
Prólogo

Este manual se ha elaborado como material de guía y apoyo para que el alumno se inicie, tanto desde un punto de vista teórico como aplicado, en el estudio de las Series Temporales, es decir, en el análisis, comprensión y aplicación de distintas técnicas para la modelización estadística de un conjunto de observaciones tomadas secuencialmente a lo largo del tiempo, así como para la realización de predicciones a partir de las mismas.

Inicialmente está pensado para ser utilizado en los grados de Matemáticas, de Estadística o de Economía, aunque puede ser adecuado para cualquier otro tipo de estudios donde se incluya esta materia. Así, dependiendo del contacto previo que haya tenido el alumno con este tema y el conocimiento que tenga de las materias Probabilidad y Estadística, puede ser desarrollado bien en un sólo curso de 6 créditos ECTS o bien en dos cursos, también de 6 créditos ECTS cada uno.

Es muy abundante y variada la bibliografía existente sobre la teoría de Series Temporales, pues constituye uno de los campos más activos y pujantes de la teoría de los modelos estocásticos, diferenciándose los textos por los enfoques considerados, la profundidad en el desarrollo de los contenidos y las aplicaciones mostradas en los mismos. En este sentido, hemos trabajado con una buena parte de la literatura existente sobre Series Temporales para elaborar un texto de referencia para el alumno, que presente un equilibrio adecuado entre la profundidad en el desarrollo teórico y la profusión de ejemplos prácticos discutidos con detalle. Para conseguir una mayor motivación del alumno, se han utilizado ejemplos con datos reales, relacionados con problemas cercanos pertenecientes al mundo de la Economía, Meteorología, etc. Estos ejemplos se presentan en el texto y en el CD adjunto al manual, y se han desarrollado utilizando varios programas de software estadístico, como SPSS, EViews, R y TSW. Queremos hacer hincapié en que éste no pretende ser un libro general y exhaustivo sobre Series Temporales sino un material de apoyo, en el que el alumno encuentre, además de los contenidos esenciales sobre esta materia, recomendaciones

bibliográficas que le permitan profundizar en cada uno de los temas expuestos.

Es importante señalar que para abordar los contenidos del manual obteniendo un nivel suficiente de asimilación y competencia, se requiere tener conocimientos básicos sobre inferencia estadística (estimación puntual, intervalos de confianza, contraste de hipótesis), así como de probabilidad condicionada, regresión y correlación lineal, y procesos estocásticos.

El contenido del manual se ha estructurado en ocho capítulos. En el primero de ellos se establecerán los conceptos básicos de la teoría de Series Temporales y se presentarán, dentro de los procedimientos clásicos de análisis de las mismas, los métodos de descomposición y de suavizado exponencial.

Antes de profundizar en métodos más avanzados de análisis de Series Temporales, cabe señalar que éstos se pueden abordar desde dos enfoques distintos, aunque en cierto sentido complementarios, comúnmente conocidos como *análisis en el dominio del tiempo* y *análisis en el dominio de la frecuencia* o *análisis espectral*. El análisis en el dominio del tiempo está sustentado por la suposición de que la correlación existente entre puntos próximos en el tiempo queda mejor explicada en términos de una dependencia entre el valor actual y valores pasados. Este enfoque se centra en modelar valores futuros de una serie temporal como una función paramétrica de valores pasados y presentes. Por otro lado, el análisis de las series en el dominio de la frecuencia asume que las principales características de interés de las series de tiempo se relacionan con variaciones sinusoidales periódicas o sistemáticas que, de forma natural aparecen en las mismas. Estas variaciones periódicas aparecen a menudo en fenómenos biológicos, físicos ó medioambientales. En este manual nos centraremos principalmente en métodos de análisis bajo el enfoque del dominio del tiempo. Concretamente, en el Capítulo 2 introduciremos los conceptos fundamentales para caracterizar las Series Temporales tales como los de proceso estocástico (marco teórico de las Series Temporales), proceso estacionario y proceso lineal.

El Capítulo 3 estará dedicado al estudio de una clase general de modelos paramétricos que son muy útiles para describir Series Temporales univariantes estacionarias, no estacionarias, estacionales y no estacionales. Se trata de los llamados *modelos autorregresivos integrados de medias móviles (ARIMA)*, que fueron desarrollados inicialmente por G.E.P. Box y G.M. Jenkins (véase Box & Jenkins (1976)).

En el Capítulo 4 expondremos la metodología estadística para la modelización y predicción de una serie temporal por medio de un modelo *ARIMA*, conocida como *metodología de Box-Jenkins*. Dentro del marco que nos proporciona esta metodología y con el objetivo de conseguir una mejor modelización de algunas situaciones reales, se han introducido algunas adaptaciones de la misma. Así, por ejemplo, algunas Series Temporales están afectadas por fenómenos externos que provocan cambios no esperados en su comportamiento, representando la modelización de los mismos un problema importante. Estos fenómenos externos se conocen con el nombre de intervenciones. Las técnicas que tienen como finalidad evaluar y modelar el efecto de

tales sucesos fueron denominadas *análisis de intervención* por G.E.P. Box y G.C. Tiao (véase Box & Tiao (1975)). En el Capítulo 5 abordaremos este análisis, en primer lugar cuando el tiempo de la intervención se conoce y, a continuación, generalizaremos el mismo al caso en el que tal tiempo es desconocido, lo que conduce al llamado *análisis de valores atípicos*.

La metodología de Box-Jenkins se centra, principalmente, en la modelización de Series Temporales haciendo uso de modelos lineales. Ahora bien, en la práctica se encuentran Series Temporales cuyas propiedades no pueden ser adecuadamente modeladas por tales procesos. Así, en el Capítulo 6 introduciremos los procesos no lineales y estudiaremos aquellos que son no lineales en la varianza, los denominados *modelos de heterocedasticidad condicional*. Estos modelos nos permiten modelar, por ejemplo, un concepto tan importante en Economía como es la *volatilidad*.

En el Capítulo 7 presentaremos una introducción al análisis de series bivariantes. Concretamente, desarrollaremos los *modelos de regresión dinámica* o *modelos de función de transferencia* que relacionan una variable no sólo con su propio pasado sino también con el pasado y presente de otras variables.

Finalmente, consideramos interesante que el alumno tenga conocimiento de los fundamentos del análisis de Series Temporales en el dominio de la frecuencia. En este sentido, el Capítulo 8 estará dedicado a proporcionar una introducción al *análisis espectral*.

Como elemento de apoyo para la comprensión de los conceptos teóricos se han diseñado, al final de cada capítulo, relaciones de problemas que puedan servir de material de autoevaluación para el alumno. Además se han diseñado 8 prácticas, con la finalidad de poder aplicar de un modo eficiente las metodologías que se desarrollan en este manual. Éstas son:

- Práctica 0: Introducción al software estadístico en Series Temporales.
- Práctica 1: Métodos clásicos de análisis de Series Temporales (Capítulo 1)
- Práctica 2: Simulación (Capítulo 3)
- Práctica 3: Metodología de Box-Jenkins (Capítulo 4)
- Práctica 4: Análisis de intervención y valores atípicos (Capítulo 5)
- Práctica 5: Modelos de heterocedasticidad condicional (Capítulo 6)
- Práctica 6: Modelos de regresión dinámica (Capítulo 7)
- Práctica 7: Introducción al análisis espectral (Capítulo 8)

En las mismas, como se indicó anteriormente, se utilizarán distintos programas informáticos, para proporcionar al alumno un importante bagaje en el manejo y

tratamiento de Series Temporales. Éstos son introducidos en la Práctica 0. Concretamente, para aplicar los procedimientos clásicos de análisis, tales como, los métodos de descomposición y suavizado exponencial, así como la metodología de Box-Jenkins para modelar series univariantes, utilizaremos el software de análisis estadístico de carácter general SPSS y el programa y lenguaje de programación para manejo de datos **R** (de libre disposición en <http://www.r-project.org> -véase R Development Core Team (2009)). Los programas EViews, uno de los más utilizados dentro del campo de la econometría, y SPSS nos permitirán aplicar los métodos de regresión dinámica; mientras que el ajuste de modelos de heterocedasticidad condicional lo haremos mediante EViews y **R**. Finalmente, los programas TSW (de libre disposición en <http://www.bde.es/servicio/software/tsw.htm>, y especialmente diseñado para series económicas) y SPSS nos permitirán realizar el tratamiento de atípicos. Las Prácticas 1-7 tienen siempre una misma estructura: una presentación informática que muestra un breve resumen de la metodología que se va a aplicar, supuestos prácticos resueltos y problemas prácticos propuestos, ambos con datos reales. Las versiones del software estadístico utilizado han sido: SPSS 15.0, **R** 2.9.0, EViews 5.1 y TSW Beta 1.0.4 Rev 136.

En la contraportada de este manual se encuentra un CD con los archivos de datos que se utilizan en los ejemplos presentados a lo largo de todo el libro, así como con las prácticas de ordenador programadas. Toda esta información, además de actualizaciones de las prácticas, puede encontrarse en la página web:

<http://kolmogorov.unex.es/~idelpuerto/manualST/>.

Como se indicó al inicio de este prólogo, el presente manual se puede utilizar para organizar, dependiendo del nivel de conocimiento previo del alumno, uno o dos cursos de 6 créditos ECTS sobre Series Temporales. Si el alumno tiene una buena formación previa, tanto teórica como práctica, entonces puede impartirse completo en un sólo curso. Si por el contrario es su primer contacto con la materia y su formación es de corte más aplicado, entonces puede servir de material para la impartición de dos cursos organizados del siguiente modo: en el primero de ellos se desarrollarían los contenidos recogidos en los temas del 1 al 4, que constituyen la teoría clásica de esta materia. En el segundo, de carácter más avanzado, se desarrollarían los temas del 5 al 8.

Queremos terminar este prólogo agradeciendo a los compañeros del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Extremadura y a nuestros alumnos de estos últimos cursos, la lectura cuidadosa de las versiones previas de este manual que, sin duda, ha contribuido a una mejor exposición de los contenidos del mismo.

Badajoz, mayo de 2009

Miguel González
Inés M^a del Puerto

Índice

<i>Prólogo</i>	3
1. Introducción a las Series Temporales	17
1.1. Definición y ejemplos	17
1.2. Clasificación	25
1.3. Objetivos	26
1.4. Métodos clásicos de análisis de series temporales	29
1.4.1. Métodos de descomposición	29
1.4.2. Métodos de suavizado exponencial	37
Prácticas	47
2. Modelos Probabilísticos de Series Temporales. Conceptos Fundamentales.	51
2.1. Procesos estocásticos	52
2.2. Procesos estacionarios	55
2.3. Estimación de las funciones de momentos de procesos estacionarios	58
2.3.1. Estimación de la media	58
2.3.2. Estimación de las funciones de autocovarianzas y autocorrelación	59
2.4. Proceso de ruido blanco	61
2.5. Procesos lineales	63
2.5.1. Distribuciones de la media muestral y de las autocorrelaciones muestrales	67
Problemas	70
3. Modelos de Series Temporales Univariantes	75
3.1. Modelos de media móvil	76

3.1.1. Funciones de medias, autocovarianzas y autocorrelación	77
3.1.2. Concepto de invertibilidad	79
3.2. Modelos autorregresivos	82
3.2.1. Funciones de medias, autocovarianzas y autocorrelación	86
3.2.2. Función de autocorrelación parcial	91
3.2.3. Función de autocorrelación parcial muestral	99
3.3. Modelos mixtos autorregresivos-media móvil	101
3.3.1. Funciones de medias, de autocorrelación simple y parcial	102
3.4. Procesos no estacionarios	106
3.4.1. Modelos autorregresivos integrados de media móvil	106
3.5. Modelos estacionales	109
3.5.1. Modelos estacionales puros	109
3.5.2. Modelos estacionales multiplicativos estacionarios	113
3.5.3. Modelos estacionales no estacionarios	116
Apéndice: Ecuaciones lineales en diferencias	119
Problemas	120
Prácticas	124
4. Metodología Box-Jenkins para Modelos <i>ARIMA</i>	125
4.1. Identificación	126
4.1.1. Identificación de la estructura no estacionaria	127
4.1.2. Identificación de la estructura <i>ARMA</i>	131
4.2. Estimación de los parámetros	135
4.2.1. Método de los momentos	136
4.2.2. Método de máxima verosimilitud	137
4.2.3. Estimación por mínimos cuadrados no condicionales	139
4.2.4. Estimación por mínimos cuadrados condicionales	139
4.2.5. Estimación no lineal: algoritmos de optimización no lineal	140
4.3. Diagnóstico del modelo	144
4.3.1. Análisis de los residuos	145
4.3.2. Reformulación del modelo	147
4.3.3. Sobreajuste	147
4.3.4. Criterios de selección de modelos	148
4.4. Predicción con modelos <i>ARIMA</i>	151
4.4.1. Predicciones puntuales	152
4.4.2. Adaptación de las predicciones	160
4.4.3. Una breve introducción al método de backcasting	160
Problemas	164
Prácticas	167

5. Análisis de Intervención y Valores Atípicos	169
5.1. Modelos de intervención	170
5.2. Construcción de modelos de intervención	174
5.3. Valores atípicos	177
5.3.1. Valores atípicos aditivos e innovativos	179
5.3.2. Cambios de nivel y cambios transitorios	181
5.4. Estimación de valores atípicos	181
Problemas	186
Prácticas	188
6. Modelos de Heterocedasticidad Condicional	189
6.1. Modelos <i>ARCH</i>	192
6.1.1. Algunas propiedades simples para los modelos <i>ARCH</i>	192
6.2. Modelos <i>GARCH</i>	197
6.2.1. Algunas propiedades simples para los modelos <i>GARCH</i>	198
6.3. Ajuste de modelos <i>ARCH</i> y <i>GARCH</i>	199
6.3.1. Identificación	200
6.3.2. Estimación	200
6.3.3. Diagnósis	201
6.3.4. Predicción para la varianza condicional en modelos <i>GARCH</i>	201
6.3.5. Predicción para modelos <i>ARMA</i> con errores <i>GARCH</i>	203
6.4. Otros modelos de heterocedasticidad condicional	209
6.4.1. Modelos <i>GARCH</i> integrados	209
6.4.2. Modelos <i>GARCH</i> exponenciales	210
6.5. Modelos de volatilidad estocástica	213
Problemas	213
Prácticas	214
7. Introducción a las Series Bivariantes: Regresión Dinámica	217
7.1. Formulación de un modelo de función de transferencia	218
7.1.1. Características de la función de respuesta a impulsos	220
7.1.2. Cointegración	222
7.2. Función de correlación cruzada y modelos de función de transferencia	223
7.2.1. Estimación de las funciones de covarianzas y correlaciones cruzadas	224
7.2.2. Relación entre las funciones de covarianzas cruzadas y de respuesta a impulsos	226
7.3. Identificación de modelos de función de transferencia	227
7.3.1. Concepto de <i>preblanqueado</i>	227
7.3.2. Identificación de la función de transferencia	228
7.3.3. Identificación del modelo del proceso ruido	231

7.4. Estimación en los modelos de función de transferencia	231
7.5. Diagnósis en los modelos de función de transferencia	232
7.6. Predicción en los modelos de función de transferencia	233
Problemas	240
Prácticas	241
8. Introducción al Análisis Espectral de Series Temporales	243
8.1. Densidad espectral y sus propiedades	245
8.1.1. Interpretación de la densidad espectral	249
8.2. Estimación del espectro: Periodograma	251
8.2.1. Test para la presencia de periodicidades ocultas: periodograma acumulado	256
8.3. Periodograma suavizado	261
Problemas	264
Prácticas	265

Índice alfabético

- algoritmo
 - de Gauss-Newton , 140
 - de optimización no lineal, 140
- análisis
 - en el dominio del tiempo, 4
 - de intervención, 169
 - en el dominio de la frecuencia, 4, 243
- ancho de banda, 261
- atípico
 - aditivo, 179
 - innovativo, 180
- backcasting, 160
- cambio
 - de nivel, 181
 - transitorio, 181
- cointegración, 222
- componente estacional, 18, 19
- correlograma, 61
- densidad espectral, 245
- dependencia
 - estacional, 113
 - regular u ordinaria, 113
- distribución finito–dimensional, 54
- ecuación
 - característica, 120
 - en diferencias, 88, 119
- ecuaciones de Yule–Walker, 90
- espectro, 245
- estimación
 - máximo verosímil, 137
 - método de los momentos, 136
 - mínimos cuadrados
 - condicionales, 139
 - no condicionales, 139
- filtro lineal, 30
- frecuencia de Fourier, 252
- función
 - definido no negativa, 57
 - autocorrelación muestral, 60
 - autocorrelación parcial
 - muestral, 99
 - autocorrelación parcial (fap), 92
 - autocorrelación simple (fas), 91
 - autocorrelación, 54
 - autocovarianzas, 54
 - autocovarianzas muestral, 59
 - correlación cruzada, 223
 - covarianzas cruzadas, 223
 - de ponderación espectral, 261
 - respuesta a impulsos, 218
 - transferencia estable, 219
- intervención, 169

- métodos de descomposición, 29
- métodos de suavizado exponencial, 29
- media móvil, 30
- media muestral, 58
- modelo
 - función transferencia–ruido, 219
 - heterocedasticidad condicional, 190
 - ARCH*, 192
 - EGARCH*, 211
 - GARCH*, 197
 - IGARCH*, 209
 - SV*, 213
- operador
 - de retardo, 64
 - diferencia, 107
 - diferencia estacional, 116
- periodograma
 - suavizado, 261
- proceso
 - $AR(\infty)$, 90
 - $MA(\infty)$, 82
 - (débilmente) estacionarios, 56
 - causal, 84
 - estacional multiplicativo mixto autorregresivo de media móvil ($ARMA \times ARMA_s$), 113
 - autorregresivo (AR), 82
 - autorregresivo de media móvil estacional puro ($ARMA_s$), 109
 - autorregresivo integrado de media móvil de orden ($ARIMA$), 108
 - autorregresivo-media móvil ($ARMA$), 101
 - de ruido, 218
 - ergódico, 59, 60
 - estacional multiplicativo autorregresivo integrado de medias móviles ($ARIMA \times ARIMA_s$), 118
 - estacional puro, 109
 - estocástico, 52
 - estrictamente estacionario, 55
 - gaussiano, 55
 - integrado, 107
 - invertible, 80
 - lineal, 63
 - media móvil (MA), 76
 - no estacionario homogéneo, 107
 - puramente aleatorio, 57
 - ruido blanco, 62
 - punto de truncamiento, 263
 - q–correlacionado, 77
 - retardo, 56
 - serie temporal, 17
 - continua, 25
 - discreta, 25
 - estacional, 19
 - estacionaria, 19
 - tendencia, 18
 - test
 - de Portmanteau, 146, 232
 - para periodicidades ocultas, 258
 - Fisher, 258
 - Kolmogorov–Smirnov, 258
 - transformación
 - Box–Cox, 109, 127
 - trayectoria, 53
 - valores atípicos, 169
 - ventana
 - de retardo, 263
 - espectral, 264
 - volatilidad, 190
 - Wold, teorema de descomposición, 69