Cálculo II

Ejemplos y ejercicios

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

08 · 04 · 2022

La notación $\int_a^b f(x)\,dx$ es más antigua que $\int_a^b f$. Durante muchos años la primera fue el símbolo único para la integral. Leibniz utilizó este símbolo porque consideraba a la integral como la suma (designada por $\int$) de infinitos rectángulos de altura $f(x)$ y anchura dx "infinitamente pequeña". Autores posteriores utilizaron $x_0, \ldots, x_n$ para designar los puntos de una partición, y abreviaron $x_i - x_{i-1}$ por Δx_i. La integral se definió como el límite cuando Δx_i tendía a 0 de las sumas $\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i$ (análogas a las sumas inferiores y superiores). El hecho de que el límite se obtenga cambiando $\sum$ por $\int$, $f(x_i)$ por $f(x)$ y Δx_i por dx encanta a muchas personas. (M. Spivak, Cálculo Infinitesimal)

En estas hojas pueden encontrarse ejemplos y ejercicios. Algunos tienen la respuesta (o demostración) y se trata entonces de entender los pasos que se dan. En otros se dan algunas indicaciones de cómo se puede proceder.

Funciones Riemann integrables

1 La longitud de cada punto $x \in [0,1]$ es $\operatorname{long}\{x\} = 0$. Sin embargo, la unión de todos ellos $[0,1] = \cup_{x\in[0,1]}\{x\}$ tiene longitud $\operatorname{long}[0,1] = 1$.

2 Calcular el área que encierra la función $f(x) = 1/\log x$ en el intervalo $[2, 40]$

Primero se elige cuántas alturas se van a medir. Por ejemplo, 10. Por tanto necesitamos conocer el valor de la función en 10 puntos, comenzando en 2 y terminando en 40. Es un intervalo de longitud 38, luego necesitamos dividir $[2, 40]$ en 10 trozos, cada uno de los cuales tendrá una longitud de 38/10. Los puntos elegidos son

$$x_1 = 2 + \frac{38}{10},\ x_2 = 2 + 2\cdot\frac{38}{10},\ x_3 = 2 + 3\cdot\frac{38}{10},\ \ldots,\ x_9 = 2 + 9\cdot\frac{38}{10},\ x_{10} = 40.$$

La aproximación del área es

$$(40-2)\cdot\frac{f(x_1) + \cdots + f(x_{10})}{10} = 13.3879945169928\ldots$$

A medida que se aumente el número de puntos mejor será la aproximación del área, que es un valor cercano a 14.7943804921387711258491102051 . . .

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

3 El mismo procedimiento se puede usar para calcular el área de la función $f(x) = x^2$ definida en el intervalo $[0, 1]$.

Para $n \in \mathbb{N}$ se eligen los puntos $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1$ (es una partición del intervalo con puntos igualmente separados) y el área encerrada por la gráfica de la función se puede aproximar por

$$\int_0^1 x^2 \simeq (1-0) \cdot \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f(1)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 \to \frac{1}{3}$$

si $n \to \infty$. En efecto, por inducción puede probarse que

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+2)}{6}$$

y así

$$\frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} \to \frac{1}{3}.$$

4 Igualmente, se puede comprobar que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\log(x+2)} = 1.1184248145\ldots$

5 Comprobar que el conjunto $\mathscr{E}[a, b]$ de funciones escalonadas en $[a, b]$ es un espacio vectorial en el cual la aplicación $f \in \mathscr{E}[a, b] \longrightarrow \int_a^b f$ es lineal.

6 Probar que además este funcional es monótono:

$$f, g \in \mathscr{E}[a, b], \quad f \leq g \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g,$$

donde $f \leq g$ significa que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

Probar que si $f, g \in \mathscr{E}[a, b]$ entonces $\inf(f, g), \sup(f, g) \in \mathscr{E}[a, b]$, donde, por definición, $\inf(f, g)(x) = \inf(f(x), g(x))$ y $\sup(f, g)(x) = \sup(f(x), g(x))$.

7 Con las funciones

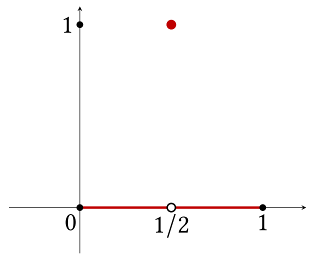
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,\ 1] \\ -1 & \text{si } x \in (1,\ 2] \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [0,\ 1] \\ 1 & \text{si } x \in (1,\ 2] \end{cases}$$

se puede comprobar que, en general, no hay ninguna relación entre la integral de un producto y el producto de las integrales:

$$\begin{aligned} -2 = \int_0^2 f \cdot g &< \left(\int_0^2 f\right) \cdot \left(\int_0^2 g\right) = 0 \\ 2 = \int_0^2 f \cdot f &> \left(\int_0^2 f\right) \cdot \left(\int_0^2 f\right) = 0 \\ 1 = \int_0^1 f \cdot f &= \left(\int_0^1 f\right) \cdot \left(\int_0^1 f\right) = 1 \end{aligned}$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

8 La función f que vale cero en todos los puntos de $[0, 1]$ salvo $f(1/2) = 1$ es $\mathscr{R}$-integrable. Para esta función se eligen $h = 0$ y



$$k : x \in [0, 1] \longrightarrow k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right] \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

que verifican $h \leq f \leq k$ y además

$$\int_0^1 (k - h) \ = \ \int_0^1 k \ = \ \varepsilon$$

La misma idea sirve para probar que son $\mathscr{R}$-integrables funciones que son constantes en un intervalo salvo en una cantidad finita de puntos en los que la función toma valores arbitrarios.

Se puede probar que la función

$$f : x \in [0, 1] \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

es Riemann integrable.

9 Para la función f de Dirichlet y cualquier partición P de $[0,\ 1]$ se tiene

$$0 = L(f, P) \ \leq \ S(f, P) \ \leq \ U(f, P) = 1.$$

10 Justificar si la función

$$f : x \in [0,\ 1] \longrightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

es o no Riemann integrable en $[0, 1]$.

11 Poner un ejemplo de una función $f : [0,\ 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ que sea acotada, no $\mathscr{R}$-integrable, pero tal que f^2 sí sea $\mathscr{R}$-integrable.

12 Calcular el valor de las sumas de Riemann $S(f, P), L(f, P)$ y $U(f, P)$ para la función f que vale 0 en todo el intervalo $[0, 1]$ excepto en el valor $f(1/2) = 1$.

13 Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función monótona, entonces f es continua casi siempre.

Basta considerar el teorema de Lebesgue, ya que toda función f monótona en $[a, b]$ es Riemann integrable en dicho intervalo.

14 En el resultado ya visto en teoría

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Proposición. *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada. Son equivalentes*

a) *f es $\mathscr{R}$-integrable en $[a,b]$, es decir, existe $\int_a^b f$*

b) *Existe un número real $\int_a^b f$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P_0 que verifica $\left|S(f,P) - \int_a^b f\right| < \varepsilon$ para $P \geq P_0$*

c) *Para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P verificando $\left|U(f,P) - L(f,P)\right| < \varepsilon$*

d) $\sup\{L(f,P) \;:\; P \in \mathscr{P}[a,b]\} \;=\; \inf\{U(f,P) \;:\; P \in \mathscr{P}[a,b]\} \;=\; \displaystyle\int_a^b f$

se podría añadir un apartado más (equivalente a todos ellos)

b') *Existe un número real $\int_a^b f$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\left|S(f,P) - \int_a^b f\right| < \varepsilon$ para toda partición que verifique $\|P\| < \delta$*

donde $\|P\|$ es la mayor longitud de los subintervalos de la partición P.

La equivalencia b) $\Leftrightarrow$ b') puede verse, por ejemplo, en T.M. Apostol, Análisis Matemático, 2ª ed. pág.212 y 216.

Como consecuencia, si $f \in \mathscr{R}[a,b]$ entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right).$$

Esta identidad se utiliza para calcular la integral $\int_a^b f$ utilizando particiones equidistantes (dividiendo el intervalo en puntos igualmente separados)

$$a = x_0 < x_1 = x_0 + \frac{b-a}{n} < x_2 = x_1 + \frac{b-a}{n} = x_0 + 2\cdot\frac{b-a}{n} < \ldots < x_n = x_0 + n\cdot\frac{b-a}{n} = b,$$

y entonces se puede escribir

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \;=\; \lim_{n\to\infty} (b-a)\,\frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}.$$

15 Utilizando el problema anterior, se puede deducir que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2} \;=\; \frac{\pi}{4}.$$

Para ello debe notarse que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2} \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2/n + n} \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1/n}{k^2/n^2 + 1} \;=\; \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2/n^2 + 1}$$

que nos da como pista que la función que hay que utilizar es $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ en el intervalo $[0,1]$. En ese caso la fórmula

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

se convierte en

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}.$$

El valor $\dfrac{\pi}{4}$ se ha obtenido teniendo en cuenta que una primitiva de f es la función $\operatorname{arctg} x$.

16 Utilizando ciertas sumas de Riemann y sabiendo que $\int_0^1 x = 1/2$ se puede establecer la suma de una serie.

Si para algún $n \in \mathbb{N}$ se eligen los puntos $0, 1/n, 2/n, \ldots, 1$ entonces

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$$

converge a $1/2$ (esto es conocido por otros motivos: se trata de la suma de una progresión aritmética).

Se puede repetir este proceso partiendo de $\int_0^1 x^2 = 1/3$ o similar.

17 Utilizando la partición $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ en el intervalo $[1, n]$ y las sumas inferiores y superiores de la función $f(x) = 1/x$ en dicho intervalor se tiene

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \leq \int_1^n \frac{1}{x} = \log n \leq 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}.$$

Esto da una idea de la velocidad a la que crece la serie armónica. La constante γ de Euler-Mascheroni tiene mucho que ver con esto.

18 Sea $f : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función creciente.

a) Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$f(1)+\ldots+f(n-1) < \int_1^n f < f(2)+\ldots+f(n).$$

b) Utilizando el apartado anterior para el caso particular $f(x) = \log x$, demostrar

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n} < \frac{n^{n+2}}{e^{n-1}}.$$

Concluir de ahí que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

19 Si $f, g \in \mathscr{R}[a, b]$ entonces $f \cdot g \in \mathscr{R}[a, b]$, aunque ya se ha visto que en general $\int_a^b f \cdot g$ y $(\int_a^b) \cdot (\int_a^b g)$ son distintos.

Para probar que el producto de funciones $\mathscr{R}$-integrables es una función del mismo tipo se puede hacer:

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

a) Si $f \in \mathscr{R}[a,b]$ entonces $f^2 \in \mathscr{R}[a,b]$.

b) Como consecuencia, si $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$ entonces $f \cdot g \in \mathscr{R}[a,b]$

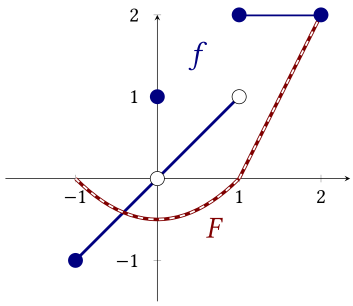
Para demostrar a) se escribe $M_k(f^2) = \big(M_k(|f|)\big)^2$ y $m_k(f^2) = \big(m_k(|f|)\big)^2$ y así

$$\begin{aligned} M_k(f^2) - m_k(f^2) &= \big(M_k(|f|) + m_k(|f|)\big) \cdot \big(M_k(|f|) - m_k(|f|)\big) \\ &\leq 2M(|f|) \cdot \big(M_k(|f|) - m_k(|f|)\big). \end{aligned}$$

Para probar b) se utiliza la igualdad

$$2fg = (f+g)^2 - f^2 - g^2.$$

20 Se considera la función



$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in [-1,1),\ x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ 2 & \text{si} \quad x \in [1,2] \end{cases}$$

y sea

$$F : x \in [-1,2] \longrightarrow F(x) = \int_{-1}^{x} f.$$

Comprobar que

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x \in [-1,1) \\ 2x - 2 & \text{si} \quad x \in [1,2] \end{cases}$$

(tiene que salir una función continua y que además sea diferenciable en todos los puntos en los que f sea continua).

21 Calcular

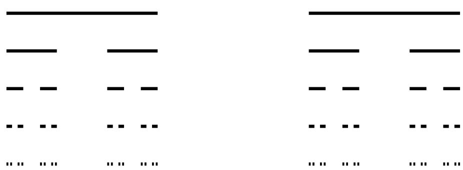
$$F : x \in [-1,\ 1] \longrightarrow F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+t+1}}$$

Hay que utilizar que

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \log\left(u + \sqrt{a^2+u^2}\right)$$

22 Identificar el cardinal del conjunto de Cantor como el cardinal de $[0,1]$ en base 2 o como el cardinal de las sucesiones cuyos términos con 0 y 1. Poner este cardinal como $2^{\mathbb{N}}$ y establecer $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$

23 Sobre el conjunto de Cantor



Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Se puede construir un conjunto similar pero en base 4 o en base 10. Se obtiene un conjunto con las mismas propiedades que el original conjunto (ternario) de Cantor. También se puede construir un conjunto de este tipo cuyo contenido es un valor no nulo (ver por ejemplo `http://en.wikipedia.org/wiki/Smith-Volterra-Cantor_set`)

24 Probar que la función característica del conjunto ternario de Cantor es Riemann-integrable en $[0, 1]$

Indicación: esta función característica es continua en el complementario C^c de C en $[0,\ 1]$, ya que C^c es un conjunto abierto. Basta aplicar el teorema de Lebesgue.

25 Se define la dimensión fractal como el cociente

$$\frac{\log n}{\log 1/\varepsilon},$$

donde n es el número de veces que se reproduce el objeto inicial en la primera generación, y ε es la escala en la que se encuentran las dimensiones de las reproducciones. En el caso del conjunto de Cantor, en la primera generación quedan dos ($n = 2$) intervalos iguales a $[0, 1]$, pero a escala $1/3$ ($\varepsilon = 1/3$) del original. Su dimensión fractal es

$$D_C = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0.63.$$

26 Se consideran las funciones

$$f_1(x) = \frac{\log x}{x}, \quad f_2(x) = \frac{1}{x \log^2 x}, \quad f_3(x) = \frac{1}{x^2}, \quad f_4(x) = \frac{1}{x \log^4 x}.$$

Justificar si son o no Riemann integrables en el intervalo $[2, +\infty)$, y calcular la integral de las que sí lo sean.

27 Probar que $f(x) = \log(x)/x^2$ es $\mathscr{R}$-integrable en $[4,\ +\infty)$ y calcular su integral $\displaystyle\int_4^{+\infty} f$.

(La primitiva de $\log(x)/x^2$ se hace por partes, eligiendo $u = \log x$ y $dv = dx/x^2$)

28 Se considera la función $f(x) = x^2$ y el conjunto $A = (0,\ 2] \cup \{n \in \mathbb{Z}\ :\ |n|\ \leq\ 10\}$.

a) Probar que $f\chi_A$ es integrable en el intervalo $[-10,\ 8]$

a) Calcular $\int_A f$

Nótese que aunque f sea una función continua en A, la función $f\chi_A$ no lo es en ningún intervalo que contenga a A, como $[-10,\ 8]$. Esta última función es continua c.p.d. y por tanto es integrable en cualquier intervalo que contenga a A. Por último, $\int_A f = \int_{-10}^{8} f\chi_A$.

Cálculo de primitivas

29 (Sobre el cálculo de primitivas.) Dada una función f,

a) ¿existe siempre una primitiva suya? La respuesta es no.

b) ¿y si f es elemental? Entonces, sí. Incluso tiene primitiva en cada intervalo en el que sea continua.

c) ¿y en ese caso la primitiva debe ser elemental? Otra vez, la respuesta es no. Hay funciones elementales, como $\operatorname{sen}(x^2)$, que tienen primitiva pero no es elemental. Esto no suele ser fácil de probar.

d) Si f es continua, entonces tiene primitiva F, cuya expresión es

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Además, se cumple $F' = f$.

30 (Sobre la primitiva de la primitiva.) Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces

$$F(x) \;=\; \int_a^x f(t)\,dt$$

es una primitiva suya: $F'(x) = f(x)$. A su vez, esta función F tiene primitiva, que es

$$G(x) \;=\; \int_a^x F(t)\,dt \;=\; \int_a^x \int_0^t f(s)\,ds\,dt.$$

Se tiene que

$$G(x) \;=\; \int_a^x (x-t)f(t)\,dt.$$

Para demostrar esta igualdad, se muestra que ambas expresiones coinciden en $x = a$ (ambas valen 0 en dicho punto) y además sus derivadas coinciden:

$$G'(x) \;=\; \left(\int_a^x F(t)\,dt\right)' \;=\; F(x) \;=\; \left(\int_a^x \int_0^t f(s)\,ds\,dt\right)',$$

y además

$$\begin{aligned}\left(\int_a^x (x-t)f(t)\,dt\right)' &= \left(\int_a^x xf(t)\,dt - \int_a^x tf(t)\,dt\right)' = \left(x\int_a^x f(t)\,dt\right)' - \left(\int_a^x tf(t)\,dt\right)' \\ &= \int_a^x f(t)\,dt \;+\; xF(x) \;-\; xF(x) \;=\; F(x).\end{aligned}$$

31 Sobre el teorema de cambio de variable: sean f y g' funciones continuas (g definida en un intervalo I y f definida en el intervalo $g(I)$). Se tiene

a) Si F es una primitiva de f, entonces $F \circ g$ es una primitiva de $(f \circ g) \cdot g'$

b) Si G es una primitiva de $(f \circ g) \cdot g'$ y $G = F \circ g$ para alguna función F derivable, entonces F es una primitiva de f. Además, esta tal función derivable F siempre existe.

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Demostración. El apartado a) es fácil: Si $F' = f$ entonces $(F \circ g)' = (F' \circ g) \cdot g' = (f \circ g) \cdot g'$.

Sea G una primitiva de $(f \circ g) \cdot g'$ y sea L una función derivable que cumpla $G = L \circ g$. Si F es primitiva de f se tiene $(G - (F \circ g))' = G' - (f \circ g) \cdot g') = 0$. De aquí se sigue que $L \circ g - F \circ g$ es constante. Por tanto, $L(g(t)) = F(g(t)) + k$, es decir, $L(x) = F(x) + k$. Como conclusión, $L'(x) = F'(x) = f(x)$.

Para ver la existencia de tal función: como G es una primitiva de $(f \circ g) \cdot g'$ y F es primitiva de f, entonces $F \circ g$ y G son primitivas de la misma función. Así, $G = F \circ g + k$ y por tanto $G = (F \circ g) + k = (F + k) \circ g$. □

32 Cálculo de primitivas inmediatas.

a) $\displaystyle\int 2^{6x}\,dx = \frac{2^{6x-1}}{3\log(2)} + C$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx = -\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}} + C$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+9}\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = 2\sqrt{x-1} + C$

e) $\displaystyle\int \frac{3}{(x-3)^4}\,dx = -\frac{1}{(x-3)^3} + C$

f) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx = -\log(\cos x) + C$

g) $\displaystyle\int \frac{6x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,dx = 4\sqrt{x^3+1} + C$

h) $\displaystyle\int 2\cdot\sqrt[5]{2x}\,dx = \frac{5x\sqrt[5]{2x}}{3} + C$

i) $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} 2x + C$

j) $\displaystyle\int \sqrt{1+\cos x}\,dx = 2\sqrt{1-\cos x} + C$

La primitiva de $\sqrt{1+\cos x}$, que aparece en el último apartado, se puede hacer tal y como se indica, multiplicando y dividiendo por $\sqrt{1-\cos x}$, o también utilizando la conocida fórmula $1 + \cos x = 2\cos^2(x/2)$.

33 **Cálculo de primitivas haciendo derivadas**. Para calcular $\int xe^x\,dx$ se puede hacer lo siguiente:

$$(xe^x)' = xe^x + e^x,$$

de donde se tiene (al integrar)

$$xe^x = \int xe^x dx + e^x.$$

Así se obtiene

$$\int xe^x\,dx = xe^x - e^x.$$

De la misma forma para calcular $\int x^2e^x\,dx$ se hace

$$(x^2e^x)' = x^2e^x + 2xe^x$$

y entonces

$$x^2e^x = \int x^2e^x\,dx + 2\int xe^x\,dx = \int x^2e^x\,dx + 2(xe^x - e^x),$$

Departamento de Matemáticas Universidad de Extremadura
Departamento de Matemáticas Universidad de Extremadura

y así
$$\int x^2 e^x\,dx \;=\; x^2 e^x - 2(xe^x - e^x).$$
También puede aplicarse este método para calcular las primitivas de $e^x \operatorname{sen} x$ y $e^x \cos x$:
$$\left.\begin{array}{rcl}(e^x \operatorname{sen} x)' &=& e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x\\ (e^x \cos x)' &=& e^x \cos x - e^x \operatorname{sen} x\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} e^x \operatorname{sen} x &=& \displaystyle\int e^x \operatorname{sen} x\,dx + \int e^x \cos x\,dx\\ e^x \cos x &=& \displaystyle\int e^x \cos x\,dx - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx\end{array}\right.$$
Al hacer la suma y la diferencia de las dos últimas igualdades se obtiene
$$\int e^x \cos x\,dx = \frac{1}{2} e^x(\operatorname{sen} x + \cos x), \qquad \int e^x \operatorname{sen} x\,dx = \frac{1}{2} e^x(\operatorname{sen} x - \cos x).$$
Una variante de este método consiste en multiplicar por x funciones de las que se conoce su derivada y así se consigue su primitiva. Para calcular $\int \log x\,dx$ se hace
$$(x \log x)' = \log x + x\frac{1}{x}$$
y se integra, de donde
$$\int \log x\,dx = x \log x - x.$$
Otro ejemplo: calcular $\int \operatorname{arctg} x\,dx$:
$$(x \operatorname{arctg} x)' = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}$$
y por tanto
$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2).$$
Y otro: para encontrar $\int \operatorname{arcsen} x\,dx$:
$$(x \operatorname{arcsen} x)' = \operatorname{arcsen} x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$
como consecuencia
$$\int \operatorname{arcsen} x\,dx = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2}\,.$$

34 Integración por partes (en algunos ejemplos se indica el cambio adecuado).

a) $\displaystyle\int x^2 e^{-x}\,dx \;=\; -\left(x^2 + 2\,x + 2\right)e^{-x} + C$

b) $\displaystyle\int x^3 \log(x)\;dx \;=\; \frac{x^4}{4}\log x - \frac{x^4}{16} + C$

c) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\log x)\,dx \;=\; \left[\begin{array}{rcl} u &=& \operatorname{sen}(\log x)\\ dv &=& dx\end{array}\right] \;=\; \frac{x}{2}\Big(\operatorname{sen}(\log x) - \cos(\log x)\Big) + C$

d) $\displaystyle\int \operatorname{arcsen} x\,dx \;=\; \left[\begin{array}{rcl} u &=& \operatorname{arcsen} x\\ dv &=& dx\end{array}\right] \;=\; x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + C$

e) $\displaystyle\int \left(x^2 - 1\right)\operatorname{sen} x\,dx \;=\; \left(-x^2 + 3\right)\cos x + 2\,x \operatorname{sen} x + C$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

35 Integración de funciones racionales.

a) $$\int \frac{3x^2-5x-3}{x-1}\,dx = \frac{3x^2}{2}-2x-5\log(x-1)+C$$

b) $$\int \frac{8x+7}{x^2+x-2}\,dx = 3\log(x+2)+5\log(x-1)+C$$

c) $$\int \frac{2x+1}{x^2-2x+5}\,dx = \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+\log\left(x^2-2x+5\right)+C$$

d) $$\int \frac{x^2+x+1}{x^4-x^3}\,dx = \frac{4x+1}{2x^2}+3\log(x-1)-3\log(x)+C$$

e) $$\int \frac{x^2-3x+4}{(x^2+4)^2x^2}\,dx = -\frac{2x^2+3x+8}{8(x^3+4x)}-\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\frac{3\log(x^2+4)}{32}-\frac{3\log x}{16}+C$$

f) $$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

36 Integración mediante cambio de variable (en algunos ejemplos se indica el cambio adecuado).

a) $$\int \frac{1}{e^x+2}\,dx = \left[\begin{array}{ccc} e^x & = & t \\ dx & = & dt/t \end{array}\right] = \frac{x}{2}-\frac{1}{2}\log(e^x+2)+C$$

b) $$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \left[\begin{array}{rcl} \sqrt{1+x} & = & t \\ dx & = & 2t\,dt \end{array}\right] = \frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1}+C$$

c) $$\int \frac{1}{1-\sqrt{x}}\,dx = -2\sqrt{x}-2\log\left(\sqrt{x}-1\right)+C$$

d) $$\int \cos^2 x\sin^3 x\,dx = \left[\begin{array}{c} \text{función impar} \\ \text{en } \operatorname{sen} x \end{array}\right] = \frac{1}{5}\cos^5 x-\frac{1}{3}\cos^3 x+C.$$

También se puede hacer directamente al escribir $\operatorname{sen}^2 x = 1-\cos x$ en la integral inicial.

e) $$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx = \left[\begin{array}{ccc} x & = & \operatorname{tg} t \\ dx & = & dt/\cos^2 t \end{array}\right] = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$$

f) $$\int \sqrt{9-x^2}\,dx = \left[\begin{array}{ccc} x & = & 3\operatorname{sen} t \\ dx & = & 3\cos t\,dt \end{array}\right] = \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+\frac{9}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{3}+C$$

g) $$\int \frac{1}{\operatorname{sen} x\cos x}\,dx = \left[\begin{array}{rcl} \operatorname{sen} x & = & t \\ \cos x\,dx & = & dt \end{array}\right] = \log(\operatorname{tg} x)+C$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

h) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(4+\log^2 x)} = \left[\begin{array}{ccc} \log x & = & t \\ dx/x & = & dt \end{array}\right] = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\log x}{2} + C$

37 Calcular

$$\int \frac{1-3x}{(x^2+6x+10)^2}\,dx$$

38 Hallar

$$\int \frac{x^5}{(x-1)^2}\,dx$$

39 Utilizar el cambio $\operatorname{sen} x = t$ para simplificar y calcular

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x - \cos^2 x + 1}\,dx$$

40 Mediante el cambio $\cos x = t$ encontrar

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}.$$

Con el cambio $\operatorname{sen} x = t$ se puede calcular

$$\int \frac{dx}{\cos x}.$$

41 Hallar

$$\int \frac{16(x-1)}{x^2(x^2+4)^2}\,dx$$

42 Calcular

$$\int \frac{dx}{x(x^2+2x+2)^2}$$

43 Calcular $\displaystyle\int \frac{2x}{(x^2-4x+8)^2}\,dx$

44 Mediante el cambio de variable $t = e^x$ calcular $\displaystyle\int \frac{e^{2x}+3e^x}{1+e^x}\,dx$

45 Mediante el cambio de variable $\operatorname{sen} x = t$ calcular $\displaystyle\int \frac{3\cos x\,dx}{\operatorname{sen}^3 x + 2\cos^2 x \operatorname{sen} x}$

46 Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Haciendo el cambio $x = a\operatorname{tg} u$ (y así $dx = a\,du/\cos^2 u$) se tiene

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \int \frac{a\,du}{(\cos^2 u)(a^2+a^2\operatorname{tg}^2 u)^{3/2}} = \frac{1}{a^2}\int \cos u\,du = \frac{1}{a^2}\operatorname{sen} u$$
$$= \frac{1}{a^2}\operatorname{sen}\Big(\arctan\frac{x}{a}\Big) = \frac{x}{a^2(a^2+x^2)^{1/2}}.$$

En la última igualdad se ha utilizado

$$\operatorname{sen}(\arctan\xi) = \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}.$$

Esta identidad es fácil de probar: si $\alpha = \arctan\xi$, entonces $\xi = \operatorname{tg}\alpha$ y

$$\frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} = \frac{\operatorname{sen}\alpha/\cos\alpha}{\sqrt{1+\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}} = \operatorname{sen}\alpha.$$

Una forma alternativa de calcular la integral es escribir

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \int \frac{a^2+x^2-x^2}{a^2(a^2+x^2)^{3/2}}dx = \int \left(\frac{1}{a^2(a^2+x^2)^{3/2}} - \frac{2x^2}{2(a^2+x^2)^{3/2}}\right)dx,$$

que corresponde a la derivada de un producto, por lo que

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(a^2+x^2)^{1/2}}.$$

47 En la página `https://sagecell.sagemath.org` se pueden escribir (o copiar y pegar) las líneas

```
f(x)=(2*x+1)/(x*(x+1))
integrate(f(x),x).show()
```

y pulsar el botón “evaluar”. Así se puede calcular cualquiera de las integrales de los ejercicios anteriores.

48 **Sobre la escritura de las primitivas**. **a**) Es conocido que en un intervalo todas las primitivas se diferencian en una constante. Por tanto, basta encontrar una primitiva de una función, ya que las demás son esa misma sumando una constante. Por este motivo, para la función $f(x) = 2x$ se escribe como primitiva $F(x) = x^2$ o $F(x) = x^2+5$ o $F(x) = x^2+C$. Carece de importancia si desde un principio se tiene claro de qué se está hablando. Lo habitual es utilizar esto último, $F(x) = x^2 + C$, aunque no se podría decir que $F(x) = x^2$ sea una respuesta equivocada.

b) La función $f(x) = \log(x-1)$, que está definida en $(1, +\infty)$, verifica

$$f'(x) = \frac{1}{x-1}.$$

La función $g(x) = \log(1-x)$, que está definida en $(-\infty, 1)$, verifica

$$g'(x) = \frac{-1}{1-x} = \frac{1}{x-1}.$$

Departamento de Matemáticas Universidad de Extremadura
Departamento de Matemáticas Universidad de Extremadura

Ambas tienen la misma derivada, y por tanto

$$\int \frac{1}{x-1}\,dx \;=\; \left\{\begin{array}{ll} \log(x-1) & \text{si } \ x>1 \\ \log(1-x) & \text{si } \ x<1 \end{array}\right\} \;=\; \log|x-1|.$$

Sin embargo, es frecuente encontrar expresiones del tipo

$$\int \frac{1}{x}\,dx \;=\; \log x, \qquad \int \frac{1}{x+3}\,dx \;=\; \log(x+3)$$

(como por ejemplo puede verse M. Spivak, Cálculo Infinitesimal, pag. 499, 503,...) y encontrar también esas mismas expresiones utilizando $\log|x|$ y $\log|x+3|$.

Entonces, ¿$\int \frac{1}{x}\,dx \;=\; \log x$ o $\int \frac{1}{x}\,dx \;=\; \log|x|$? Parece que la segunda es la correcta, pero entonces se podría aplicar la regla de Barrow y se tendría

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx \;=\; \log|x|\Big]_{-1}^{1} \;=\; 0$$

que es falso. La igualdad $\int \frac{1}{x}\,dx = \log x$ es una verdad a medias; y la igualdad $\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x|$ es incorrecta si no se añade algo más.

La primitiva de una función como $f(x) = 1/x$ se busca en algún intervalo. Es decir, en algún intervalo en la que dicha función tenga tal primitiva. Esto excluye a los intervalos que contengan a 0. Se puede hablar de la primitiva de $1/x$ en $[1,7]$ y es $\log x$.

Debería decirse

$$\int \frac{1}{x}\,dx \;=\; \log\ x \quad (\text{para } x>0), \qquad \int \frac{1}{x}\,dx \;=\; \log(-x) \quad (\text{para } x<0),$$

o bien

$$\int \frac{1}{x}\,dx \;=\; \log|x|$$

aclarando lo que se ha comentado más arriba.

De la misma forma,

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+1)}\,dx \;=\; \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx\right)$$

y se suele indicar como primitiva

$$\frac{1}{2}\Big(\log|x-1| - \log|x+1|\Big).$$

Debería añadirse "se entiende que la primitiva se toma sobre algún intervalo que no contenga a -1 ni a $+1$". En ese intervalo hay que cambiar $|x-1|$ y $|x+1|$ por lo que corresponda. Por ejemplo, en el intervalo $[0.1,\ 0.6]$ se tiene

$$\int_{0.1}^{0.6} \frac{1}{(x-1)(x+1)}\,dx \;=\; \frac{1}{2}\Big(\log(1-x) - \log(x+1)\Big)\Big]_{0.1}^{0.6} \;=\; \frac{1}{2}\Big(\log\frac{1}{4} - \log\frac{9}{11}\Big).$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

49 Mediante la regla de Barrow se puede calcular

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx \;=\; \left.\frac{-1}{x}\right]_{-1}^{1} \;=\; -2.$$

Sin embargo, según se ha visto en teoría, la función $f : x \in (0,1] \longrightarrow f(x) = 1/x^2$ no es Riemann integrable en $[0,1]$, ya que no existe el límite (o el supremo) de las integrales

$$\int_0^1 \inf(f,n) \;=\; \int_0^{1/\sqrt{n}} n \;+\; \int_{1/\sqrt{n}}^{1} \frac{1}{x^2} \;=\; \sqrt{n}\; - 1 + \sqrt{n}$$

50 Sea f una función continua en $[a,\, b]$. Se considera la función

$$F(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{x-a} \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt & \text{si } x \in (a,\, b] \\ f(a) & \text{si } x = a \end{cases}$$

que va “promediando” los valores de f. Por definición, $F(x)$ es el promedio de f en $[a,\, x]$.

a) Probar que F es continua en $[a,\, b]$,

b) ¿Debe ser F diferenciable?

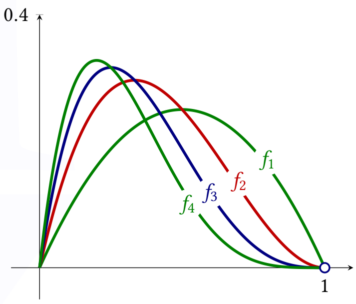
Como indicación, se puede ver qué relación hay entre F y la primitiva de f dada por $G(x) = \int_a^x f$.

Se pueden poner ejemplos, como $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $[0,\, 2\pi]$. En este caso $F(x) = (1 - \cos x)/x$ para $x \in (0, 2\pi]$ y $F(0) = 0$. Si $f(x) = \sqrt{x}$ en $[0,1]$, entonces $F(x) = 2\sqrt{x}/3$.

Sucesiones y series funcionales

51 La sucesión de funciones $f_n(x) = nx(1-x)^n$ converge puntualmente en $[0,\, 1]$. ¿Y uniformemente?
Se puede comprobar que el límite puntual es la función 0 y que las funciones f_n alcanzan el máximo, y este valor máximo no tiende a cero a medida que n crece:

$$\max_{[0,1]} (f_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \longrightarrow 1/e.$$



52 Diferencia entre convergencia puntual y convergencia uniforme de sucesiones de funciones: una sucesión (f_n) converge puntualmente a f si $f_n(x) - f(x) \longrightarrow 0$ $(n \longrightarrow \infty)$ para todo $x \in A$ (el conjunto de definición de todas las funciones es A). Y (f_n) converge uniformemente a f si $\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$ $(n \longrightarrow \infty)$, donde

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in A\}$$

Por ejemplo, la sucesión $f_n(x) = x^n$ en $[0,1]$ converge puntualmente a la función $f(x) = 0$ $(x \in [0,1))$ y $f(1) = 1$. Pero $\|f_n - f\|_\infty = 1$ para todo n.

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

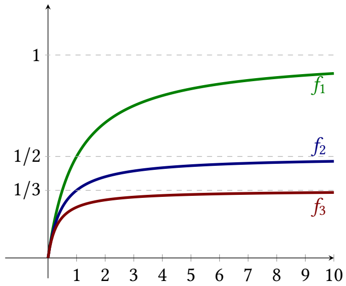
Probar que

$$(f_n) \xrightarrow{u} f \Leftrightarrow (f_n - f) \xrightarrow{u} 0 \Leftrightarrow \|f_n - f\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow (f_n) \xrightarrow{p} f$$

53 Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$$

en $[0, +\infty)$. Probar que convergen puntual y uniformemente a la función 0.



54 Se considera la sucesión de funciones $f_1, f_2, ..., f_n, ...$ donde

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x(1-nx) & \text{si} \quad x \in [0,\ 1/n] \\ 0 & \text{si} \quad x \in (1/n, 1] \end{cases}$$

Probar que la sucesión converge puntualmente en $[0, 1]$ pero no converge uniformemente. ¿Sobre qué intervalos $I \subset [0, 1]$ se obtiene convergencia uniforme?

55 Estudiar la convergencia puntual y uniforme en $\mathbb{R}$ de las funciones

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x| \le n \\ 0 & \text{si} \quad |x| > n \end{cases}$$

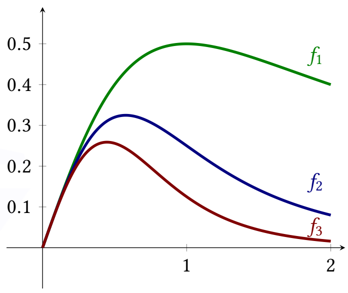
(la sucesión converge puntualmente a la función constante 1, pero no uniformemente)

56 Estudiar la convergencia puntual y uniforme en $[0, 1]$ de las funciones

$$f_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n}.$$

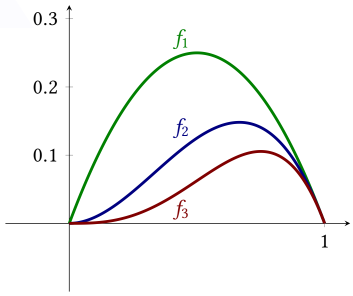
Es fácil ver que $f_n \xrightarrow{p} 0$. Además, el máximo de f_n se alcanza en algunos de los valores

$$f(0) = 0,\ f(1) = 1/2^n,\ f\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2n-1}}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^n$$



Por tanto f_n converge uniformemente a cero. Se puede ampliar el estudio a $[0, +\infty)$.

57 Estudiar la convergencia puntual y uniforme de las funciones $f_n(x) = x^n(1-x)$ en $[0, 1]$.
La convergencia puntual es fácil.
Por otra parte, son funciones cuyo máximo es fácilmente calculable y ese valor máximo tiende a cero: se alcanza en $x = n/(n+1)$ y $f_n(n/(n+1)) \longrightarrow 0$



Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

58 Estudiar la convergencia puntual y uniforme en $[0,\ +\infty]$ de la sucesión de funciones

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}.$$

Es fácil comprobar que esta sucesión converge puntualmente a $f(x) = x$. Y también convergen uniformemente, ya que las diferencias $|x - f_n(x)|$ se pueden hacer pequeñas: como $x - f_n(x) = x/(1+nx)$, se mira cuál es el máximo valor de esta expresión. Derivando no se obtiene nada, ya que la derivada no se anula nunca, pero $x/(1+nx)$ es una función creciente, luego su máximo se alcanza en el infinito, y ese valor máximo es $1/n$.

59 Sea $f : [\,0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ no nula y continua, verificando $f(0) = 0$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Se consideran las funciones $f_n(x) = f(nx)$ y $g_n(x) = f(x/n)$ para $x \in [\,0, +\infty)$ y $n = 1, 2, 3, \ldots$ Estudiar la convergencia puntual y uniforme de las sucesiones (f_n) y (g_n). Probar que $(f_n \cdot g_n)$ converge uniformemente.

La convergencia puntual (a cero) y no uniforme de (f_n) y (g_n) es fácil. Para ver que $(f_n \cdot g_n)$ converge uniformemente a la función cero se trata de calcular

$$\max_{x\geq 0} f_n(x)\cdot g_n(x) \;=\; \max_{x\geq 0} f(nx)\cdot f(x/n)$$

y comprobar que estos valores máximos tienden a cero cuando n crece.

Para ello se considera $\varepsilon > 0$. Por las propiedades de f existe un valor $M > 0$ para el cual se verifica

$$f(x) < \varepsilon \;\text{ si }\; x \in \Big[0, \frac{1}{M}\Big] \;\text{ o si }\; x \in [M, +\infty).$$

Por tanto, si se elige $n > M$ entonces

- si $x \geq 1 \Rightarrow nx > Mx > M$ y así $f(nx)\cdot f(x/n) < \varepsilon \cdot f(x_0)$,
- si $x < 1 \Rightarrow x/n < x/M < 1/M$ y se tiene $f(nx)\cdot f(x/M) < f(x_0)\cdot\varepsilon$,

donde x_0 es el valor en el cual f alcanza el máximo. Por tanto

$$\max_{x\geq 0} f_n(x)\cdot g_n(x) \;=\; \max_{x\geq 0} f(nx)\cdot f(x/n) \;<\; \varepsilon\cdot f(x_0)$$

si $n > M$. Esto muestra que esos máximos tienden a cero.

60 La sucesión de funciones $f_n(x) = \frac{1}{n}\operatorname{arctg}(n^2x)$ converge uniformemente a 0. Sin embargo, sus derivadas no convergen. De hecho $f_n'(0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

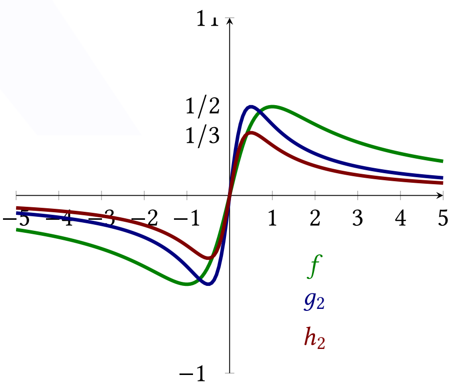
61 Se considera la función

$$f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow f(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Estudiar la convergencia puntual y uniforme de las sucesiones de funciones (g_n) y (h_n) donde

$$g_n(x) = f(nx), \quad h_n = \frac{f(nx)}{\sqrt{n}}.$$

¿Qué ocurre con la convergencia puntual de sus derivadas en $x = 0$?



62 Las funciones

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$$

son diferenciables en todo $\mathbb{R}$ y convergen uniformemente a la función $f(x) = |x|$, que no es diferenciable.

La diferenciabilidad de cada f_n es evidente. Para probar la convergencia uniforme se trata de comprobar cuál es el valor máximo de

$$g(x) = |f_n(x) - f(x)| = \left|\sqrt{x^2 + 1/n} - |x|\right| = \sqrt{x^2 + 1/n} - |x|.$$

Se trata de una función positiva y par ($g(-x) = g(x)$) que cumple $g(0) = 1/\sqrt{n}$. Además se cumple $g(x) \leq g(0)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ya que

$$g(x) \leq g(0) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1/n} - |x| \leq 1/\sqrt{n} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{2|x|}{\sqrt{n}}$$

y esto último se cumple trivialmente. Por tanto, ese valor máximo de $|f_n - f|$ es $1/\sqrt{n}$, y como tiende a 0 para $n \longrightarrow \infty$, entonces (f_n) converge uniformemente a f.

Otra forma de probar la convergencia uniforme consiste en ver que g es decreciente en $[0, +\infty)$ (al ser par, será creciente en $(-\infty, 0]$). Por tanto, su valor máximo será $g(0)$ que es $g(0) = 1/\sqrt{n}$.

63 Se pueden considerar funciones similares

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n} \cdot \sqrt{(x-1)^2 + 1/n}$$

que son diferenciables y convergen uniformemente a una función que no es diferenciable (al no ser diferenciable en dos puntos)

64 Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones $f_n : [0,\ 3] \longrightarrow \mathbb{R}$, donde

$$f_n(x) = 7x^n(3 - x).$$

65 En el intervalo $[0,\ +\infty)$ estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones (f_n) definidas como

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1 + n^2x^2}.$$

66 (Otra versión del teorema sobre convergencia uniforme y derivabilidad) Sea (f_n) una sucesión de funciones derivables en $[a,\ b]$ tales que

a) $(f_n) \xrightarrow{p} f$ en $[a\, b]$,

b) $(f_n') \xrightarrow{u} g$ en $[a,\ b]$, donde g es continua.

Entonces f es diferenciable y

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Departamento de Matemáticas Universidad de Extremadura
Departamento de Matemáticas Universidad de Extremadura

La demostración consiste en aplicar el teorema de convergencia uniforme e integrabilidad: para todo $x \in [a, b]$ se tiene

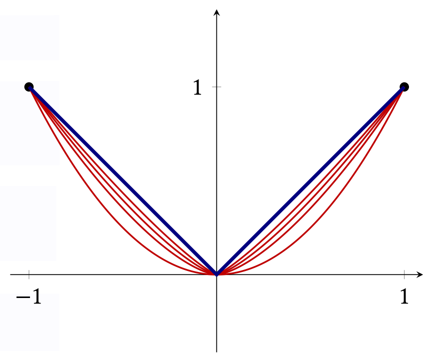
$$\int_a^x g = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n' = \lim_{n\to\infty} \big(f_n(x) - f_n(a)\big) = f(x) - f(a).$$

Como g es continua, se tiene que $f'(x) = g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ para $x \in [a, b]$.

67 En el intervalo $[-1, 1]$ se consideran las funciones

$$f_n(x) = |x|^{\frac{n+1}{n}}$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$.



a) ¿son diferenciables?

b) ¿(f_n) converge puntualmente? ¿Y uniformemente?

(No hay convergencia uniforme en $\mathbb{R}$ ya que las funciones $g_n(x) = |x|^{\frac{n+1}{n}} - |x|$ son estrictamente crecientes para valores grandes. Por ejemplo, si $x = 10^n$, se tiene $g_n(10^n) = 10^{n+1} - 10^n = 10^n(10-1)$.)

68 Probar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^3}$$

converge uniformemente en todo $\mathbb{R}$. Si $f(x)$ es su suma, probar que f es continua en $[0, \pi]$ y que

$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^4}$$

69 Probar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)2^n}$$

converge uniformemente en $[0, +\infty)$. Si f es su suma, probar que f es continua y probar que

$$\int_0^1 f = \frac{\log 2}{2}.$$

70 Probar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos n^2 x}{n^4}$$

converge uniformemente en todo $\mathbb{R}$. Si $f(x)$ es su suma, probar que f es continua en $[0, \pi]$ y que

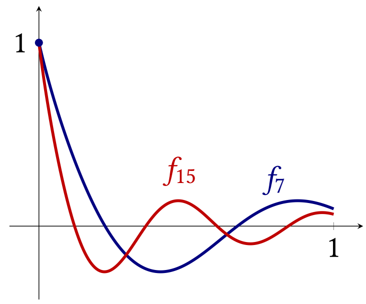
$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n^4}$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

71 Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones

$$f_n : x \in [0,\ 1] \longrightarrow f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{1+nx}.$$

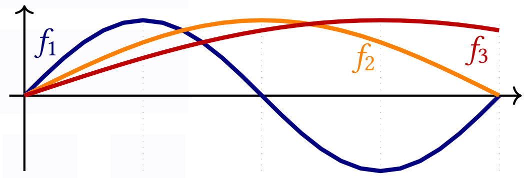
(se han representado f_7 y f_{15} a la derecha)



72 Probar que la sucesión de funciones

$$f_n : x \in [0,\ 2\pi] \longrightarrow f_n(x) = \operatorname{sen} \frac{x}{n}$$

converge uniformemente a $f = 0$.



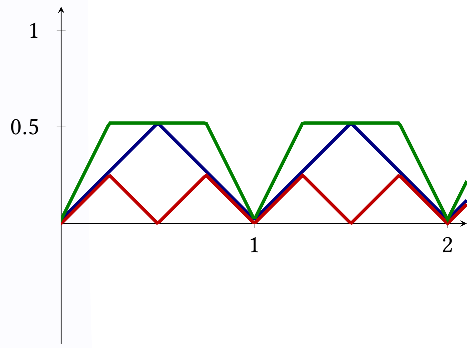
Solución: se trata de una sucesión (f_n) que verifica

a) en algún punto $c \in [0, 2\pi]$ la sucesión $(f_n(c))$ converge. Por ejemplo, si $c = 0$, entonces $(f_n(c)) \longrightarrow 0$.

b) la sucesión de derivadas $f_n'(x) = \dfrac{1}{n} \cos \dfrac{x}{n}$ converge uniformemente a $g = 0$. Esto es evidente.

Por tanto (aplicando el conocido teorema de convergencia uniforme y derivadas) la sucesión f_n converge uniformemente a cierta función diferenciable f que verifica $f' = g$. Así, f es constante. Como además $f(0) = \lim_n f_n(0) = 0$, se tiene que $f = 0$.

73 Se considera la función $f(x) = d(x, \mathbb{Z})$, la distancia de x al entero más próximo. La gráfica puede verse a la derecha en color azul. Se conoce como “diente de sierra” y se ha dibujado la gráfica sólo en $[0,\ 2]$.
La función $g(x) = f(2x)/2$ es similar: una gráfica diente de sierra con el doble de picos que tienen la mitad de altura. Su gráfica está en color rojo.
La función suma de ellas, $f(x) + f(2x)/2$, tiene una gráfica (en verde) con más picos.



Se puede repetir este proceso y considerar las funciones $f(x) + f(2x)/2 + f(2^2x)/2^2 + \ldots$ o incluso la función

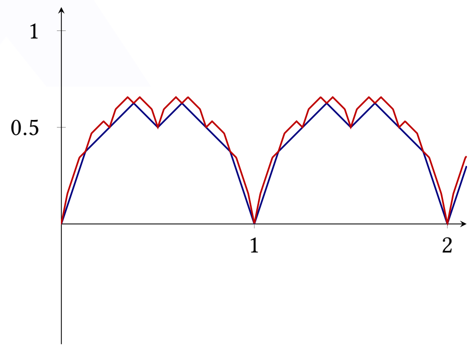
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}.$$

Con los primeros 3 sumandos se obtiene una función

$$f(x) + \frac{f(2x)}{2} + \frac{f(4x)}{4}$$

cuya gráfica puede verse en azul a la derecha. Añadiendo dos términos más se obtiene (gráfica en rojo) la función

$$f(x) + \frac{f(2x)}{2} + \frac{f(4x)}{4} + \frac{f(8x)}{8} + \frac{f(16x)}{16}$$



Puede verse en [M. Spivak, *Cálculo Infinitesimal*, pág. 696] que la función

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n} = f(x) + \frac{f(2x)}{2} + \frac{f(4x)}{4} + \dots$$

es continua en cualquier punto y no tiene derivada en ninguno.

74 Hallar el intervalo de convergencia de cada una de las series de potencias y determinar la convergencia en los extremos de ese intervalo:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n \cdot n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 (x-2)^n}{4^n \cdot (n+1)}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{6^n \cdot (n+2)}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 2^n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 (x+6)^n}{3^n \cdot (n+2)}$

h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 (x+1)^n}{4^{n+2} \cdot (n-1)}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \cdot n^2}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 (x+1)^n}{4^{n+1} \cdot (n^3+1)}$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! (x+5)^n}{(n+1)^n \cdot (n^7+9)}$

Para el último apartado conviene recordar que $\lim_n \sqrt[n]{n!/n^n} = 1/e$, como puede verse en las hojas de ejemplos y ejercicios de Cálculo I. Como alternativa, puede calcularse el radio de convergencia con el criterio del cociente: para $a_n = \dfrac{n!}{(n+1)^n \cdot (n^7+9)}$ se tiene

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{n(n+1)^n (n^7+9)}{(n+2)^{n+1}((n+1)^7+9)} = \lim_n \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)^{n+1}} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n^7+9}{(n+1)^7+9} = \frac{1}{e}.$$

75 Hallar el intervalo de convergencia de las series de potencias

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 (x-2)^n}{4^n \cdot (n+1)}$

b) $\dfrac{1}{2}(x-3)^2 + \dfrac{1}{2^2}(x-3)^4 + \dfrac{1}{2^3}(x-3)^6 + \dots$

c) $\dfrac{1}{4}(x+5)^3 + \dfrac{1}{4^2}(x+5)^6 + \dfrac{1}{4^3}(x+5)^9 + \dots$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)(x+2)^n}{2^n \cdot n^3}$

Determinar además la convergencia en los extremos del intervalo de convergencia para cada una de ellas.

76 (Para pensar) Es fácil deducir que

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

para $|x| < 1$ y también

$$\frac{1}{1+x^2} = \operatorname{arctg}' x = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

para el mismo intervalo $|x| < 1$. Viendo cómo son las gráficas de estas funciones, acotadas en todo $\mathbb{R}$, y con una expresión tan sencilla, resulta sorprendente que la serie de Taylor no converja para $|x| > 1$.

La última igualdad no puede ampliarse para valores fuera de $(-1, 1)$. ¿Qué impide que estas funciones tan regulares tengan series de Taylor fuera de ese intervalo?

77 Escribir la serie de Taylor de $\cos x$ en $a = 0$ y comprobar que $\cos x$ es una función analítica en todo $\mathbb{R}$. Utilizar esa serie de Taylor de $\cos x$ para expresar el valor de

$$\int_0^1 \cos x^2 \, dx.$$

78 Estudiar la sumabilidad de la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ y su "derivada" $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n}$.

79 Se puede comprobar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} nr^n = \frac{r}{(1-r)^2}$$

por distintos métodos. En problemas de Cálculo I se puede ver cómo se hace directamente. También se puede probar haciendo lo siguiente: como para $|x| < 1$ se tiene

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

entonces se puede derivar y

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

Multiplicando por x se tiene el resultado.

80 (Sumando series numéricas utilizando series de potencias). Calcular $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\, n!}$

Indicación: como $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, entonces $xe^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$ y se calcula la primitiva en ambos miembros de esta última igualdad. Así se tiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\, n!} = 1, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+2)\, n!} = \frac{1+e^2}{4}.$$

81 Expresar como función elemental cada una de las series siguientes (son una serie y sus derivadas, luego basta saber hacerlo para una de ellas)

a) $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^6}{6} - \dots$, b) $x - x^3 + x^5 - x^7 + x^9 - \dots$, c) $1 - 3x^2 + 5x^4 - 7x^6 + 9x^8 - \dots$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

82 Expresar como una función elemental

$$f(x) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n \ = \ x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + 4^2x^4 + \dots$$

Solución: Como el radio de sumabilidad es $r = 1$, la expresión que se obtenga será válida en $(-1, 1)$. Dentro de ese intervalo la serie es absolutamente y uniformemente sumable, y esto justifica todos los cálculos que se van a hacer.

$$\begin{array}{rcccccccccc} x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + 4^2x^4 + \dots & = & x & + & x^2 & + & x^3 & + & x^4 & + & \dots \\ & + & & & 3x^2 & + & 3x^3 & + & 3x^4 & + & \dots \\ & + & & & & & 5x^3 & + & 5x^4 & + & \dots \\ & + & \dots & & & & & & & & \end{array}$$

y, sumando cada una de las filas,

$$f(x) \ = \ \frac{x}{1-x} + \frac{3x^2}{1-x} + \frac{5x^3}{1-x} + \dots \ = \ \frac{1}{1-x}\big(x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + \dots\big).$$

Ahora bien,

$$\begin{array}{rcccccccccc} x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + \dots & = & x & + & x^2 & + & x^3 & + & x^4 & + & \dots \\ & + & & & 2x^2 & + & 2x^3 & + & 2x^4 & + & \dots \\ & + & & & & & 2x^3 & + & 2x^4 & + & \dots \\ & + & \dots & & & & & & & & \end{array}$$

y entonces

$$x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + \dots \ = \ \frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1-x} + \frac{2x^3}{1-x} + \dots$$

En total,

$$f(x) \ = \ \frac{1}{(1-x)^2}\big(x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + \dots\big) \ = \ \frac{1}{(1-x)^2}\left(\frac{2x}{1-x} - x\right) \ = \ \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

Luego, en $(-1, 1)$ se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n \ = \ \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

Otra forma de hacerlo: como $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = x\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1}\right) = x\,g(x)$, basta ver qué función elemental es $g(x)$. Ahora bien, la primitiva de g es

$$\int g(x)\,dx \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} nx^n \ = \ x\left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\right) \ = \ x\,h(x),$$

y, de nuevo, es necesario saber qué función es $h(x)$. Como

$$\int h(x)\,dx \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} x^n \ = \ \frac{x}{1-x}$$

en el intervalo $(-1,\ 1)$, entonces

$$h(x) \ = \ \left(\frac{x}{1-x}\right)' \ = \ \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Departamento de Matemáticas Universidad de Extremadura

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Por tanto,

$$g(x) = \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{1+x}{(1-x)^3}, \quad f(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

83 Calcular la suma de la serie $x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \dots$

En primer lugar se calcula el radio de convergencia. Como $|c_n| = 1/n$ si n es impar y $c_n = 0$ para n par, se tiene que $\limsup_n \sqrt[n]{|c_n|} = 1$ (Ojo: existe el límite superior pero no el límite, aunque esto es suficiente para el cálculo del radio).

Por tanto, la serie converge en $(-1,\ 1)$ a una función

$$f(x) = x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \dots$$

Utilizando que se conoce la suma de una progresión geométrica se llega a

$$f'(x) = 1 + x^2 - x^4 + x^6 - \dots = 1 + \frac{x^2}{1+x^2} = 2 - \frac{1}{1+x^2}.$$

Integrando

$$f(x) = 2x - \operatorname{arctg} x + C.$$

Como además $f(0) = 0$ entonces $C = 0$.

84 Escribir $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ como serie de potencias centrada en 0 y calcular el radio de la serie. Hallar todas las derivadas de f en $x = 0$.

85 Utilizando el hecho de que $\operatorname{sen} x = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \dots$ (ya se ha visto que $\operatorname{sen} x$ en una función entera), probar que $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ (se añade en la definición que $f(0) = 1$) es analítica en todo $\mathbb{R}$. Comprobar que la primitiva de f es

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^2 \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}.$$

86 Como

$$\operatorname{sen}(x-a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-a)^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos(x-a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-a)^{2n}}{(2n)!},$$

es posible probar que $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ son analíticas en cualquier $a \in \mathbb{R}$. Para ello basta escribir

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= \cos a \ \operatorname{sen}(x-a) + \operatorname{sen} a \ \cos(x-a) \\ \cos x &= -\operatorname{sen} a \ \operatorname{sen}(x-a) + \cos a \ \cos(x-a) \end{aligned}$$

87 Se considera la función

$$f(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n.$$

¿Cuál es su dominio de definición? ¿Dónde es continua, diferenciable, integrable? Dar una expresión de $\int_1^{3/2} f$. Escribir f como una función elemental.

El radio de convergencia es $r = 1$, y está centrada en $a = 1$. Por tanto, el intervalo de convergencia es $(0, 2)$. En los extremos 0 y 2 la serie no es sumable, y por tanto el intervalo no puede ampliarse más. La función $f(x)$ está definida en $(0, 2)$. En ese intervalo es continua y diferenciable, y es integrable en cualquier $[a, b] \subset (0, 2)$. Debido a la convergencia uniforme,

$$\begin{aligned} \int_1^{3/2} f &= \int_1^{3/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_1^{3/2} (-1)^n (x-1)^n \, dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left. \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} \right|_1^{3/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\, 2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Esa serie es sumable y su suma es el valor pedido de $\int_1^{3/2} f$. El valor númerico exacto de esta serie no es fácil conocerlo. No se trata de una serie geométrica ni nada parecido, y por tanto el resultado debe dejarse así. De momento.

La función $f(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \ldots$ está definida mediante una serie geométrica, cuyo primer término es 1 y su razón es $-(x-1)$. Por tanto,

$$f(x) = \frac{1}{1 + (x-1)} = \frac{1}{x}, \qquad \text{para } |x-1| < 1.$$

Esta es la función elemental que coincide con f en $(0, 2)$. Ahora es fácil entender por qué f es continua y diferenciable en $(0, 2)$, pero f *no es integrable* en $(0, 2)$. Es integrable en cualquier intervalo $[a, b] \subset (0, 2)$.

Como consecuencia se puede añadir algo más:

$$\int_1^{3/2} f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\, 2^{n+1}} = \log \frac{3}{2}.$$

88 (Complemento al problema anterior.) La función $f(x) = 1/x$ es analítica en $a = 1$. Al hacer la serie de Taylor

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \ldots$$

resulta

$$f(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n,$$

una serie geométrica que coincide con f en $(0, 2)$. Pero f no es integrable en todo el intervalo de convergencia de la serie. Ya se vio en el tema de funciones integrables que $\int_0^2 f$ no existe.

89 **Sobre funciones analíticas**. Una función $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es analítica en $a \in \mathring{A}$ si f es suma de una serie de potencias centrada en a y con radio positivo, es decir, si

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \qquad \big(\forall x \in (a-r,\ a+r)\big).$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Si f es analítica en a, entonces $f(x) = \sum_n c_n(x-a)^n$ en algún entorno $(a-r,\ a+r)$ y además $c_n = f^{(n)}(a)/n!$.

Se puede probar que entonces f también es analítica en cada $b \in (a-r,\ a+r)$, y se puede escribir f como una serie de potencias centrada en b (esto es lo mismo que decir que f es analítica en todo el intervalo $(a-r, a+r)$).

La forma de probar esto se puede ver en [S.G. Krantz & H.R. Parks, *A primer of real analytic functions*, Birkhauser Verlag (1992), págs. 4—17] y es como sigue:

Si $b \in (a-r, a+r)$, se considera

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!}(x-b)^n.$$

Esta serie tiene radio de convergencia al menos $\rho = r - |a-b|$, y en el intervalo $(b-\rho,\ b+\rho)$ converge a f, es decir

$$f(x) \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-b)^n \qquad \big(\forall x \in (b-\rho, b+\rho)\big),$$

donde $d_n = f^{(n)}(b)/n!$.

Por ejemplo, ya se ha visto la función $f(x) = 1/(1-x)$ como serie de potencias centrada en $a = 0$:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

Esta igualdad es cierta en el intervalo de convergencia $(-1,\ 1)$, es decir, $|x| < 1$ (el radio es $r = 1$). Si se elige un punto de ese intervalo, por ejemplo $b = 9/10$, también se puede escribir f como una serie de potencias centrada en $b = 9/10$. Unos sencillos cálculos establecen

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 10 + 10^2\left(x - \frac{9}{10}\right) + 10^3\left(x - \frac{9}{10}\right)^2 + 10^4\left(x - \frac{9}{10}\right)^3 + 10^5\left(x - \frac{9}{10}\right)^4 + \dots$$

para $|x - 0.9| < 1/10$ (el radio ahora es distinto, $r' = 1/10$).

También pueden encontrarse en ese mismo libro las demostraciones de que la suma, producto y cociente* de funciones analíticas es una función analítica. Y la demostración (bastante más difícil y engorrosa) de que la composición de funciones analíticas es una función analítica.

El espacio $\mathbb{R}^n$

90 Es fácil probar la desigualdad $ab \leq a^2/2 + b^2/2$ para $a, b \in \mathbb{R}$. Como consecuencia, para $\mathbf{u} = (x_1, \dots, x_n)$ y $\mathbf{v} = (y_1, \dots, y_n)$ se tiene

$$\sum_{k=1}^{n} x_i y_i \ \leq \ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} x_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} y_i^2.$$

De aquí se sigue entonces

$$\|u\| \leq 1, \|v\| \leq 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} x_i y_i \ \leq \ 1.$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Como corolario (normalizando los vectores si hace falta)

$$\sum_{k=1}^{n} x_i y_i \;\leq\; \|u\| \cdot \|v\|$$

que es la desigualdad de Cauchy-Schwarz (o de Hölder para $p = 2$)

$$\sum_{k=1}^{n} x_i y_i \;\leq\; \left(\sum_{k=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}.$$

91 Son equivalentes para $A \subset \mathbb{R}^n$

a) A es acotado

b) todas sus proyecciones $\pi_i(A)$ lo son $(\exists M_i \;:\; |x_i| \leq M_i \quad \forall x \in A)$

c) A está contenido en un rectángulo

d) A está contenido en un rectángulo centrado en el origen

e) $A \subset B(\mathbf{a},\, r)$ para alguna bola

f) $A \subset B(\mathbf{0},\, r)$ para alguna bola

92 Para $A, B \subset \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ se define

$$A + B \;=\; \{x + y \;:\; x \in A,\; y \in B\}, \quad \lambda A \;=\; \{\lambda x \;:\; x \in A\}$$

Si $B = \{\mathbf{a}\}$ se suele escribir $A + \mathbf{a}$ en lugar de $A + B$.

Poner ejemplos que muestren que, en general, $2A \neq A + A$. Probar que

$$B(\mathbf{a},\, r) \;=\; \mathbf{a} + rB(\mathbf{0},\, 1)$$

93 Si $A \subset \mathbb{R}^2$ es numerable entonces A^c es conexo.

La demostración es simple: dados $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A^c$, con cada punto de la mediatriz entre ellos, se forma un camino poligonal de dos lados que los une. Hay una cantidad infinita no numerable de caminos de estos. Luego alguno no corta a A. Así A^c es conexo por poligonales.

94 $\mathbb{R}$ es conexo (una demostración alternativa).

Se supone que $\mathbb{R}$ no es conexo, y por tanto, puede escribirse $\mathbb{R}$ como una unión disjunta de conjuntos abiertos y no vacíos, $\mathbb{R} = A \cup B$.

Se elige un elemento $b \in B$. Entonces $A \cap (-\infty,\, b)$ o $A \cap (b,\, +\infty)$ (o ambos) es no vacío. Se supone que $A \cap (-\infty,\, b)$ es no vacío y sea $x_0 = \sup\big(A \cap (-\infty,\, b)\big)$

Al ser A y B abiertos, cualquiera de las afirmaciones "$x_0 \in A$" o "$x_0 \in B$" lleva a una contradicción.

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

95 **Gráficas de funciones de dos variables**. Una función $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de dos variables tiene su gráfica en $\mathbb{R}^3$. Se trata del conjunto $G(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = f(x, y)\}$. Es habitual hablar de este conjunto como "la superficie $z = f(x, y)$".

Hay muchos programas y utilidades que ayudan a hacer la representación de este tipo de superficies. Por ejemplo, para la función $f(x, y) = x^2 - y^2$, su gráfica $z = x^2 - y^2$ se puede representar mediante:

a) `www.wolframalpha.com`, escribiendo `x^2-y^2`

b) `wxMaxima`, un programa en el que a través de menús se accede a gráficos, 3D

c) `sagecell.sage.org`, y escribiendo (y evaluando) las líneas
```
var('x y')
plot3d(x^2-y^2,(x,-2,2),(y,-2,2))
```

d) `web.geogebra.org/app/`, donde se puede ir a gráficos 3D y teclear `x^2-y^2`

e) `www.google.es`, escribiendo `plot x^2-y^2`

f) Aplicaciones para móviles y para ordenadores, otras páginas web,...

Es necesario conocer algunas de estas aplicaciones y utilidades.

96 Se consideran la funciones $f(x, y) = x^2 - y^2$ y $g(x, y) = y^2 - x^2$.

a) Dibujar las curvas de nivel (cortes de sus gráficas con planos horizontales, llamados "contour plots" en algunas herramientas)

b) Dibujar la gráfica de f y de g. Por supuesto, esto no suele ser fácil y se recurre a alguna herramienta de las nombradas en el ejemplo anterior.

c) ¿Qué relación hay entre ambas gráficas? ¿Por qué se llaman "silla de montar"?

d) Encontrar los puntos críticos de f y g, hallando los puntos que anulan al gradiente y utilizando la matriz hessiana.

97 Lo mismo para la función $f(x, y) = x^3 - y^3$. A la vista de la gráfica, ¿es fácil predecir cómo será su único punto crítico $P = (0, 0)$? ¿Qué dice la matriz hessiana sobre él?

98 Dibujar las gráficas de las funciones

a) $f_1(x, y) = (x^2 - y^2)\, \cos x$ b) $f_2(x, y) = \operatorname{sen} y$

c) $f_3(x, y) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$ d) $f_4(x, y) = \dfrac{x^2 - y}{1 + x^2}$

e) $f_5(x, y) = \dfrac{\cos(x^2 + y^2)}{1 + x^2 + y^2}$ f) $f_6(x, y) = \dfrac{x^2 y^2}{1 + y^2}$

g) $f_7(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ h) $f_8(x, y) = \sqrt{1 - x^2}$

(para dibujar algunas funciones en las que sólo aparece una variable, como por ejemplo f_8, se puede teclear `plot3d sqrt(1-x^2)` para declarar que se se trata de una función de dos variables).

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

99 La ecuación $3x + 2y = 4$ representa una recta en $\mathbb{R}^2$ o un plano en $\mathbb{R}^3$. Debería escribirse $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 2y = 4\}$ para describir la recta de $\mathbb{R}^2$ y $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + 2y = 4\}$ para el plano de $\mathbb{R}^3$. En cualquier caso, se trata de conjuntos cerrados.

100 La ecuación $x^2 + y^2 = 1$ es una circunferencia en $\mathbb{R}^2$. Se trata de un conjunto cerrado y acotado, es decir, compacto. Sobre él, cualquier función continua alcanza máximo y mínimo. Por ejemplo, sobre esa circunferencia hay un punto que hace máxima la expresión $x + y$.

La misma ecuación $x^2 + y^2 = 1$ designa un cilindro infinito en $\mathbb{R}^3$, que es cerrado, pero no acotado. El conjunto de puntos que verifican

$$\left.\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 & = & 1 \\ z = 4 & & \end{array}\right\}$$

es una parte cerrada y acotada de ese cilindro.

101 Para calcular

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2}$$

se puede hacer la transformación a coordenadas polares y se obtiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3 \cos^3 \alpha}{r^2} = \lim_{r\to 0} r \cos^3 \alpha = 0.$$

102 Comprobar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

(este límite se obtiene, por ejemplo, al comprobar que la función $f(x, y) = x^2+3y$ es diferenciable en $(0, 0)$). La prueba es sencilla:

$$0 \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2} \longrightarrow 0$$

si $(x, y) \longrightarrow (0, 0)$.

103 El límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

no existe. En la dirección del eje X, es decir, $y = 0, x \longrightarrow 0$ se tiene que el valor del límite es

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$$

que no existe.

104 **Límites iterados**. Para una función $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, a las expresiones

$$\lim_{x\to 0} \left(\lim_{y\to 0} f(x, y) \right) \qquad \text{y} \qquad \lim_{y\to 0} \left(\lim_{x\to 0} f(x, y) \right)$$

se les denomina límites iterados. Estos límites pueden no existir, o bien pueden existir y no coincidir. Por ejemplo, si

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{si} \quad x, y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

entonces se tiene

- para $x \in \mathbb{Q}$ no nulo, el límite $\lim_{y\to 0} f(x, y)$ no existe,
- para $x \notin \mathbb{Q}$ existe $\lim_{y\to 0} f(x, y) = 0$,
- para $y \in \mathbb{Q}$ no nulo, el límite $\lim_{x\to 0} f(x, y)$ no existe,
- para $y \notin \mathbb{Q}$ existe $\lim_{x\to 0} f(x, y) = 0$.

Sin embargo, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.

En general, puede probarse utilizando la definición de límite, que si existe el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ y existen los límites $\lim_{y\to 0} f(x, y)$ y $\lim_{x\to 0} f(x, y)$ para cada $x \neq 0$ e $y \neq 0$, entonces también existen los límites iterados y se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) \;=\; \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x, y)\right) \;=\; \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x, y)\right).$$

La existencia de estos límites iterados no está determinada por la existencia del límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ ni viceversa. Ahora bien, si existe el límite y algunos de los iterados, entonces coinciden. Y, por supuesto, si existe el límite y los dos iterados, entonces todos coinciden. Como corolario, existen los límites iterados pero no coinciden, entonces no puede existir el límite.

Por ejemplo, si $f(x, y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ entonces el primer límite iterado vale

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x, y)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x+y}{x-y}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

El segundo,

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x, y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x+y}{x-y}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{y}{-y} = -1.$$

Por tanto, no existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}.$$

105 Utilizar la definición de derivada parcial para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 3)$, donde $f(x, y) = xy + y^2$.

106 Calcular el potencial (si existe) de

a) $G(x, y, z) = (y,\ x + z\cos yz,\ y\cos yz)$.

b) $H(x, y) = (3x^2 + y, e^y + x)$

c) $I(x, y) = (1 + x, 3 - y)$

Departamento de Matemáticas Universidad de Extremadura
Departamento de Matemáticas Universidad de Extremadura

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

d) $J(x, y, z) = (xy,\ y^2, z)$

Solución de a). Lo primero es comprobar que se trata de un gradiente: $\dfrac{\partial G_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial G_j}{\partial x_i}$ para $i, j = 1, 2, 3$

Existe entonces una función $F(x, y, z)$ que cumple

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial F}{\partial x} & = & y \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} & = & x + z\cos yz \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} & = & y\cos yz \end{array}\right.$$

De la primera ecuación se sigue que

$$F(x, y, z) = \int y\,dx = xy + \varphi(y, z)$$

y por tanto (derivando con respecto de y y de z)

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} & = & x + z\cos yz \\ 0 + \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} & = & y\cos yz \end{array}\right.$$

De aquí se calcula $\varphi(y, z)$ y así se obtiene la expresión de $F(x, y, z)$.

107 La función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{array}\right.$$

no es continua en $(0, 0)$ (y por tanto no es diferenciable) pero tiene derivadas parciales en $(0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

108 Calcular la derivada de la función compuesta mediante la regla de la cadena o directamente (haciendo primero la composición y derivando después) de:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longrightarrow & (x + 3y,\ x^2) & & \\ & & (x, y) & \longrightarrow & x + y \end{array}$$

Lo mismo con

a) $f(t) = (t, t^2)$ y $g(x, y) = x^2 - 3y + 1$

b) $f(x, y) = (y, x)$ y $g(x, y) = (x, \operatorname{sen} y)$

109 Se llama *derivada direccional* de f en $\mathbf{a}$ según la dirección del vector (normalizado) $\mathbf{u}$ al límite

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) \;=\; \lim_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{a}+t\mathbf{u})-f(\mathbf{a})}{t}.$$

Cuando f es diferenciable de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, entonces

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) \;=\; \mathbf{u}\cdot\nabla f(\mathbf{a})$$

(producto escalar). En el caso de una función $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ (de dos variables), para cada dirección (u,v) (vector normalizado, en caso contrario se divide por su módulo) se tiene

$$D_{(u,v)}f(x,y) \;=\; (u,v)\cdot\nabla f(x,y).$$

Como

$$(u,v)\cdot\nabla f(x,y) \;=\; \|(u,v)\|\cdot\|\nabla f(x,y)\|\,\cos\alpha \;=\; \|\nabla f(x,y)\|\,\cos\alpha,$$

donde $\alpha = \measuredangle\Big((u,v),\nabla f(x,y)\Big)$, entonces

$$-\|\nabla f(x,y)\| \;\leq\; D_{(u,v)}f(x,y) \;\leq\; \|\nabla f(x,y)\|.$$

Todas las derivadas direccionales en cada punto (x,y) están comprendidas entre estos dos valores $-\|\nabla f(x,y)\|$ y $\|\nabla f(x,y)\|$. Estos valores máximo y mínimo se alzanzan justamente cuando (u,v) se elige en la dirección de $\nabla f(x,y)$ o su opuesto.

110 En cada punto P del objeto de ecuación $F(x,y,\ldots) = 0$ el gradiente $\nabla F(P)$ es perpendicular a dicho objeto (F debe ser una función diferenciable)

La demostración es así (en dos variables): para cada curva $(x(t),y(t))$ contenida en la superficie $F(x,y)=0$ que pasa por P se tiene $F(x(t),y(t))=0$. Por la regla de la cadena $\nabla F(x(t),y(t))\cdot(x'(t),y'(t))=0$.

111 Si P es un máximo o mínimo relativo de una función $F(x,y,\ldots)$ entonces $\nabla F(P)=0$.

La demostración es parecida a la de funciones de una variable: si $P=(x,y,z,\ldots)$, por definición

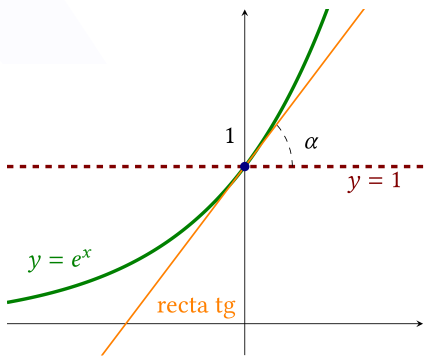
$$\frac{\partial F}{\partial x}(P) \;=\; \lim_{t\to 0}\frac{F(x+t,\ y,\ z,\ldots)-F(x,\ y,\ z,\ldots)}{t}.$$

Si este límite fuese positivo entonces para valores de t suficientemente pequeños todos los cocientes

$$\frac{F(x+t,\ y,\ z,\ldots)-F(x,\ y,\ z,\ldots)}{t}$$

serían positivos. Así $F(x+t,\ y,\ z,\ldots) > F(x,\ y,\ z,\ldots)$ si $t>0$ y $F(x+t,\ y,\ z,\ldots) < F(x,\ y,\ z,\ldots)$ si $t<0$. Luego P no podría ser ni máximo ni mínimo. La misma idea si el límite fuese negativo.

112 Se considera el punto $(0,1)$ en la gráfica de la función $f(x)=e^x$.
Calcular la recta tangente y la recta perpendicular a la gráfica que pasan por dicho punto.
Calcular el ángulo de corte de dicha gráfica con la recta $y=1$.
Encontrar para qué puntos de esa gráfica la recta tangente pasa por $(2,1)$.



Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

113 En el punto $(4/5, 3/5)$ de la curva $x^2 + y^2 = 1$ de $\mathbb{R}^2$, calcular la recta tangente y la recta perpendicular o normal.

114 En el punto $(1, 1, 2)$ de la supercifie $z = x^2 + y^2$ calcular el plano tangente a dicha superficie.

115 (**Plano tangente a la gráfica de una función en un punto**) Para una función de dos variables $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, la gráfica es la superficie $z = f(x, y)$, que está contenida en $\mathbb{R}^3$. Cada punto $(a, b) \in A$ genera un punto de la gráfica $(a, b, f(a, b))$. En este punto de la gráfica el plano tangente es

$$\left(\frac{\partial f(a,b)}{\partial x},\ \frac{\partial f(a,b)}{\partial y},\ -1\right) \cdot \Big(x-a,\ \ y-b,\ \ z-f(a,b)\Big) \ = \ 0.$$

Este plano tangente puede escribirse como

$$z \ = \ f(a,b) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}(y-b),$$

que recuerda al polinomio de Taylor de grado 1 en el caso de una variable.

Los puntos críticos son aquellos en los que el plano tangente es horizontal. Esto es debido a que estos puntos hacen que ambas derivadas parciales sean igual a 0, y para ellos el plano tangente es $z = f(a, b)$.

Por ejemplo, para la función $f(x, y) = x^2 - 2x + 4y^2$, la gráfica es la superficie $z = x^2 - 2x + 4y^2$. El punto $(2, 1)$ tiene como imagen $f(2, 1) = 4$ y por tanto genera el punto $(2, 1, 4)$ de la gráfica. En este punto $(2, 1, 4)$ el plano tangente tiene como ecuación

$$\left(\frac{\partial f(2,1)}{\partial x},\ \frac{\partial f(2,1)}{\partial y},\ -1\right) \cdot \Big(x-2,\ \ y-1,\ \ z-4\Big) \ = \ 0,$$

es decir

$$\Big(2,\ 8,\ -1\Big) \cdot \Big(x-2,\ \ y-1,\ \ z-4\Big) \ = \ 0.$$

Por tanto, este plano tangente es

$$z \ = \ 4 + 2(x-2) + 8(y-1)$$

o también

$$z \ = \ -8 + 2x + 8y.$$

Para esta función, el punto $(1, 0)$ es crítico (anula a las dos derivadas parciales), y por tanto, en el punto $(1, 0, -1)$ el plano tangente es horizontal; tiene como ecuación $z = -1$.

116 ¿En qué puntos de la superficie $z = x^2 y$ la recta perpendicular pasa por el punto $(0, 0, 1)$?

Se trata de considerar un punto de la superficie (a, b, c), es decir, un punto que verifique $c = a^2 b$. La recta perpendicular que pasa por dicho punto tiene como vector director a $\nabla F(a, b, c)$, donde $F(x, y, z) = x^2 y - z$. Por tanto se trata de la recta de ecuación (en forma paramétrica)

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & a + \lambda 2ab \\ y & = & b + \lambda a^2 \\ z & = & c + \lambda(-1) \end{array}\right.$$

Para que esta recta pase por el punto $(0, 0, 1)$ hay que calcular las soluciones de

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & a + \lambda 2ab \\ 0 & = & b + \lambda a^2 \\ 1 & = & a^2 b - \lambda \end{array}\right.$$

Si $a = 0$ entonces la segunda ecuación dice $b = 0$ y por tanto $c = 0$. Una solución es pues $(0, 0, 0)$. Además es la única solución.

Si $a \neq 0$ entonces $1 + 2\lambda b = 0$. Sustituyendo en las otra dos ecuaciones queda $2b^2 = a^2$ (en la segunda) y $4b^4 - 2b + 1 = 0$. Esta última no tiene solución, ya que $4b^4 - 2b + 1$ es siempre positivo. La función $f(x) = 4x^4 - 2x + 1$ tiene un mínimo en el cual vale mayor que cero y f es decreciente a su izquierda y creciente a su derecha.

117 ¿En qué puntos de la superficie $z = x^2$ la recta perpendicular pasa por el punto $(6, 2, 3)$?

118 Calcular el ángulo de corte de las superficies

$$\left\{\begin{array}{rcl} 6x + y & = & 18 - z \\ -z + y^2 & = & 0 \end{array}\right.$$

en el punto $(2, 2, 4)$. De la segunda de esas superficies, calcular el plano tangente en el punto $(3, 1, 1)$.

119 **Sobre el teorema de los multiplicadores de Lagrange**.

Para cada máximo o mínimo de una función $F(x, y, \ldots)$ con ciertas condiciones $G_1(x, y, \ldots) = 0,\ G_n(x, y, \ldots) = 0$ existen escalares (multiplicadores de Lagrange) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ que verifican

$$\nabla F(x, y, \ldots) \ = \ \lambda_1 \nabla G_1(x, y, \ldots) \ + \ldots + \ \lambda_n \nabla G_n(x, y, \ldots).$$

Para determinar si ese punto es máximo o mínimo se define la función (se llama función de Lagrange)

$$L(x, y, \ldots) \ = \ F(x, y, \ldots) \ - \ \lambda_1 G_1(x, y, \ldots) \ - \ldots - \ \lambda_n G_n(x, y, \ldots)$$

y la matriz hessiana de H en dicho punto

$$H \ = \ \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

(se han escrito x_i en lugar de $x, y, \ldots$).

Si la matriz es definida positiva, el punto es un mínimo local. Ser definida positiva significa que todos los menores principales (aquellos que contienen a la diagonal, y que tienen órdenes $1, 2, \ldots$) tienen determinantes positivos.

Si la matriz es definida negativa, el punto es un máximo local. Ser definida negativa significa que todos los menores principales tienen determinantes alternados, negativos y positivos, empezando por negativo.

A veces este criterio no dice nada pues la matriz puede no ser ni definida positiva ni definida negativa. En otros casos no hace falta utilizar esta matriz ya que se puede determinar si el punto es máximo o mínimo por otro método más rápido.

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Con frecuencia las condiciones definen un conjunto compacto (cerrado y acotado, fácil de comprobar) y por tanto F debe tener máximo y mínimo absolutos (siempre que F sea continua). Luego basta comparar el valor que toma F (con otros valores o entre ellos) para saber si es un máximo o un mínimo.

En otros casos se puede ver fácilmente que no hay máximo o no hay mínimo por la naturaleza del problema. Por ejemplo, la función $F(x, y) = x + y^2$ con la condición $x + y = 10$ no puede tener máximo, ya que para valores y grandes (y $x = 10 - y$ para que cumplan la condición) se tiene que $F(x, y)$ toma valores cada vez mayores.

La misma situación (no hay máximo ni mínimo) se encuentra al calcular los máximos y mínimos de $F(x, y, z) = xz + y^2$ con la condición $x + y + z = 100$. Con este método de Lagrange se obtiene como posible máximo o mínimo el punto $(40, 20, 40)$, en el cual la función vale $F(40, 20, 40) = 40^2 + 20^2 = 2000$. Sin embargo, puntos próximos a él (y que cumplan la condición $x + y + z = 100$) como los puntos de la forma $(40 - \varepsilon, 20, 40 + \varepsilon)$ dan valores menores que 2000, y puntos próximos $(40, 20 - \varepsilon, 40 + \varepsilon)$ dan valores mayores. Esto hace que el punto no sea ni máximo ni mínimo (es un punto de inflexión).

Este método de comparación de los valores en el punto y en los puntos próximos es inevitable cuando la matriz hessiana no aclara si se trata de un máximo o un mínimo. Por supuesto, se trata de ver cómo son los valores en los puntos próximos, pero puntos que además cumplan la condición (o las condiciones) que aparece en el problema. En el caso anterior, para calcular los máximos y mínimos de $F(x, y, z) = xz + y^2$ con la condición $x + y + z = 100$, se obtiene como posible máximo o mínimo el punto $(40, 20, 40)$. A continuación se mira qué dice la matriz hessiana. Si el criterio no dice nada, se mira cómo son los valores de la función F en puntos que verifiquen la condición $x + y + z = 100$ y que sean próximos a $(40, 20, 40)$. Comparando los valores de F en el punto $(40, 20, 40)$ y en estos puntos próximos se verá si se trata de un máximo o un mínimo.

Otro ejemplo: la función $F(x, y) = x + y$ con la condición $xy = 1$ alcanza los extremos en $(1, 1)$ y $(-1, -1)$. La matriz hessiana no dice nada en este caso. El primer punto es un mínimo y el segundo es un máximo, aunque la función vale 2 en el primero y -2 en el segundo.

120 Resolver el problema de máximos y mínimos condicionados

$$\begin{cases} \max/\min \; x^2 + y^2 \\ \quad \text{si } x + y = 100 \end{cases}$$

Se trata de maximizar o minimizar la función $F(x, y) = x^2 + y^2$ sobre los puntos que cumplen $G(x, y) = 0$, donde $G(x, y) = x + y - 100$. Para ello se plantea el sistema $\nabla F = \lambda \nabla G$, es decir

$$\begin{cases} 2x &= \lambda \cdot 1 \\ 2y &= \lambda \cdot 1. \end{cases}$$

Su única solución es $P = (50, 50)$, con $\lambda = 100$.

Para clasificar este punto se puede hacer lo siguiente:

1) Se mira cuánto vale la función F en P y cuánto vale en los puntos cercanos. El valor de F en P es $F(P) = 5000$. En un punto próximo $P' = (50 + \varepsilon, 50 + \delta)$ que además cumpla la condición $x + y = 100$ se tiene $50 + \varepsilon + 50 + \delta = 100$, y así $\delta = -\varepsilon$. Por tanto el valor de F en P' es

$$F(P') = (50 + \varepsilon)^2 + (50 - \varepsilon)^2 = 50^2 + 100\varepsilon + \varepsilon^2 + 50^2 - 100\varepsilon + \varepsilon^2 = 5000 + 2\varepsilon^2$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

que es claramente mayor o igual que $F(P)$. Por tanto P es un mínimo.

2) No hay argumento de continuidad y compacidad, ya que la condición $x + y = 100$ define una recta, que es un conjunto no acotado (y entonces no puede ser compacto)

3) La función lagrangiana es $L(x, y) = (x^2 + y^2) - \lambda(x + y - 100)$. Ya se ha comprobado que $\nabla L = (2x - \lambda, 2y - \lambda)$ se anula en el punto P. La matriz hessiana se consigue haciendo las derivadas parciales de orden 2 de L, es decir

$$H = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

En el punto $P = (50, 50)$, con $\lambda = 100$, la matriz es

$$H(P) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

definida positiva: sus menores principales tienen la secuencia $+\,+$. Se trata de un mínimo.

121 Resolver el problema de máximos y mínimos condicionados

$$\begin{cases} \max/\min \ x + y \\ \text{si } x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Se trata de maximizar o minimizar la función $F(x, y) = x + y$ sobre los puntos que cumplen $G(x, y) = 0$, donde $G(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Para ello se plantea el sistema $\nabla F = \lambda \nabla G$, es decir

$$\begin{cases} 1 & = & 2\lambda x \\ 1 & = & 2\lambda y. \end{cases}$$

Sus soluciones son

$$\begin{aligned} P_1 &= (x_1, y_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ P_2 &= (x_2, y_2) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right), \quad \lambda = \frac{-1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Para clasificar el primero de ellos se puede hacer lo siguiente:

1) Se mira cuánto vale la función F en P_1 y cuánto vale en los puntos cercanos. El valor de F en P_1 es $F(P_1) = \sqrt{2}$. En un punto próximo

$$P_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \varepsilon, \frac{1}{\sqrt{2}} + \delta \right)$$

que además cumpla la condición $x^2 + y^2 = 1$, es decir

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \varepsilon \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \delta \right)^2 = 1.$$

De aquí se sigue que $\varepsilon^2 + \delta^2 + \sqrt{2}\,(\varepsilon + \delta) = 0$, lo que implica que $\varepsilon + \delta \leq 0$. Por último, $F(P_1) = \sqrt{2}$ y $F(P_1') = \frac{1}{\sqrt{2}} + \varepsilon + \frac{1}{\sqrt{2}} + \delta = \sqrt{2} + (\varepsilon + \delta) \leq \sqrt{2}$. Por tanto, P_1 es un máximo. Argumentos similares prueban que P_2 es un mínimo.

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

2) La función F es continua y la condición $G(x, y) = 0$ define un conjunto compacto (lo es por ser cerrado y acotado). Por tanto F tiene en ese conjunto un máximo absoluto y un mínimo absoluto. Como $F(P_1) = \sqrt{2}$ y $F(P_2) = -\sqrt{2}$, el primero es el máximo y el segundo es el mínimo.

3) La función de Lagrange es $L(x, y) = x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$. Su gradiente es $\nabla L(x, y) = (1 - 2\lambda x, 1 - 2\lambda y)$. La matriz hessiana en este caso es

$$H = \begin{pmatrix} -2\lambda & 0 \\ 0 & -2\lambda \end{pmatrix}.$$

Por tanto, para P_1 (el valor λ correspondiente es $\lambda = 1/\sqrt{2}$)

$$H(P_1) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

y se trata de un máximo: la matriz es definida negativa, ya que la secuencia de menores principales es - +. Para el punto P_2 (con su correspondiente $\lambda = -1/\sqrt{2}$) se obtiene

$$H(P_2) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

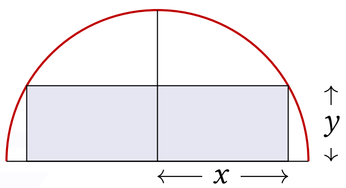
que es definida positiva y el punto es un mínimo.

122 La función $F(x, y) = x^2y^2$ tiene 2 mínimos y un máximo sobre los puntos de la recta $x + y = 1$.

Se trata de un problema de máximos y mínimos condicionados

$$\begin{cases} \max/\min \ x^2y^2 \\ \text{si } x + y = 1 \end{cases}$$

123 Se puede calcular el mayor rectángulo que puede contener un semicírculo de cierto radio R. Para ello se plantea cómo maximizar la función $F(x, y) = 2xy$ sobre los puntos que cumplen $x^2 + y^2 = R^2$. Se entiende como rectángulo mayor aquel que tenga mayor área.



El teorema de los multiplicadores de Lagrange plantea el sistema

$$\begin{cases} 2y = \lambda \cdot 2x \\ 2x = \lambda \cdot 2y \end{cases}$$

La solución es $x = y = R/\sqrt{2}$ y $\lambda = 1$. La matriz hessiana en este punto es

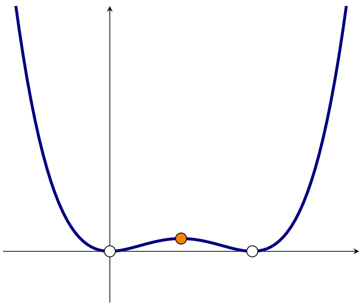
$$H = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},$$

y no permite clasificar en máximo o mínimo. Se puede utilizar el argumento de compacidad para comprobar que dicho punto es un máximo. También se puede comprobar que si se elige un punto próximo $P' = (R/\sqrt{2} + \varepsilon, R/\sqrt{2} + \delta)$ entonces debe cumplirse que $\varepsilon + \delta \leq 0$ y así $F(P') \leq F(P)$, y por consiguiente P es un máximo (es el máximo absoluto).

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

124 La función $F(x, y) = x^2y^2$ tiene dos mínimos y un máximo sobre los puntos de la recta $x + y = 1$.

Primera forma de probarlo: despejando una de las variables y sustituyendo en la función. *Esta forma de proceder es la menos indicada, ya que en muchas ocasiones no es posible despejar. Además, en los casos en los que sí se puede, los cálculos suelen ser más largos y complicados. Este ejemplo es uno de los pocos en los que todo esto funciona bien.* Como se tratan con puntos de la recta $x + y = 1$, se puede entonces poner $y = 1 - x$ y la función para la que hay que calcular sus máximos y mínimos es $f(x) = x^2(1 - x)^2$.



Los cálculos son sencillos. Basta encontrar los puntos que cumplen $f'(x) = 0$. Se obtienen dos mínimos, en $x = 0$ y $x = 1$, y un máximo en $x = 1/2$.

Segunda forma de probarlo (multiplicadores de Lagrange): se plantea el problema

$$\begin{cases} \max/\min & x^2y^2 \\ \text{si} & x + y = 1 \end{cases}$$

El sistema $\nabla F = \lambda \nabla G$, donde $F(x, y) = x^2y^2$, $G(x, y) = x + y - 1$, queda como

$$\begin{cases} 2xy^2 & = & \lambda \\ 2x^2y & = & \lambda. \end{cases}$$

De aquí se sigue que $xy^2 = x^2y$. Se obtienen entonces varias soluciones

- Si $x = 0$ entonces $\lambda = 0$, $y = 1$. Solución $P_1 = (0, 1)$ con $\lambda = 0$.
- Si $y = 0$ entonces $\lambda = 0$, $x = 1$. Solución $P_2 = (1, 0)$ con $\lambda = 0$.
- Si $x \neq 0$, $y \neq 0$, entonces $x = y = 1/2$. Solución $P_3 = (1/2, 1/2)$ con $\lambda = 1/4$.

(un buen momento para recordar que en problemas simétricos como este, las soluciones deben guardar simetría. Por eso, al salir como solución $(0, 1)$ debe salir también $(1, 0)$. El papel de x e y es intercambiable.)

La función de Lagrange es $L(x, y) = x^2y^2 - \lambda(x + y - 1)$, cuyo gradiente es $\nabla L = (2xy^2 - \lambda, 2x^2y - \lambda)$. La matriz hessiana (que debe salir simétrica por el teorema de Schwarz) es

$$H = \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{pmatrix}.$$

En los tres puntos anteriores se tiene

$$H(P_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H(P_3) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Este criterio no dice nada en ninguno de los tres casos. La forma de clasificar estos puntos es viendo cómo es la función en ellos y en los alrededores de ellos. Por ejemplo $F(P_1) = 0$ y en los puntos cercanos a P_1 la función es positiva. Se trata de un mínimo. Lo mismo ocurre con P_2.

Sin embargo, P_3 es un máximo. El valor de F en P_3 es $F(P_3) = 1/16$. Se considera un punto cualquiera $P_3' = (1/2 - \varepsilon, 1/2 + \delta)$ cerca de P_3 y que cumpla la condición dada por el problema, $x + y = 1$. Por tanto $\delta = -\varepsilon$ y entonces

$$F(P_3') = \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)^2 \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)^2 = \left(\frac{1}{4} - \varepsilon^2\right)^2 \leq \frac{1}{16} = F(P_3),$$

que se cumple para valores pequeños de ε.

125 **Simetrías y soluciones**. Es frecuente encontrarse problemas simétricos de cualquier tipo, no sólo para el cálculo de máximos y mínimos. Por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 & = & 1 \\ x + y & = & 1 \end{cases}$$

es simétrico en las variables x e y. Esto significa que si se hace el cambio x por y (y viceversa) y se reescribe el sistema, el resultado es el mismo. Una solución del sistema es $(1, 0)$. La simetría dice que otra solución es $(0, 1)$ (que lo es evidentemente).

El problema de máximos y mínimos condicionados ya visto

$$\begin{cases} \text{max/min} & x^2 y^2 \\ \text{si} & x + y = 1 \end{cases}$$

es simétrico en las variables x e y. No es de extrañar cómo son las soluciones.

El problema de máximos y mínimos condicionados

$$\begin{cases} \text{max/min} & xy + z \\ \text{si} & x^2 + y^2 + z^2 = 10 \end{cases}$$

es simétrico en las variables x e y, pero no hay más simetrías. Las soluciones al sistema $\nabla(xy + z) = \lambda\nabla(x^2 + y^2 + z^2 - 10)$ son

$$\begin{aligned}
P_1(x, y, z) &= \left(0,\ 0,\ \sqrt{10}\right), & \lambda &= \frac{1}{2\sqrt{10}} \\
P_2(x, y, z) &= \left(0,\ 0,\ -\sqrt{10}\right), & \lambda &= \frac{-1}{2\sqrt{10}} \\
P_3(x, y, z) &= \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}, 1\right), & \lambda &= \frac{1}{2} \\
P_4(x, y, z) &= \left(\frac{-3}{\sqrt{2}}, \frac{-3}{\sqrt{2}}, 1\right), & \lambda &= \frac{1}{2} \\
P_5(x, y, z) &= \left(\frac{-3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}, -1\right), & \lambda &= \frac{-1}{2} \\
P_6(x, y, z) &= \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{-3}{\sqrt{2}}, -1\right), & \lambda &= \frac{-1}{2}
\end{aligned}$$

La simetría $x \leftrightarrow y$ hace que las soluciones guarden ese intercambio entre los valores de ambas coordenadas.

126 Resolver el problema de máximos y mínimos condicionados

$$\begin{cases} \text{max/min} & x^2 + 2y + z^2 + 2 \\ \text{si} & \begin{cases} x + y - z & = & 3 \\ 2x + z & = & 4 \end{cases} \end{cases}$$

[La solución que ofrece el método de los multiplicadores de Lagrange es $(11/5, 2/5, -2/5)$, con $\lambda = 2, \mu = 6/5$. La matriz hessiana no decide en este caso si es máximo o mínimo. Los puntos

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

próximos a $P = (11/5, 2/5, -2/5)$ que cumplen las condiciones del problema tienen la forma $P' = (11/5 + \varepsilon, 2/5 + \delta, -2/5 + \gamma)$, donde se debe cumplir que $\delta = -3\varepsilon$ y $\gamma = -2\varepsilon$. Es fácil comprobar que para la función $F(x, y, z) = x^2 + 2y + z^2 + 2$ se tiene $F(P') = F(P) + 5\varepsilon^2 \geq F(P)$. Por tanto, P es un mínimo (de hecho es un mínimo absoluto).]

127 De todos los puntos (x, y, z) que verifican

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ x + 2y + z &= 0 \end{cases}$$

calcular aquellos que hacen máximo el valor de la función $f(x, y, z) = z$.

(se trata de los puntos que están en la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y en el plano $x + 2y + z = 0$, y se pregunta cuál de ellos está a máxima altura)

128 Calcular la distancia entre las curvas del plano $y = x^2 + 1$ e $y^2 = x$.

Se trata del cálculo de los puntos (x, y) y (a, b) de ambas curvas en los que consigue la menor distancia. En definitiva, todo se reduce a calcular la solución del problema de máximos y mínimos condicionados siguiente:

$$\begin{cases} \min\ (x-a)^2 + (y-b)^2 \\ \quad \text{si} \begin{cases} y - x^2 = 1 \\ a - b^2 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Es un problema que no tiene máximo (es evidente) y el mínimo se calcula mediante la ecuación $\nabla F = \lambda \nabla G_1 + \mu \nabla G_2$, es decir,

$$\begin{cases} 2(x-a) &= \lambda \cdot (-2x) &+ \mu \cdot 0 \\ 2(y-b) &= \lambda \cdot 1 &+ \mu \cdot 0 \\ -2(x-a) &= \lambda \cdot 0 &+ \mu \cdot 1 \\ -2(y-b) &= \lambda \cdot 0 &+ \mu \cdot (-2b) \end{cases}$$

A veces no es fácil resolver estos sistemas aparentemente sencillos. En este caso, las soluciones son

$$b \approx 3/4,\ a = b^2 = 9/16,\ x = 1/4b = 1/3,\ y = x^2 + 1 = 10/9$$

y la distancia pedida es la distancia entre (x, y) y (a, b) para estos valores:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \approx 0.4275.$$

Como ejercicio, es interesante utilizar el programa `geogebra` y medir experimentalmente esta distancia para encontrar un valor muy similar.

129 Calcular la distancia al origen de la recta (recta en $\mathbb{R}^3$ dada como intersección de dos planos)

$$\begin{cases} x + 2y &= 4 \\ x - y + z &= 1. \end{cases}$$

Se trata de encontrar la solución (a, b, c) del problema (no hay máximo)

$$\begin{cases} \min\ x^2 + y^2 + z^2 \\ \text{si} \begin{cases} x + 2y &= 4 \\ x - y + z &= 1. \end{cases} \end{cases}$$

La distancia pedida será $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

130 Comprobar que la distancia de un punto (a,b,c) a un plano $Ax+By+Cz+D=0$ es

$$\frac{|A\cdot a+B\cdot b+C\cdot c+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Al plantear el sistema $\nabla F=\lambda\nabla G$, donde $F(x,y,z)=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$ y $G(x,y,z)\equiv Ax+By+Cz+D=0$, se tiene

$$\begin{cases} 2(x-a) &= \lambda A\\ 2(y-b) &= \lambda B\\ 2(z-c) &= \lambda C.\end{cases}$$

Entonces

$$\begin{cases} 2A(x-a) &= \lambda A^2\\ 2B(y-b) &= \lambda B^2\\ 2C(z-c) &= \lambda C^2,\end{cases}$$

y sumando se obtiene

$$\lambda=-2\frac{Aa+Bb+Cc+D}{A^2+B^2+C^2}.$$

Así,

$$x=-A\frac{Aa+Bb+Cc+D}{A^2+B^2+C^2}+a,\;\; y=-B\frac{Aa+Bb+Cc+D}{A^2+B^2+C^2}+b,\;\; z=-C\frac{Aa+Bb+Cc+D}{A^2+B^2+C^2}+c.$$

En ese punto (x,y,z) la distancia al punto (a,b,c) es

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=\frac{|A\cdot a+B\cdot b+C\cdot c+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

131 Para cada $r>0$ calcular

$$\begin{cases} \max\; xyz\\ \text{si } x^2+y^2+z^2=r^2.\end{cases}$$

Deducir que

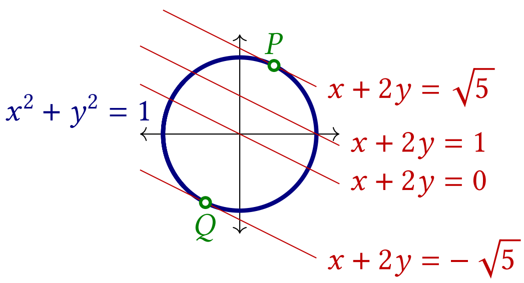
$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}=0.$$

132 Calcular los extremos de la función $x+2y$ sobre los puntos de la circunferencia $x^2+y^2=1$.

Las soluciones se encuentran resolviendo el problema

$$\begin{cases} \max\; x+2y\\ \text{si } x^2+y^2=1.\end{cases}$$

En la gráfica de la derecha puede verse un dibujo de la situación y los puntos P y Q que se obtienen como soluciones.



Departamento de Matemáticas Universidad de Extremadura

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

En esos puntos, los vectores gradientes a ambos objetos (la función $F(x,y) = x + 2y$ y circunferencia $G(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$) llevan la misma dirección, es decir, son proporcionales. Esto es lo que dice el teorema de los multiplicadores de Lagrange, que gráficamente parece evidente.

Cálculo de los extremos: al resolver el problema, planteando la ecuación $\nabla F = \lambda \nabla G$, se obtiene

$$\begin{cases} 1 &= \lambda \cdot 2x \\ 2 &= \lambda \cdot 2y \end{cases}$$

cuyas soluciones son

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \qquad \lambda_P = \sqrt{5}/2$$
$$Q = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right), \qquad \lambda_Q = -\sqrt{5}/2.$$

Clasificación de los extremos: la función F es continua y la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ es un conjunto compacto, ya que es cerrado y acotado. Por tanto F alcanza el máximo y el mínimo absolutos. Y P y Q son esos puntos. El valor de la función en ellos es $F(P) = \sqrt{5}$ y $F(Q) = -\sqrt{5}$. De aquí se sigue que P es el máximo y Q es el mínimo.

Este razonamiento de función continua sobre un compacto permite clasificar de forma rápida algunos puntos, aunque no siempre puede utilizarse. Por ejemplo, hay muchas veces que la condición (o condiciones) definen un conjunto no compacto.

En general, para clasificar los puntos candidatos a ser máximo o mínimo, se mira la función lagrangiana y la matriz hessiana en cada uno de ellos.

La función lagrangiana es $L = F - \lambda G$. Para el punto P se tiene

$$L(x,y) = x + 2y - \frac{\sqrt{5}}{2}(x^2 + y^2 - 1).$$

Es evidente que $\nabla L(P) = 0$, ya que precisamente se ha encontrado P como solución de esta ecuación. Nótese que $\nabla L(x,y) = (1 - \lambda \cdot 2x,\ 2 - \lambda \cdot 2y)$. La matriz de derivadas parciales de orden 2 en P (matriz hessiana) es

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{5} & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

que es definida negativa. Por tanto P es un máximo.

Para el punto Q se elige

$$L(x,y) = x + 2y + \frac{\sqrt{5}}{2}(x^2 + y^2 - 1)$$

y se obtiene una matriz definida positiva, por lo que Q es un mínimo.

133 El teorema de Fubini no siempre es cierto. Es necesario que la función cumpla ciertas condiciones en el rectángulo que se trata. Por ejemplo, si $f(x,y)$ es continua en el rectángulo $A = [a,b] \times [c,d]$, entonces sí es verdad

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy.$$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Sin embargo, para la función

$$f(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad f(0,0) = 0,$$

se tiene

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\, dy\, dx \;=\; -\frac{\pi}{4}, \qquad \int_0^1 \int_0^1 \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy \;=\; \frac{\pi}{4}.$$

134 Se puede calcular el área de una elipse Ω de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ haciendo el cambio de variable

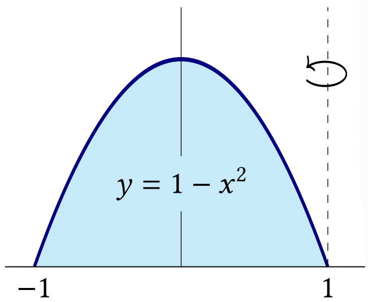
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x &=& au \\ y &=& bv. \end{array} \right.$$

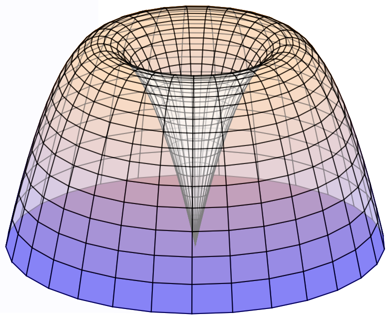
Así Ω se transforma en el círculo unidad Ω' y utilizando el teorema de cambio de variable

$$|\Omega| = \iint_\Omega 1 dx\, dy \;=\; \iint_{\Omega'} 1 \cdot a \cdot b\, dv\, du \;=\; ab \int_0^1 \int_0^{2\pi} r\, d\varphi\, dr \;=\; \pi ab$$

(en la última integral se hace el cambio a coordenadas polares).

135 Se considera la región Ω delimitada por la gráfica de la función $f(x) = 1 - x^2$ en el intervalo $[-1,\ 1]$. Se hace girar Ω alrededor del eje $x = 1$ (es una recta vertical), como se muestra en la ilustración:



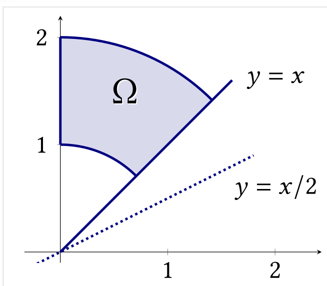


El volumen del sólido de revolución que se consigue es

$$V = 2\pi \cdot \mathrm{dist}\Big(\text{eje}, (\overline{x}, \overline{y})_\Omega\Big) \cdot |\Omega|.$$

En este caso se tiene $|\Omega| = 4/3$, $\overline{x} = 0$, $\overline{y} = 2/5$, y así $V = 2\pi \cdot 1 \cdot \dfrac{4}{3} = \dfrac{8\pi}{3}$.

136 Se considera la región Ω del primer cuadrante del plano, delimitada por las rectas $x = 0$, $y = x$, y por las circunferencias de centro el origen y radios 1 y 2, tal y como se muestra en el dibujo de la derecha.
Calcular el volumen del sólido de revolución que se consigue al hacer girar Ω alrededor de la recta $y = x/2$



137 La recta $y = x$ divide al primer cuadrante en dos mitades simétricas. Cada una de estas mitades puede volver a dividirse en partes iguales con dos rectas, cuyas inclinaciones son $\pi/8$ y $3\pi/8$. ¿Son estas rectas las que tienen como ecuación $y = 2x$ o $y = x/2$?

Son rectas parecidas, aunque no coinciden. La función arctg no es lineal: si un punto está en la recta $y = x$ entonces el ángulo tiene tg igual a 1; pero la mitad de pendiente $y = x/2$ no da la mitad del ángulo. La recta $y = x/2$ se eleva con un ángulo de unos 26 grados. La recta $y = 2x$ tiene una inclinación de unos 63 grados (un ángulo cuya tangente es 2). Por ejemplo, el punto $\left(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}\right)$ está en la recta $y = 2x$.

La recta $y = (\sqrt{2} - 1)x$ se eleva un ángulo $\alpha = \pi/8$ sobre el eje X. Es decir, $\operatorname{tg} \pi/8 = \sqrt{2} - 1$. Esto puede comprobarse utilizando las conocidas fórmulas $\operatorname{sen}^2 \pi/8 = (1 - \cos \pi/4)/2$ y $\cos^2 \pi/8 = (1 + \cos \pi/4)/2$.

Similarmente, $\operatorname{tg} 3\pi/8 = \sqrt{2} + 1$. La recta $y = (\sqrt{2} + 1)x$ se eleva $3\pi/8$ sobre el eje X.

138 Primitiva de la primitiva. Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces

$$G(x) = \int_a^x (x - t) f(t)\, dt$$

verifica $G''(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$ (es la segunda primitiva de f).

Los cálculos son sencillos (utilizando el teorema fundamental del cálculo integral):

$$G(x) = x \int_a^x f(t)\, dt - \int_a^x t \cdot f(t)\, dt.$$

Por tanto,

$$G'(x) = \int_a^x f(t)\, dt + x f(x) - x f(x),$$

y así $G''(x) = f(x)$.

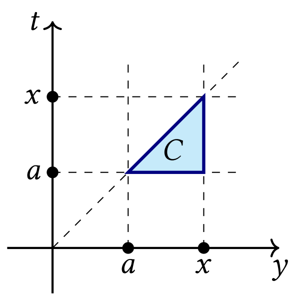
Por otra parte, como la primitiva de f es

$$F(y) = \int_a^y f(t)\, dt,$$

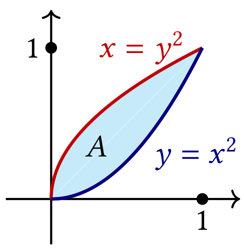
entonces

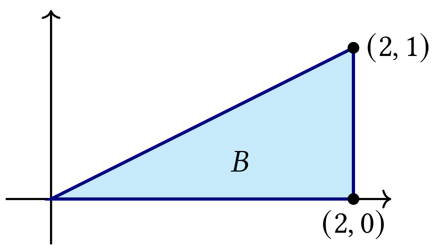
$$G(x) = \int_a^x F(y) dy = \int_a^x \int_a^y f(t)\, dt\, dy,$$

la integral doble $\iint_C f$ donde C es el conjunto representado a la derecha.



139 Si $f(x, y) = ye^x - x$ y $g(x, y) = yx^2$, comprobar que para los conjuntos



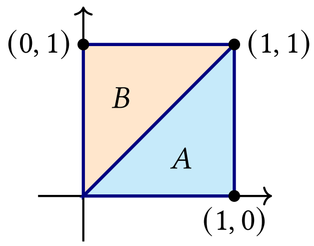


Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

se tiene

$$\iint_A f = \frac{-9e}{2} + \frac{247}{20}, \quad \iint_A g = \frac{3}{56}, \quad \iint_B f = \frac{1}{4e^2} - \frac{19}{12}, \quad \iint_B g = \frac{4}{5}.$$

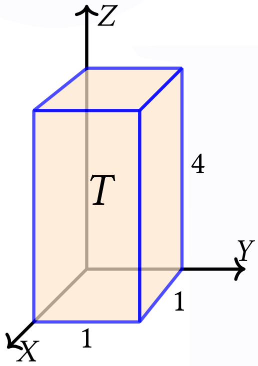
140 Comprobar los resultados siguientes:

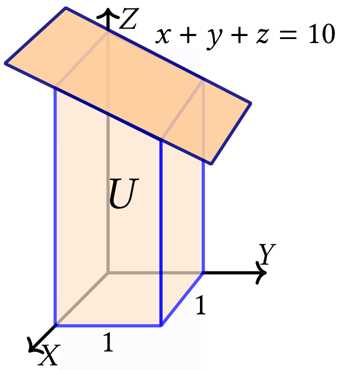


$$\iint_A (x-y)\,dx\,dy = 1/6, \qquad \iint_B (x+2y^2)\,dx\,dy = 2/3,$$

haciendo ambos de las dos formas posibles (colocando los límites de integración para x y luego para y, o al revés.)

141 Se considera el paralelepípedo T de base cuadrada de lado 1, y de altura 4, como en el dibujo. También se considera el sólido U de igual base pero delimitado por el plano $x+y+z=10$, como muestra la figura de la derecha.





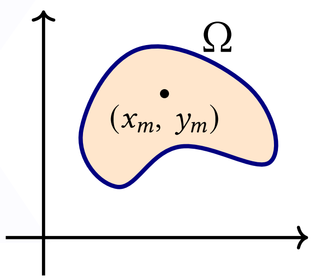
Calcular $|T|$ y $|U|$ (el volumen de ambos). Calcular las integrales

$$\iiint_T (x+z)\,dx\,dy\,dz, \qquad \iiint_U (yz - x^2)\,dx\,dy\,dz.$$

142 Para una figura plana Ω, el centro de masas $(x_m,\ y_m)$ se define mediante

$$x_m = \frac{1}{m(\Omega)} \iint_\Omega x\,d(x,y)\,dx\,dy = \frac{\iint_\Omega x\,d(x,y)\,dx\,dy}{\iint_\Omega d(x,y)\,dx\,dy},$$

$$y_m = \frac{1}{m(\Omega)} \iint_\Omega y\,d(x,y)\,dx\,dy = \frac{\iint_\Omega y\,d(x,y)\,dx\,dy}{\iint_\Omega d(x,y)\,dx\,dy}.$$



Similarmente se puede definir el centro de masas para sólidos del espacio.

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Para un rectángulo $\Omega = [0,10] \times [0,2]$, su centro geométrico es $(\overline{x}, \overline{y})$ donde por ejemplo

$$\overline{x} = \frac{1}{|\Omega|} \iint_\Omega x\,dx\,dy \;=\; \frac{\displaystyle\iint_\Omega x\,dx\,dy}{\displaystyle\iint_\Omega 1\,dx\,dy}.$$

En este caso no hace falta utilizar integrales para obtener $(\overline{x}, \overline{y}) = (5,1)$. Para conocer su centro de masas es necesario saber la densidad en cada punto de Ω. Por ejemplo, si en cada $(x,y) \in \Omega$ la densidad viene dada por $d(x,y) = x^2 + y$, entonces el centro de masas es el punto $(x_m,\ y_m)$ donde

$$x_m = \frac{1}{m(\Omega)} \iint_\Omega x\,d(x,y)\,dx\,dy = \frac{\displaystyle\int_0^{10}\int_0^2 x\,(x^2+y)\,dy\,dx}{\displaystyle\int_0^{10}\int_0^2 (x^2+y)\,dy\,dx},$$

$$y_m = \frac{1}{m(\Omega)} \iint_\Omega y\,d(x,y)\,dx\,dy = \frac{\displaystyle\int_0^{10}\int_0^2 y\,(x^2+y)\,dy\,dx}{\displaystyle\int_0^{10}\int_0^2 (x^2+y)\,dy\,dx}.$$

143 Se considera la región plana A delimitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 6 - x$. Calcular su área, su centro geométrico y la longitud de su frontera.

Si $f(x,y) = 1 + x^2$, calcular el volumen que encierra la gráfica de f sobre A y la superficie de dicha gráfica que está en la vertical de A.

Si en cada punto $(x,y) \in A$ la densidad viene dada por $d(x,y) = 10 - y$, calcular la masa de A y su centro de masas.

Calcular el volumen de sólido de revolución que se consigue al hacer girar A alrededor del eje X. Y el volumen si se hace girar alrededor de la recta $2x + y + 8 = 0$

144 Sea A el rectángulo $[0,100]\times[0,2]$. Calcular su área y su centro geométrico. Calcular el volumen que se obtiene al hacerlo girar alrededor de la recta $y = x + 2$.

Si en cada punto la densidad viene dada por $d(x,y) = x + y$, calcular la masa y el centro de masas de A.

145 Calcular el volumen del sólido delimitado por las gráficas de las funciones $f(x,y) = x^2 + y^2$ y $g(x,y) = 8 - x^2 - y^2$. Calcular la superficie de dicho objeto.

146 Justificar cada uno de los pasos siguientes:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \int_0^\infty \operatorname{sen} x \left(\int_0^\infty e^{-xt}\,dt\right) dx \;=\; \int_0^\infty \int_0^\infty \operatorname{sen} x \cdot e^{-tx}\,dxdt$$
$$= \int_0^\infty \frac{dt}{t^2+1} \;=\; \frac{\pi}{2}.$$

(para calcular $\int \operatorname{sen} x \cdot e^{-tx}\,dx$ se hace la integración por partes con $u = e^{-xt}$ y $dv = \operatorname{sen} x dx$).

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Puede verse en `https://web.williams.edu/Mathematics/lg5/Feynman.pdf` algo sobre otra técnica de integración (de Feynmann) para el cálculo de ciertas integrales, como $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$. Se conoce como «Feynman integration trick».

147 Se considera en $\mathbb{R}^3$ el sólido T delimitado lateralmente por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, inferiormente por el plano $z = 0$ y superiormente por el plano $z = 10 - x$. Calcular su volumen. Calcular su masa si en cada punto $(x, y, z) \in T$ la densidad es $d(x, y, z) = x^2 + y^2$.

148 Para una función $F(x, y) = f(x) \cdot g(y)$, donde $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son continuas, el teorema de Fubini se puede ampliar a

$$\int_a^b \int_c^d f(x)g(y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x)g(y)\, dx\, dy = \left(\int_a^b f(x)\, dx\right)\left(\int_c^d g(y)\, dy\right).$$

Por ejemplo,

$$\int_0^2 \int_0^1 xy^2\, dy\, dx = \left(\int_0^2 x\, dx\right)\left(\int_0^1 y^2\, dy\right) = 1 \cdot \frac{1}{3}.$$

Como aplicación, se puede probar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}\,.$$

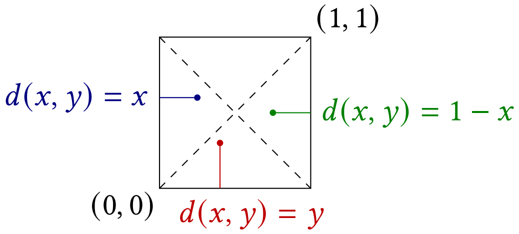
Para comprobar esto último, si $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$ entonces

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}e^{-y^2}\, dx\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy \\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} re^{-r^2}\, d\varphi\, dr \quad \text{(pasando a coordenadas polares)} \\ &= \left[-\pi e^{-r^2}\right]_0^{+\infty} = \pi. \end{aligned}$$

149 Se considera la cuarta parte del círculo de radio 1 que está en el primer cuadrante, es decir, la región que verifica $x^2 + y^2 \leq 1,\ x, y \geq 0$. Calcular la distancia media al punto $(1, 0)$.

150 Un objeto se mueve desde el punto $(-1, 1)$ al $(1, 1)$ siguiendo la parábola $y = x^2$. Calcular en qué puntos del trayecto está lo más cerca y lo más lejos del punto $A(0, 1)$. Calcular la distancia media a ese punto A.

151 Calcular la distancia media de los puntos de un cuadrado a su borde. Indicación:



Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

152 Calcular la superficie de una esfera de radio R.

153 Se puede probar que para una curva cerrada $C : \big(x(t), y(t)\big),\ t \in [a, b]$, el área encerrada es

$$|C| = \left| \int_a^b x(t)y'(t)\,dt \right| = \left| \int_a^b x'(t)y(t)\,dt \right|.$$

Que esas integrales coinciden se sigue de $x'y = (xy)' - xy'$. Por el teorema de Green, que no se ha visto este curso, ambas coinciden con ese área encerrada por la curva.

Por ejemplo, una círcunferencia centrada en el origen y de radio 1, cuya expresión es $C : (\cos t,\ \operatorname{sen} t),\ t \in [0,\ 2\pi]$, encierra un área igual a

$$\left| \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt \right| = \pi$$

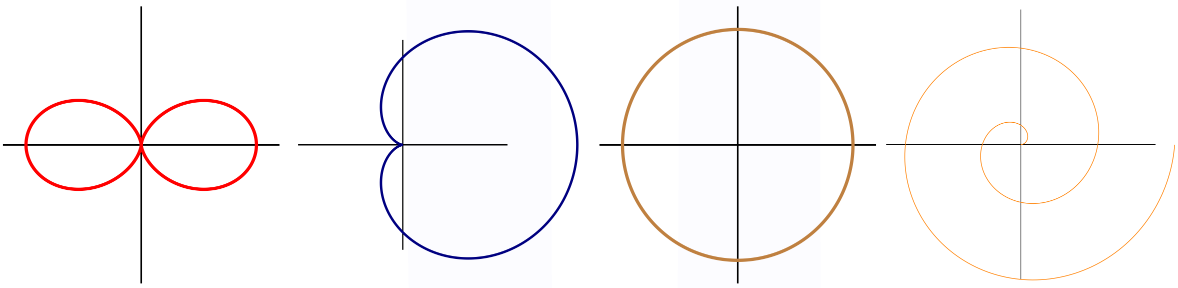
154 Identificar las curvas (en coordenadas polares r, φ)

a) $r = \varphi$ (espiral de Arquímedes)

b) $r = \cos^2 \varphi$

c) $r = 1$

d) $r = 1 + \cos\varphi$ (cardioide)



Se puede acceder por ejemplo a la página `www.wolframalpha.com` y teclear

```
polar plot r=cos^2 theta
```

(se utilizan coordenadas polares r, θ)

155 La curva $r = \cos\theta$ (en coordenadas polares) es una circunferencia de radio $1/2$ centrada en $(1/2, 0)$. Su ecuación es $(x - 1/2)^2 + y^2 = (1/2)^2$, que se obtiene al reescribir $r = \cos\theta$ en coordenadas cartesianas.

De la misma forma, una circunferencia de radio 1 centrada en $(1, 0)$ tiene como ecuación $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. Esta ecuación es $r = 2\cos\theta$ en coordenadas polares. El interior de la circunferencia es $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$ o también $r \leq 2\cos\theta$

156 Calcular el área del cuadrilátero de vértices

$$A(1, 0, 9),\ B(1, 1, 8),\ C(0, 1, 9) \text{ y } D(0, 0, 10).$$

Se trata de un cuadrilátero S' situado en el plano de ecuación $x + y + z = 10$, cuya ecuación se puede calcular fácilmente: ecuación de un plano que pasa por esos puntos. Luego esos puntos están en la superficie del plano $z = 10 - x - y$, que es la gráfica de la función $f(x, y) = 10 - x - y$.

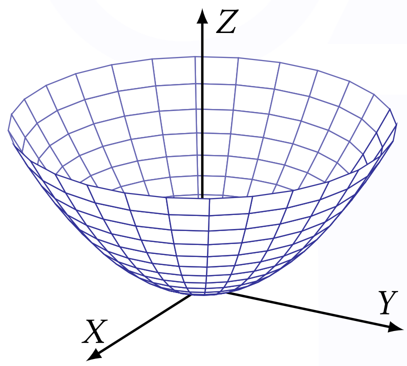
Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

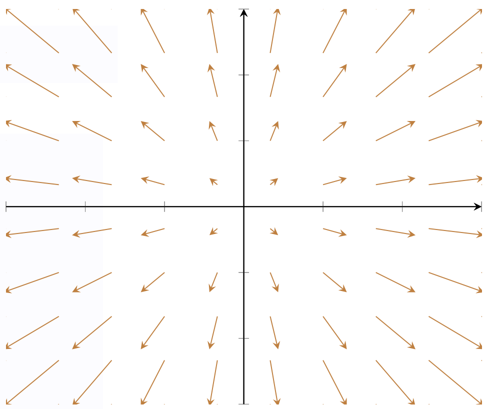
Y esos puntos son las imágenes de las esquinas del cuadrado unidad S de $\mathbb{R}^2$. Por tanto, la superficie del cuadrilátero S' es

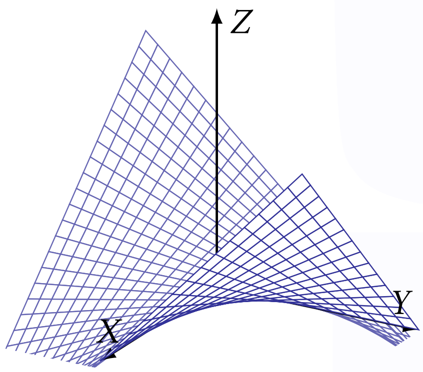
$$\iint_S \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy = \sqrt{3} \iint_S dx\, dy = \sqrt{3}\, |S| = \sqrt{3}\,.$$

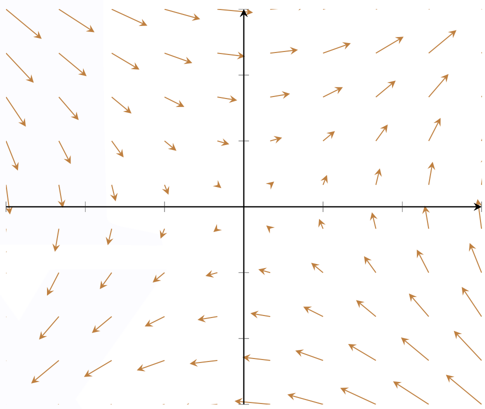
En realidad el cuadrilátero es un rombo, cuyos lados miden todos $\sqrt{2}$ y sus diagonales miden $\sqrt{2}$ y $\sqrt{6}$. Su superficie es la mitad del producto de sus diagonales: $\sqrt{2}\,\sqrt{6}/2 = \sqrt{3}$.

157 **Gradientes y potenciales: representación gráfica**. Se han representado (en este orden) las funciones $f_1(x,y) = x^2 + y^2$, $f_2(x,y) = xy$ y $f_3(x,y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, y sus gradientes (como campos de vectores)



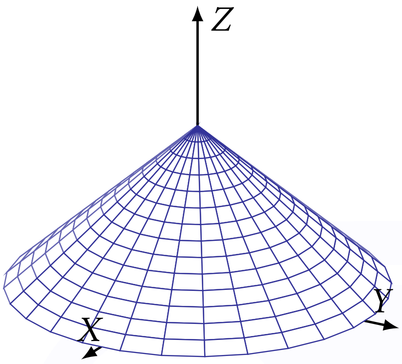


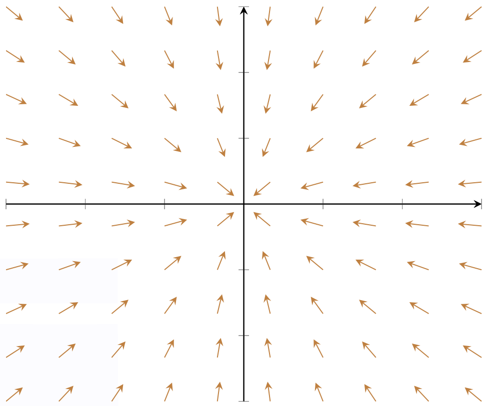




Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura





158 Otro ejemplo: Potencial gravitatorio

Viene dado por la ecuación

$$F = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r^2}\,\vec{u}_r$$

con $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. El vector unitario de dirección puede escribirse como $\vec{u}_r = \dfrac{\mathbf{r}}{r}$, con lo que

$$F = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r^3}\mathbf{r}.$$

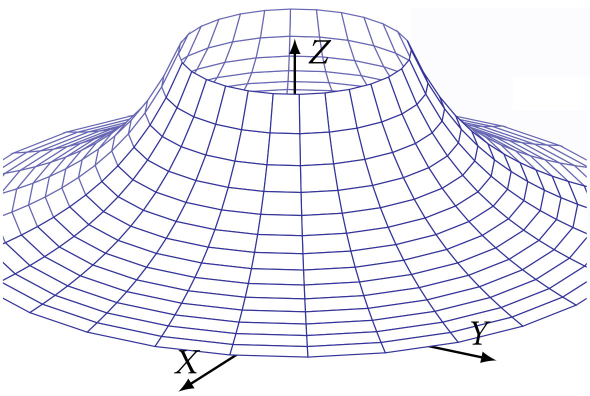
Esta función es el gradiente de

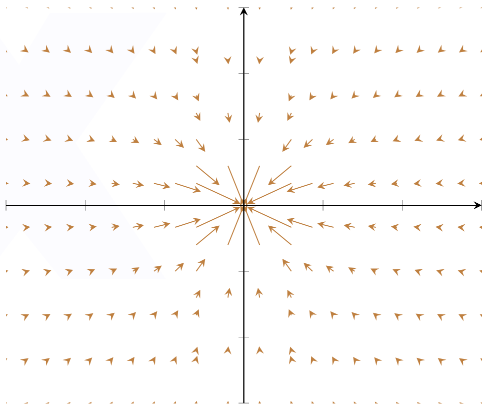
$$\phi(x, y, z) = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r},$$

que es la función potencial,

$$\phi(x, y, z) = -\frac{G \cdot M \cdot m}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

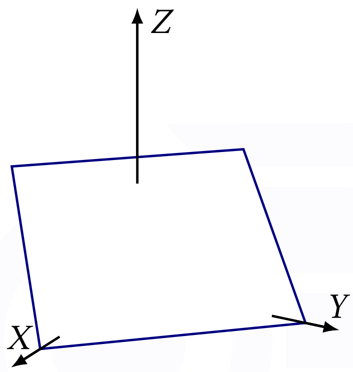
La siguiente gráfica muestra el caso de dos variables, el potencial y su gradiente (tomando la constante $GMm = 1$).

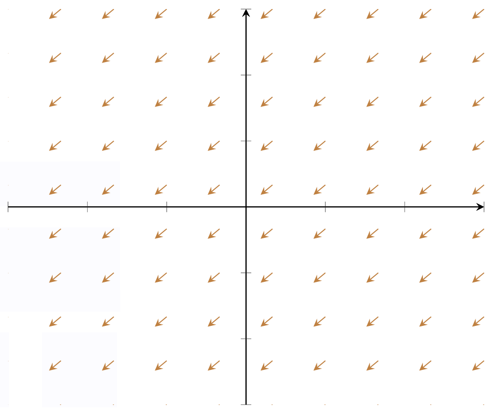


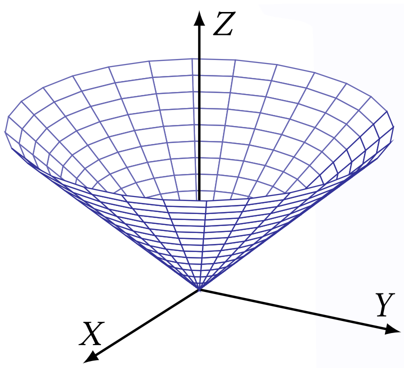


159 Más ejemplos. La primera gráfica corresponde a la función $f(x, y) = 2 - x - y$. Es un plano de ecuación $x + y + z = 2$.

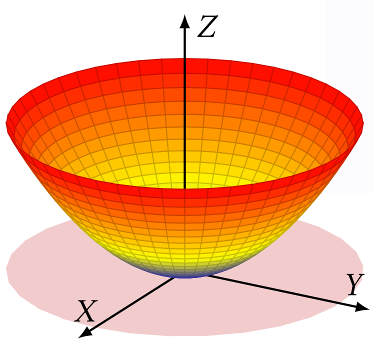
La segunda corresponde a la función $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Su gráfica es una superficie en forma de cono. Dibujar su gradiente (el campo de vectores)

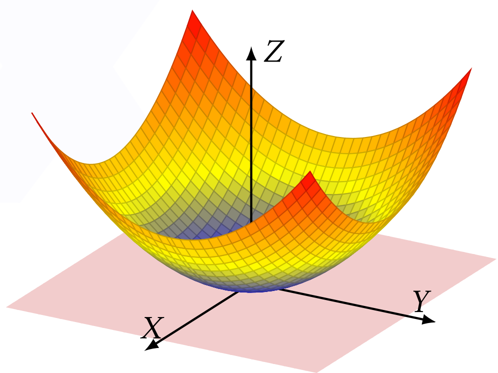






160 La gráfica de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ en dos dominios distintos. Uno es un círculo y otro es un cuadrado. La gráfica parece distinta, aunque se trata de la misma superficie: el paraboloide formado por los puntos que verifican $z = x^2 + y^2$. Esto puede confundir a los usuarios de programas informáticos en los que se dibujan gráficas sin especificar cuál es el dominio de definición de la función.





Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura