(x,y), y, c, d), x, a, b));
```

$$\int_0^1 \int_0^3 y + x dy dx = \frac{\int_0^1 6\,x + 9 dx}{2} = 6$$

El resultado final no es perfecto. Faltan algunos paréntesis, pero se entiende bien. En cualquier caso el valor final sí es correcto.

Integración sobre conjuntos más complejos

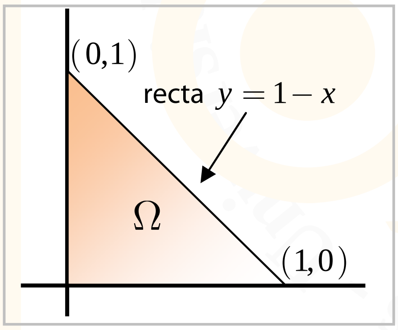
Los conjuntos Ω que son rectángulos son los únicos que tienen sus límites de integración de la forma

$$\Omega = \begin{cases} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{cases}$$

donde los valores a,b,c,d son números, e indican los bordes izquierdo, derecho, abajo y arriba que delimitan el rectángulo. Para estos conjuntos se cumple además el teorema de Fubini, que afirma que

$$\int_a^b \int_c^d F(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b F(x,y)\,dx\,dy$$

siempre que la función F sea continua en el rectángulo $[a,b]\times[c,d]$.
Para conjuntos que no son rectángulos, es preciso saber calcular cuáles son esos bordes.



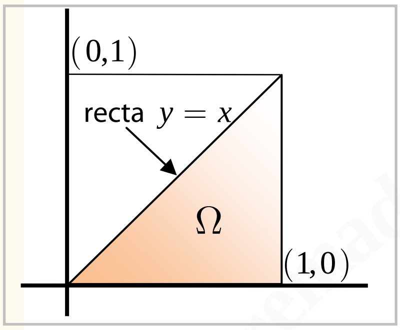
Ω es el triángulo de vértices $(0,0),(1,0)$ y $(0,1)$

$$\Omega = \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x \end{cases} \quad \text{y} \quad \iint_\Omega F(x,y) = \int_0^1 \int_0^{1-x} F(x,y)\,dy\,dx$$

o también

$$\Omega = \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le 1-y \end{cases} \quad \text{y} \quad \iint_\Omega F(x,y) = \int_0^1 \int_0^{1-y} F(x,y)\,dx\,dy$$

para cualquier función $F(x,y)$.



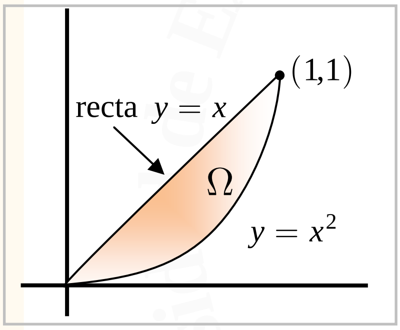
Ω es el triángulo de vértices $(0,0),(1,0)$ y $(1,1)$

$$\Omega = \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \end{cases} \quad \text{y} \quad \iint_\Omega F(x,y) = \int_0^1 \int_0^{x} F(x,y)\,dy\,dx$$

o también

$$\Omega = \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ y \le x \le 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad \iint_\Omega F(x,y) = \int_0^1 \int_y^{1} F(x,y)\,dx\,dy$$

para cualquier función $F(x,y)$.



Ω es la región delimitada por $y = x$ y la parábola $y = x^2$

$$\Omega = \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le x \end{cases} \quad \text{y} \quad \iint_\Omega F(x,y) = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} F(x,y)\,dy\,dx$$

o también

$$\Omega = \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ y \le x \le \sqrt{y} \end{cases} \quad \text{y} \quad \iint_\Omega F(x,y) = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} F(x,y)\,dx\,dy$$

para cualquier función $F(x,y)$.

Por ejemplo, para este último conjunto, si $F(x,y) = 1 - x$ entonces la integral doble se puede hacer de dos formas distintas, aunque el resultado es mismo

$$\iint_\Omega F(x,y) = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} (1-x)\,dy\,dx = \int_0^1 [(1-x)y]_{x^2}^{x}\,dx = \int_0^1 (1-x)\left(x - x^2\right)dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^3 - 2x^2 + x\right)dx = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

y también

$$\iint_{\Omega} F(x,y) = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} (1-x)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\right]_y^{\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_0^1 \left(\sqrt{y}-\frac{y}{2}-y+\frac{y^2}{2}\right)dy = \left[\frac{2}{3}y^{3/2}-\frac{3y^2}{4}+\frac{y^3}{6}\right]_0^1 = \frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$$

No es necesario calcular la integral haciendo los cálculos de las dos formas posibles, aunque es una buena técnica para hacer ejercicios de integrales, ya que los resultados deben coincidir.

Es importante no olvidar que los límites que son ambos números deben ir en la integral exterior, es decir, en la primera que se coloca en la integral doble. En conjuntos que sean rectángulos se puede poner en primer lugar cualquiera de los límites, ya que los cuatro son números, y los diferenciales siempre deben ir en el orden correcto.

Además, se pueden aplicar las reglas de simplificación cuando los conjuntos están formados por varios trozos con límites de integración distintos. Si $\Omega = A \cup B$ entonces (*)

$$\iint_{\Omega} F(x,y) = \iint_{A\cup B} F(x,y) = \iint_{A} F(x,y) + \iint_{B} F(x,y).$$

También, la integral (tanto sencilla como doble) es lineal, es decir,

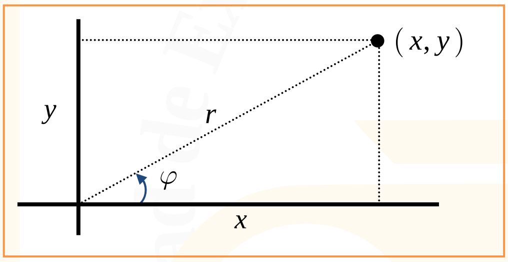
$$\iint_{\Omega} (F(x,y)+G(x,y)) = \iint_{\Omega} F(x,y) + \iint_{\Omega} G(x,y) \ \text{ y } \ \iint_{\Omega} \lambda\, F(x,y) = \lambda \iint_{\Omega} F(x,y)$$

y estas dos reglas permiten simplificar los cálculos en muchos casos.

(*) unión disjunta o con intersección con medida cero.

Coordenadas polares en el plano. Para conjuntos que no están delimitados por líneas rectas, especialmente los conjuntos *circulares*, se suelen utilizar otro tipo de coordenadas, como las coordenadas *polares*.

Las coordenadas polares de un punto (x, y) del plano son dos números (r,φ) donde

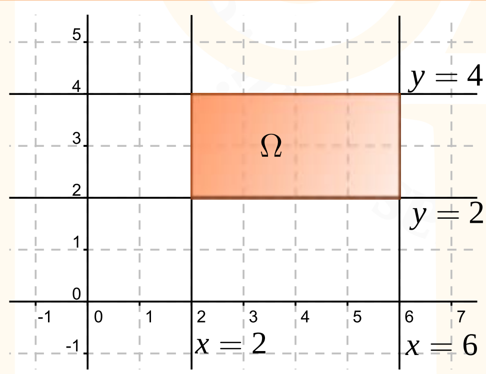


$$r=\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg}(\varphi)=\frac{y}{x}$$

es decir,

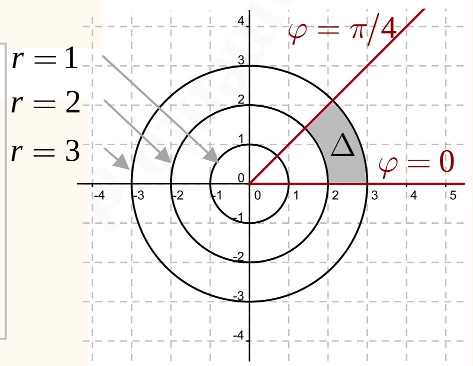
$$\begin{cases} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\operatorname{sen}(\varphi) \end{cases}$$

Las coordenadas polares (r,φ) siempre verifican las condiciones $r \geq 0,\ \varphi \in [0, 2\pi)$. El número r indica la distancia al origen y el número φ la inclinación con respecto al semieje X positivo en sentido contrario a las agujas del reloj. Por ejemplo, el punto $(1,1)$ en coordenadas cartesianas se escribe como $\left(\sqrt{2},\pi/4\right)$ es coordenadas polares.



$$\Omega=\begin{cases} 2\leq x\leq 6 \\ 2\leq y\leq 4 \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{cases} 2\leq r\leq 3 \\ 0\leq \varphi\leq \pi/4 \end{cases}$$



Teorema de cambio de variables. Si se definen nuevas variables u y v de forma que

$$\begin{cases} x=\psi(u,v) \\ y=\phi(u,v) \end{cases}$$

entonces

$$\underset{\substack{\Omega \\ (x,y)}}{\iint} F(x,y)\,dx\,dy \quad = \quad \underset{\substack{\Omega \\ (u,v)}}{\iint} F(\psi(u,v),\phi(u,v))\cdot J\cdot du\,dv$$

donde

$$J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

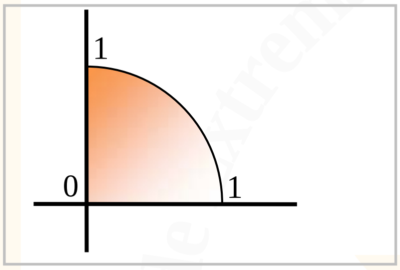
En el caso particular del cambio a coordenadas polares,

$$\underset{\Omega}{\iint} F(x,y)\,dx\,dy \quad = \quad \underset{\Omega}{\iint} F(r\cos(\varphi), r\operatorname{sen}(\varphi))\cdot r\cdot dr\,d\varphi$$

$$(\text{en coordenadas } (x,y)) \qquad\qquad (\text{en coordenadas } (r,\varphi))$$

(se ponen los límites de integración en coordenadas polares, se cambian x e y por sus valores en coordenadas polares, es decir, $x=r\cos(\varphi)$, $y=r\operatorname{sen}(\varphi)$, y se añade una r junto a los nuevos diferenciales)

Ejemplo. Si Ω es la parte del círculo unidad del primer cuadrante, como muestra el dibujo, se puede calcular la integral en coordenadas cartesianas,

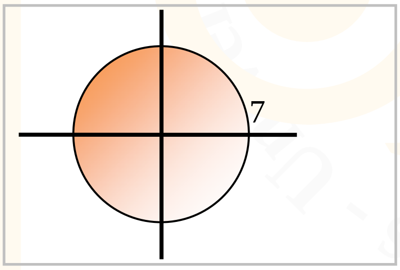


$$\iint_\Omega y\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1-x^2}{2}dx = \frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

y también en coordenadas polares,

$$\iint_\Omega y\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^{\pi/2} r^2 \operatorname{sen}\varphi\,d\varphi\,dr = \int_0^1 \left[-r^2\cos\varphi\right]_0^{\pi/2} dr = \int_0^1 r^2 dr = \frac{1}{3}$$

Ejemplo. Un círculo Ω centrado en el origen y de radio 7 tiene como coordenadas polares los límites $0\le r\le 7,\ 0\le\varphi\le 2\pi$. Por tanto, su área es

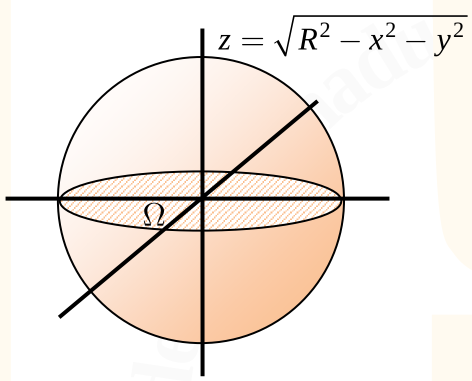


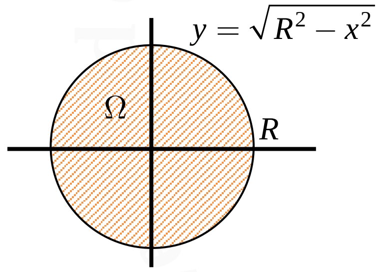
$$\iint_\Omega 1\,dx\,dy = \iint_\Omega r\,dr\,d\varphi = \int_0^7\int_0^{2\pi} r\,d\varphi\,dr = 2\pi\frac{7^2}{2} = \pi 7^2$$

Si $F(x,y)=x$ entonces

$$\iint_\Omega F(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Omega x\,dx\,dy = \int_0^7\int_0^{2\pi} r^2\cos(\varphi)\,d\varphi\,dr$$
$$= \int_0^7 \left[r^2\operatorname{sen}(\varphi)\right]_0^{2\pi} dr = 0$$

Ejemplo. Para medir el volumen de la mitad superior de una esfera de radio R se necesita conocer el suelo sobre el que se va a calcular la integral (en el dibujo aparece rallado) y la gráfica de la función que marca el techo del objeto. Si Ω denota el suelo y





$$F(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

entonces el volumen de la mitad superior de la esfera es

$$\iint_\Omega F(x,y)\,dx\,dy\,.$$

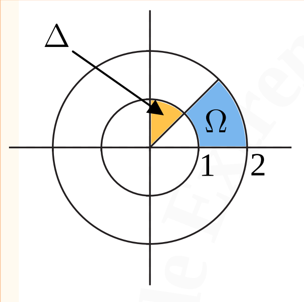
Este cálculo se puede hacer en coordenadas cartesianas

$$\iint_\Omega F(x,y)\,dx\,dy = \int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dydx$$

y no parece sencillo. En cambio, en coordenadas polares

$$\iint_\Omega F(x,y)\,dx\,dy = \int_0^R\int_0^{2\pi} r\sqrt{R^2-r^2}\,d\varphi dr$$
$$= 2\pi\int_0^R r\sqrt{R^2-r^2}\,dr = 2\pi\left[\left(\frac{-1}{3}\right)\left(R^2-r^2\right)^{3/2}\right]_0^R$$
$$= \frac{2}{3}\pi R^3$$

Coordenadas polares



Las coordenadas polares son idóneas para calcular integrales sobre conjuntos circulares del tipo de los que aparecen a la izquierda. Por ejemplo, resultan muy fáciles las integrales

$$\iint_{\Delta} x\,dx\,dy, \quad \iint_{\Omega} dx\,dy, \quad \iint_{\Omega} (y-x)\,dx\,dy$$

siempre que se utilicen coordenadas polares. En estas coordenadas

$$\Delta = \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ \pi/4 \le \varphi \le \pi/2 \end{cases} \qquad \Omega = \begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le \pi/4 \end{cases}$$

y así

$$\iint_{\Delta} x\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{\pi/4}^{\pi/2} r^2 \cos\varphi\,d\varphi\,dr$$

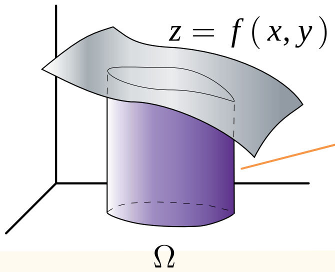
$$\iint_{\Omega} dx\,dy = \int_1^2 \int_0^{\pi/4} r\,d\varphi\,dr$$

$$\iint_{\Omega} (y-x)\,dx\,dy = \int_1^2 \int_0^{\pi/4} r^2 (\operatorname{sen}\varphi - \cos\varphi)\,d\varphi\,dr$$

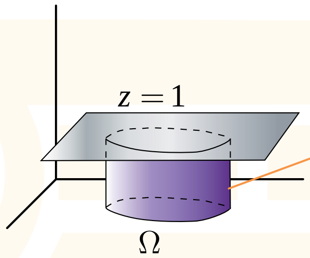
¿Qué miden las integrales dobles y triples?

Conjuntos Ω en el plano (Ω es el *suelo* en los dos primeros dibujos)

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy$$

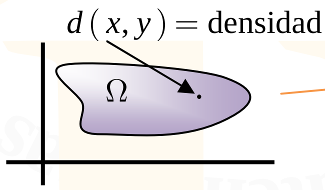


"vol" = $\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy$



vol = $\iint_\Omega 1\,dxdy = \text{área}(\Omega) = |\Omega|$

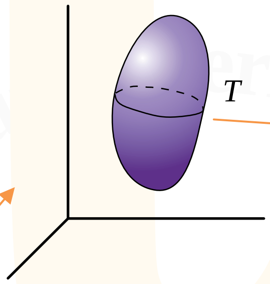
(un sólido de base Ω y altura 1 tiene como volumen el área de su base)



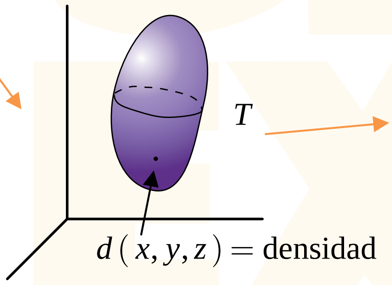
$masa(\Omega) = \iint_\Omega d(x,y)\,dxdy$

Conjuntos T en el espacio

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dxdydz$$



$\text{vol}(T) = |T| = \iiint_T 1\,dxdydz$



$\text{masa}(T) = \iiint_T d(x,y,z)\,dxdydz$

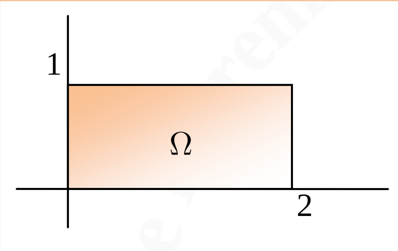
La misma expresión puede calcular varias magnitudes (que coinciden) a la vez. Por ejemplo,

$$\iint_\Omega (x^2 + y)\,dxdy$$

mide el volumen del sólido que tiene a Ω como *suelo* y a la gráfica de $x^2 + y$ como *techo*; pero también mide la masa de Ω si en cada punto (x,y) de Ω la densidad es $d(x,y) = x^2 + y$.

Siempre que interviene la densidad, las integrales calculan magnitudes relacionadas con la masa.

Ejemplo. Si Ω es el rectángulo $[0,2]\times[0,1]$ entonces su área es 2 (es el producto de su base por su altura), aunque se puede calcular con integrales



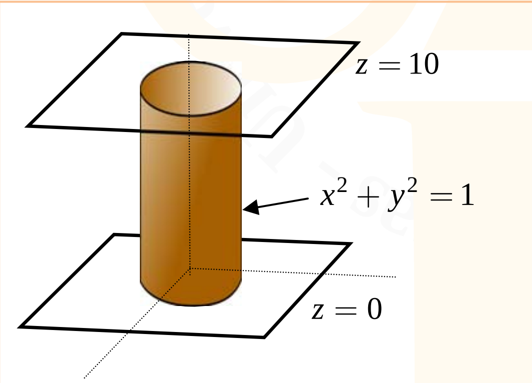
$$|\Omega| = \iint_\Omega 1\,dx\,dy = \int_0^2\int_0^1 dy\,dx = 2.$$

Si en cada punto (x,y) la densidad viene dada por la función $d(x,y) = x+y$ entonces la masa de Ω es

$$m(\Omega) = \iint_\Omega (x+y)\,dx\,dy = \int_0^2\int_0^1 (x+y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^2 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 dx = \int_0^2 \left(x+\frac{1}{2}\right)dx = 3$$

Ejemplo. El cilindro T delimitado por las superficies



$$T = \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ z = 0 \\ z = 10 \end{cases}$$

tiene como volumen el área de la base por la altura, es decir, $|T| = 10\pi$. Utilizando integrales

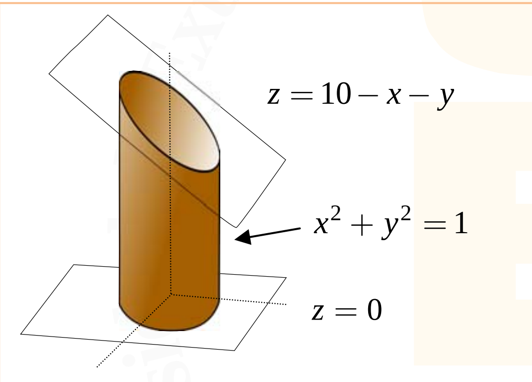
$$|T| = \iiint_T 1\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{10} r\,dz\,d\varphi\,dr = 10\pi$$

Si en cada punto (x,y,z) del cilindro se sabe que la densidad es $d(x,y,z) = 10-z$, la masa del cilindro será

$$m(T) = \iiint_T d(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{10} (10-z)\,r\,dz\,d\varphi\,dr$$

Los mismos cálculos (volumen y masa) se puede hacer con el cilindro U delimitado por



$$U = \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ z = 0 \\ z = 10-x-y \end{cases}$$

(ahora la tapadera superior no es horizontal). En este caso el volumen es

$$|U| = \iiint_U 1\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{10-x-y} r\,dz\,d\varphi\,dr$$

y, si en cada punto (x,y,z) la densidad es $d(x,y,z) = x$, la masa es

$$m(U) = \iiint_U d(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{10-r\cos\varphi-r\,\mathrm{sen}\,\varphi} r^2\cos\varphi\,dz\,d\varphi\,dr$$

La integral como promedio. Centros geométricos

El **promedio** o **valor medio** de una función $F(x,\ldots)$ en un conjunto A es

$$\text{promedio de } F \text{ en } A = \frac{1}{|A|}\int_A F$$

donde la integral es simple, doble, triple,… dependiendo del número de variables involucradas. Si el conjunto A es un intervalo de $\mathbb{R}$ entonces la integral es simple; si el conjunto está en el plano, la integral es doble, etc.

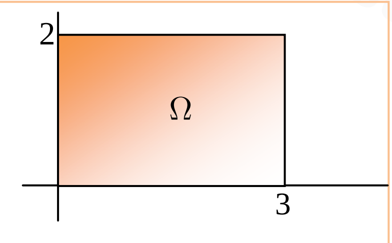
Ejemplo. El valor medio de la función $f(x)=x^2$ en el intervalo $A=[0,2]$ es

$$\frac{1}{|A|}\int_A F = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

Ejemplo. Sobre los puntos de un círculo de centro el origen y radio R el promedio de las distancias al centro del círculo viene dado por

$$\frac{1}{|A|}\int_A F = \frac{1}{\pi R^2}\iint_A \sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R\int_0^{2\pi} r^2 d\varphi dr = \frac{2\pi}{\pi R^2}\int_0^R r^2 dr = \frac{2}{R^2}\cdot\frac{R^3}{3} = \frac{2}{3}R$$

Ejemplo. En el rectángulo $\Omega=[0,3]\times[0,2]$ del dibujo se supone que en cada punto (x,y) la

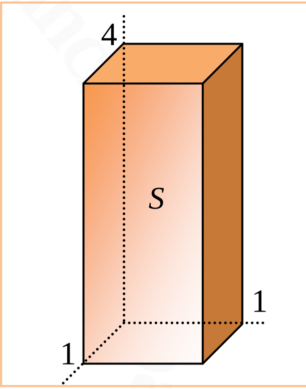


temperatura viene dada por $T(x,y)=x+y$. Por ejemplo, en el origen la temperatura es 0 y en el punto $(3,2)$ la temperatura es 5. La temperatura media en el rectángulo es

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega T = \frac{1}{6}\iint_\Omega (x+y) = \frac{1}{6}\int_0^3\int_0^2 (x+y)dydx$$
$$= \frac{1}{6}\int_0^3 (2x+2)dx = \frac{1}{6}\left[x^2+2x\right]_0^3 = \frac{5}{2}$$

Ejemplo. En un paralelepípedo rectangular $S=[0,1]\times[0,1]\times[0,4]$ la temperatura en cada punto (x,y,z) viene dada por la función $T(x,y,z)=100-x+y^2+3z$. Entonces, la temperatura media es

$$\frac{1}{|S|}\int_S T = \frac{1}{4}\iiint_S \left(100-x+y^2+3z\right)$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^1\int_0^1\int_0^4 \left(100-x+y^2+3z\right)dz\,dy\,dx$$
$$= 105{,}8$$



Como casos especiales de valores medios se pueden utilizar las funciones que marcan las coordenadas de los puntos, es decir, $F(x,\ldots)=x$, o bien $F(x,\ldots)=y$, etc. Al calcular los valores medios con estas funciones sobre un conjunto, se están calculando las coordenadas medias de los puntos de dicho conjunto. Se consigue así encontrar un punto que sea el *centro* de dicho conjunto. Este punto se llama **centro geométrico** y la forma de calcularlo se describe a continuación.

La integral como promedio. Centros geométricos

Para un conjunto Ω del plano, se llama centro geométrico al punto $(\overline{x},\overline{y})$ donde

$$\overline{x} = \frac{1}{|\Omega|}\iint_\Omega x = \frac{\displaystyle\iint_\Omega x}{\displaystyle\iint_\Omega 1}, \qquad \overline{y} = \frac{1}{|\Omega|}\iint_\Omega y = \frac{\displaystyle\iint_\Omega y}{\displaystyle\iint_\Omega 1}$$

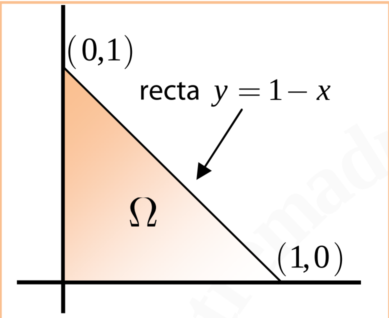
Para un conjunto T del espacio, se llama centro geométrico al punto $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ donde

$$\overline{x} = \frac{1}{|T|}\iiint_T x = \frac{\displaystyle\iiint_T x}{\displaystyle\iiint_T 1}, \quad \overline{y} = \frac{1}{|T|}\iiint_T y = \frac{\displaystyle\iiint_T y}{\displaystyle\iiint_T 1}, \quad \overline{z} = \frac{1}{|T|}\iiint_T z = \frac{\displaystyle\iiint_T z}{\displaystyle\iiint_T 1}$$

A veces se pueden no hacer integrales para calcular $|\Omega|$ o $|T|$ si son figuras de las que se conoce su área o su volumen, como en los casos de círculos, esferas, rectángulos y paralelepípedos. En otro caso se debe hacer la integral doble o triple con la función constante 1 para calcular esa área o ese volumen.

Cada centro geométrico pasa por cualquier eje de simetría del conjunto, así que para figuras conocidas como rectángulos, círculos,… el centro geométrico es el corte de los ejes de simetría. En un rectángulo es donde se cortan las diagonales, por ejemplo. En un círculo, donde se cortan dos diámetros. Para conjuntos que sólo presentan un eje de simetría esta propiedad puede ayudar en los cálculos de las coordenadas del centro geométrico.

Ejemplo. Para el triángulo Ω del dibujo el centro geométrico se calcula así:

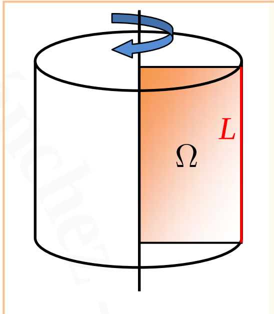


$$\overline{x} = \frac{1}{|\Omega|}\iint_\Omega x = 2\int_0^1\int_0^{1-x} x\,dy\,dx = \frac{1}{3}$$

$$\overline{y} = \frac{1}{|\Omega|}\iint_\Omega y = 2\int_0^1\int_0^{1-x} y\,dy\,dx = \frac{1}{3}$$

Además, este conjunto tiene un eje de simetría, la diagonal del primer cuadrante cuya ecuación es $x = y$. Luego el centro geométrico debe cumplir esa ecuación y por tanto debe cumplirse que $\overline{x} = \overline{y}$ en este triángulo. Esto permite ahorrarse los cálculos para hallar $\overline{y}$.

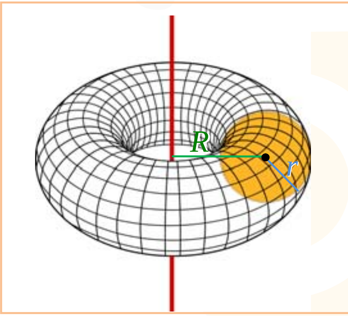
El teorema de Pappus



Si se hace girar una figura plana Ω alrededor de un eje que no la atraviesa, se obtiene un sólido *de revolución*, cuyo volumen y superficie vienen dados por

$$V = 2\pi \cdot \operatorname{dist}(\textit{eje}, (\overline{x}_\Omega, \overline{y}_\Omega)) \cdot |\Omega|$$
$$S = 2\pi \cdot \operatorname{dist}(\textit{eje}, (\overline{x}_L, \overline{y}_L)) \cdot |L|$$

donde $(\overline{x}_\Omega, \overline{y}_\Omega)$ y $(\overline{x}_L, \overline{y}_L)$ son los centros de Ω y L [(1)]. Este resultado se conoce como **teorema de Pappus** (de Alejandría, siglos III-IV).



Ejemplo. Si se considera un *toro* de radio menor r y radio mayor R, como en la figura, entonces su superficie y su volumen son

$$S = 2\pi \cdot R \cdot 2\pi r = 4\pi^2 rR$$

$$V = 2\pi \cdot R \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 r^2 R$$

Ejemplo. Para un cilindro de altura h cuya base sea un círculo de radio r el volumen es $V = 2\pi \cdot (r/2) \cdot rh = \pi r^2 h$, que es el área de la base por la altura. También se puede conocer su superficie, que es $S = 2\pi \cdot r \cdot h + 2\pi \cdot r^2 = 2\pi r(r+h)$, y se corresponde con el área lateral más el área de las dos tapaderas del cilindro.

Estos ejemplos muestran que algunas veces se puede utilizar el teorema de Pappus de forma casi instantánea si se conocen (por motivos geométricos por ejemplo o bien porque el enunciado dice qué valores son) las magnitudes que se utilizan: la distancia del eje al centro de gravedad y el área y el perímetro de lo que se hace girar.

En general, para hacer el cálculo de un volumen de revolución alrededor de un eje de una figura plana Ω requiere hacer lo siguiente.

1. Calcular la ecuación del eje. Es una recta en el plano y por lo tanto debe tener una ecuación del tipo $ax + by + c = 0$. A veces se dice qué recta es y a veces hay que calcularla.

2. Calcular el área $|\Omega|$ y el centro geométrico $(\overline{x}, \overline{y})$ de Ω donde, si no se conocen por motivos geométricos, se deben hacer los cálculos

$$\overline{x} = \frac{1}{|\Omega|} \iint_\Omega x = \frac{\iint_\Omega x}{\iint_\Omega 1}, \quad \overline{y} = \frac{1}{|\Omega|} \iint_\Omega y = \frac{\iint_\Omega y}{\iint_\Omega 1}$$

3. La distancia del eje al centro geométrico es

$$\operatorname{dist}(\textit{eje}, (\overline{x}, \overline{y})) = \operatorname{dist}(ax + by + c = 0, (\overline{x}, \overline{y})) = \frac{|a\overline{x} + b\overline{y} + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

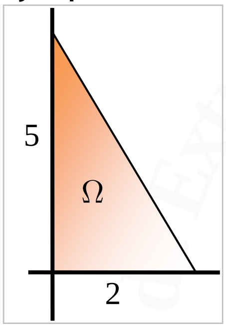
(Si en la ecuación de la recta se tiene que $a = 0$ entonces en la expresión de la distancia no interviene el valor $\overline{x}$ y no hace falta su cálculo. Lo mismo ocurre si $b = 0$ ya que entonces no hace falta calcular $\overline{y}$)

4. Finalmente, el volumen del sólido de revolución es

$$V = 2\pi \cdot \operatorname{dist}(\textit{eje}, (\overline{x}, \overline{y})) \cdot |\Omega|$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Ejemplo. Un cono cuya base es un círculo de radio 2 y que tiene una altura 5 es un sólido de revolución, resultado de hacer girar un triángulo de base 2 y altura 5 alrededor del eje Y, tal y como muestra la figura.



El eje es la recta $x=0$ y así la distancia del centro geométrico al eje es $\overline{x}$. El volumen del cono es

$$V=2\pi\cdot\overline{x}\cdot\frac{5\cdot 2}{2}=10\pi\cdot\overline{x}=\frac{20\pi}{3}$$

puesto que el valor de $\overline{x}$ es

$$\overline{x}=\frac{1}{|\Omega|}\iint_{\Omega}x=\frac{1}{5}\int_0^2\int_0^{\frac{-5}{2}x+5}x\,dy\,dx=\frac{1}{5}\int_0^2 x\left(\tfrac{-5}{2}x+5\right)dx=\frac{2}{3}.$$

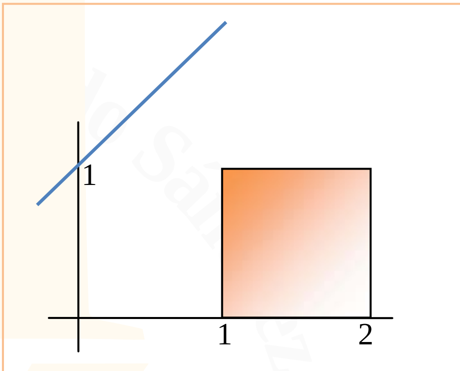
Para un cono de altura 1 cuya base tenga radio 1 el volumen que se obtiene $\pi/3$. Siempre la tercera parte del cilindro que se forma con las mismas dimensiones.

Ejemplo. El volumen de una semiesfera de radio R es el resultado de hacer girar un cuarto de círculo del mismo radio alrededor de un diámetro. Así, el volumen de la esfera es

$$\begin{aligned} V &= 2\cdot 2\pi\cdot\overline{x}\cdot|\Omega|=4\pi\cdot\iint_{\Omega}x\,dx\,dy=4\pi\cdot\int_0^R\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^2\cos(\alpha)\,d\alpha\,dr \\ &= 4\pi\cdot\int_0^R r^2\,dr=\frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$

donde Ω es el cuarto de círculo de radio R situado en el primer cuadrante, cuyos límites de integración son $0\le r\le R,\ 0\le\alpha\le\pi/2$

Ejemplo. Calcular el volumen del sólido que se obtiene al hace girar el cuadrado $\Omega=[1,2]\times[0,1]$ alrededor de la recta que une los puntos $(0,1)$ y $(1,2)$.



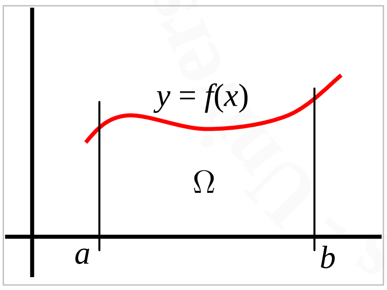
El eje es una recta $ax+by+c=0$ donde los valores a, b y c se calculan al poner como condiciones que la recta pase por los puntos $(0,1)$ y $(1,2)$ y así

$$\begin{aligned} a\cdot 0+b\cdot 1+c=0 \\ a\cdot 1+b\cdot 2+c=0 \end{aligned}$$

Al resolver este sistema se obtiene la recta $y=x+1$. La distancia de esta recta al centro geométrico $(\overline{x},\overline{y})$ es

$$\operatorname{dist}(eje,(\overline{x},\overline{y}))=\operatorname{dist}(x-y+1=0,(\overline{x},\overline{y}))=\frac{|\overline{x}-\overline{y}+1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

ya que $(\overline{x},\overline{y})=(3/2,1/2)$. El volumen del sólido de revolución es $V=2\pi\cdot\sqrt{2}\cdot 1=2\pi\sqrt{2}$.



Otra aplicación del teorema de Pappus es el cálculo del volumen del sólido de revolución que resulta al hacer girar la figura Ω que encierra la gráfica de una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

Si hacemos girar a Ω alrededor del eje X, el volumen del sólido de revolución será

$$\begin{aligned} V &= 2\pi\cdot\overline{y}\cdot|\Omega| = 2\pi\cdot\iint_{\Omega} y\,dx\,dy = 2\pi\cdot\int_a^b\int_0^{f(x)} y\,dy\,dx \\ &= \pi\cdot\int_a^b f(x)^2\,dx \end{aligned}$$

Si hacemos girar a Ω alrededor del eje Y , el volumen del sólido de revolución será

$$\begin{aligned} V &= 2\pi\cdot\overline{x}\cdot|\Omega| = 2\pi\cdot\iint_{\Omega} x\,dx\,dy = 2\pi\cdot\int_a^b\int_0^{f(x)} x\,dy\,dx \\ &= 2\pi\cdot\int_a^b x\,f(x)dx \end{aligned}$$

Nota. Para el cálculo del centro geométrico $(\overline{x},\overline{y},\ldots)$ de una curva

$$L\ :\ \mathbf{r}(t) = (x(t),y(t)),\quad t\in[a,b]$$

hay que escribir

$$\overline{x} = \frac{\int_a^b x\cdot\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\ dt}{\int_a^b \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\ dt}$$

Así, para el semicírculo superior de radio R cuya ecuación es

$$L\ :\ \mathbf{r}(t) = (R\cos(t),R\,\mathrm{sen}(t)),\quad t\in[0,\pi]$$

se obtiene

$$\overline{x} = \frac{\int_0^{\pi} R\cos(t)\cdot R\ dt}{\int_0^{\pi} R\ dt} = 0$$

$$\overline{y} = \frac{\int_0^{\pi} R\,\mathrm{sen}(t)\cdot R\ dt}{\int_0^{\pi} R\ dt} = \frac{2R^2}{\pi R} = \frac{2R}{\pi}$$

(1) Puede verse en http://mathworld.wolfram.com/PappussCentroidTheorem.html

Distintos tipos de integrales

Integrales simples, dobles y triples

$\int_I f(x)dx$	Área que delimita la función $f(x)$ sobre el intervalo I, en concreto cuánto hay de positivo menos cuánto hay de negativo. Por ejemplo $\int_{-1}^{1} x\,dx = 0$
$\int_I \lvert f(x)\rvert dx$	Área que delimita la función $f(x)$ sobre el intervalo I en total: cuánto hay de positivo más cuánto hay de negativo. Por ejemplo $\int_{-1}^{1} \lvert x\rvert dx = 1$
$\int_I \lvert f(x)-g(x)\rvert dx$	Área encerrada por las gráficas de las funciones f y g en el intervalo I
$\frac{1}{\lvert I\rvert}\int_I f(x)dx$	Valor medio de f en el intervalo I
$\iint_\Omega F(x,y)\,dx\,dy$	Volumen (parte positiva menos parte negativa) del sólido que tiene a Ω como *suelo* y como *techo* la gráfica de F. Para la función $F(x,y)=1$ se obtiene $\text{área}(\Omega) = \lvert\Omega\rvert = \iint_\Omega 1\,dx\,dy$
$\iint_\Omega \lvert F(x,y)\rvert dx\,dy$	Volumen total (parte positiva más parte negativa) del sólido que tiene a Ω como *suelo* y como *techo* la gráfica de F
$\iint_\Omega \lvert F(x,y)-G(x,y)\rvert dx\,dy$	Volumen del sólido encerrado entre las gráficas de F y G, que tiene a Ω como proyección en el suelo
$\frac{1}{\lvert\Omega\rvert}\iint_\Omega F(x,y)\,dx\,dy$	Valor medio de F en Ω
$\frac{1}{\lvert\Omega\rvert}\iint_\Omega x\,dx\,dy$	Coordenada x del centro geométrico de Ω
$\iint_\Omega d(x,y)\,dx\,dy$	Masa $m(\Omega)$ de Ω, entendiendo que en cada punto (x,y) de Ω la densidad es $d(x,y)$
$\iiint_T 1\,dx\,dy\,dz$	Volumen $\lvert T\rvert$ de T
$\iiint_T d(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$	Masa $m(T)$ del sólido T entendiendo que en cada punto (x,y,z) de T la densidad es $d(x,y,z)$
$\frac{1}{\lvert T\rvert}\iiint_T x\,dx\,dy\,dz$	Coordenada x del centro geométrico de T

Teorema de Pappus. Cuando se hace girar una figura plana Ω alrededor de un eje que no la atraviesa, se obtiene un sólido *de revolución*, cuyo volumen viene dado por

$$V = 2\pi \cdot \text{dist}(eje, (\overline{x}, \overline{y})) \cdot \lvert\Omega\rvert$$

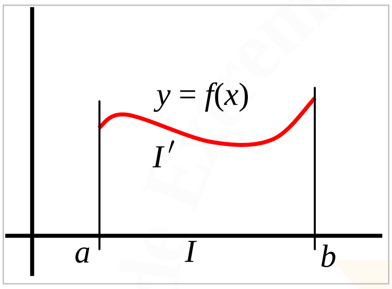
y su superficie por

$$S = 2\pi \cdot \text{dist}(eje, (\overline{x}, \overline{y})) \cdot L$$

donde $(\overline{x}, \overline{y})$ es el centro geométrico de Ω y L es la longitud del borde de Ω.

Integrales de superficie

Para una función $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$, ¿cómo se mide la longitud de la gráfica? Es evidente que



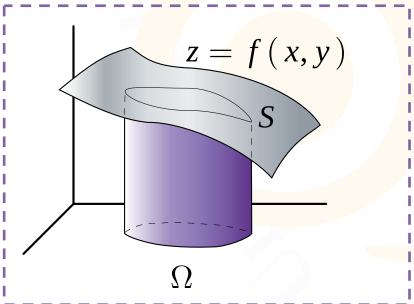
$$\int_I 1dx = |I| = b-a$$

$$\int_I f(x)dx = \text{área encerrada por la gráfica}$$

así que esa longitud (en rojo) debe medirse con otra expresión. Resulta que

$$long(f)_{[a,b]} = |I'| = \int_I \sqrt{1+|f'(x)|^2}\,dx$$

En el caso de dos variables, si S es la imagen de Ω en la gráfica de la función (son las dos tapaderas del sólido), entonces



$$\iint_\Omega 1dxdy = |\Omega|$$

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \text{volumen del sólido}$$

$$\iint_\Omega \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy = |S|$$

Esta última se llama *integral de superficie*.
Por ejemplo, la superficie S de una esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$ de radio R se puede calcular y se obtiene

$$z=\left(R^2-x^2-y^2\right)^{1/2}$$

$$\begin{aligned}
|S| &= 2\int_0^R\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dydx\\
&= 2\int_0^R\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2}\,dydx\\
&= 2\int_0^R\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}}\,dydx = 2R\int_0^R\int_0^{2\pi} r\left(R^2-r^2\right)^{-1/2}d\varphi dr\\
&= 4\pi R\int_0^R r\left(R^2-r^2\right)^{-1/2}dr\\
&= 4\pi R\left[-\left(R^2-r^2\right)^{1/2}\right]_0^R = 4\pi R^2
\end{aligned}$$

La superficie de la Tierra es aproximadamente $4\pi\cdot 6370^2 = 509.904.364$ Km²

Otro ejemplo: se puede calcular el área del cuadrilátero que forman los puntos

$$(0,0,4),(1,0,3),(0,1,2),(1,1,1)$$

Para este cálculo hay que encontrar el plano en el que se sitúa ese cuadrilátero y cuál es su sombra en el suelo. Esto último es fácil: se trata del cuadrilátero que se forma poniendo la coordenada z igual a 0 en los cuatro puntos.

En el caso en que haya densidad, todas las integrales calculan masas (en la integral aparece multiplicando la función densidad).