Tema 2: Modelos probabilísticos de series temporales. Conceptos fundamentales

Miguel González, Inés Mª del Puerto

Tema 2: Modelos probabilísticos de series temporales. Conceptos fundamentales

Procesos estocásticos

Definición

Un proceso estocástico con conjunto de índices T es una colección de variables aleatorias $\{X_t\}_{t \in T}$ sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ y que toma valores en $(S, \mathcal{S})$.

T Espacio Temporal S Espacio de Estados

- Proceso estocástico en tiempo discreto

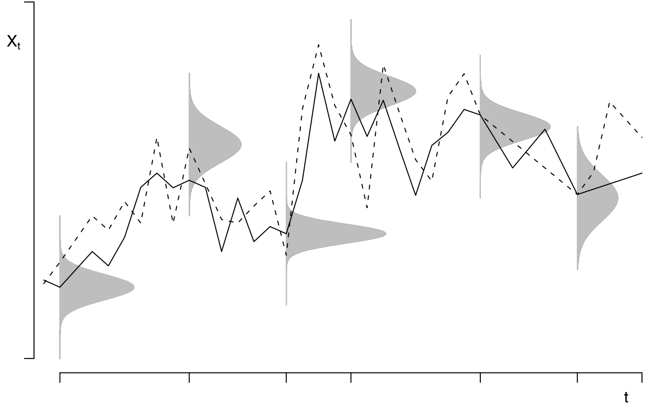
$$T = \mathbb{Z} \text{ ó } \mathbb{N} \cup 0$$

- Proceso estocástico en tiempo continuo

$$T = \mathbb{R}, \; T = [0, \infty) \text{ ó } T = [a, b], \; 0 < a < b < \infty$$

Procesos estocásticos

Si fijamos ω y dejamos variable t trayectoria: $t \in T \to X_t(\omega)$



Procesos estocásticos

Definición

Llamaremos **función de medias** de $\{X_t\}_{t\in T}$ a la aplicación

$$t \in T \longrightarrow \mu_t = E[X_t].$$

Llamaremos **función de varianzas** a la aplicación

$$t \in T \longrightarrow \sigma_t^2 = Var[X_t].$$

Procesos estocásticos

Definición

Llamaremos **función de autocovarianzas** del proceso $\{X_t\}_{t\in T}$ a la aplicación

$$(t_1, t_2) \in T \times T \longrightarrow \gamma_{t_1,t_2} = \mathrm{Cov}(X_{t_1}, X_{t_2}) = E[(X_{t_1} - \mu_{t_1})(X_{t_2} - \mu_{t_2})].$$

Llamaremos **función de autocorrelación** a la aplicación

$$(t_1, t_2) \in T \times T \longrightarrow \rho_{t_1,t_2} = \frac{\gamma_{t_1,t_2}}{\sqrt{\sigma^2_{t_1}\sigma^2_{t_2}}}.$$

Procesos estacionarios

Consideremos $\{X_t\}_{t \in T}$ un proceso estocástico con $E[X_t^2] < \infty$.

Definición

Diremos que $\{X_t\}_{t \in T}$ es estrictamente estacionario si verifica la condición de que las distribuciones conjuntas de

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ \ldots, X_{t_n}) \text{ y } (X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \ldots, X_{t_n+h})$$

coinciden para todo $h > 0$ y para $n \geq 1$, $t_i, t_{i+h} \in \{0, \pm 1, \pm 2 \ldots\}$, $i = 1, \ldots, n$.

Procesos estacionarios

Definición

Diremos que $\{X_t\}_{t\in T}$ es estacionario de primer orden o en media, si μ_t no depende de t.

Definición

Diremos que $\{X_t\}_{t\in T}$ es estacionario de segundo orden o débilmente estacionario si verifica:

i) la función de medias es constante

ii) la función de autocovarianzas tiene la propiedad de que $\gamma_{t,t+h}$ es independiente de t para cada h, o equivalentemente $\gamma_{s,t} = \gamma_{s+h,t+h}$, para todo $t, s, t+h, t+s \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.

Procesos estacionarios

Para procesos estacionarios:

$$\gamma_h = \gamma_{t,t+h} \quad \text{y} \quad \rho_h = \gamma_h / \gamma_0$$

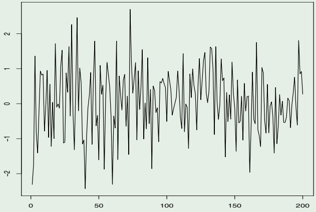
“el valor de la función de autocovarianzas y autocorrelación, respectivamente, en el retardo h”.

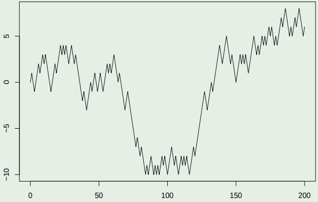
Procesos estacionarios

Ejemplo

Proceso puramente aleatorio: $\{X_t\}_t \in T$ i.i.d.

Paseo aleatorio: $\{S_t\}_{t\in T}$: $S_0 = 0$, $S_t = \sum_{j=1}^{t} X_j$





Procesos estacionarios

Propiedades de las funciones de autocovarianzas y autocorelación

1. $\gamma_0 \geq 0$.
2. Las funciones de autocovarianzas y autocorrelación son simétricas respecto al cero.
3. $\rho_0 = 1$.
4. $|\rho_h| \leq 1$.
5. Tanto la función de autocovarianzas como la de autocorrelación son funciones definido no negativas.

Estimación de las funciones de momentos

Estimación de la media

Definición

La media muestral de $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ es:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t.$$

Propiedades:

- Estimador insesgado de μ
- Si $\gamma_h \to 0$ cuando $h \to \infty$, el error cuadrático medio de $\bar{X}_n$ tiende a cero, cuando $n \to \infty$.
- El proceso es ergódico para la media

Estimación de las funciones de momentos

Estimación de la función de autocovarianzas y autocorrelación

Definición

La función de autocovarianzas muestral o estimada es:

$$\widehat{\gamma}_h = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-|h|}(X_{t+|h|} - \bar{X}_n)(X_t - \bar{X}_n), \quad -n < h < n.$$

La función de autocorrelación muestral o estimada es:

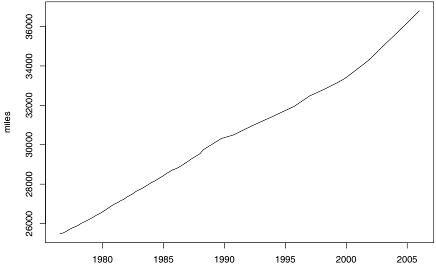
$$\widehat{\rho}_h = \frac{\widehat{\gamma}_h}{\widehat{\gamma}_0}, \quad -n < h < n.$$

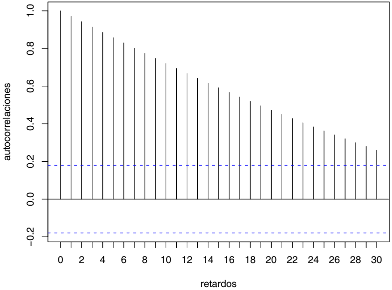
Estimación de las funciones de momentos

Propiedades:

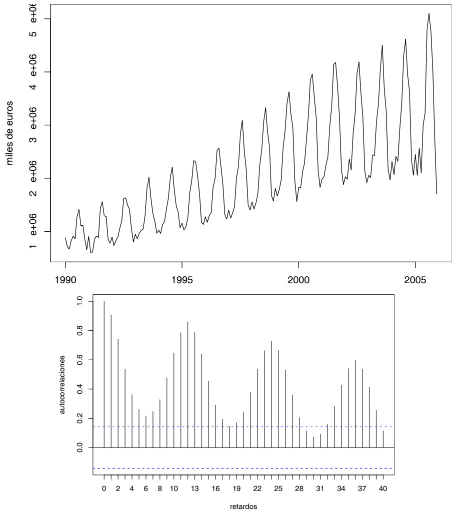
- Para $h \geq 0$, $\widehat{\gamma}_h$ es aproximadamente igual a la covarianza muestral de los $n-h$ pares de observaciones (X_1, X_{1+h}), (X_2, X_{2+h}), ..., (X_{n-h}, X_n).
- La matriz de autocovarianzas muestral, $\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_{\boldsymbol{n}} = (\widehat{\gamma}_{i-j})_{i,j=1}^{n}$, es siempre definido no negativa. También lo es $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{n}} = (\widehat{\rho}_{i-j})_{i,j=1}^{n}$.
- Tamaño muestral n de al menos 50 observaciones y $\hat{\rho}_h$ es un buen estimador para valores de h no mayores de $n/4$.
- Las funciones de autocorrelación y autocovarianzas muestrales pueden ser calculadas sobre cualquier conjunto de datos.

Ejemplo: Población mayores de 16 años (INE)





Ejemplo: Ingresos y pagos por turismo (INE)



Proceso de ruido blanco

Definición

Un proceso de ruido blanco, denotado habitualmente como $\{Z_t\}_{t\in T}$, es un proceso estocástico con las siguientes propiedades:

- $E[Z_t] = 0$ para todo $t = 0, \pm 1, \ldots$
- $\text{Var}[Z_t] = \sigma^2 < \infty$ para todo $t = 0, \pm 1, \ldots$
- $\text{Cov}[Z_t, Z_{t+h}] = 0 \quad h = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Proceso de ruido blanco

Ejemplo

Extraemos con reemplazamiento una bola de una urna que contiene 5 bolas idénticas en forma y peso enumeradas del 1 al 5 y consideramos la sucesión de valores $Y_i = X_i - 3$, siendo X_i al valor observado en la bola obtenida en la i-ésima extracción.

Proceso de ruido blanco

Proposición

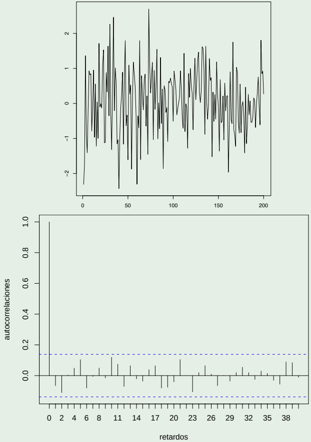
Sea $\{Z_t\}_{t\in T}$ un proceso de ruido blanco formado por variables independientes y $\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{h}} = (\hat{\rho}_1, \ldots, \hat{\rho}_h)'$. Entonces

$$n^{1/2}\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{h}} \xrightarrow{d} Z, \text{ cuando } n \to \infty,$$

donde Z sigue una distribución Normal multivariante de media $\mathbf{0} = (0, \overset{h-veces}{\ldots}, 0)'$ y matriz de covarianzas I, con I matriz identidad de orden h.

Proceso de ruido blanco

Ejemplo: Proceso puramente aleatorio simulado



Procesos lineales

Definición

Un proceso $\{X_t\}_{t\in T}$ es un proceso lineal si puede ser representado como:

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Psi_j Z_{t-j}$$

para todo $t = 0, \pm 1, \ldots$, donde $\{Z_t\}_{t\in T}$ es un ruido blanco (de media cero y varianza σ^2) y $\{\Psi_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ es una sucesión de constantes reales que verifica $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\Psi_j| < \infty$.

Procesos lineales

Ejemplo

Sea $\{X_t\}_{t\in T}$ un proceso estocástico que satisface las ecuaciones

$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t,\ \ t = 0, \pm 1, \dots$$

donde $\{Z_t\}_{t\in T}$ es un proceso de ruido blanco y $|\phi| < 1$. Este proceso es llamado proceso autorregresivo de orden 1, y lo denotaremos $AR(1)$.

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j Z_{t-j},\ \sum_{j=0}^{\infty} |\phi|^j < \infty.$$

Procesos lineales

Operador de retardo

El operador de retardo B aplicado a una variable X_t se define como $BX_t = X_{t-1}$. En general

$$B^k X_t = X_{t-k}.$$

El operador de retardo es lineal, i.e. $B(aX_t + bY_t) = aX_{t-1} + bY_{t-1}$. B puede manejarse como si fuera una cantidad algebraica cualquiera ($B^0 = Id$).

Procesos lineales

Proposición

Sea $\{Y_t\}_{t\in T}$ un proceso estacionario con media 0 y función de autocovarianzas γ_Y. Si $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\Psi_j| < \infty$, entonces el proceso

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Psi_j Y_{t-j} = \Psi(B) Y_t$$

es estacionario con media cero y función de autocovarianzas

$$\gamma_X(h) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Psi_j \Psi_k \gamma_Y(h+k-j).$$

Procesos lineales

Proposición

En el caso especial de que $\{X_t\}_{t\in T}$ sea un proceso lineal,

$$\gamma_X(h) = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Psi_j \Psi_{j+h}.$$

Procesos lineales

Dados filtros de la forma

$$\alpha(B) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j B^j \quad \text{y } \beta(B) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \beta_j B^j$$

con coeficientes absolutamente sumables pueden ser aplicados sucesivamente a una serie estacionaria $\{Y_t\}_{t \in T}$ para generar una nueva serie estacionaria $\{W_t\}_{t \in T}$

$$W_t = \psi(B) Y_t$$

donde

$$\psi(B) = \alpha(B)\beta(B) = \beta(B)\alpha(B)$$

$$\psi_j = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \beta_{j-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k \alpha_{j-k}. \tag{1}$$

El orden de la aplicación de los filtros no afecta al resultado (1).

Procesos lineales

Ejemplo

$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t, \ t = 0, \pm 1, \ldots$$

donde $\{Z_t\}_{t \in T}$ es un proceso de ruido blanco y $|\phi| < 1$.
$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j Z_{t-j}$

$$\gamma_X(h) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \phi^{j+h} \sigma^2 = \phi^h \sigma^2 / (1 - \phi^2).$$

Procesos lineales

Proposición

Si $\{X_t\}_{t\in T}$ es un proceso lineal de media μ, i.e.

$$X_t - \mu = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$$

con $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \Psi_j \neq 0$ y $\{Z_t\}_{t\in T}$ un proceso puramente aleatorio de media cero, entonces

$$n^{1/2}\frac{\bar{X}_n - \mu}{\nu^{1/2}} \xrightarrow{d} Z, \quad \text{cuando } n \to \infty,$$

con Z siguiendo una distribución Normal estándar y siendo $\nu = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_h$.

Procesos lineales

Si además el proceso es gaussiano, la distribución exacta de $\bar{X}_n$ para cada n,

$$n^{1/2}(\bar{X}_n - \mu) \sim N\left(0, \sum_{h=-n}^{n}\left(1 - \frac{|h|}{n}\right)\gamma_h\right).$$

Procesos lineales

Proposición

Sea $\{X_t\}_{t\in T}$ un proceso lineal con $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j^2 |j| < \infty$ y $\{Z_t\}_{t\in T}$ un proceso puramente aleatorio de media cero y $\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{h}} = (\widehat{\rho}_1, \ldots, \widehat{\rho}_h)'$. Entonces

$$n^{1/2}\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{h}} \xrightarrow{d} Z, \quad \text{cuando } n \to \infty,$$

con Z siguiendo una $N(\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{h}}, W)$, donde $\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{h}} = (\rho_1, \ldots, \rho_h)'$ y W es la matriz de covarianzas, cuyos elementos vienen dados por la fórmula de Bartlett.

Procesos lineales

Fórmula de Bartlett:

$$w_{ij} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\rho_{k+i}\rho_{k+j} + \rho_{k-i}\rho_{k+j} + 2\rho_i\rho_j\rho_k^2 - 2\rho_i\rho_k\rho_{k+j} - 2\rho_j\rho_k\rho_{k+i}].$$

De donde se sigue que,

$$Var(\hat{\rho}_h) \simeq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}(\rho_{k+h} + \rho_{k-h} - 2\rho_h\rho_k)^2$$

$$Cov(\hat{\rho}_h, \hat{\rho}_{h+s}) \simeq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}(\rho_{k+h} + \rho_{k-h} - 2\rho_h\rho_k)(\rho_{k+h+s} + \rho_{k-(h+s)} - 2\rho_{h+s}\rho_k)$$

Teorema de descomposición de Wold

Proceso determinista

$$X_t = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

donde $\omega \in (0, \pi)$ es constante y A y B son variables aleatorias incorreladas de media 0 y varianza σ^2.

$$X_t = (2\cos(\omega))X_{t-1} - X_{t-2}.$$

Teorema de descomposición de Wold

Teorema

Si $\{X_t\}_{t\in T}$ es un proceso estacionario no determinista, entonces, para todo $t \in T$,

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j Z_{t-j} + V_t,$$

i) $\Psi_0 = 1$ y $\sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j^2 < \infty$,

ii) $\{Z_t\}_{t\in T}$ es un proceso de ruido blanco

iii) $Cov(Z_s, V_t) = 0$ para todo s y t,

iv) Z_t es el límite de combinaciones lineales de $X_s, \ s \leq t$, y

v) $\{V_t\}_{t\in T}$ es un proceso determinista.