Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Licenciatura en Matemáticas

3er curso

Relación de Problemas de Probabilidad y Estadística

Curso 2009-10

Manuel Molina Fernández
Inés Mª del Puerto García

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

PROBLEMAS: Preliminares. Análisis combinatorio

1. Calcular el número de elementos del espacio muestral en cada uno de los siguientes experimentos aleatorios:
   a) Se lanza una moneda cinco veces consecutivas.
   b) Se lanzan simultáneamente cinco monedas.
   c) Se seleccionan cinco cartas al azar, de una en una, de una baraja de 40 cartas.
   d) De una habitación en la que hay 7 personas, van saliendo todas de una en una y al azar.
   e) De una caja con diez bombillas de las que tres están fundidas, se extraen de una en una y al azar todas las bombillas.
2. Si hemos ordenado al azar una enciclopedia de 10 tomos, calcular la probabilidad de que los tomos 1 y 2 aparezcan juntos y en este orden.
3. De un lote de 10 artículos, de los que haya tres defectuosos, se extraen simultáneamente 5 artículos. Calcular la probabilidad de que entre los extraídos haya dos defectuosos.
4. Si lanzamos cuatro dados equilibrados, ¿qué probabilidad hay de sacar menos de seis puntos?
5. Calcular la probabilidad de cada premio, tanto en la quiniela como en la lotería primitiva.
6. En un aula con n alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos cumplan años el mismo día del mismo mes?
7. Cuatro artículos han sido extraídos de cuatro lotes distintos (uno de cada lote) en cada artículo viene marcado el lote de procedencia, pero al devolver cada artículo a un lote lo hacemos al azar. Calcular la probabilidad de que haya k aciertos en las devoluciones para $k = 0, 1, 2, 3, 4$.
8. Cuatro amigos deciden ir, por separado, a uno de los seis bares del pueblo. De todas las situaciones posibles, ¿cuál es la más probable?
9. ¿Cuántos números telefónicos diferentes de siete dígitos se pueden formar si el primero no puede ser cero?
10. Se escogen seis cartas al azar de una baraja de cuarenta. ¿Cuál es la probabilidad de extraer algún as y un figura?
11. a) Si k personas se sientan aleatoriamente en una fila de n asientos ($n > k$), ¿cuál es la probabilidad de que ocupen k asientos contiguos? b) Si k personas se sientan aleatoriamente en n sillas dispuestas en círculo ($n > k$), ¿cuál es la probabilidad de que ocupen k sillas contiguas? c) Si k personas se sientan aleatoriamente en una fila de $2k$ asientos, ¿cuál es la probabilidad de que no haya dos personas sentadas en asientos contiguos? (Resolver inicialmente todos los apartados para $k = 3$ y $n = 5$).

1. Se considera el experimento aleatorio consistente en lanzar tres dados al aire y anotar los puntos de las caras superiores.

   a) ¿Cuántos elementos tiene el espacio de observaciones?
   b) Calcular la probabilidad de obtener al menos dos 5.
   c) Calcular la probabilidad de sacar dos 2 y un 3.

2. Supongamos que ordenamos los dígitos $1, 2, \ldots, n$ aleatoriamente, ¿cuál sería la probabilidad de que los dígitos $1, 2, \ldots, k, (k < n)$ aparezcan juntos y en ese orden?

3. Una enciclopedia que consta de 5 volúmenes es colocada en una estantería de forma aleatoria ¿Cuál el la probabilidad de que la colocación resulte en el orden natural?

4. Un centro de cálculo dispone de tres procesadores. Supongamos que se reciben n trabajos para realizar y se asignan de forma aleatoria entre los tres procesadores. Calcular la probabilidad de que exactamente un procesador no tenga ningún trabajo asignado.

5. Si tenemos una urna con diez bolas distintas, determinar la probabilidad de que entre tres bolas bolas elegidas aleatoriamente con reemplazamiento (esto es, de modo que cada vez que sacamos una bola la volvemos a introducir en la urna) aparezcan exactamente 1, 2 ó 3 diferentes.

6. Supongamos que extraemos k bolas de una urna que contiene n bolas numeradas de 1 a n con reemplazamiento ¿Qué probabilidad hay de que todas las bolas seleccionadas tengan números distintos?

7. Se escogen al azar tres lámparas entre 15 de las cuales 5 son defectuosas. Hallar la probabilidad de que:

   a) Ninguna sea defectuosa.
   b) Una exactamente sea defectuosa.
   c) Una por lo menos sea defectuosa.

8. Los jugadores $J1$ y $J2$ disputan un partido de tenis al mejor de cinco sets (gana el que consiga adjudicarse tres sets). Si $J1$ tiene probabilidad p $(0 \leq p \leq 1)$ de ganar cada set, calcular:

   a) La probabilidad de que gane el partido $J1$.
   b) La probabilidad de que gane el partido $J2$ en el k-ésimo set, $k = 3, 4, 5$.

9. Calcular la probabilidad del conjunto de los números naturales que son divisibles por 3, no son divisibles por 5 y son divisibles por 4 o por 6.

10. Un punto es elegido aleatoriamente sobre el cuadrado unidad. Calcular la probabilidad de que dicho punto se encuentre en el conjunto:

    a) $A = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : \ 0 \leq x \leq 1/2; \ 1/2 \leq y \leq 1\}$
    b) $B = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : (x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 \leq 1/4\}$
    c) $C = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

11. Dos números x e y son elegidos al azar en $[0, 1]$. Determinar la probabilidad de que su suma sea menor o igual que $3/2$ y su producto sea menor o igual que $1/4$.

12. En un intervalo de longitud uno, se eligen al azar dos puntos. Determinar:

a) La probabilidad de que cada uno de los tres segmentos formados tengan longitud mayor que $1/4$.

b) La probabilidad de que los tres segmentos resultantes puedan formar un triángulo. (Nota: Es condición necesaria y suficiente para que tres segmentos puedan formar un triángulo que la longitud de cada uno de ellos sea menor que la suma de los otros dos).

13. Sobre una circunferencia se toman al azar tres puntos. Calcular la probabilidad de que tales puntos estén situados en un mismo arco de 90 grados.

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

PROBLEMAS: TEMA 2. Probabilidad Condicionada

1. Un moneda con probabilidad p de obtener cara se lanza n veces. Sea E el suceso “una cara se obtiene en el primer lanzamiento” y F_k el suceso “exactamente k caras se obtienen” ¿Para qué pareja (n, k) son E y F_k independientes?

2. En una urna hay 5 bolas, 3 azules y 2 verdes. Se saca una bola de la urna y sin mirarla, se guarda. A continuación se vuelve a sacar otra bola que es verde. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera haya sido verde? Y si la segunda hubiera sido azul, ¿cuál es la probabilidad de que la primera sea verde? ¿Y azul?

3. Un estudiante solicita dos universidades, la de Sevilla y la de Extremadura. Con una probabilidad de 0.5 puede ser aceptado en la universidad de Extremadura, de 0.3 de ser aceptado en la de Sevilla y 0.2 en ambas ¿Cuál es la probabilidad de que sea aceptado en Extremadura si es aceptado en Sevilla? ¿Es el suceso “ser aceptado en Extremadura” independiente de ser aceptado en Sevilla?

4. Tenemos tres cajas: Caja I contiene 10 lámparas de las cuales 4 son defectuosas; Caja II contiene 6 lámparas con 1 defectuosa; Caja III contiene 8 con tres defectuosas. Escogemos al azar una caja y luego sacamos al azar una lámpara ¿Cuál es la probabilidad p de que la lámpara sea defectuosa?

5. Tres máquinas A, B y C producen respectivamente 50 %, 30 % y 20 % del número total de artículos de una fábrica. Los porcentajes de desperfectos de producción de estas máquinas son 3 %, 4 % y 5 %. Si se selecciona al azar un artículo, hallar la probabilidad de que el artículo sea defectuoso. Si un artículo seleccionado al azar resulta ser defectuoso, halla la probabilidad de que el artículo fue producido por la máquina A.

6. La probabilidad de que una familia elegida al azar tenga exactamente k hijos es: $p_0 = 1 - \alpha p/(1-p)$ si $k = 0$; $p_k = \alpha p^k$ si $k > 0$, $(0 < p < 1)$, $(\alpha > 0)$ Sabiendo que hay una probabilidad q $(0 < q < 1)$ de que un hijo (independientemente de los demás) tenga los ojos azules, elegida una familia al azar, determinar:

   a) La probabilidad de que tenga exactamente r $(r \geq 0)$ hijos con los ojos azules.
   b) La probabilidad de que tenga exactamente r hijos varones $(r \geq 1)$, (suponemos que los sucesos ser varón y ser mujer, son equiprobables).
   c) La probabilidad de que tenga al menos dos hijos varones sabiendo que al menos tiene uno.
   d) La probabilidad de que haya tenido exactamente k hijos, sabiendo que tuvo r $(r > 0)$ con ojos azules.

7. En una ciudad la mitad de los dias llueve. Las predicciones meteorológicas aciertan 2/3 de las veces, es decir, la probabilidad de que llueva, supuesto que se ha predicho lluvia, y la probabilidad de que no llueva, supuesto que se ha predicho que no llueve, ambas son iguales a 2/3. Cuando se predice lluvia, la señora Laura coge su paraguas, y cuando se predice que no va a llover, lo coge con probabilidad 1/3. Supuesto que no se ha predicho lluvia, el hecho de que llueva y de que Laura coja su paraguas son sucesos independientes. Determinar:

   a) La probabilidad de que la señora Laura no tenga paraguas supuesto que llueve.
   b) La probabilidad de que no llueva supuesto que lleva paraguas.

8. Una pastelería vende tres tipos (A, B y C) de cajas con dulces navideños. La caja A contiene 3 mazapanes y 12 mantecados, la B, 5 mazapanes y 10 mantecados y la C, 6 mazapanes y 9 mantecados. Se lanza un dado, si sale 1, 2 ó 3 se selecciona una caja tipo A, si sale 4 ó 5, una tipo B, y si sale 6 una tipo C. De la caja seleccionada se extraen, sin reemplazamiento, 3 dulces. Sabiendo que uno de ellos es un mazapán ¿qué tipo de caja tiene mayor probabilidad de haber sido seleccionada?

9. En un laboratorio hay tres tipos de cultivos bacterianos. Sabiendo que hay el doble de placas cultivadas del primer tipo que del segundo, que hay las mismas placas cultivadas del segundo que del tercero, y que resultan estar contaminadas el 10 %, 20 % y 25 % de las placas cultivadas del primer, segundo y tercer tipo, respectivamente, determinar:

   a) La probabilidad de que elegida aleatoriamente una placa en ese laboratorio, resulte estar contaminada.

   b) La probabilidad de que una placa, que resultó estar contaminada, sea del tercer tipo.

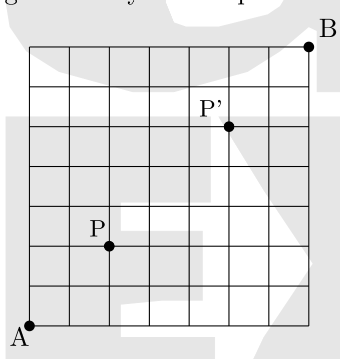
10. Disponemos de n camadas de ratones, en cada una de las cuales hay cuatro machos y seis hembras, y de otra que tiene cinco machos y cinco hembras. Elegimos al azar una camada entre las $n+1$ disponibles y extraemos (sin reemplazamiento) dos ratones, resultando ser hembras. Determinar n, sabiendo que hay una probabilidad de $1/7$ de que en la camada elegida haya cinco machos y cinco hembras.

11. Si una moneda trucada, con probabilidad p $(0 < p < 1)$ de obtener cara, es lanzada hasta que aparece cara por primera vez, ¿cuál sería la probabilidad de que el número de lanzamientos requeridos sea impar?

12. Las hormigas A y B están inicialmente en los extremos indicados en la cuadrícula adjunta. En el mismo instante de tiempo y con idéntica velocidad, cada una de ellas se dirige hacia la otra tomando como caminos los lados de los cuadrados de dicha cuadrícula. Sabiendo que cada vez que se encuentran con un cruce de caminos, con probabilidad $1/2$ continúan hacia adelante y con probabilidad $1/2$ giran hacia su derecha, determinar razonadamente:

   a) La probabilidad de que las dos hormigas se encuentren en un cruce.

   b) La probabilidad de que si las hormigas se han encontrado en un cruce, la hormiga A haya pasado por P y la hormiga B lo haya hecho por P'.



13. N tiradores disparan, de forma independiente, sobre un objetivo. El tirador i-esimo deja de disparar en el momento en que consigue hacer diana (lo cual ocurre con probabilidad p_i). Sabiendo que cada uno de ellos dispone de k cartuchos, determinar la probabilidad de que:

   a) Ningún tirador consuma su munición.

   b) Únicamente un tirador consuma su munición.

   c) Al menos un tirador no consuma su munición.

14. Una fábrica produce tubos electrónicos en paquetes de N unidades. Sea p_k la probabilidad de que un paquete contenga k tubos defectuosos $(0 \le k \le m, m \le N)$.

a) Si un paquete contiene k tubos defectuosos, ¿cuál sería la probabilidad de que en una muestra de n tubos $(0 \leq n \leq N)$ tomada de dicho paquete, se observen r $(r \leq \text{mín}\{k, n\})$ tubos defectuosos?

b) Determinar la probabilidad de que en una muestra de n tubos tomada de un paquete se observen $r(r \leq m)$ tubos defectuosos?

c) Si tomamos una muestra de n tubos de cierto paquete y observamos que $r(r \leq m)$ tubos están defectuosos, ¿cuál sería la probabilidad de que el paquete seleccionado contenga $k(k \geq r)$ tubos defectuosos?

15. Diez personas llegan a una fiesta y dejan sus sombreros en el guardarropa. El chico que atiende el guardarropa olvida ponerle etiquetas a los sombreros, y cuando van las diez personas a recoger los sombreros, los reparte de forma aleatoria ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una persona reciba su sombrero?

16. Los hábitos de estudio de cierto estudiante son: si estudia una noche, con toda seguridad no estudia la noche siguiente, y si no estudia una noche hay un 50 % de posibilidades de que lo haga la noche siguiente.

    a) ¿Qué probabilidad hay de que estudie el jueves por la noche, sabiendo que lo hizo el lunes?

    b) Un lunes por la noche decide lanzar un dado y si sale el 4 entonces estudia, en caso contrario no estudia, ¿qué probabilidad hay de que estudie el jueves por la noche?

17. La probabilidad de que se reciban k llamadas en cierta central telefónica durante un período de tiempo t es:

$$p_k = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} \quad k = 0, 1, \ldots \ (\lambda > 0)$$

    Es conocido que hay una probabilidad p $(0 < p < 1)$ de que la llamada sea atendida. Determinar:

    a) La probabilidad de que sean atendidas exactamente r $(r \geq 0)$ llamadas en un período de tiempo t.

    b) La probabilidad de que se hayan producido k llamadas en el período t si fueron atendidas r.

    c) La probabilidad que en el período t hayan sido atendidas al menos dos llamadas sabiendo que al menos fue atendida una.

18. Una urna contiene tres bolas bolas rojas y siete blancas. Se saca una bola de la urna y se reemplaza por una del otro color. Se saca de la urna una segunda bola.

    a) Hallar la probabilidad de que la segunda bola sea roja.

    b) Si ambas bolas son del mismo color, ¿cuál es la probabilidad de que las dos sean blancas?

19. La probabilidad de que un jugador de tenis gane un punto cuando le entre el primer servicio es de 0.8 y de que lo gane con el segundo servicio es de 0.5. Teniendo en cuenta que o bien el primer servicio o bien el segundo le entra, y que la probabilidad de que le entre el primer servicio es de 0.3, calcular:

    a) La probabilidad de que gane un punto.

    b) La probabilidad de que gane un juego.

20. Un jugador lanza un dado. Si obtiene como resultado un múltiplo de tres gana. En caso contrario, continúa lanzando el dado, hasta que obtiene el mismo resultado que en el primer lanzamiento o un múltiplo de tres. En el primer caso gana y en el segundo pierde. Determinar la probabilidad de ganar el juego.

21. Un frutero contiene 20 cerezas de las cuales 15 tienen los huesos quitados. Un niño glotón se come cinco de las cerezas, eligiéndolas aleatoriamente, sin observar si tienen hueso o no. Acto seguido, se elige una cereza al azar de la quince restantes. Determinar, justificando la respuesta:

a) La probabilidad de que la cereza tenga hueso.

b) Supuesto que esta cereza tiene hueso, la probabilidad de que el niño se comiera al menos un hueso.

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

PROBLEMAS: TEMA 3. Variable aleatoria unidimensional

1. Consideremos el lanzamiento de tres monedas (no trucadas) al aire.

   a) Obtener el espacio muestral Ω de dicho fenómeno aleatorio. Denotemos por Y el número de caras obtenidas.

   b) Si consideramos sobre Ω la σ–álgebra $\mathcal{P}(\Omega)$, ¿sería Y una variable aleatoria?

   c) Si consideramos sobre Ω la σ–álgebra generada por $A_1 = \{CCX\}$, $A_2 = \{XXX\}$ y $A_3 = \Omega - \{A_1 \bigcup A_2\}$, ¿sería Y una variable aleatoria?

   d) Determinar (cuando Y sea variable aleatoria) su función de distribución.

2. Hemos tirado un dado 10 veces y hemos obtenido en dos ocasiones un seis. Determinar la función de probabilidad y la función de distribución de la variable aleatoria "número de seis obtenidos en las cuatro primeras tiradas".

3. Sea $p_k = p(1-p)^k$, $k = 0, 1, ...$ $(0 < p < 1)$

   a) Probar que $\{p_k\}_{k\geq 0}$ constituye una función de probabilidad para alguna variable aleatoria X que toma el valor k con probabilidad p_k, $k = 0, 1, ...$

   b) ¿Cuál sería la función de distribución de X?

   c) Determinar $P(n \leq X \leq N)$ donde $n,\ N$ $(N > n)$ son enteros positivos.

4. Sea
$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta^2 x e^{-\theta x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$
   $(\theta > 0)$.

   a) Probar que es una función de densidad

   b) Determinar la correspondiente función de distribución.

   c) Si X es una variable con dicha función de densidad, obtener $P(X \geq 1)$

5. Sea X una variable aleatoria con función de densidad:
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} & x \leq 0 \\ 1/2 & \text{si} & 0 < x \leq 1 \\ x^{-2}/2 & \text{si} & x > 1 \end{cases}$$
   Determinar la función de densidad de la variable aleatoria X^{-1}.

6. Sea X una variable aleatoria positiva con función de densidad $f(x)$.

   a) Determinar la función de densidad de la variable aleatoria $Y = X(1+X)^{-1}$.

   b) En particular, si :
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$
      Determinar la función de densidad de Y.

7. Un punto es elegido aleatoriamente sobre la circunferencia de un circulo de radio r con centro en el origen, determinar la función de densidad de la abscisa del punto seleccionado.

8. Sea X una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Determinar:

a) La función de probabilidad de la variable aleatoria $Y = [X]$ (parte entera de X).

b) La función de densidad de $Z = X(1+X)^{-1}$

9. Sea X una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 1/\pi & \text{si } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Obtener la función de distribución y la función de densidad de $Y = tg(X)$.

10. Sea la variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x/\sigma}/\sigma & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$(\sigma > 0)$.

a) Obtener la función de densidad de $Y = ln(X)$.

b) Calcular $P(1 < Y < 2)$.

11. Consideremos la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2e^{-kx} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$(k > 0)$

a) Determinar el valor de a para que dicha función sea la función de densidad de cierta variable aleatoria X.

b) Obtener la función de distribución de dicha variable aleatoria X.

c) Obtener: $P(0 < X < 1/k)$

12. Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} x+1 \text{ si } x \in (-1,0) \\ -x+1 \text{ si } x \in [0,1) \end{cases}$$

Determinar las funciones de densidad de las variables $Y = e^{X+2}$ y $Z = X^2 + 3$.

13. Se dispone de N tarjetas de visitas distintas de las cuales hay dos marcadas por una cruz. Se barajan al azar. Se pide:

a) Determinar la distribución del número de tarjetas comprendida entre las dos marcadas. Hallar su media.

b) Supuesto que hay r tarjetas entre las dos marcadas, determinar la distribución del lugar que ocupa la primera tarjeta marcada y calcular su media.

14. Consideremos el experimento de tirar 4 monedas al aire y sea la variable aleatoria Y el valor absoluto de la diferencia entre el número de caras y el número de cruces. Determinar la función de distribución de Y.

15. La función de distribución de una variable aleatoria X viene dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 1/3 + 2(x+1)^2/3 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Determinar la probabilidad de los siguientes eventos: a) $\{X > 1/3\}$ b) $\{|X| \geq 1\}$ c) $\{|X - 1/3| < 1\}$ d) $\{X < 0\}$.

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

PROBLEMAS: TEMA 4. Parámetros asociados a una distribución de probabilidad unidimensional

1. Consideremos un problema que tiene cuatro posibles respuestas de las cuales sólo una es correcta. Un estudiante puede elegir un subconjunto de las posibles respuestas como su respuesta al problema. Si su subconjunto elegido contiene a la respuesta correcta, el estudiante recibe tres puntos pero pierde un punto por cada respuesta errónea en su subconjunto elegido. Prueba que si el estudiante elige el subconjunto de forma aleatoria, su puntuación esperada es cero.

2. Consideremos los polígonos convexos cuyo número de lados X es una variable aleatoria con función de probabilidad:
$$P(X = n) = (1/2)^{n-2},\ n = 3, 4, \ldots$$
Obtener el número medio de diagonales.

3. Una urna contiene exactamente 5000 bolas de las cuales se sabe que X son blancas y el resto rojas, donde X es una variable aleatoria con una distribución de probabilidad sobre los enteros $0, 1, \ldots, 5000$.
   a) Suponer que conocemos que $E[X] = \mu$. Probar que esto es suficiente para calcular la probabilidad de que una bola elegida al azar de la urna sea blanca ¿Cuál es esa probabilidad?
   b) Sacamos una bola de la urna, la examinamos y la volvemos a introducir y a continuación sacamos otra bola ¿Bajo qué condiciones, son los resultados de las extracciones independientes, es decir, $P(\text{blanca}, \text{blanca}) = P(\text{blanca})^2$?
   c) Suponer que $Var(X) = \sigma^2$, ¿cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas del apartado b) sean blancas?

4. Sea X una variable aleatoria con función de densidad:
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ka^k}{(x+a)^{k+1}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad a > 0,\ k \in \mathbb{N},\ k \geq 1$$
   a) Probar que $\beta_\alpha < \infty$ para $\alpha < k$.
   b) Hallar el cuantil de orden p.

5. Sea X una variable aleatoria con la siguiente distribución de probabilidad:
$$P(X = k) = c\frac{k-1}{n},\ k = 1, 2, \ldots, n$$
   a) Determinar la constante c para que efectivamente sea distribución de probabilidad.
   b) Determinar la función de distribución $F(x)$.
   c) Determinar $E[X]$ y $Var[X]$.

6. Sea X una variable aleatoria tal que:
$$P(X = x) = \frac{b-a}{ab}, x = 1, 2, \ldots, ab,\ a, b \in \mathbb{N}.$$
   a) ¿Qué condición deben verificar a y b para que $P(X = x)$ sea una distribución de probabilidad?
   b) Calcular $E[X]$, ¿Qué valores deberían tener a y b para que $E[X] = 7/2$?

c) Obtener las soluciones de $F(x) = 1/2$.

7. Sea X una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta\alpha^\beta}{x^{\beta+1}} & \text{si } x \geq \alpha \\ 0 & \text{si } x < \alpha \end{cases} \qquad \alpha, \beta > 0$$

a) Probar que el momento ordinario de orden n existe si y sólo sin $n < \beta$.

b) Para $\beta > 2$, calcular la media y la varianza.

8. Sea X una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1/2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ (3-x)/2 & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

a) Probar que existe m_k, $k = 1, 2, \ldots$

b) Obtener la media y la varianza.

9. Se escoge X al azar en el intervalo $(0, 1)$ y denotamos por U a la longitud más corta de los dos intervalos: $(0, X)$ y $(X, 1)$. Obtener:

a) Las funciones de densidad y de distribución de las variables aleatorias U y $V = 1 - U$.

b) Las medias de U y V.

c) La función de distribución y de densidad de la variable VU^{-1}.

10. El tubo de lanzamiento de cierto proyectil forma un ángulo θ sobre la tierra, siendo θ una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(\theta) = \begin{cases} \dfrac{12}{\pi} & \text{si } \dfrac{\pi}{6} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si un proyectil es lanzado desde dicho tubo con una velocidad V, obtener:

a) La función de densidad del alcance R de dicho proyectil, sabiendo que $R = \dfrac{V^2 sen(2\theta)}{g}$ (g es la cte gravitacional).

b) El alcance medio de dicho proyectil.

11. Consideremos la siguiente función:

$$F_\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\theta \\ (\theta x + \theta^2)/2 & \text{si } -\theta \leq x < \theta \\ 1 & \text{si } \theta \leq x \end{cases} \qquad \theta \geq 0$$

a) ¿Para qué valores de θ es $F_\theta(x)$ la función de distribución de cierta variable aleatoria X? ¿Para qué valores de θ sería X de tipo continuo? ¿Para qué valores sería de tipo discreto?

b) Determinar la función de densidad de X y su valor esperado (para el caso: tipo continuo)

c) Determinar la función de distribución de la variable $Y = X^2 + 1$.

d) Consideremos $\theta = 1/2$ y supongamos que obtenemos al azar tres valores de X. Denotemos por Z la variable aleatoria que representa el número de valores $1/2$. Determinar la distribución de probabilidad de Z.

12. Dos jugadores A y B lanzan simultánea y respectivamente, dos y tres monedas. Gana el jugador que obtenga más caras, repitiéndose el lanzamiento si ambos obtienen el mismo número.

a) Sea X una variable aleatoria que indique el número de lanzamientos requeridos para que A gane. Calcular la distribución de probabilidad de X.

b) El número esperado de lanzamientos requeridos para que A gane.

c) Calcular la probabilidad de que gane el juego A.

13. Sea

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } |x| < a \\ a \cdot \text{signo}(x) & \text{si } |x| > a \end{cases}$$

y, dada una variable aleatoria continua X, consideremos la variable aleatoria $Y = g(X)$. Determinar F_Y y f_Y en términos de F_X y f_X.

14. Sea X_n la variable aleatoria que cuenta la diferencia entre el número de caras y el número de cruces cuando se tiran al aire n monedas. Determinar

    (a) ¿Cuál es el valor esperado de X_n?

    (b) ¿Cuál es la varianza de X_n?

15. En un juego se tira una moneda n veces. Cada tirada cuesta k euros y el premio por obtener X caras es $aX^2 + bX$. Determinar el valor esperado de la ganancia.

16. Una caja contiene dos monedas legales y una con dos caras. Se selecciona una moneda al azar.

    (a) Si se lanza la moneda y sale cara, ¿cuál es la probabilidad de que la moneda sea legal? ¿y si en otros tres lanzamientos vuelve a salir cara?

    (b) Si se selecciona una moneda, se lanza y se vuelve a meter en la caja. ¿Cuál será el número medio de veces que tendremos que repetir el proceso hasta que se obtenga una cruz?

1. Una caja tiene diez bolas marcadas con los números de 1 a 10. Una bola es elegida de forma aleatoria. Sea X_1 el número de la bola extraída. La bola extraída se vuelve a introducir en la caja, y mezclan las bolas. Una segunda bola se extrae, y sea X_2 el número de la bola extraída. Encontrar la distribución de X_1 y X_2. ¿Son X_1 y X_2 independientes? Responder a la misma pregunta si la primera bola no es reemplazada antes de extraer la segunda.

2. Se lanza un dado en equilibrio y se observa la cara superior en el lanzamiento. Se definen las variables aleatorias:
$$X_1 = \begin{cases} -1 & \text{si el resultado es impar} \\ 1 & \text{si el reslutado es par} \end{cases}$$
$$X_2 = \begin{cases} -2 & \text{si el resultado es } 1, 2, \text{ ó } 3 \\ 0 & \text{si el reslutado es } 4 \\ 3 & \text{si el resultado es } 5 \text{ ó } 6 \end{cases}$$
Determinar la función de probabilidad y de distribución de la variable bidimensional (X_1, X_2).

3. La distribución conjunta de las variables X e Y viene dada por la siguiente función de densidad,
$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$
Calcular:
   a) $P(X + Y \le 1)$
   b) $P(1/3 \le X + Y \le 3/2)$
   c) $P(X \le 2Y)$

4. Consideremos la función:
$$F(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x + 2y \ge 1 \\ 0 & \text{si } x + 2y < 1 \end{cases}$$
¿Es una función de distribución sobre $\mathbb{R}^2$?

5. Para el concierto de un famoso grupo musical se venden un total de n entradas, numeradas de 1 a n. Como deferencia hacia el público asistente, los organizadores del concierto eligen al azar y sin reposición dos números del 1 al n y permiten a las personas con dichos números acceder al escenario para fotografiarse con los componentes del grupo musical. Si denotamos por X e Y, al menor y mayor, respectivamente, de los números elegidos, determinar justificando las respuestas:
   a) La distribución de probabilidad conjunta (X, Y).
   b) Las distribuciones de probabilidad marginales de X e Y.
   c) La distribución de probabilidad asociada a la variable $Y - X$.

6. Consideremos la función:
$$F(x,y) = \text{ Área de } T \cap A_{xy}$$
donde T es el triángulo con vértices $(0,0), (0,\sqrt{2}), (\sqrt{2},\sqrt{2})$ y $A_{xy} = \{(s,t) : s \le x, t \le y\}$.
   a) Probar que define una función de distribución sobre $\mathbb{R}^2$.

b) Obtener las funciones de distribución marginales.

7. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } (x,y) \in A \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

A es el rombo de vértices: $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ y $(0,-1)$.

a) Obtener las funciones de densidad marginales.

b) Obtener las funciones de densidad condicionadas.

8. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3(xy + x^2/2)}{4} & \text{si} \quad 0 < x < 1,\ 0 < y < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calcular $P(Y < 1 \mid X < 1/2)$.

9. Sean F, F_i, $i = 1, \ldots, n$ funciones de distribución. Probar que:

$$1 - \sum_{i=1}^{n} (1 - F_i(x_i)) \leq F(x_1, \ldots, x_n) \leq \min_{1 \leq i \leq n} F_i(x_i), \ x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$$

si y sólo si $F_i, i = 1, 2, \ldots, n$ son las marginales de F.

10. Supongamos que X e Y son variables aleatorias independientes y de tipo continuo. Probar que:

$$P(X \leq Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(y) f_Y(y) dy$$

donde F_X es la función de distribución de X y f_Y es la función de densidad de Y.

11. Sean X_i, $i = 1, 2$ variables aleatorias i.i.d. con función de probabilidad común:

$$P(X = +1) = P(X = -1) = 1/2$$

Probar que $X_i, i = 1, 2, 3$ son independientes dos a dos, siendo $X_3 = X_1 X_2$, pero no son mutuamente independientes.

12. Sea (X_1, X_2, X_3) un vector aleatorio con función de probabilidad:

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3) = \begin{cases} 1/4 & \text{si} \quad (x_1, x_2, x_3) \in A \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $A = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)\}$.

a) ¿Son X_i , $i = 1, 2, 3$ mutuamente independientes?

b) ¿Son X_i , $i = 1, 2, 3$ independientes dos a dos?

c) ¿Son $X_1 + X_2$ y X_3 independientes?

13. Obtener la probabilidad de que la ecuación $a^2 - 2aX + Y = 0$ tenga raíces complejas, sabiendo que X e Y son variables aleatorias i.i.d. con función de densidad:

$$f(t) = \begin{cases} 1/h & \text{si} \quad 0 < t < h \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad (h > 0)$$

14. Determinar la función de distribución y la función de densidad de la variable aleatoria $Z = \prod_{i=1}^{n} X_i$ siendo X_i , $i = 1, ..., n$ variables i.i.d. con función de densidad:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

15. Sean X e Y variables aleatorias i.i.d. con función de densidad:

$$f(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t} & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases} \qquad (\alpha > 0)$$

Determinar las funciones de densidad de las siguientes variables aleatorias:

a) X^3 b)$2X + 3$ c)$X - Y$ d) $|X - Y|$ e)$\min\{X, Y^3\}$ f)$\max\{X, Y^3\}$ g)$\min\{X^3 + 1, e^Y\}$

16. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determinar la función de distribución y la función de densidad de $Z = X + Y$.

17. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad:

$$f(x, y) = \begin{cases} 4x^2y + 2y^5 & \text{si} \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determinar:

a) $P\left((X, Y) \in [0.5, 0.7] \times [0.2, 0.9]\right)$

b) La función de densidad marginal de X.

18. Una madre prepara un pastel para sus dos hijos. El hijo mayor se come cierta porción del pastel y acto seguido el hijo menor se come una porción del resto del pastel. Si alguno se come mas de la mitad del pastel sufrirá una indigestión. Determinar:

a) La probabilidad de que ninguno de los hijos se indigeste.

b) La cantidad esperada del pastel restante.

Sugerencia: Supóngase que la cantidad de cada una de las dos porciones consumidas por los hijos es una variable aleatoria con distribución uniforme sobre la cantidad total del pastel disponible.

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

PROBLEMAS: TEMA 6. Parámetros asociados a una distribución de probabilidad multidimensional.

1. Sea (X,Y) un vector aleatorio con función de densidad:

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+\dfrac{xy}{3} & \text{si } 0<x<1,\ 0<y<2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

   a) Obtener los momentos ordinarios de orden 1 y 2.
   b) Obtener los momentos centrales de orden 1 y 2.
   c) Obtener la matriz de covarianzas y la matriz de correlación.

2. Sea (X,Y) un vector aleatorio con función de densidad:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1+xy(x^2-y^2)}{4} & \text{si } -1\le x\le 1,\ -1\le y\le 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

   a) ¿Son X e Y independientes?
   b) Obtener la matriz de covarianzas.
   c) Obtener el coeficiente de correlación lineal.

3. Sea:

$$g(x,y)=\begin{cases} \dfrac{f(x+y)}{x+y} & \text{si } x>0,\ y>0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

   donde f es la función de densidad de una variable aleatoria positiva Z.

   a) Probar que g es la función de densidad de un vector aleatorio (X,Y).
   b) Obtener $E[X^m]$ (supuesto que existe el momento ordinario de orden m de Z).
   c) Obtener el vector de medias y la matriz de covarianzas de (X,Y)
   d) Obtener el coeficiente de correlación lineal.

4. Sea el vector aleatorio con función de densidad:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{2} & \text{si } -x<y<x,\ x>0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   a) Obtener la matriz de covarianzas.
   b) ¿Son X e Y incorreladas? ¿Son X e Y independientes?
   c) Determinar $\rho_{Z,U}$ siendo $Z=Y-X$ y $U=X-Y$.

5. Sea (X,Y) un vector aleatorio con función de densidad:

$$f(x,y)=\begin{cases} 1/2 & \text{si } 0\le x\le y;\ 0\le y\le 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   Obtener el coeficiente de correlación lineal.

6. Sea Z una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} & \text{si } 0 \le z \le 2\pi \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Obtener el coeficiente de correlación lineal entre las variables: $X = \operatorname{sen}(Z)$ e $Y = \cos(Z)$

7. Sea el vector aleatorio (X, Y) con función de densidad:

i) $f(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{si } 0 < x < y \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

ii) $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } |y| < x;\ 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

a) Determinar las funciones de densidad marginales.

b) ¿Son independientes las variables X e Y?

c) Determinar el vector de medias.

d) Determinar la matriz de covarianzas y la matriz de correlación.

e) Determinar la matriz de covarianzas del vector aleatorio (Z, U) siendo $Z = X - Y$ y $U = -2X + 3Y$.

8. Sea X una variable aleatoria con función de distribución F_X continua y estrictamente creciente. Consideremos la transformación $Y = F_X(X)$. Determinar justificando la respuesta:

a) La función de distribución de Y.

b) La función de densidad de Y.

c) El centro de gravedad de la distribución de probabilidad de Y.

d) Var[Y].

9. Sean X_i, $i = 1, \ldots, n$ variables aleatorias tal que:

a) $Var(X_1) = Var(X_2) = ... = Var(X_n) = \sigma^2$

b) $Cov(X_i, X_j) = 0 \ i, j = 1, \ldots, n \ (i \neq j)$

Probar que en tal situación se verifica: $Var(\sum_{i=1}^{n} \dfrac{X_i}{n}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$.

10. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_{n+m}$ variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas, con varianza finita. Sea la variable aleatoria $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$, $k = 1, 2, \ldots, m+n$. Determinar el coeficiente de correlación entre S_m y $S_{n+m} - S_n$, con $m > n$.

1. Sea X una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \frac{a}{2} e^{-a|x|} \ , \ x \in \mathbb{R} \quad (a > 0)$$

Determinar su función característica.

2. Consideremos las funciones:

$$\varphi_1(t) = (1 + a(1 - e^{it}))^{-1} \ , \quad \varphi_2(t) = (2 - e^{it})^{-1}, \ t \in \mathbb{R}$$

   a) Probar que φ_i es la función característica de cierta variable aleatoria discreta X_i, $i = 1, 2$.
   b) Obtener la función de probabilidad de X_i, su media y su varianza.
   c) Obtener la función característica, la media y la varianza de $Y_i = 1 + 2X_i, \ i = 1, 2$.

3. Consideremos las siguientes funciones de probabilidad:

   a) $P(X = k) = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, ..., n, \ 0 \leq p \leq 1$
   b) $P(X = k) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(1 - e^{-\lambda})k!}, \ k = 1, 2, ..., \quad \lambda > 0$
   c) $P(X = k) = pq^k (1 - q^{N+1})^{-1}, k = 0, 1, ..., N, \ 0 < p < 1, \ q = 1 - p$

   Determinar (en cada caso) la función generatriz de probabilidad.

4. Sea X una variable aleatoria que toma valores enteros no negativos. Probar que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(X \leq n) s^n = \frac{\psi_X(s)}{1 - s}$$

donde $\psi_X(s)$ denota la función generatriz de probabilidad de X.

5. Sea la variable aleatoria X con función de probabilidad:

$$P(X = j) = \frac{a_j \theta^j}{f(\theta)}, \quad a_j \geq 0, \ j = 0, 1, ..., \ \theta > 0, \quad f(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \theta^j$$

   a) Obtener la función generatriz de probabilidad de X
   b) Obtener la función generatriz de momentos de X.

6. Sea (X, Y) un vector aleatorio con la siguiente función de probabilidad:

(X,Y)	-1	0	$+1$
-1	1/16	3/16	0
0	1/16	4/16	3/16
$+1$	2/16	1/16	1/16

   a) ¿Son X e Y independientes?
   b) Probar que $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$ donde φ_{X+Y}, φ_X y φ_Y son las funciones características de $X + Y, X$ e Y, respectivamente.

7. Sea X una variable aleatoria con función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} (b-a)^{-1} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad (a < b)$$

a) Obtener la función generatriz de momentos de X

b) Probar (haciendo uso del apartado anterior) que la variable aleatoria $Z = F_Y(Y)$ donde F_Y denota la función de distribución de la variable aleatoria (de tipo continuo) Y, entonces Z tiene como función de densidad:

$$f_Z(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq z \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

8. En un juego de dardos cierto jugador tiene probabilidades: 1/3, 5/12 y 1/4 de obtener: 0,1 y 2 puntos, respectivamente, en cada tirada. Suponemos que las tiradas son independientes, y el juego finaliza en la primera realización de un 0.

a) Determinar la probabilidad de que el jugador obtenga un total de n puntos.

b) Obtener el valor esperado de su puntuación total.

9. Supongamos n urnas cada una de las cuales contiene a bolas blancas y b bolas negras. Seleccionamos al azar una bola en la primera urna y la transferimos a la segunda, acto seguido seleccionamos al azar una bola en la segunda urna y la transferimos a la tercera, y así sucesivamente. Finalmente, extraemos al azar una bola de la n-ésima urna. Determinar la probabilidad de que dicha bola sea blanca, sabiendo que la primera bola transferida lo fue.

10. Una caja C_1 contiene $n-1$ bolas blancas y 1 bola negra. Otra caja C_2 contiene n bolas blancas. Se realiza un experimento consistente en tomar al azar una bola de cada caja e introducirla en la otra, repitiendo esta misma operación k veces.

a) Haciendo uso de la función generatriz de probabilidad asociada, determinar la probabilidad de que al finalizar el experimento la bola negra se encuentre en su caja inicial.

b) ¿Qué ocurre con dicha probabilidad cuando $k \to \infty$? Interpretar el resultado.

11. Sean X e Y variables aleatorias independientes. Probar que si X y $X - Y$ son independientes, entonces necesariamente X ha de ser una variable aleatoria degenerada.

1. Sean X e Y variables aleatorias i.i.d. con función de densidad:

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

   a) Obtener la función de densidad de las siguientes variables aleatorias: a1) $X+Y$ a2) $X-Y$ a3) XY^{-1} a4) $\min\{X,Y\}$ a5) $\max\{X,Y\}$ a6) $X(X+Y)^{-1}$
   b) Obtener la función de densidad condicional de V dado $U=u$ $(u>0)$, siendo $U=X+Y$ y $V=X-Y$.
   c) Probar que U y $Z=X(X+Y)^{-1}$ son independientes.

2. Sean X e Y variables aleatorias i.i.d. con función de probabilidad:

$$P(X=k) = \pi(1-\pi)^k, \; k=0,1,...., \quad 0<\pi<1$$

   a) Obtener la distribución de probabilidad del vector aleatorio (X,Z) con $Z=\max\{X,Y\}$.
   b) Obtener la distribución marginal de Z.
   c) Obtener la distribución de X condicionada a Z.

3. Sean X e Y variables aleatorias i.i.d. con función de densidad:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   Obtener la función de densidad conjunta del vector $(U,V)=(XY,XY^{-1})$ y las funciones de densidad de las variables aleatorias: a) XY b) XY^{-1} c) $\min\{X,Y\}$ d) $\max\{X,Y\}$ e) $\min\{X,Y\}(\max\{X,Y\})^{-1}$.

4. Sean X e Y variables aleatorias independientes definidas sobre el mismo espacio de probabilidad. X tiene como función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} & \text{si } -a<x<a \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad (a>0)$$

   e Y tiene una función de densidad $f_Y(y)$ continua y positiva sobre $\mathbb{R}$. Probar que:

$$f_{Y/X+Y}(y/u) = \begin{cases} \dfrac{f_Y(y)}{F_Y(u+a)-F_Y(u-a)} & \text{si } u-a<y<u+a \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad (u \in (-a,a))$$

5. Sean X e Y variables aleatorias independientes y positivas con funciones de densidad f_X y f_Y, respectivamente, siendo:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   Probar que la función generatriz de momentos de Y (que suponemos existe) verifica:

$$\forall z>0, \quad F_Z(z) = 1 - M_Y(-z)$$

   siendo F_Z la función de distribución de la variable $Z=XY^{-1}$.

6. Sean $X_i,\ i = 1, 2, 3$ variables aleatorias de tipo continuo i.i.d. Definimos las variables: $Y_r(w) =$ " Valor que ocupa la posición r-ésima en la ordenación de menor a mayor de los valores: $X_1(w), X_2(w), X_3(w),\ r = 1, 2, 3$". Obtener la función de densidad de $Y_r,\ r = 1, 2, 3$.

7. Sean $X_i, i = 1, 2$ variables aleatorias independientes, siendo la función de densidad de X_i:

$$f_i(x_i) = \begin{cases} \dfrac{x_i^{\alpha_i - 1} e^{-x_i/\beta}}{\Gamma(\alpha_i)\beta^{\alpha_i}} & \text{si } x_i > 0 \\ 0 & \text{si } x_i \leq 0 \end{cases} \qquad (\alpha_i, \beta > 0)$$

   Obtener la función de densidad de la variable $X(X + Y)^{-1}$.

8. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad:

$$f(x, y) = \begin{cases} 4x^2y + 2y^5 & \text{si} \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   Determinar: La función de densidad conjunta de (Z, W) siendo $Z = X + Y^2$ y $W = X - Y^2$.

9. El vector aleatorio (X, Y) tiene una distribución uniforme en el recinto

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ x < y < 2\}$$

   Se introduce el vector aleatorio transformado $(U, V) = (X, \dfrac{Y - X}{2 - Y})$. Calcular:

   a) La función de densidad de Y y la condicionada de Y por $X = x$
   b) La función de densidad del vector (U, V)

10. Sean X_1 e X_2 variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según la distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$. Definimos las variables aleatorias:

$$Y_1 = \min\{X_1, X_2\} \qquad Y_2 = \max\{X_1, X_2\}$$

   Determinar, justificando las respuestas, las funciones de densidad de:

   a) $1 - Y_2$
   b) $Y_2 - Y_1$

11. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad conjunta:

$$f(x, y) = \begin{cases} 4x^2y + 2y^5 & \text{si} \quad 0 \leq x, y \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   Determinar, justificando la respuesta la función de densidad conjunta del vector aleatorio (Z, U) siendo

$$Z = X + Y^2 \quad \text{y} \quad U = X - Y^2.$$

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

PROBLEMAS: TEMA 9. Principales distribuciones de probabilidad discretas

1. Un empleado de un banco sustituye un billete bueno por uno falso en cada fajo de 100 billetes. Si el interventor del banco toma 50 fajos y selecciona al azar un billete en cada uno de ellos, ¿cuál será la probabilidad de que descubra al empleado?

2. Consideremos las tres formas siguientes de juzgar a un presunto delincuente: i) un único juez decide (hay probabilidad 0,9 de que tome la decisión correcta), ii) se decide por mayoría entre las tres personas de un jurado (dos de ellas son responsables y toman la decisión correcta con probabilidad 0,9, y la otra es un irresponsable que absuelve o condena lanzando una moneda) y iii) se decide por mayoría entre las diez personas de un jurado, que actúan independientemente, tomando cada una de ellas la decisión correcta con probabilidad 0,8. ¿Con cuál de las tres formas se consigue la mayor probabilidad de tomar la decisión correcta?

3. Una urna contiene N bolas numeradas del 1 al N. Una bola es seleccionada al azar de dicha urna. Supongamos que el número de la bola extraída es x, entonces lanzamos n veces (de forma independiente) una moneda con probabilidad $p_x = x/N$ de dar cara. Si denotamos por Y el número de caras observadas, obtener:

   a) $P(Y = k),\ k = 0, ..., n$
   b) $E[Y]$
   c) $P(X = x \mid Y = k),\ x = 1, ..., N,\ k = 0, ..., k$ (X es la v.a. número de la bola extraída.)

4. Supongamos una variable aleatoria X con distribución $G(p)$. Probar que cualesquiera sean n y m enteros no negativos:

$$P(X > n + m \mid X > n) = P(X \geq m)$$

   Probar que el recíproco también es cierto.

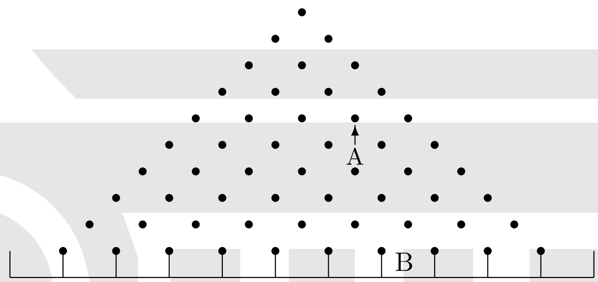
5. En cierta votación entre dos candidatos, el A recibe a votos y el B, b votos ($a > b$). Supongamos que n de los $N = a + b$ votos totales son irregulares (no válidos). El candidato B cuestiona entonces el resultado de la votación, reclamando que si esos n votos fuesen sacados al azar del total el resultado de la votación podría variar ¿Cuál sería la probabilidad de que se produzca una variación en el resultado?

6. El aparato de Galton–Pearson es un dispositivo consistente en una serie de clavos dispuestos en un tablero inclinado en la forma indicada en la figura adjunta. Al dejar caer bolas desde la parte superior del tablero, la probabilidad de que se desvíen hacia la izquierda en cada impacto con un clavo se supone que es 1/2. Determinar justificando las respuestas:

   a) La probabilidad de que una bola caiga en el compartimento B.
   b) La probabilidad de que una bola que ha caído en B haya impactado en el clavo A.

7. Un huevo de cierto insecto da lugar a un nuevo insecto con probabilidad p. Es conocido que el número de huevos puestos por estos insectos en una flor sigue una distribución de Poisson de parámetro λ.

   a) Determinar la distribución de probabilidad del número de insectos que nacen en una flor.
   b) Se observa una flor y se ha visto que el número de insectos que han nacido en ella es n. Obtener la distribución del número de huevos que habrá en dicha flor.



8. Supongamos que el número de veces por semana que cierto individuo aparca en doble fila, sigue una distribución de Poisson de media λ. Si la probabilidad que tiene de ser denunciado, por cada aparcamiento indebido, es p y admitimos que no recibe denuncias injustificadas, determinar:

   a) La probabilidad de que haya aparcado en doble fila exactamente k veces una semana en la que recibió n denuncias.

   b) La probabilidad de que en una semana cometa k infracciones no denunciadas.

9. Consideremos una moneda con probabilidad p de salir cara. Se lanza k veces la moneda y se introducen en una urna tantas bolas blancas como caras se hayan obtenido y tantas bolas negras como cruces. Después se extraen r $(r < k)$ bolas de la urna sin reemplazamiento. Determinar:

   a) La distribución de probabilidad correspondiente a la variable aleatoria "número de bolas blancas obtenidas".

   b) Si se han obtenido i bolas blancas, la probabilidad de que en la urna queden j bolas blancas.

10. Sean X_i , $i = 1, ..., n$ variables aleatorias independientes tales que $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$, $i = 1, ..., n$. Probar que la distribución del vector $(X_1, ..., X_{n-1})$ condicionado a que $\sum_{i=1}^{n} X_i = t$, es la multinomial con parámetros: $t, \lambda_1 / \sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \ldots, \lambda_{n-1} / \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

11. Sea N una variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetro λ. Sea $\{X_n\}_n$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con distribución de Bernoulli de parámetro p. Suponemos también que las X_n son independientes de N.

    a) Determinar la distribución de probabilidad de la variable $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$

    b) Obtener el valor esperado de Y.

12. Sea N una variable aleatoria entero-valuada y no negativa. Supongamos que N bolas son introducidas (independientemente unas de otras), bien en una urna A con probabilidad p, o bien en una urna B con probabilidad $1 - p$ $(0 < p < 1)$, resultando N_A bolas en la urna A y $N_B = N - N_A$ en la urna B. Probar que si N sigue una distribución de Poisson, entonces N_A y N_B son variables aleatorias independientes.

13. Demostrar que existe una variable aleatoria X que toma los valores $r = 0, 1, 2, ...$ y cuya función característica verifica la ecuación:

$$\frac{[D^{n)} \log \varphi_X(t)]_{t=0}}{i^n} = \mu, \;\; (\mu > 0) \; n = 1, 2, ...$$

    Determinar qué modelo de probabilidad sigue X.

14. Sean X e Y variables aleatorias independientes tales que: $X \sim B(m, p) \quad Y \sim B(n, p)$ Probar que la distribución condicionada: $X \mid [X + Y]$ es hipergeométrica.

15. Es conocido que un 2 % de las personas infectadas con cierto virus padecen trastornos digestivos. Si en cierta celebración 200 personas tomaron alimentos contaminados con dicho virus, obtener:

a) El número de personas que cabe esperar presenten trastornos digestivos.

b) La probabilidad de que ninguna persona presente trastornos digestivos.

c) La probabilidad de que al menos cuatro personas presenten trastornos digestivos.

16. A partir de la información obtenida de la realización de varias encuestas de opinión pública, se ha comprobado que cuando se hace cierta pregunta a un determinado segmento de la población, un 30 % de las personas encuestadas contestan afirmativamente y un 50 % negativamente. Si en una encuesta sociológica, hacemos dicha pregunta a 10 personas de ese segmento de la población, determinar:

    a) El número esperado de respuestas (no sabe/no contesta).

    b) La probabilidad de obtener 2 respuestas afirmativas y 3 negativas.

    c) El vector de medias y la matriz de covarianzas del vector (X_1, X_2) siendo: X_1 y X_2, el número de respuestas afirmativas y negativas, respectivamente.

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

PROBLEMAS: TEMA 10. Principales distribuciones de probabilidad continuas

1. Sea X una variable aleatoria distribuida uniformemente en el intervalo $(0, \theta)$ donde θ toma los valores $1, ..., N$ con probabilidad $1/N$ (cada uno de ellos). Calcular: $P(\theta = k / X < j)$, $k = 1, ..., N$, $j \in (0, N]$

2. Sean X e Y variables aleatorias tales que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \Gamma(p, 1)$, (p es un entero positivo). Probar que: $P(X < p) = P(Y > \lambda)$

3. Sea X una variable de tipo continuo y no negativa. Decimos que su distribución de probabilidad no posee memoria si y solo si: Cualesquiera sean $x, y \in \mathbb{R}^+$ se verifica que

$$P(X > x + y \mid X > x) = P(X > y).$$

Probar que:

   a) La distribución exponencial es una distribución sin memoria.

   b) Si X es una variable aleatoria de tipo continuo y no negativa verificando la igualdad anterior cualesquiera sean $x, y \in \mathbb{R}^+$ entonces X sigue una distribución exponencial.

4. Sea X una variable aleatoria con distribución $\mathbb{C}(1, 0)$. Probar que distribución de la variable X^{-1} es también la $\mathbb{C}(1, 0)$.

5. Sea X una variable aleatoria con distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Probar que:

$$\mu_{2n} = \sigma^{2n}(2n-1)(2n-3) \cdot \ldots \cdot 1$$

(Nota: $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$)

6. Es conocido que en Alemania , en el siglo XVI, la unidad de longitud se determinaba de la siguiente manera: Cierto domingo, a los primeros 16 hombres que salían de la iglesia se les medía la longitud de su píe izquierdo y se obtenía la media aritmética. El resultado obtenido era considerado como el píe correcto y legal a utilizar en las operaciones comerciales. Sabiendo que la longitud del píe (en mm) se distribuye según una $N(262, 5, 144)$, obtener:

   a) La probabilidad de que dos valores legales (medidos en dos iglesias diferentes) difieran entre si mas de 5 mm.

   b) ¿Cuántos hombres sería necesario tomar para que con una probabilidad superior a 0,99, el píe correcto y legal obtenido con ellos difiera de 262,5 mm en menos de 0,5 mm?

7. Sean X_i , $i = 1, \ldots, n$ variables aleatorias i.i.d. con distribución $U(0, 1)$. Determinar la distribución de la variable: $Z = -2 \sum_{i=1}^{n} \ln(X_i)$

8. Sea X una variable aleatoria con distribución $F(m, n)$. Determinar la función de densidad de la variable: $Z = \dfrac{\log X}{2}$ (Estadístico de Fisher)

9. Sea (X_1, X_2) un vector aleatorio con distribución:

$$N_2\left(\mu, \sum\right), \ \mu = (\mu_1, \mu_2), \sum = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

   a) Probar que $X_2 \mid [X_1 = x_1] \sim N(\alpha_{x_1}, \beta)$, $\alpha_{x_1} = \mu_2 + \rho(\sigma_2/\sigma_1)(x_1 - \mu_1), \beta = \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}$

b) Obtener una condición necesaria y suficiente para que X_1 y X_2 sean independientes.

10. Sean X e Y variables aleatorias i.i.d. según una $N(0,1)$. Definimos las variables:

$$U = (X+Y)/2 \text{ y } V = (X-U)^2 + (Y-U)^2$$

a) Obtener la función de densidad del vector (U,V)

b) Determinar las distribuciones de probabilidad marginales de U y de V.

11. Supongamos que $X \sim N(0,1)$.Definimos la variable:

$$Y = \begin{cases} X & \text{si } |X| \leq 1 \\ -X & \text{si } |X| > 1 \end{cases}$$

a) Obtener la función de distribución de Y.

b) ¿Estaría la variable $Z = X + Y$ distribuida según una normal?

12. Sean X e Y variables aleatorias independientes tales que: $X \sim N(0,1)$ e $Y \sim \chi^2_k$.

a) Obtener la función de densidad de la variable aleatoria $Z = \dfrac{X}{\sqrt{Y/k}}$

b) ¿A qué modelo de probabilidad corresponde?

13. Demostrar que existe una variable aleatoria continua X cuya función característica verifica la ecuación:

$$\frac{[D^{n)} \log \varphi_X(t)]_{t=0}}{i^n} = \begin{cases} a & \text{si } n = 1 \\ b & \text{si } n = 2 \\ 0 & \text{si } n = 3, 4, \ldots \end{cases}$$

¿Qué condiciones tendremos que imponer a las constantes a y b?

14. Sean X e Y variables aleatorias i.i.d. con distribución $N(0,1)$. Consideremos las variables: $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ y $\theta = \arctan(Y/X) \quad (-\pi/2 < \Theta \leq \pi/2)$

a) Probar que R y θ son independientes.

b) Probar que $R^2 \sim \chi^2_2$ y $\tan(\theta) \sim \mathcal{C}(1,0)$

1. Consideremos el espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, donde: $\Omega = [-1,+1], \mathcal{F} = \mathcal{B}_{[-1,+1]}, P =$ Uniforme en $[-1,+1]$ Definimos $\{X_n\}_n$ en la forma:

$$X_n(w) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq w \leq -1/n \\ 0 & \text{si } -1/n < w < 1/n \\ +1 & \text{si } 1/n \leq w \leq 1 \end{cases}$$

   a) Probar que $\{X_n\}_n$ es un proceso estocástico sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
   b) Estudiar el comportamiento de sus trayectorias muestrales.
   c) Determinar sus distribuciones de probabilidad finito-dimensionales.

2. Consideremos el espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ donde:

$$\Omega = [0,1), \mathcal{F} = \mathcal{B}[0,1), P = \text{D. Laplace}(\lambda = 1, \alpha = 0)$$

   Definimos $\{X_n\}_n$ en la forma:

$$X_n(w) = \begin{cases} 0 & \text{si } |w| < n \\ 1 & \text{si } |w| \geq n \end{cases}$$

   a) Probar que $\{X_n\}_n$ es un proceso estocástico sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
   b) Estudiar el comportamiento de sus trayectorias muestrales.
   c) Determinar sus distribuciones de probabilidad finito-dimensionales.

3. Consideremos el espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, donde:

$$\Omega = [0,1), \mathcal{F} = \mathcal{B}[0,1), P = \text{D. Uniforme en } [0,1)$$

   Definimos $\{X_n\}_n$ en la forma:

$$X_n(w) = z_n \quad (n- \text{ ésima componente en el desarrollo en base 2 de } w), \; w \in [0,1)$$

$$w = z_1 2^{-1} + z_2 2^{-2} + z_3 2^{-3} + ... + z_n 2^{-n} + \dots$$

   a) Probar que $\{X_n\}_n$ es un proceso estocástico sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
   b) Estudiar el comportamiento de sus trayectorias muestrales.
   c) Determinar sus distribuciones de probabilidad finito-dimensionales.

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

PROBLEMAS: TEMA 12. Sucesiones de variables aleatorias tipo de convergencias.

1. Sea $\{X_n\}_n$ una sucesión de variables aleatorias tal que:

$$P(X_n \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -n \\ (x+n)n^{-1}/2 & \text{si } -n \leq x < n \\ 1 & \text{si } x \geq n \end{cases}$$

¿Converge dicha sucesión en ley?

2. Sea $\{X_n\}_n$ una sucesión de variables aleatorias tal que: $X_n \sim N(0, n^{-2}/4),\ n = 1, 2, \ldots$ Probar que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$ y $X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$.

3. Sea $\{X_n\}_n$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. según una $U(0, \theta)$. Sea:

$$m_n = \text{mín}\{X_1, \ldots, X_n\} \text{ e } Y_n = n m_n$$

¿Converge $\{Y_n\}_n$ en ley?

4. Sea $\{X_n\}_n$ una sucesión de variables aleatorias de tipo continuo i.i.d. con función de distribución F. Sea:

$$M_n = \text{máx}\{X_1, \ldots, X_n\} \text{ e } Y_n = n(1 - F(M_n))$$

Probar que $\{Y_n\}_n$ converge en ley.

5. Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias tal que:

$$X_n = \begin{cases} -n^{-1} & P(X_n = -n^{-1}) = n^2(1+n^2)^{-1} \\ n & P(X_n = n) = (1+n^2)^{-1} \end{cases}$$

a) ¿Converge en probabilidad?
b) ¿Converge en media cuadrática?

6. Sea $\{X_n\}_n$ una sucesión de variables aleatorias construida sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ donde: $\Omega = [0,1], \mathcal{F} = \mathcal{B}_{[0,1]}, P =$ D. Uniforme, y definida en la forma:

$$X_n(w) = \begin{cases} n & \text{si } w \leq n^{-1} \\ 0 & \text{si } w > n^{-1} \end{cases}$$

a) ¿Converge c.s.?
b) ¿Converge en media cuadrática?

7. Sea $\{X_n\}_n$ una sucesión de variables aleatorias construida sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ donde: $\Omega = [0,1], \mathcal{F} = \mathcal{B}_{[0,1]}, P =$ D. Uniforme, y definida en la forma:

$$X_n(w) = \begin{cases} 1 & \text{si } \dfrac{n - 2^{k(n)} - 1}{2^{k(n)+1}} \leq w < \dfrac{n - 2^{k(n)}}{2^{k(n)+1}} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad , \quad n = 3, 4, \ldots$$

(Nota: $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists_1\ k(n) \in \mathbb{N}:\ 2^{k(n)} < n \leq 2^{k(n)+1}$)

a) ¿Converge en media cuadrática?

b) ¿Converge c.s.?

8. Sea $\{X_n\}_n$ una sucesión de variables aleatorias verificando que existe una variable aleatoria X tal que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) < \infty \quad \forall \epsilon > 0$$

Probar que $X_n \overset{c.s.}{\to} X$.

9. Sea $\{X_n\}_n$ una sucesión de variables aleatorias verificando que existe una variable aleatoria X tal que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} E[|X_n - X|^r] < \infty \quad \text{para cierto } r > 0$$

a) Probar que dicha sucesión converge en r-media hacia X.

b) Probar que dicha sucesión converge c.s. hacia X.

10. Sea $\{X_n\}_n$ una sucesión de variables aleatorias sobre el espacio de probabilidad:

$$(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P) \quad (P = \text{ probabilidad subyacente al modelo } \Gamma(1, \lambda^{-1}),\ \lambda > 0)$$

definida en la forma:

$$X_n(w) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathrm{w} \in (-\infty, 1/n) \\ 3 & \text{si } w = 1/n \\ 1 & \text{si } \mathrm{w} \in (1/n, n] \\ e^{\lambda n} & \text{si } \mathrm{w} \in (n, \infty) \end{cases}$$

Estudiar la convergencia en ley, probabilidad, media cuadrática y c.s. de dicha sucesión.

11. Sea $\{X_n\}_n$ una sucesión de variables aleatorias sobre el espacio de probabilidad:

$$([-1, 1], \mathcal{B}([-1, 1]), P = U[-1, 1])$$

definida en la forma:

$$X_n(w) = \begin{cases} -1 & \text{si } \mathrm{w} \in [-1, -1/n) \\ 0 & \text{si } \in [-1/n, 1/n) \\ 1 & \text{si } \mathrm{w} \in [1/n, 1] \end{cases}$$

Estudiar la convergencia en ley, probabilidad, media cuadrática y c.s. de dicha sucesión.

12. Sobre el espacio de probabilidad $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, P \equiv U[0, 1])$ definimos las variables

$$Y_{i,j}(\omega) = I_{A_{i,j}}(\omega), \qquad \text{con } A_{i,j} = \left(\frac{j-1}{i}, \frac{j}{i} \right),$$

en donde $i = 1, 2, \ldots; j = 1, 2, \ldots, i$. A partir de $Y_{i,j}$ definimos la sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n \geq 1}$ en la forma:

$$X_1 = Y_{1,1},\ X_2 = Y_{2,1},\ X_3 = Y_{2,2},\ X_4 = Y_{3,1},\ X_5 = Y_{3,2},\ X_6 = Y_{3,3},\ X_7 = Y_{4,1}, \ldots$$

Estudiar la convergencia en distribución, en probabilidad, en media cuadrática y casi segura de la sucesión $\{X_n\}_{n \geq 1}$, sin hacer uso de las relaciones existentes entre ellas.

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

PROBLEMAS: TEMA 13. Leyes de los Grandes Números

1. Sea $\{X_n\}_n$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. según una distribución $U[0,1]$. Probar que la sucesión de variables aleatorias $\{Z_n\}_n$ converge en probabilidad a cierta constante, donde:

$$Z_n = \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{1/n}, \ n = 1, 2, ..$$

2. Sea $\{X_n\}_n$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con momento ordinario de orden dos finito. Probar que la sucesión $\{Y_n\}_n$ converge en probabilidad hacia $E[X_1]$ donde:

$$Y_n = 2(n(n+1))^{-1} \sum_{i=1}^{n} iX_i, \ n = 1, 2, ..$$

3. Sea $\{X_n\}_n$ una sucesión de variables aleatorias tal que:

   a) $E[X_i] = 0, \ E[X_i^2] = 1, i = 1, 2, \ldots$
   b) $cov(X_i, X_j) = \rho$ si $|j-i| = 1, \ 0$ en otro caso, $i, j = 1, 2, \ldots (i \neq j)$

   ¿Verifica dicha sucesión la LDGN respecto a $\{n\}$?

4. Sea $\{X_n\}_n$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+\delta}{x^{2+\delta}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases} \qquad (\delta > 0)$$

   ¿Verifica dicha sucesión la LDGN respecto a $\{n\}$?

5. Sea $\{X_n\}_n$ una sucesión de variables aleatorias tal que: $Var(X_n) = \sigma^2, \ n = 1, 2, \ldots$ y $Cov(X_n, X_m) \leq 0 \ n, m = 1, 2, \ldots (n \neq m)$ ¿Verifica dicha sucesión la LDGN respecto a $\{n\}$?

6. Probar que si las sucesiones de variables aleatorias: $\{X_n\}_n$ y $\{X_n^*\}_n$ verifican la LFGN respecto a cierta sucesión $\{B_n\}_n$, entonces la sucesión $\{X_n + X_n^*\}_n$ también verifica la LFGN respecto a la misma sucesión de constantes.

7. Probar que si la sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}$ verifica:

   a) $E[X_n] = \mu, \ n = 1, 2, \ldots$
   b) $X_n \overset{c.s}{\to} \mu$

   entonces verifica la LFGN respecto a $\{n\}$.

8. Sea $\{X_n\}_n$ una sucesión de variables aleatorias independientes con la siguiente distribución de probabilidad:

$$P(X_n = \pm 2^n) = 2^{-2n-1}, P(X_n = 0) = 1 - 2^{-2n}$$

   Comprobar si $\{X_n\}$ verifica la Ley Fuerte de los Grandes Números (LFGN) con respecto a la sucesión $\{n\}$.

9. Sea $\{X_n\}_n$ una sucesión de variables aleatorias independientes tal que:

$$P(X_n = \pm 1) = 2^{-1}(1 - 2^{-n}), \ P(X_n = \pm 2^n) = 2^{-n-1}$$

   ¿Verifica dicha sucesión la LFGN respecto a $\{n\}$?

1. Si lanzamos 2500 veces una moneda correcta, ¿qué probabilidad hay de obtener una frecuencia relativa de cruces que diste de 1/2 como máximo 0.02?

2. Sea $a_n(u)$ la n-ésima cifra del desarrollo decimal de u, $(0 \leq u \leq 1)$. Denotamos por:

$$U_n(u) = \sum_{k=1}^{n} a_k(u)$$

   a) Obtener : $E[U_n(u)]$ y $Var(U_n(u))$
   b) Determinar la distribución de probabilidad, cuando $n \to \infty$, de

$$Z_n = (U_n - E[U_n])/(Var(U_n))^{1/2}$$

3. Una partícula se mueve sobre una recta. En cada paso tiene igual probabilidad de saltar un centímetro a la derecha que a la izquierda. Calcular aproximadamente:

   a) La probabilidad de que después de 100 saltos la partícula esté a menos de 10 cm. del punto de partida.
   b) El número mínimo de saltos para que, con probabilidad de 0,95, la partícula diste más de 10 cm del punto de partida.

4. Una urna contiene 10 bolas numeradas del 0 al 9. Extraemos al azar n bolas con reemplazamiento.

   a) ¿Cuánto debería ser n para que la frecuencia relativa de ocurrencia de ceros esté comprendida entre 0.09 y 0.11, con una probabilidad de al menos 0.95 ?
   b) Determinar la probabilidad de que entre los n números extraídos, el 5 aparezca un número de veces comprendido entre: $(n - 3\sqrt{n})/10$ y $(n + 3\sqrt{n})/10$.

5. Lanzamos tres monedas: A, B y C. Sabiendo que la moneda A tiene dos caras, que la B con probabilidad 2/3 da cara, y que la C es correcta, determinar n con objeto de que:

$$P(|Y_n - E[Y_n]| > 1/6) < 0{,}1$$

   siendo Y_n el número medio de caras obtenido en los n lanzamientos.

6. ¿Qué probabilidad hay de que al lanzar 100 veces un dado, la puntuación media obtenida sea mayor que 3.7?

7. Haciendo uso del Problema Central del Limite , prueba que:

   a) $\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$
   b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n-1)!} \int_0^n t^{n-1} e^{-t} dt = \frac{1}{2}$.

8. Sea $\{X_n\}_n$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con distribución de probabilidad $U[0,1]$. Determina:

$$P\left(\sum_{n=1}^{48} X_n/48 < 0{,}4\right)$$

9. Sea $\{X_n\}_n$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. según una distribución $\mathcal{P}(0{,}02)$. Haciendo uso del P.C.L. obtener $P(S_{100} \geq 3)$, siendo $S_{100} = \sum_{i=1}^{100} X_i$ y comparar el resultado con la probabilidad exacta de dicho suceso.

10. Sea $\{X_n\}_n$ una sucesión de variables aleatorias independientes tal que:

$$X_k \sim U[-a_k, a_k],\ (a_k < a < \infty),\ k = 1, 2, \ldots$$

Probar que si $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \to \infty$ entonces $\dfrac{\sqrt{3}\sum_{k=1}^{n} X_k}{(\sum_{k=1}^{n} a_k^2)^{1/2}} \xrightarrow{\mathcal{L}} U, \quad (U \sim N(0,1))$

11. El examen de cierta asignatura consiste en 100 preguntas tipo test. Con cada pregunta se acompañan 5 posibles respuestas (sólo una de las 5 respuestas es correcta). La puntuación del examen se realiza de la siguiente forma: por cada pregunta correcta se suma un punto, por cada pregunta incorrecta se resta 0.25 puntos y por cada pregunta no contestada ni se suma ni se resta puntos. Si la puntuación total es positiva entonces la calificación asignada al examen es dicha puntuación dividida entre 10 y si es negativa o cero se califica con un 0. Un estudiante que se presenta a dicho examen decide seguir la siguiente regla de actuación: Ante cada una de las 100 preguntas, lanza una moneda correcta y si sale cara entonces contesta la pregunta, en caso contrario no la contesta. Cuando ha de contestar la pregunta lo hace eligiendo al azar una entre las 5 posibles respuestas. Haciendo uso del Teorema Central del Límite, determinar de forma aproximada la probabilidad de que dicho estudiante obtenga calificación 0 en el examen.

12. ¿Cuántas veces tendremos que lanzar una moneda (correcta), para que con una probabilidad de al menos un 99 %, la frecuencia relativa de ocurrencia de caras esté comprendida entre 0.49 y 0.51 ?

13. Se ha comprobado que la probabilidad de que cierto taxista realice más o menos servicios desde una parada de taxi al aeropuerto, depende de si el día es lluvioso o no. Sabiendo que cada día realiza 7, 8, 9 ó 10 servicios a dicho aeropuerto con probabilidades 1/10, 2/10, 3/10 y 4/10, respectivamente, si el día es considerado como lluvioso (lo cual ocurre en el 25 % de los casos) y con probabilidades 4/10, 3/10, 2/10 y 1/10, respectivamente, si el día es considerado como no lluvioso, determinar, de forma aproximada, y justificando la respuesta:

   a) La probabilidad de que en un trimestre (cada mes trabaja 25 días) el número total de servicios realizados hasta el aeropuerto por dicho taxista esté comprendido entre 590 y 625.

   b) La probabilidad de que los beneficios recibidos por dicho taxista en un trimestre en concepto de servicios realizados al aeropuerto sean superiores a 3250€ sabiendo que:

      i) Por cada servicio realizado al aeropuerto cobra 9,25€.

      ii) El recorrido total efectuado en cada servicio hasta el aeropuerto es de 11,5 km.

      iii) El taxi tiene un gasto mensual fijo de mantenimiento de 700€ y un gasto por consumo de combustible de 0,07€ cada km recorrido.

14. Cierta factoría fabrica coches con motores diésel y de gasolina. Denotaremos por X e Y a las variables aleatorias que nos indican las ventas mensuales (en miles de unidades) de coches con motores diésel y de gasolina, respectivamente. Admitiendo como función de densidad conjunta para (X, Y):

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x-y}{5}, & 1 < x < 2,\ 1 < y < 3, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

determinar, justificando las respuestas:

   a) La probabilidad de que en cierto mes las ventas de coches con motor diésel superen las de coches con motor de gasolina.

   b) La probabilidad de que durante un periodo de 120 meses "la frecuencia relativa de meses en los que las ventas de coches con motor diésel superan las de coches con motor de gasolina" sea mayor que 1/3.

15. Sea X una variable aleatoria con distribución $B(n, \theta)$. Supuesto que n suficientemente grande y haciendo uso del P.C.L., determinar n tal que:

$$P(X > n/2) \geq 1 - \alpha, \ \alpha \in (0, 1)$$

16. Sea $\{X_n\}_n$ una sucesión de variables aleatorias independientes con la siguiente distribución de probabilidad:

    a) $P(X_n = \pm 2^{-n}) = 2^{-1}$
    b) $P(X_n = \pm 2^{n+1}) = 2^{-n-3}, \ P(X_n = 0) = 1 - 2^{-n-2}$
    c) $P(X_n = \pm 1) = (1 - 2^{-n})/2, \ P(X_n = \pm 2^{-n}) = 2^{-n-1}$
    d) $P(X_n = + - 2^n) = 2^{-1}$
    e) $P(X_n = \pm 2^n) = 2^{-n-1}, \ P(X_n = \pm 1) = (1 - 2^{-n})/2$

    Estudiar, en cada caso, si se cumple o no la condición de Lindeberg.

17. Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, tal que:

$$P(X_n = \pm 2^{n+1}) = 2^{-n-3}, \ P(X_n = 0) = 1 - 2^{-n-2}, n = 1, 2, \ldots$$

    Estudiar si se cumple o no la condición u.a.n.