Inferencia y Decisión
Tema 1. Estructura Estadística y Estadísticos

1. Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es una muestra de tamaño n de una distribución real, llamaremos media muestral a la v.a. $\bar{X} = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$ y llamaremos varianza muestral a la v.a. $S^2 = (n-1)^{-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$. Probar que si la distribución común de las X_i tiene media finita m y varianza finita σ^2, entonces $E(\bar{X}) = m$, $Var(\bar{X}) = \sigma^2/n$ y $E(S^2) = \sigma^2$.

2. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.r. independientes con distribución común $N(\mu, \sigma^2)$. Probar que:
   (a) $\bar{X}$ y $(X_1 - \bar{X}, \ldots, X_n - \bar{X})$ son v.a. independientes.
   (b) $\bar{X}$ y S^2 son independientes.
   (c) $(n-1)\sigma^{-2}S^2$ tiene distribución $\chi^2(n-1)$
   (d) $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/S$ tiene distribución $t(n-1)$

3. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n$ v.a.r. independientes y supongamos que las X_i tienen distribución $N(\mu_X, \sigma_X^2)$ y las Y_i tienen distribución $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$. Probar que:
   (a) $\frac{S_X^2/\sigma_X^2}{S_Y^2/\sigma_Y^2}$ tiene distribución $F(m-1, n-1)$. En particular si $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$, entonces S_X^2/S_Y^2 tiene distribución $F(m-1, n-1)$.
   (b)
   $$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{(m-1)\sigma_X^{-2}S_X^2 + (n-1)\sigma_Y^{-2}S_Y^2}} \sqrt{\frac{m+n-2}{m^{-1}\sigma_X^2 + n^{-1}\sigma_Y^2}}$$
   tiene distribución $t(m+n-2)$.

4. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra de tamaño n de una distribución de Poisson de parámetro λ. Describir la distribución de la media muestral.

5. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra de tamaño n de una distribución de $B(1, \theta)$. Describir la distribución de la media y varianza muestral.

6. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_5$ una muestra de una distribución $N(0, 4)$. Determinar $P(\sum_{i=1}^{5} X_1 \geq 5)$.

7. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$ y $\bar{X}$ y S^2 la media y varianza muestral, respectivamente. Sea $X_{n+1} \sim N(\mu, \sigma^2)$ y supongamos que $X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}$ son independientes. Determinar la distribución muestral de $[(X_{n+1} - \bar{X})/S]\sqrt{n/(n+1)}$.

8. Una muestra de tamaño 5 es recogida de una población normal con media 2.5 y varianza 36.
   (a) Calcular la probabilidad de que la varianza muestral esté comprendida entre 30 y 44.
   (b) Calcular la probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 1.3 y 3.5, mientras que la varianza muestral está entre 30 y 44.

9. Consideremos una sucesión de sucesos. Sea T_1 el tiempo de espera hasta que ocurra el primer suceso, T_2 el tiempo que transcurre entre la ocurrencia del primer suceso y la del segundo,... Hagamos $S_n = T_1 + \cdots + T_n$ para $n \geq 1$. Es conveniente escribir $S_0 = 0$. Supongamos que
   $$0 = S_0(\omega) < S_1(\omega) < S_2(\omega) < \ldots, \quad \forall \omega,$$
   (que viene a decir que dos sucesos no pueden ocurrir simultáneamente). Hagamos también $X_0 = 0$ y, para $t > 0$, denotemos por X_t el número de sucesos que ocurren en el intervalo $[0, t]$, es decir,
   $$X_t(\omega) = \max\{n \in \mathbb{N} : S_n(\omega) \leq t\}.$$

Notar que

$$\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) \geq n\} = \{\omega \in \Omega : S_n(\omega) \leq t\}.$$

Supongamos que las v.a.r. T_n tienen la misma distribución y que esa distribución común es la exponencial de parámetro $\lambda > 0$ (dada la propiedad de "pérdida de memoria" que caracteriza a la distribución exponencial puede convencernos de que esa suposición es "razonable"). Supondremos también que las T_n son independientes. Probar que entonces X_t tiene distribución de Poisson de parámetro t/λ.

> Observación: Parece pues razonable usar la distribución de Poisson para describir el número de sucesos que ocurren en un cierto intervalo de tiempo (p. ej., número de partículas radiactivas que golpean una placa en un periodo de tiempo, número de llamadas telefónicas recibidas en un día, número de vehículos que pasan por un punto concreto entre las dos y las tres de la tarde).

10. Describir la estructura estadística asociada al experimento que consiste en la observación de una muestra de extensión n de una v.a. que puede tomar un número finito k de valores y cuya distribución es, en principio, totalmente desconocida.

11. Supongamos una muestra de tamaño 40 de una distribución exponencial de media 3. Obtener la probabilidad de que la función de distribución empírica y la teórica en el punto 1 difieran en menos de 0.01.

12. Sobre la estructura estadística

$$(\mathbb{R}^2, \mathcal{R}^2, \{N(\mu_1, \sigma^2) \times N(\mu_2, \sigma^2) : \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\})$$

los estadísticos $S(x, y) = x + y$ y $D(x, y) = x - y$ son independientes.

1. La familia de los sucesos libres en una estructura estadística no es necesariamente una σ-álgebra (ni siquiera un álgebra).

2. Sean $(\Omega, \mathcal{A}, \{P_\theta : \theta \in \Theta\})$ una estructura estadística dominada y $T : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ y $S : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\Omega'', \mathcal{A}'')$ estadísticos. Supongamos que existe $h : (\Omega'', \mathcal{A}'') \longrightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ tal que $T = h \circ S$ entonces S es suficiente si T lo es.

3. Describir la estructura estadística asociada a una muestra de extensión n de una distribución normal en los tres casos siguientes:

   a) La varianza se supone conocida ($\sigma = \sigma_0$) y la media desconocida.
   b) La media se supone conocida ($\mu = \mu_0$) y la varianza desconocida.
   c) Ambos parámetros se suponen desconocidos.

   Determinar en cada uno de esos tres casos un estadístico suficiente.

4. Describir la estructura estadística asociada a una muestra de extensión n de una distribución $U[\theta, \theta+1]$. Probar que existen un estadístico suficiente y un estadístico libre no independientes.

5. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra de tamaño n de una distribución uniforme en el intervalo $[-\theta/2, \theta/2]$, $\theta > 0$. Describir la estructura estadística apropiada para un problema de inferencia sobre θ. Determinar un estadístico suficiente.

6. Si $a \in \mathbb{R}$ y $b > 0$ se define una distribución real $P_{(a,b)}$ de parámetros a y b por su densidad $p_{(a,b)}$ respecto a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$

$$p_{(a,b)}(x) = \begin{cases} b^{-1} \exp\{(x-a)/b\} & \text{si } x \geq a \\ 0 & \text{si } x < a \end{cases}$$

   Determinar un estadístico real suficiente T para la estructura estadística

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^n, \{P^n_{(a,b)} : a \in \mathbb{R}, b > 0\})$$

   correspondiente a una muestra de extensión n de esa distribución. ?Sigue siendo suficiente ese estadístico para la e.e. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^n, \{P^n_{(a,b)} : a \in \mathbb{N}, b > 0\})$?

7. Sean $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ una e.e., $T : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ un estadístico, $\mathcal{B}'$ una sub-σ-álgebra de $\mathcal{A}'$ y $\mathcal{B} := T^{-1}(\mathcal{B}')$.

   (a) Probar que si $\mathcal{B}$ es suficiente para la e.e. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ entonces $\mathcal{B}'$ es suficiente para $(\Omega', \mathcal{A}', \mathcal{P}')$ donde $\mathcal{P}' = \{P^T : P \in \mathcal{P}\}$.
   (b) Si T es suficiente y $\mathcal{B}'$ es suficiente para $\mathcal{P}'$ entonces $\mathcal{B}$ es suficiente para $\mathcal{P}$.
   (c) Si $\{\emptyset, \Omega\}$ es suficiente entonces $\mathcal{P}$ es unitario.

8. Consideremos la estructura estadística

$$(\mathbb{R}^2, \mathcal{R}^2, \{P_\theta : \theta > 0\})$$

   donde

$$dP_\theta(x, y) = \exp\{-\theta x - y/\theta\} \cdot I_{[0,+\infty[\times[0,+\infty[}(x, y) dx dy.$$

   Probar que el estadístico $T(x, y) = xy - 1$ es centrado (es decir, $E_\theta(T) = 0$, $\forall\theta$). Decidir si esa e.e. es completa.

9. Sean $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{A}$ la familia de partes de Ω, y $\mathcal{P} = \{P_1, P_2\}$ donde $P_1 = \epsilon_1$ y $P_2 = (\epsilon_2 + \epsilon_4)/2$. Describir un σ–álgebra suficiente y completa.

10. Probar que la estructura $(\{0,1,2,\dots\}, \mathcal{A}, \{P_{n,p} : n \in \mathbb{N}, p \in (0,1)\})$ es completa, donde $\mathcal{A}$ es la σ-álgebra de las partes de $\Omega = \{0,1,2,\dots\}$ y $P_{n,p}$ es la distribución Binomial de parámetros n y p, es decir,
$$P_{n,p}(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

11. Probar que la estructura $(\{0,1,2,\dots\}, \mathcal{A}, \{P_\lambda : \lambda > 0\})$ es completa, donde $\mathcal{A}$ es la σ-álgebra de las partes de $\Omega = \{0,1,2,\dots\}$ y P_λ es la distribución de Poisson de parámetro λ, es decir,
$$P_\lambda(\{k\}) = e^{-\lambda} \cdot \lambda^k / k!, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

12. Def.: Una estructura estadística $(\Omega, \mathcal{A}, \{P_\theta : \theta \in \Theta\})$ se dice acotadamente completa si cada estadístico real centrado y acotado es $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$-equivalente a cero. Sean $\Omega = \{-1, 0, 1, 2, \dots\}$, $\mathcal{A}$ la familia de todas las partes de Ω y, para cada $\theta \in]0,1[$, P_θ una probabilidad en $\mathcal{A}$ definida por
$$P_\theta(\{-1\}) = \theta, P_\theta(\{n\}) = (1-\theta)^2 \theta^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$
Probar que la estructura $(\Omega, \mathcal{A}, \{P_\theta : \theta \in \Theta\})$ es acotadamente completa pero no completa.

13. Si $(\Omega, \mathcal{A}, \{P_\theta : \theta \in \Theta\})$ es acotadamente completa, los únicos sucesos libres son los sucesos $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$-nulos y sus complementarios.

14. Poner un ejemplo de estructura estadística no acotadamente completa cuyos únicos sucesos libres sean $\emptyset$ y Ω.

15. Sean $(\Omega, \mathcal{A}, \{P_\theta : \theta \in \Theta\})$ una estructura estadística, $(\Omega', \mathcal{A}')$ un espacio medible y $T : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ un estadístico. Probar que la e.e.
$$(\Omega', \mathcal{A}', \{P_\theta^T : \theta \in \Theta\})$$
inducida por T es completa si y sólo si lo es la e.e. $(\Omega, T^{-1}(\mathcal{A}'), \{P_\theta : \theta \in \Theta\})$.

16. Sean $(\Omega, \mathcal{A}, \{P_\theta : \theta \in \Theta\})$ una estructura estadística y $T : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ y $S : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\Omega'', \mathcal{A}'')$ estadísticos. Si T es completo y existe $g : (\Omega', \mathcal{A}') \longrightarrow (\Omega'', \mathcal{A}'')$ tal que $S = g \circ T$ entonces S es completo.

17. (Primer teorema de Basu) Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \{P_\theta : \theta \in \Theta\})$ una estructura estadística. Un estadístico $T : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ se dice acotadamente completo si la estructura $(\Omega', \mathcal{A}', \{P_\theta^T : \theta \in \Theta\})$ inducida por T es acotadamente completa. Si T es un estadístico suficiente y acotadamente completo y si V es un estadístico libre, entonces T y V son $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$-independientes.

    Ind.: $T : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ y $V : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\Omega'', \mathcal{A}'')$ son independientes respecto a P_{θ_0} sii para cada $A'' \in \mathcal{A}''$ la v.a. $P_{\theta_0}(V \in A'' | T)$ es constante ($P_{\theta_0}^T$-c.s.). Siendo T suficiente y V libre, el estadístico $P_\theta(V \in A''|T) - P_\theta(V \in A'')$ no depende de θ y es acotado. Utilizar ahora que $E_{P_{\theta_0}^T}(P_\theta(V \in A''|T)) = P_\theta(V \in A'')$ y que T es acotadamente completo para concluir.

18. (Segundo teorema de Basu) Sean $(\Omega, \mathcal{A}, \{P_\theta : \theta \in \Theta\})$ una estructura estadística dominada y P una probabilidad dominante privilegiada (es decir, $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ está dominada por P y P es de la forma $\sum_{n=1}^\infty 2^{-n} P_{\theta_n}$ para alguna sucesión (θ_n) en Θ). Sean $T : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ un estadístico suficiente y $V : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\Omega'', \mathcal{A}'')$ una v.a. Si V es P- independiente de T entonces V es libre.

    Ind.: V es P-independiente de T sii para cada $A'' \in \mathcal{A}''$ se verifica que $P(V \in A''|T) - P(V \in A'') = 0$ P^T-c.s. Siendo T suficiente, para cada $A \in \mathcal{A}$ existe una v.a.r. $f_A : (\Omega', \mathcal{A}') \longrightarrow [0,1]$ tal que $P_\theta(A \cap T^{-1}(A')) = \int_{A'} f_A dP_\theta^T$, para cada $A' \in \mathcal{A}'$ y cada $\theta \in \Theta$. Pero T es suficiente para $\{P_\theta : \theta \in \Theta\} \cup \{P\}$. En particular, para cada $A'' \in \mathcal{A}''$ existe una versión $f_{V^{-1}(A'')}$ com£n a las $P_\theta(V \in A''|T)$ y a $P(V \in A''|T)$. Así $f_{V^{-1}(A'')} = P(V \in A'')$ P^T-c.s. y, entonces, $P_\theta(V \in A''|T) = P(V \in A'')$ P_θ^T- c.s. Es decir, existe una versión constante de $P_\theta(V \in A''|T)$; se sabe que esa constante debe ser $P_\theta(V \in A'')$. Se sigue ya que V es libre.

1. Consideremos el problema de decisión

$$((\mathbb{R}, \mathcal{R}, \{N(\mu, 1) : \mu \in \mathbb{R}\}), (\mathbb{R}, \mathcal{R}), W),$$

donde $W(\theta, \delta) = (\theta - \delta)^2$, $\theta, \delta \in \mathbb{R}$. Determinar la función riesgo asociada a la estrategia $S : \Omega \times \mathcal{D} \longrightarrow [0, 1]$ definida por $S(\omega, \cdot) = N(\omega, 1)$. Considerar también la estrategia no aleatoria $s(\omega) = \omega$, $\omega \in \mathbb{R}$ y calcular su función riesgo.

2. Supongamos que de una moneda se sabe que o bien tiene dos caras (CC) o bien es una moneda perfecta con una cara y una cruz (CX) y probabilidad $\frac{1}{2}$ de obtener cara. Se trata de decidir a partir de una única tirada la naturaleza de la moneda supuesto que la pérdida es 1 para una decisión incorrecta y 0 para una decisión correcta.

   Plantear formalmente este problema de decisión (estructura estadística, espacio de las decisiones, función de pérdida).

3. Consideremos la estrategia aleatoria S que toma la decisión CX si se ha observado X (cruz) y, cuando se observa C (cara), toma la decisión CX con probabilidad 1/3 y la decisión CC con probabilidad 2/3. Probar que S es la solución minimax (que minimiza el máximo riesgo) para el problema planteado ¿Es S la solución óptima para ese problema? ¿Es admisible?

   Ind.: Una estrategia aleatoria para ese problema de decisión es de la forma $T_{(\tau,\rho)}$, $\tau, \rho \in [0, 1]$, donde

   $$T_{(\tau,\rho)}(\mathrm{X}, \{\mathrm{CX}\}) = \tau = 1 - T_{(\tau,\rho)}(\mathrm{X}, \{\mathrm{CC}\})$$

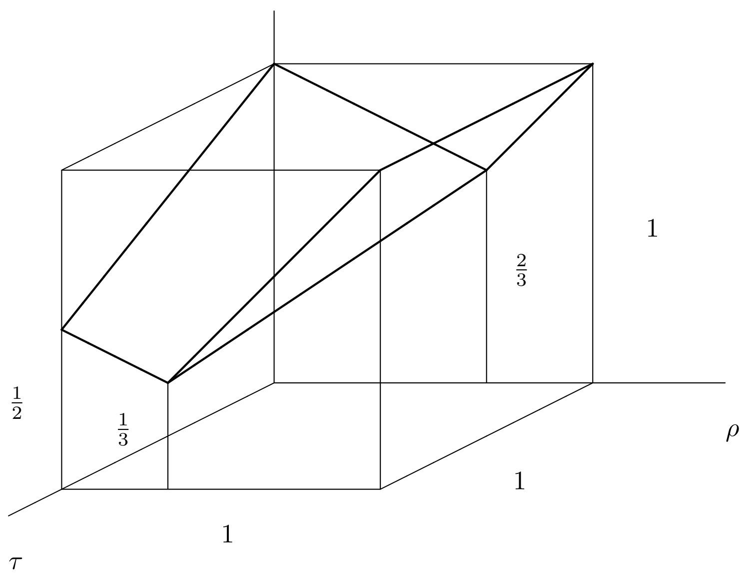
   y

   $$T_{(\tau,\rho)}(\mathrm{C}, \{\mathrm{CX}\}) = \rho = 1 - T_{(\tau,\rho)}(\mathrm{C}, \mathrm{CC}).$$

   Con esas notaciones, $S = T_{(1,1/3)}$ es la solución minimax. La representación gráfica de la función

   $$f(\tau, \rho) = \max_{\theta \in \Theta} R_{T_{(\tau,\rho)}}(\theta)$$

   es la dibujada abajo, donde Θ denota, como siempre, el espacio de parámetros, que en este caso consta de dos elementos.



1. (Muestras de Extensión n de una Distribución de Bernouilli)

   a) Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. independientes de Bernouilli con parámetro desconocido $\theta \in]0,1[$ (es decir, las X_i son v.a. discretas que toman el valor 1 con probabilidad θ y el valor cero con probabilidad $1-\theta$). Probar que no existe un estimador insesgado de $f(\theta) := \theta(1-\theta)^{-1}$.

   b) Se trata ahora de estimar la varianza $\theta(1-\theta)$. Se propone el estimador $T = \bar{X}(1-\bar{X})$. Probar que T no es insesgado. Encontrar un estimador insesgado de $\theta(1-\theta)$ que sea múltiplo de T.

   c) Determinar el estimador de máxima verosimilitud de θ.

2. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra de tamaño n de una distribución $N(\theta, 1)$, $\theta \in \mathbb{R}$. Determinar el estimador de máxima verosimilitud de θ. Si se conoce que $\theta \geq 0$ +Cambia el estimador de máxima verosimilitud?

3. Se observa una muestra de tamaño n de una distribución de Pareto unilateral de parámetros $\alpha > 0$ y $r > 0$ cuya densidad (respecto a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$) es

$$f(x) = \alpha r^{\alpha} x^{-\alpha-1} I_{]r,\infty[}(x)$$

   Supongamos α conocido. Determinar el estimador de máxima verosimilitud de r. Determinar la distribución de ese estimador. Decidir si es insesgado o no.

   En algunos tipos de estadísticas económicas encontramos a veces distribuciones truncadas que se aproximan a menudo por una distribución de Pareto. P. ej., en estadísticas de rentas, los datos obtenidos suelen referirse a las distribuciones de rentas de personas cuyas rentas exceden un cierto valor r fijado, tal vez, por las disposiciones legales.

4. (Patologías del Estimador de Máxima Verosimilitud)

   a) Consideremos la estructura estadística (brevemente, e.e.) $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \{P_\theta : \theta \in \mathbb{R}\})^n$ donde P_θ denota la distribución uniforme en el intervalo $[\theta, \theta+1]$. ¿Qué se puede decir del estimador de máxima verosimilitud de θ ?

   b) Consideremos la e.e. $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \{P_{(\mu,\sigma)} : \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0\})$ donde $P_{(\mu,\sigma)}$ es una mezcla de dos distribuciones normales:

$$dP_{(\mu,\sigma)}(x)/dx = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2\right\} + \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$$

   ¿Qué se puede decir del estimador de máxima verosimilitud de (μ, σ)?

   c) Consideremos la e.e. $(\mathbb{R}^+, \mathcal{R}^+, \{P_\theta : \theta > 0\})^n$ donde P_θ es la distribución uniforme sobre $[0, \theta]$. ¿Cuál es el estimador de máxima verosimilitud de θ ? ¿Es admisible?

      Ind.: Si $X_1, \ldots, X_n$ son las aplicaciones coordenadas en $(\mathbb{R}^+)^n$, el estimador de máxima verosimilitud es $X_{(n)}$. Comparar los riesgos del estimador $X_{(n)}$ y del estimador $(n+2)X_{(n)}/(n+1)$.

5. Dada una muestra aleatoria simple de tamaño n de una distribución con función de densidad

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{\theta}} x^{-3/2}, \qquad x \geq \frac{1}{\theta}$$

   siendo θ un parámetro positivo desconocido. Determinar el estimador de máxima verosimilitud de θ y estudiar si es suficiente.

6. Se observa una muestra de tamaño n de la siguiente distribución

$$P_{\alpha,\beta}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (x/\beta)^{\alpha} & \text{si } 0 \leq x \leq \beta \\ 1 & \text{si } x > \beta \end{cases}$$

   a) Determinar un estadístico suficiente bidimensional para (α, β).
   b) Determinar el estimador de máxima verosimilitud de α y de β.
   c) La longitud (en milímetros) del contorno de los huevos de gorrión pueden ser modelados con esta distribución. Para los datos:
      22.0 23.9 20.9 23.8 25.0 24.0 21.7 23.8 22.8 23.1 23.1 23.5 23.0 23.0
      encontrar la estimación máximo verosímil de α y β.

7. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra de tamaño n de una distribución uniforme $U[a, b]$ donde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
   a) Describir una estructura apropiada para un problema de estimación.
   b) Estimar por el método de los momentos la media y la varianza de la ley de dicha distribución. Obtener también estimaciones para a y b.

8. Describir para una muestra de tamaño n de una distribución normal, $N(\mu, \sigma^2)$, los estimadores máximo verosímil y por el método de los momentos de (μ, σ^2).

9. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra de tamaño n de la siguiente distribución:

$$P_{\theta}(X = x) = \theta^x (1 - \theta)^{1-x}, \quad x = 0 \text{ ó } 1,\ 0 \leq \theta \leq 1/2$$

   a) Encontrar el estimador de los momentos y el máximo verosímil de θ.
   b) Calcular el error cuadrático medio de cada estimador.
   c) ¿Qué estimador se prefiere? Razona la respuesta.

10. Supongamos que el precio de los productos vendidos en una tienda, en unidades de 60 euros, es una variable aleatoria con función de densidad $f(x) = \theta x^{\theta-1},\ 0 < x < 1,\ \theta > 0$. Se pide:
   a) Comprobar que el estimador de θ por el método de los momentos no coincide con el de máxima verosimilitud.
   b) Si una m.a.s de 5 artículos vendidos los precios en euros fueron: 6, 42, 30, 43 y 54; obtener la estimación máximo verosímil del parámetro.

11. Se desea averiguar cuál es la probabilidad de obtener cara en un lanzamiento con una moneda trucada. Para ello se ha lanzado la moneda trucada 10 veces obteniendo los siguientes resultados:

Lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Resultado	C	C	C	C	X	C	X	C	C	C

   Estimar, mediante el método de los momentos, la probabilidad de obtener cara con esa moneda.

12. Supongamos que en el proceso de fabricación de un cierto objeto se extraen al azar y con reemplazamiento n objetos con el fin de obtener información sobre la probabilidad $p \in]0, 1[$ desconocida de que un objeto sea defectuoso.
   a) Describir la estructura estadística apropiada para un problema de inferencia estadística de ese tipo.
   b) Determinar un estadístico suficiente y completo para esa estructura.

13. Sean $\alpha, \beta > 0$. Se define la densidad $f_{\alpha,\beta}$ de la distribución gamma $G(\alpha, \beta)$ de parámetros α, β mediante

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} I_{]0,+\infty[}(x).$$

   Describir la e.e. asociada a una muestra de extensión n de la distribución $G(\frac{1}{\alpha}, \alpha)$, $\alpha > 0$ desconocido, y determinar un estadístico suficiente y completo para ella.

Inferencia y Decisión
Tema 5. Estimadores insesgados de mínima varianza

1. (Sobre Estructuras Exponenciales) Decidir si son exponenciales o no las estructuras siguientes y, en caso afirmativo, determinar un estadístico suficiente y completo para ella.

   a) $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \{N(\mu, \sigma^2) : \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0\})^n$.
   b) $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \{N(\mu, \sigma_0) : \mu \in \mathbb{R}\})^n$.
   c) $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \{N(\mu_0, \sigma) : \sigma > 0\})^n$.
   d) $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \{G(\alpha, \beta) : \alpha > 0, \beta > 0\})^n$ donde $G(\alpha, \beta)$ es la distribución gamma de parámetros α y β.
   e) $(\{0, 1, \ldots, k\}, \mathcal{A}, \{P_p : p \in]0, 1[\})^n$ donde $\mathcal{A} = \mathcal{P}\{0, 1, \ldots, k\}$ y P_p es la distribución binomial de parámetros k y p, k conocido.
   f) $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \{P_\theta : \theta > 0\})$ donde P_θ es la distribución uniforme en $[0, \theta]$.

2. (Muestras de Extensión n de una Ley de Poisson) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra de extensión n de una distribución de Poisson de parámetro $\theta \in]0, +\infty[$ desconocido ($P_\theta(\{k\}) = e^{-\theta}\theta^k/k!$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $\theta > 0$).

   a) ¿Es $\bar{X}$ un estimador insesgado de θ ? ¿Cuál es el riesgo cuadrático del estimador $\bar{X}$?
   b) Probar que $\bar{X}$ es un estadístico suficiente y completo.
   c) ¿Cuál es el estimador de máxima verosimilitud de θ? (Suponer ahora que el espacio de parámetros es $[0, +\infty[$).
   d) Se pretende ahora estimar $f(\theta) := \exp\{-k\theta\}$ (=probabilidad de que sobre $k \in \mathbb{N}$ experiencias futuras se observe siempre el valor cero). Comprobar que $\exp\{-k\bar{X}\}$ no es un estimador insesgado de f. Determinar una función $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(n\bar{X})$ sea un estimador insesgado de f. ¿Qué ocurre si se toma $n = 1$ y $k = 2$?

3. (Distribución Uniforme sobre un Número Finito de Puntos) Se observa una muestra de extensión n de una distribución P_θ uniforme en $\{1, \ldots, \theta\}$ de parámetro $\theta \in \mathbb{N}$ desconocido (P_θ asigna masa θ^{-1} a cada uno de los sucesos elementales $1, 2, \ldots, \theta$). Se trata de estimar el parámetro θ.

   a) Describir la estructura estadística apropiada para ese problema de estimación puntual.
   b) Encontrar un estimador insesgado T de θ función afín de la media muestral y calcular el riesgo cuadrático de T.
   c) Determinar el estimador de máxima verosimilitud M de θ. Describir las distribuciones de M respecto a las P_θ.
   d) Describir un estadístico suficiente y completo.
   e) Determinar el estimador insesgado de mínima varianza de θ.

   Observación: Este problema resuelve (desde distintos puntos de vista) el de estimar el número de sectores iguales que tiene una ruleta.

4. (La Distribución Uniforme en $[0, \theta]$, $\theta > 0$) Se observa una muestra de extensión n de una distribución uniforme $\mathcal{U}[0, \theta]$ en $[0, \theta]$ de parámetro $\theta > 0$ desconocido.

   a) Describir la estructura estadística apropiada para un problema de inferencia sobre el parámetro θ.
   b) Determinar un estadístico suficiente y completo para esa estructura.
   c) Encontrar el estimador insesgado de mínima varianza de $f(\theta) = \theta/2$.

      Ind.: Calcular $E_\theta(X_{(n)})$.

d) Calcular el riesgo cuadrático medio del estimador obtenido en c) y del estimador $\bar{X}$.

5. (Distribución Normal)

   a) Encontrar los estimadores insesgados de mínima varianza para los parámetros de una distribución normal a partir de una muestra de extensión n tanto en el caso de que ambos parámetros sean desconocidos como en el caso de que uno de ellos sea conocido.

   b) De acuerdo con a), sobre la estructura $(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^n, \{N(\mu, \sigma^2) : \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0\})$, el estadístico $S^2(x_1, \ldots, x_n) = (n-1)^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ es el estimador insesgado de mínima varianza de σ^2. Encontrar un número positivo t tal que el riesgo cuadrático del estimador tS^2 sea inferior al riesgo cuadrático de S^2 (ese nuevo estimador será, entonces, sesgado).

      Ind.: Escribir t en la forma $c(n-1)$. Para calcular el riesgo cuadrático de $c(n-1)S^2$ notar que

$$
\begin{aligned}
E_{(\mu,\sigma)}\{[c(n-1)S^2 - \sigma^2]^2\} &= E_{(\mu,\sigma)}\{[c(n-1)S^2 - c(n-1)\sigma^2 \\
&+ c(n-1)\sigma^2 - \sigma^2]\} = c^2(n-1)^2 E_{(\mu,\sigma)}\{[S^2 - \sigma^2]^2\} \\
+2[c(n-1)-1]c(n-1)\sigma^2 E_{(\mu,\sigma)}\{S^2 - \sigma^2\} &+ [c(n-1)-1]^2\sigma^4.
\end{aligned}
$$

      Pero $E_{(\mu,\sigma)}[S^2 - \sigma^2] = 0$ y $Var_{(\mu,\sigma)}(S^2) = E_{(\mu,\sigma)}\{[S^2 - \sigma^2]^2\} = 2\sigma^4/(n-1)$, ya que $(n-1)\sigma^{-2}S^2$ tiene respecto a $N(\mu, \sigma)^n$ distribución $\chi^2(n-1)$ cuya varianza es $2(n-1)$.

6. (Distribución Uniforme sobre un Intervalo con Extremos Desconocidos) Consideremos la e.e. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^n, \{\mathcal{U}[a,b]^n : -\infty < a < b < +\infty\})$ donde $\mathcal{U}[a,b]$ denota la distribución uniforme en $[a,b]$. $X_1, \ldots, X_n$ serán las aplicaciones coordenada en $\mathbb{R}^n$. Si $a < b$, la media de la distribución $\mathcal{U}[a,b]$ es $(a+b)/2$. Probar que $\bar{X}$ y $\frac{1}{2}(X_{(1)} + X_{(n)})$ son estimadores insesgados de $(a+b)/2$.

7. Consideremos una estructura estadística correspondiente a una muestra de tamaño n de una distribución $N(\sigma, \sigma^2)$ de parámetro $\sigma > 0$ desconocido.

   a) Determinar un estadístico bidimensional y no completo para esa estructura.

   b) Se observan variables aleatorias independientes $X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n$tales que

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2),\ 1 \le i \le m \quad Y_j \sim N(\mu, \tau^2),\ 1 \le j \le n$$

   siendo los parámetros $\mu \in \mathbb{R}$, σ^2, $\tau^2 > 0$, desconocidos. Consideremos el estadístico $T = (\sum_{i=1}^m X_i,\ \sum_{i=1}^m X_i^2,\ \sum_{i=1}^n Y_i, \sum_{i=1}^n Y_i^2)$ ¿Es T un estadístico suficiente? ¿Es T completo?

8. Supongamos que observamos n variables aleatorias $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ verificando que

$$Y_i = \beta\mu_i + X_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

   donde $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ son constantes reales conocidas, β constante real desconocida y $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $N(0, \sigma^2)$, σ^2 desconocida.

   a) Describir la e.e. correspondiente a dicha observación y encontrar un estadístico bidimensional suficiente y completo para esa e.e..

   b) Determinar el estimador de máxima verosimilitud de β y probar que es un estimador insesgado de β.

   c) Determinar el estimador insesgado de mínima varianza de β.

1. (Intervalos de confianza para la varianza de una distribución normal). Obtener una familia de intervalos de confianza para la varianza de una distribución normal de media desconocida a partir de una muestra de extensión n a un nivel de significación dado.

2. (Región de confianza para ambos parámetros) Construir una familia de conjuntos de confianza para la función del parámetro (μ, σ^2) a un nivel de significación dado.

3. (Intervalo de confianza para la diferencia de medias de dos distribuciones normales con varianza común desconocida) Se dispone de dos muestras independientes de extensiones m y n de sendas distribuciones normales con varianza común desconocida. Construir intervalos de confianza a partir de esas muestras para la diferencia de las medias desconocidas de esas distribuciones.

   APLICACIÓN: Con el fin de comparar el rendimiento obtenido por dos variedades de trigo X e Y se seleccionan al azar 16 parcelas; en ocho de ellas se siembra trigo de la variedad X y en las ocho restantes se siembra trigo de la variedad Y. Los resultados obtenidos, medidos en Kg/m^2, en las diferentes parcelas son los de la tabla siguiente

X	5.5	4.9	6.1	5	6	5.2	5.8	5.3
Y	6.1	6.5	5.9	5.5	6.8	5.7	5.6	5.9

   Asumiendo la hipótesis de normalidad y de igualdad de las varianzas, proporcionar un intervalo de confianza al nivel 0.99 para la diferencia de las medias.

4. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra de la distribución $\mathcal{U}[\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}]$, $\theta \in \mathbb{R}$. Probar que $[X_{(1)}, X_{(n)}]$ es un intervalo de confianza para θ. Encontrar el nivel de confianza de ese intervalo. Probar que su longitud media es

$$E_\theta(X_{(n)} - X_{(1)}) = (n-1)/(n+1).$$

5. Se consideran muestras independientes de extensiones m y n de sendas distribuciones normales con parámetros totalmente desconocidos. Construir una familia de intervalos de confianza para el cociente de las varianzas de ambas distribuciones a un nivel de confianza $1 - \alpha$ dado.

   APLICACIÓN: Se seleccionan al azar 10 bombillas de una marca X y 9 de otra marca Y. La duración (longitud de vida) en horas de esas bombillas aparece en la tabla siguiente

X	990	854	1010	1100	925	982	1000	1150	970	900
Y	910	800	950	1000	980	1200	970	940	930	

   Dar estimaciones de las varianzas de ambas distribuciones (utilícese el estimador insesgado de mínima varianza). Construir un intervalo de confianza al nivel 0.99 para el cociente de las varianzas. Observaciones: 1) Asumir la hipótesis de normalidad. 2) El cociente de las varianzas puede utilizarse para comparar el grado de precisión en la fabricación de bombillas por ambas marcas.

6. Consideremos una muestra de tamaño n de una distribución $\mathcal{U}(0, \theta)$. Encontrar un intervalo de confianza al nivel $1 - \alpha$ para θ.

7. Dada una muestra aleatoria simple de tamaño n de una distribución con función de densidad

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{\theta}} x^{-3/2}, \qquad x \geq \frac{1}{\theta}$$

   siendo θ un parámetro positivo desconocido. Determinar, por el método del pivote, el intervalo de confianza para θ de nivel de confianza $1 - \alpha$ que tenga longitud mínima.

1. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra de una población con media finita μ y varianza finita σ^2. Suponer que μ es desconocida pero σ^2 es conocida, y se requiere un test para contrastar la hipótesis $\mu = \mu_0$ contra $\mu = \mu_1$ ($\mu_1 > \mu_0$). Consideremos el test,

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{x} > k \\ 0 & \text{si } \bar{x} \leq k \end{cases}$$

donde $\bar{x} = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} x_i$. Encontrar k para que el test tenga (aproximadamente) tamaño α (suponer n suficientemente grande para que se siga el Teorema Central del Límite). ¿Cuál es la potencia del test para $\mu = \mu_1$? Si las probabilidades de error de tipo I y tipo II son fijadas en α y β, encontrar el tamaño muestral más pequeño que se necesita.

2. (Patologías del test de la razón de verosimilitudes) Sean $\Omega = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\Theta = [0, 1[$ y

$$P_0(\{\omega\}) = \begin{cases} \frac{1}{2}\alpha & \text{si } \omega = \pm 2 \\ \frac{1}{2}(1-2\alpha) & \text{si } \omega = \pm 1 \\ \alpha & \text{si } \omega = 0 \end{cases} \qquad P_\theta(\{\omega\}) = \begin{cases} \theta c & \text{si } \omega = 2 \\ \frac{1-c}{1-\alpha}(\frac{1}{2} - \alpha) & \text{si } \omega = \pm 1 \\ \alpha \frac{1-c}{1-\alpha} & \text{si } \omega = 0 \\ (1-\theta)c & \text{si } \omega = -2 \end{cases}$$

si $\theta \in]0, 1[$, donde c y α son constantes tales que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ y $\frac{\alpha}{2-\alpha} < c < \alpha$.

   a) Comparar el test de la razón de verosimilitudes al nivel α para contrastar $\{0\}$ contra $]0, 1[$ con el test trivial $\varphi = \alpha$.
   b) Describir el test UMP al nivel α para contrastar $\theta = 0$ contra $\theta = \frac{1}{2}$ en esa estructura.

3. A partir de una muestra de tamaño n de una distribución de Bernoulli de parámetro p desconocido, determinar, de la forma más explícita posible, el test UMP, de nivel α para el contraste de hipótesis:

$$H_0: \ p = p_0 \qquad H_1: p = p_1 \qquad (p_1 > p_0)$$

Aplicación: Dos amigos (A y B) lanzan una moneda. Si sale cara gana A y si sale cruz gana B. Después de 5 lanzamientos, A ha resultado ganador 5 veces, por lo que B afirma que la moneda está trucada siendo la probabilidad de obtener cara mayor que 1/2. A mantiene que la moneda es correcta. Para un nivel de significación del 5%. ¿Tiene razón B? Justifica la respuesta.

4. A partir de una muestra de tamaño n de una distribución $N(\theta, 1)$. Encontrar el test de la razón de verosimilitudes para contrastar

$$H_0: \theta = \theta_0 \qquad \text{contra } H_1: \theta \neq \theta_0 \qquad (\theta_0 \in \mathbb{R})$$

5. A partir de una muestra de tamaño 1 de un población con función de densidad,

$$f_\theta = \begin{cases} \frac{2}{\theta^2}(\theta - x) & \text{si } 0 < x < \theta \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

encontrar el test UMP para contrastar

$$H_0: \theta = \theta_0 \quad \text{contra } H_1: \theta = \theta_1 \quad (\theta_1 < \theta_0)$$

6. (No existencia de test UMP) Consideremos la estructura estadística $(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^n, \{P_\sigma^n : \sigma > 0\})$ donde P_σ es la distribución normal $N(0, \sigma^2)$. Sean también $\sigma_0 > 0$ y $\alpha \in]0, 1[$.

a) (Test ji-cuadrado para contrastar la hipótesis unilateral $\sigma \leq \sigma_0^2$ contra $\sigma^2 > \sigma_0$) Describir tests UMP al nivel α para los problemas de contrastar ...

a.1- $\ldots \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ contra $\sigma^2 > \sigma_0^2$.

a.2- $\ldots \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ contra $\sigma^2 < \sigma_0^2$.

b) (No existencia de test UMP) Consideremos el problema de contrastar la hipótesis simple $\sigma^2 = \sigma_0^2$ contra la alternativa bilateral $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$. Probar que no existe un test UMP al nivel α para ese problema.

Observación: En el problema anterior se calcula el test UMP (test ji-cuadrado) para contrastar hipótesis unilaterales sobre la varianza de una distribución normal de media cero. Análogamente se obtendrían tests UMP para contrastar hipótesis unilaterales sobre la varianza cuando la media es igual a un cierto número real μ_0.

7. (Contraste de hipótesis sobre la media de una distribución normal cuando la varianza es conocida) Dados $\alpha \in]0,1[$ y $\mu_0 \in \mathbb{R}$, probar que existe un test UMP al nivel α para contrastar $\mu \leq \mu_0$ contra $\mu > \mu_0$ en la estructura $(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^n, \{P_\mu^n : \mu \in \mathbb{R}\})$ donde $P_\mu := N(\mu, \sigma_0^2)$. Determinar ese test explícitamente. De forma análoga al problema anterior probar que no existe un test UMP para el problema bilateral de contrastar la hipótesis simple $\mu = \mu_0$ contra $\mu \neq \mu_0$.

8. (Distribución de Poisson) Se observa una muestra de tamaño n de un distribución de Poisson de parámetro desconocido $\lambda > 0$. Sea $\lambda_0 > 0$ y $0 < \alpha < 1$. Describir lo más explícitamente posible un test UMP al nivel α para contrastar $\lambda \leq \lambda_0$ contra $\lambda > \lambda_0$.

9. (Nivel mínimo de significación de un test, valor P) Consideremos una e.e. $(\Omega, \mathcal{A}, \{P_\theta : \theta \in \Theta\})$ con razón de verosimilitud monótona en el estadístico real T y, sobre ella, el problema de contrastar la hipótesis unilateral $H_0 : \theta \leq \theta_0$ contra $H_1 : \theta > \theta_0$. Dado $\alpha \in]0,1[$, denotaremos por ϕ_α el test UMP al nivel α para ese problema. Si $\omega \in \Omega$ es el valor observado, se define el nivel mínimo de significación $\hat{\alpha}(\omega)$ para ese problema por

$$\hat{\alpha}(\omega) = \inf\{\alpha : \phi_\alpha(\omega) = 1\}$$

es decir $\hat{\alpha}(\omega)$ es el más pequeño nivel de significación α para el ϕ_α propone inequívocamente rechazar H_0. Probar que

$$\hat{\alpha}(\omega) = P_{\theta_0}(T \geq T(\omega))$$

10. En la estructura estadística $(\mathbb{R}^3, \mathcal{R}^3, \{N(2\mu, 1) \times N(\mu, 2) \times N(\mu, 3) : \mu \in \mathbb{R}\})$, determinar el test UMP al nivel α para contrastar la hipótesis nula $\mu \geq 0$ contra $\mu < 0$ e indicar cómo calcular su potencia contra la alternativa $\mu = -1$.

11. (Contraste de hipótesis sobre la media de una distribución normal cuando la varianza es desconocida) Dados $\alpha \in]0,1[$ y $\mu_0 \in \mathbb{R}$, calcular el test de de la razón de verosimilitudes al nivel α para contrastar $\mu = \mu_0$ contra $\mu \neq \mu_0$ en la estructura $(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^n, \{P_\mu^n : \mu \in \mathbb{R}\})$ donde $P_\mu := N(\mu, \sigma_0^2)$.

12. En una fábrica se diseña una operación específica para que tome un tiempo máximo de 5 minutos. El gerente sospecha que uno de los obreros emplea un tiempo superior, lo cual pone en cuestión la productividad de dicho trabajador. Para confirmar esta hipótesis el gerente toma una muestra de 11 tiempos de operación para ese empleado y obtiene los siguientes resultados (en minutos)

4.8 5.6 5.3 5.2 4.9 4.7 5.7 4.9 5.7 4.9 4.6

Suponiendo que la v.a. "tiempo de operación" se ajusta a una distribución normal, con varianza común para todos los empleados, se pide:

(a) ¿Existen evidencias significativas al nivel 5% para acusar a ese empleado de baja productividad? Calcula el p-valor del correspondiente test. (A la hora de plantear el test hay que tener en cuenta que partimos de la hipótesis de que el trabajador cumple correctamente su cometido)

(b) Si el gerente toma una muestra de tamaño 12 de otro empleado resultando un tiempo medio de 5.3 minutos con una desviación típica de 0.39, halla un intervalo de confianza al 95% para la diferencia de medias. ¿Podemos concluir que la productividad de ambos empleados es la misma? Razona la respuesta.

13. Dada una muestra aleatoria simple de tamaño n de una distribución con función de densidad

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{\theta}} x^{-3/2}, \qquad x \geq \frac{1}{\theta}$$

siendo θ un parámetro positivo desconocido. Se pide:

(a) Determinar el estimador de máxima verosimilitud de θ y estudiar si es suficiente.

(b) Determinar, por el método del pivote, el intervalo de confianza para θ de nivel de confianza $1 - \alpha$ que tenga longitud mínima.

(c) Determinar un contraste uniformemente de máxima potencia de nivel α para contrastar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ frente $H_1 : \theta > \theta_0$.