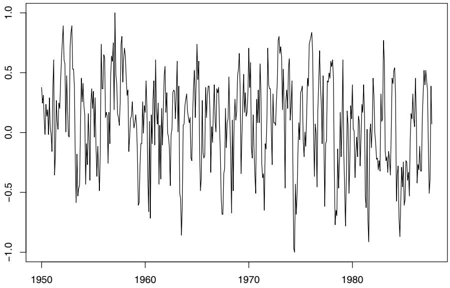
Tema 7. Introducción a las series bivariantes: Regresión dinámica

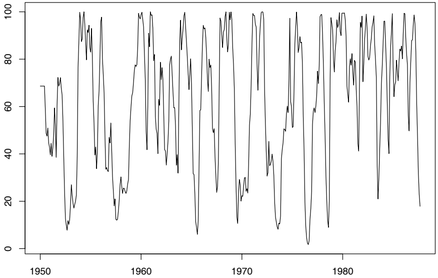
Miguel González, Inés Mª del Puerto

Tema 7. Introducción a las series bivariantes: Regresión dinámica

Introducción



Southern Oscillation Index



Nuevos peces en Océano Pacífico

Formulación de un modelo de función de transferencia

$Y_t = Y_t^* + N_t$, donde Y_t^* es la parte de la respuesta explicada por las variables X_t y N_t la no explicada.

1. La variable de entrada X_t influye sobre Y_{t+k} para $k \geq 0$ pero no al contrario.
2. La relación entre la variable de entrada X_t y la de salida Y_t es constante en el periodo muestral analizado.
3. La respuesta de Y_t a las variaciones de X_t puede aproximarse de forma lineal: $Y_t^* = \nu_0 X_t + \nu_1 X_{t-1} + \nu_2 X_{t-2} + \ldots$, donde los coeficientes ν_j son constantes desconocidas a determinar.
4. La parte no explicada por las variables X_t se recoge en el proceso $\{N_t\}_{t\in T}$ conocido como proceso de ruido, que puede ser autocorrelado, pero incorrelado con $\{X_t\}_{t\in T}$.

Formulación de un modelo de función de transferencia

$Y_t = Y_t^* + N_t$, donde Y_t^* es la parte de la respuesta explicada por las variables X_t y N_t la no explicada.

1. La variable de entrada X_t influye sobre Y_{t+k} para $k \geq 0$ pero no al contrario.
2. La relación entre la variable de entrada X_t y la de salida Y_t es constante en el periodo muestral analizado.
3. La respuesta de Y_t a las variaciones de X_t puede aproximarse de forma lineal: $Y_t^* = \nu_0 X_t + \nu_1 X_{t-1} + \nu_2 X_{t-2} + \ldots$, donde los coeficientes ν_j son constantes desconocidas a determinar.
4. La parte no explicada por las variables X_t se recoge en el proceso $\{N_t\}_{t\in T}$ conocido como proceso de ruido, que puede ser autocorrelado, pero incorrelado con $\{X_t\}_{t\in T}$.

Formulación de un modelo de función de transferencia

$Y_t = Y_t^* + N_t$, donde Y_t^* es la parte de la respuesta explicada por las variables X_t y N_t la no explicada.

1. La variable de entrada X_t influye sobre Y_{t+k} para $k \geq 0$ pero no al contrario.
2. La relación entre la variable de entrada X_t y la de salida Y_t es constante en el periodo muestral analizado.
3. La respuesta de Y_t a las variaciones de X_t puede aproximarse de forma lineal: $Y_t^* = \nu_0 X_t + \nu_1 X_{t-1} + \nu_2 X_{t-2} + \ldots$, donde los coeficientes ν_j son constantes desconocidas a determinar.
4. La parte no explicada por las variables X_t se recoge en el proceso $\{N_t\}_{t \in T}$ conocido como proceso de ruido, que puede ser autocorrelado, pero incorrelado con $\{X_t\}_{t \in T}$.

Formulación de un modelo de función de transferencia

$Y_t = Y_t^* + N_t$, donde Y_t^* es la parte de la respuesta explicada por las variables X_t y N_t la no explicada.

1. La variable de entrada X_t influye sobre Y_{t+k} para $k \geq 0$ pero no al contrario.
2. La relación entre la variable de entrada X_t y la de salida Y_t es constante en el periodo muestral analizado.
3. La respuesta de Y_t a las variaciones de X_t puede aproximarse de forma lineal: $Y_t^* = \nu_0 X_t + \nu_1 X_{t-1} + \nu_2 X_{t-2} + \ldots$, donde los coeficientes ν_j son constantes desconocidas a determinar.
4. La parte no explicada por las variables X_t se recoge en el proceso $\{N_t\}_{t \in T}$ conocido como proceso de ruido, que puede ser autocorrelado, pero incorrelado con $\{X_t\}_{t \in T}$.

Formulación de un modelo de función de transferencia

$Y_t = Y_t^* + N_t$, donde Y_t^* es la parte de la respuesta explicada por las variables X_t y N_t la no explicada.

1. La variable de entrada X_t influye sobre Y_{t+k} para $k \geq 0$ pero no al contrario.
2. La relación entre la variable de entrada X_t y la de salida Y_t es constante en el periodo muestral analizado.
3. La respuesta de Y_t a las variaciones de X_t puede aproximarse de forma lineal: $Y_t^* = \nu_0 X_t + \nu_1 X_{t-1} + \nu_2 X_{t-2} + \ldots$, donde los coeficientes ν_j son constantes desconocidas a determinar.
4. La parte no explicada por las variables X_t se recoge en el proceso $\{N_t\}_{t \in T}$ conocido como proceso de ruido, que puede ser autocorrelado, pero incorrelado con $\{X_t\}_{t \in T}$.

Formulación de un modelo de función de transferencia

Función de transferencia

$$\nu(B) = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} B^b$$

donde $\omega(B) = \omega_0 - \omega_1 B - \ldots - \omega_h B^h$,
$\delta(B) = 1 - \delta_1 B - \ldots - \delta_r B^r$ y $h, r, b \geq 0$.

Modelo de ruido

$\phi_p(B)\Phi_P(B^s)\nabla^d \nabla_s^D N_t = \theta_q(B)\Theta_Q(B^s)Z_t$ (s el perido estacional).

Modelos de regresión dinámica

$$Y_t = C + \frac{\omega(B)}{\delta(B)} B^b X_t + \frac{\theta_q(B)\Theta_Q(B^s)}{\phi_p(B)\Phi_P(B^s)\nabla^d \nabla_s^D} Z_t.$$

Formulación de un modelo de función de transferencia

Función de transferencia

$$\nu(B) = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} B^b$$

donde $\omega(B) = \omega_0 - \omega_1 B - \ldots - \omega_h B^h$,
$\delta(B) = 1 - \delta_1 B - \ldots - \delta_r B^r$ y $h, r, b \geq 0$.

Modelo de ruido

$$\phi_p(B)\Phi_P(B^s)\nabla^d\nabla_s^D N_t = \theta_q(B)\Theta_Q(B^s)Z_t \ \ (s \text{ el perido estacional}).$$

Modelos de regresión dinámica

$$Y_t = C + \frac{\omega(B)}{\delta(B)} B^b X_t + \frac{\theta_q(B)\Theta_Q(B^s)}{\phi_p(B)\Phi_P(B^s)\nabla^d\nabla_s^D} Z_t.$$

Formulación de un modelo de función de transferencia

Función de transferencia

$$\nu(B) = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} B^b$$

donde $\omega(B) = \omega_0 - \omega_1 B - \ldots - \omega_h B^h$,
$\delta(B) = 1 - \delta_1 B - \ldots - \delta_r B^r$ y $h, r, b \geq 0$.

Modelo de ruido

$$\phi_p(B)\Phi_P(B^s)\nabla^d\nabla_s^D N_t = \theta_q(B)\Theta_Q(B^s)Z_t$$ (s el perido estacional).

Modelos de regresión dinámica

$$Y_t = C + \frac{\omega(B)}{\delta(B)} B^b X_t + \frac{\theta_q(B)\Theta_Q(B^s)}{\phi_p(B)\Phi_P(B^s)\nabla^d\nabla_s^D} Z_t.$$

Características de la función de respuesta a impulso

$$\nu(B) = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} B^b \quad \text{o equivalentemente} \quad \delta(B)\nu(B) = \omega(B)B^b.$$

Así,

$$\nu_j = \begin{cases} 0 & j < b \\ \delta_1\nu_{j-1} + \delta_2\nu_{j-2} + \ldots + \delta_r\nu_{j-r} + \omega_0 & j = b \\ \delta_1\nu_{j-1} + \delta_2\nu_{j-2} + \ldots + \delta_r\nu_{j-r} - \omega_{j-b} & j = b+1, b+2, \ldots, b+h \\ \delta_1\nu_{j-1} + \delta_2\nu_{j-2} + \ldots + \delta_r\nu_{j-r} & j > b+h \end{cases}$$

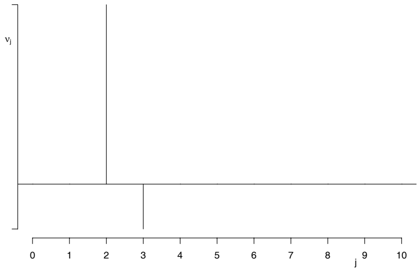
considerando $\nu_j = 0$, para $j < 0$. Los r pesos $\nu_{b+h}, \nu_{b+h-1}, \ldots, \nu_{b+h-r+1}$ proporcionan los valores iniciales para la ecuación en diferencias,

$$\delta(B)\nu_j = 0, \quad j > b+h.$$

Características de la función de respuesta a impulso

Algunos modelos de función de transferencia

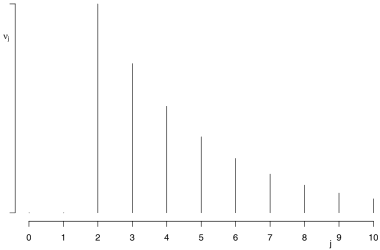
1) Considerando $(r, h, b) = (0, 1, 2)$, obtenemos la función de transferencia $\nu(B) = (\omega_0 - \omega_1 B)B^2$.



Características de la función de respuesta a impulso

Algunos modelos de función de transferencia

2) Considerando $(r, h, b) = (1, 0, 2)$, $\nu(B) = \omega_0 B^2/(1 - \delta_1 B)$, con $|\delta_1| < 1$ cuyos pesos $\nu_0 = \nu_1 = 0$ y el resto decrecen de forma exponencial, siendo $\nu_j = \omega_0 \delta_1^{j-2}$, $j \geq 3$.

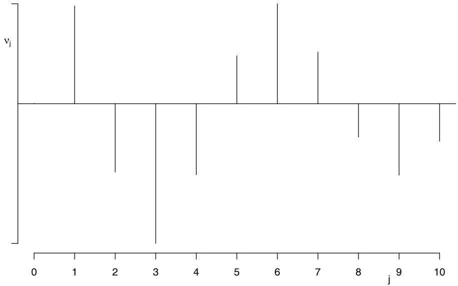


Características de la función de respuesta a impulso

Algunos modelos de función de transferencia

3) Considerando $(r, h, b) = (2, 1, 1)$, obtenemos

$$\nu(B) = (\omega_0 - \omega_1 B)B/(1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2).$$



Funciones de covarianzas y correlaciones cruzadas

Definición

Llamaremos función de covarianzas cruzadas

$$(t_1, t_2) \in T \times T \longrightarrow \gamma_{X,Y}(t_1, t_2) = E[(X_{t_1} - \mu_X(t_1))(Y_{t_2} - \mu_Y(t_2))],$$

siendo $\mu_X(t_1) = E[X_{t_1}]$ y $\mu_Y(t_2) = E[Y_{t_2}]$.

Definición

Llamaremos función de correlación cruzada

$$(t_1, t_2) \in T \times T \longrightarrow \rho_{X,Y}(t_1, t_2) = \frac{\gamma_{X,Y}(t_1, t_2)}{\sqrt{\sigma_X^2(t_1)\sigma_Y^2(t_2)}},$$

siendo $\sigma_X^2(t_1) = \text{Var}[X_{t_1}]$ y $\sigma_Y^2(t_2) = \text{Var}[Y_{t_2}]$.

Funciones de covarianzas y correlaciones cruzadas

Definición

Llamaremos función de covarianzas cruzadas

$$(t_1, t_2) \in T \times T \longrightarrow \gamma_{X,Y}(t_1, t_2) = E[(X_{t_1} - \mu_X(t_1))(Y_{t_2} - \mu_Y(t_2))],$$

siendo $\mu_X(t_1) = E[X_{t_1}]$ y $\mu_Y(t_2) = E[Y_{t_2}]$.

Definición

Llamaremos función de correlación cruzada

$$(t_1, t_2) \in T \times T \longrightarrow \rho_{X,Y}(t_1, t_2) = \frac{\gamma_{X,Y}(t_1, t_2)}{\sqrt{\sigma_X^2(t_1)\sigma_Y^2(t_2)}},$$

siendo $\sigma_X^2(t_1) = \mathrm{Var}[X_{t_1}]$ y $\sigma_Y^2(t_2) = \mathrm{Var}[Y_{t_2}]$.

Funciones de covarianzas y correlaciones cruzadas

Definición

Diremos que $\{(X_t, Y_t)\}_{t\in T}$ es un proceso estacionario si satisface

1. $\mu_X(t) = \mu_X$; $\mu_Y(t) = \mu_Y$; $\sigma_X^2(t) = \sigma_X^2$ y $\sigma_Y^2(t) = \sigma_Y^2$ para todo t.
2. Las autocovarianzas $\gamma_X(h) = E[(X_t - \mu_X)(X_{t+h} - \mu_X)]$ y $\gamma_Y(h) = E[(Y_t - \mu_Y)(Y_{t+h} - \mu_Y)]$ dependen sólo de h y no de t.
3. $$\gamma_{X,Y}(s,t) = \gamma_{X,Y}(s+h, t+h) \text{ y } \gamma_{Y,X}(s,t) = \gamma_{Y,X}(s+h,t+h)$$

   para todo $s, t, s+h, t+h \in \{0, \pm 1, \dots\}$.

Funciones de covarianzas y correlaciones cruzadas

Definición

Diremos que $\{(X_t, Y_t)\}_{t\in T}$ es un proceso estacionario si satisface

1. $\mu_X(t) = \mu_X$; $\mu_Y(t) = \mu_Y$; $\sigma^2_X(t) = \sigma^2_X$ y $\sigma^2_Y(t) = \sigma^2_Y$ para todo t.
2. Las autocovarianzas $\gamma_X(h) = E[(X_t - \mu_X)(X_{t+h} - \mu_X)]$ y $\gamma_Y(h) = E[(Y_t - \mu_Y)(Y_{t+h} - \mu_Y)]$ dependen sólo de h y no de t.
3. $$\gamma_{X,Y}(s,t) = \gamma_{X,Y}(s+h, t+h) \text{ y } \gamma_{Y,X}(s,t) = \gamma_{Y,X}(s+h, t+h)$$

   para todo $s, t, s+h, t+h \in \{0, \pm 1, \ldots\}$.

Funciones de covarianzas y correlaciones cruzadas

Definición

Diremos que $\{(X_t, Y_t)\}_{t\in T}$ es un proceso estacionario si satisface

1. $\mu_X(t) = \mu_X$; $\mu_Y(t) = \mu_Y$; $\sigma^2_X(t) = \sigma^2_X$ y $\sigma^2_Y(t) = \sigma^2_Y$ para todo t.
2. Las autocovarianzas $\gamma_X(h) = E[(X_t - \mu_X)(X_{t+h} - \mu_X)]$ y $\gamma_Y(h) = E[(Y_t - \mu_Y)(Y_{t+h} - \mu_Y)]$ dependen sólo de h y no de t.
3. $$\gamma_{X,Y}(s,t) = \gamma_{X,Y}(s+h, t+h) \text{ y } \gamma_{Y,X}(s,t) = \gamma_{Y,X}(s+h, t+h)$$

   para todo $s, t, s+h, t+h \in \{0, \pm 1, \ldots\}$.

Estimación de la función de covarianzas cruzadas

$(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ una muestra de tamaño n

Definición

La función de covarianzas cruzadas estimada se define

$$\widehat{\gamma}_{X,Y}(k) = \begin{cases} n^{-1} \sum_{t=1}^{n-k} (X_t - \bar{X}_n)(Y_{t+k} - \bar{Y}_n), & k = 0, 1, \ldots, n-1 \\ n^{-1} \sum_{t=1-k}^{n} (X_t - \bar{X}_n)(Y_{t+k} - \bar{Y}_n), & k = 0, -1, \ldots, -n+1 \end{cases}$$

Estimación de la función de correlaciones cruzadas

$(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ una muestra de tamaño n

Definición

La función de correlaciones cruzadas estimada se define

$$\widehat{\rho}_{X,Y}(k) = \frac{\widehat{\gamma}_{X,Y}(k)}{\sqrt{\widehat{\gamma}_X(0)}\sqrt{\widehat{\gamma}_Y(0)}}$$

Estimación de la función de correlaciones cruzadas

Sea $\{(X_t, Y_t)\}_{t\in T}$ con

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j Z_{t-j,1},\ t = 0, \pm 1, \ldots \quad \text{e} \quad Y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \beta_j Z_{t-j,2},\ t = 0, \pm 1, \ldots$$

donde $\{Z_{t,1}\}_{t\in T}$ y $\{Z_{t,2}\}_{t\in T}$ son procesos puramente aleatorios e independientes de media cero y varianza σ_1^2 y σ_2^2, respectivamente, siendo $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\alpha_j| < \infty$ y $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\beta_j| < \infty$.

Estimación de la función de correlaciones cruzadas

Teorema

Entonces para $k \geq 0$,

$$\hat{\rho}_{X,Y}(k) \xrightarrow{d} Z, \quad \text{cuando } n \to \infty,$$

donde Z sigue una distribución normal de media 0 y varianza $n^{-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \rho_{X,X}(j)\rho_{Y,Y}(j)$.

Si $h, k \geq 0$ y $h \neq k$, entonces el vector $(\hat{\rho}_{X,Y}(h), \hat{\rho}_{Y,X}(k))'$ es asintóticamente normal con media $\mathbf{0}$, varianzas como las especificadas arriba y covarianzas

$$n^{-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \rho_{X,X}(j)\rho_{Y,Y}(j + k - h).$$

Estimación de la función de correlaciones cruzadas

Teorema

Entonces para $k \geq 0$,

$$\hat{\rho}_{X,Y}(k) \xrightarrow{d} Z, \text{ cuando } n \to \infty,$$

donde Z sigue una distribución normal de media 0 y varianza $n^{-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \rho_{X,X}(j)\rho_{Y,Y}(j)$.

Si $h, k \geq 0$ y $h \neq k$, entonces el vector $(\hat{\rho}_{X,Y}(h), \hat{\rho}_{Y,X}(k))'$ es asintóticamente normal con media $\mathbf{0}$, varianzas como las especificadas arriba y covarianzas

$$n^{-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \rho_{X,X}(j)\rho_{Y,Y}(j+k-h).$$

Estimación de la función de correlaciones cruzadas

Teorema

Sea $\{(X_t, Y_t)\}_{t\in T}$ es un proceso bivariante gaussiano y con autocovarianzas satisfaciendo $\sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma_{i,j}(h)| < \infty,\ i, j = X, Y.$

Entonces $\lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{Cov}(\hat{\rho}_{X,Y}(h), \hat{\rho}_{X,Y}(k)) =$

$$\begin{aligned} = \quad & \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\rho_{X,Y}(j)\rho_{Y,Y}(j+k-h) + \rho_{X,Y}(j+k)\rho_{YX}(j-h) \\ & -\rho_{X,Y}(h)(\rho_{X,X}(j)\rho_{YX}(j+k) + \rho_{Y,Y}(j)\rho_{YX}(j-k)) \\ & -\rho_{YX}(h)(\rho_{X,X}(j)\rho_{YX}(j+k) + \rho_{Y,Y}(j)\rho_{YX}(j-k)) \\ & + \rho_{X,Y}(h)\rho_{X,Y}(k)(2^{-1}\rho^2_{X,X}(j) + \rho^2_{X,Y}(j) + 2^{-1}\rho^2_{Y,Y}(j)))\,. \end{aligned}$$

Estimación de la función de correlaciones cruzadas

Teorema

Sea $\{(X_t, Y_t)\}_{t\in T}$ es un proceso bivariante gaussiano y con autocovarianzas satisfaciendo $\sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma_{i,j}(h)| < \infty,\ i,j = X, Y$.

Entonces $\lim_{n\to\infty} n \operatorname{Cov}(\hat{\rho}_{X,Y}(h), \hat{\rho}_{X,Y}(k)) =$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \sum_{j=-\infty}^{\infty}(\rho_{X,Y}(j)\rho_{Y,Y}(j+k-h) + \rho_{X,Y}(j+k)\rho_{YX}(j-h) \\
& -\rho_{X,Y}(h)(\rho_{X,X}(j)\rho_{YX}(j+k) + \rho_{Y,Y}(j)\rho_{YX}(j-k)) \\
& -\rho_{YX}(h)(\rho_{X,X}(j)\rho_{YX}(j+k) + \rho_{Y,Y}(j)\rho_{YX}(j-k)) \\
& + \rho_{X,Y}(h)\rho_{X,Y}(k)(2^{-1}\rho^2_{X,X}(j) + \rho^2_{X,Y}(j) + 2^{-1}\rho^2_{Y,Y}(j))) \,.
\end{aligned}
$$

Estimación de la función de correlaciones cruzadas

1. Si $\{X_t\}_{t \in T}$ es un proceso de ruido blanco, $\{Y_t\}_{t \in T}$ es una serie autocorrelada, con función de autocorrelación $\rho_Y(k)$ y si ambos procesos no están correlados entre sí, entonces

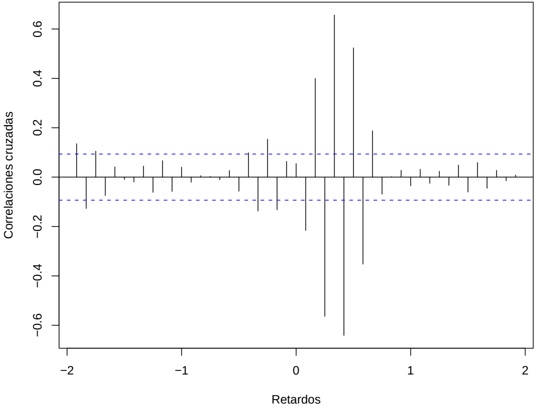
$$\mathrm{Var}[\widehat{\rho}_{X,Y}(k)] \cong n^{-1}. \tag{1}$$

Además, la correlación entre $\widehat{\rho}_{X,Y}(k)$ y $\widehat{\rho}_{X,Y}(k+l)$ satisface que

$$Corr(\widehat{\rho}_{X,Y}(k), \widehat{\rho}_{X,Y}(k+l)) \cong \rho_Y(l). \tag{2}$$

2. Si ambas son sucesiones de ruidos blancos y los procesos $\{X_t\}_{t \in T}$ e $\{Y_t\}_{t \in T}$ no están correlacionados entre sí, entonces las correlaciones dadas por (2) son cero.

Ejemplo



Correlaciones cruzadas $\rho_{x,y}(k)$, $x_t = \nabla_{12} X_t$ e $y_t = \nabla_{12} Y_t$

Relación entre las funciones de covarianzas cruzadas y de respuesta a impulsos

Sea $Y_t = \nu(B)X_t + N_t$, $\{N_t\}_{t\in T}$ estacionario e incorrelado con $\{X_t\}_{t\in T}$.

$$Y_t = \nu_0 X_t + \nu_1 X_{t-1} + \ldots + N_t.$$

$$\gamma_{X,Y}(k) = \nu_0 \gamma_X(k) + \nu_1 \gamma_X(k-1) + \ldots.$$

Si la serie de entrada, $\{X_t\}_{t\in T}$, fuese un proceso de ruido blanco, entonces

$$\nu_k = \frac{\gamma_{X,Y}(k)}{\gamma_X(0)} \qquad \widehat{\nu}_k = \sqrt{\frac{\widehat{\gamma}_Y(0)}{\widehat{\gamma}_X(0)}}\widehat{\rho}_{X,Y}(k)$$

Relación entre las funciones de covarianzas cruzadas y de respuesta a impulsos

Sea $Y_t = \nu(B)X_t + N_t$, $\{N_t\}_{t\in T}$ estacionario e incorrelado con $\{X_t\}_{t\in T}$.

$$Y_t = \nu_0 X_t + \nu_1 X_{t-1} + \ldots + N_t.$$

$$\gamma_{X,Y}(k) = \nu_0 \gamma_X(k) + \nu_1 \gamma_X(k-1) + \ldots .$$

Si la serie de entrada, $\{X_t\}_{t\in T}$, fuese un proceso de ruido blanco, entonces

$$\nu_k = \frac{\gamma_{X,Y}(k)}{\gamma_X(0)} \qquad \widehat{\nu}_k = \sqrt{\frac{\widehat{\gamma}_Y(0)}{\widehat{\gamma}_X(0)}}\,\widehat{\rho}_{X,Y}(k)$$

Relación entre las funciones de covarianzas cruzadas y de respuesta a impulsos

Sea $Y_t = \nu(B)X_t + N_t$, $\{N_t\}_{t\in T}$ estacionario e incorrelado con $\{X_t\}_{t\in T}$.

$$Y_t = \nu_0 X_t + \nu_1 X_{t-1} + \ldots + N_t.$$

$$\gamma_{X,Y}(k) = \nu_0 \gamma_X(k) + \nu_1 \gamma_X(k-1) + \ldots.$$

Si la serie de entrada, $\{X_t\}_{t\in T}$, fuese un proceso de ruido blanco, entonces

$$\nu_k = \frac{\gamma_{X,Y}(k)}{\gamma_X(0)} \qquad \widehat{\nu}_k = \sqrt{\frac{\widehat{\gamma}_Y(0)}{\widehat{\gamma}_X(0)}}\widehat{\rho}_{X,Y}(k)$$

Relación entre las funciones de covarianzas cruzadas y de respuesta a impulsos

Sea $Y_t = \nu(B)X_t + N_t$, $\{N_t\}_{t\in T}$ estacionario e incorrelado con $\{X_t\}_{t\in T}$.

$$Y_t = \nu_0 X_t + \nu_1 X_{t-1} + \ldots + N_t.$$

$$\gamma_{X,Y}(k) = \nu_0\gamma_X(k) + \nu_1\gamma_X(k-1) + \ldots.$$

Si la serie de entrada, $\{X_t\}_{t\in T}$, fuese un proceso de ruido blanco, entonces

$$\nu_k = \frac{\gamma_{X,Y}(k)}{\gamma_X(0)} \qquad \widehat{\nu}_k = \sqrt{\frac{\widehat{\gamma}_Y(0)}{\widehat{\gamma}_X(0)}}\,\widehat{\rho}_{X,Y}(k)$$

Relación entre las funciones de covarianzas cruzadas y de respuesta a impulsos

Sea $Y_t = \nu(B)X_t + N_t$, $\{N_t\}_{t\in T}$ estacionario e incorrelado con $\{X_t\}_{t\in T}$.

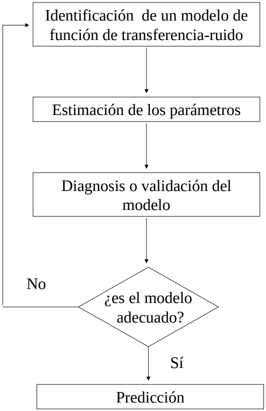
$$Y_t = \nu_0 X_t + \nu_1 X_{t-1} + \ldots + N_t.$$

$$\gamma_{X,Y}(k) = \nu_0 \gamma_X(k) + \nu_1 \gamma_X(k-1) + \ldots.$$

Si la serie de entrada, $\{X_t\}_{t\in T}$, fuese un proceso de ruido blanco, entonces

$$\nu_k = \frac{\gamma_{X,Y}(k)}{\gamma_X(0)} \qquad \widehat{\nu}_k = \sqrt{\frac{\widehat{\gamma}_Y(0)}{\widehat{\gamma}_X(0)}}\widehat{\rho}_{X,Y}(k)$$

Metodología



Identificación de modelos de función de transferencia

$$Y_t = C + \frac{\omega(B)}{\delta(B)} B^b X_t + \frac{\theta_q(B)\Theta_Q(B^s)}{\phi_p(B)\Phi_P(B^s)\nabla^d \nabla_s^D} Z_t.$$

Objetivo: Identificar los órdenes (r, h, b) y (p, P, q, Q) y obtener estimaciones iniciales de los parámetros.

1. Identificación de la función de transferencia

2. Identificación del modelo del proceso de ruido

Identificación de modelos de función de transferencia

$$Y_t = C + \frac{\omega(B)}{\delta(B)} B^b X_t + \frac{\theta_q(B)\Theta_Q(B^s)}{\phi_p(B)\Phi_P(B^s)\nabla^d \nabla_s^D} Z_t.$$

Objetivo: Identificar los órdenes (r, h, b) y (p, P, q, Q) y obtener estimaciones iniciales de los parámetros.

1. Identificación de la función de transferencia
   - Método de preblanqueado
   - Método LTF
2. Identificación del modelo del proceso de ruido

Identificación de modelos de función de transferencia

$$Y_t = C + \frac{\omega(B)}{\delta(B)} B^b X_t + \frac{\theta_q(B)\Theta_Q(B^s)}{\phi_p(B)\Phi_P(B^s)\nabla^d \nabla_s^D} Z_t.$$

Objetivo: Identificar los órdenes (r, h, b) y (p, P, q, Q) y obtener estimaciones iniciales de los parámetros.

1. Identificación de la función de transferencia
   - Método de preblanqueado
   - Método LTF
2. Identificación del modelo del proceso de ruido

Identificación de modelos de función de transferencia

$$Y_t = C + \frac{\omega(B)}{\delta(B)} B^b X_t + \frac{\theta_q(B)\Theta_Q(B^s)}{\phi_p(B)\Phi_P(B^s)\nabla^d \nabla_s^D} Z_t.$$

Objetivo: Identificar los órdenes (r, h, b) y (p, P, q, Q) y obtener estimaciones iniciales de los parámetros.

1. Identificación de la función de transferencia
   - Método de preblanqueado
   - Método LTF
2. Identificación del modelo del proceso de ruido

Identificación de modelos de función de transferencia

$$Y_t = C + \frac{\omega(B)}{\delta(B)} B^b X_t + \frac{\theta_q(B)\Theta_Q(B^s)}{\phi_p(B)\Phi_P(B^s)\nabla^d \nabla_s^D} Z_t.$$

Objetivo: Identificar los órdenes (r, h, b) y (p, P, q, Q) y obtener estimaciones iniciales de los parámetros.

1. Identificación de la función de transferencia
   - Método de preblanqueado
   - Método LTF
2. Identificación del modelo del proceso de ruido

Identificación de modelos de función de transferencia

Método del preblanqueado

$$Y_t = \nu(B)X_t + N_t$$

$\{X_t\}_{t\in T}$ $ARMA : \phi(B)X_t = \theta(B)\alpha_t$, $\{\alpha_t\}_{t\in T}$ ruido blanco

$\psi(B) = \phi(B)/\theta(B)$ $\psi(B)Y_t = \nu(B)\psi(B)X_t + \psi(B)N_t$,

Definiendo $\beta_t = \psi(B)Y_t$ y $\eta_t = \psi(B)N_t$,

$$\beta_t = \nu(B)\alpha_t + \eta_t.$$

$$\nu_k = \rho_{\alpha,\beta}(k)\frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha}.$$

Identificación de modelos de función de transferencia

Método del preblanqueado

$$Y_t = \nu(B)X_t + N_t$$

$\{X_t\}_{t\in T}$ $\quad ARMA : \phi(B)X_t = \theta(B)\alpha_t,\ \{\alpha_t\}_{t\in T}$ ruido blanco

$\psi(B) = \phi(B)/\theta(B) \quad \psi(B)Y_t = \nu(B)\psi(B)X_t + \psi(B)N_t,$

Definiendo $\beta_t = \psi(B)Y_t$ y $\eta_t = \psi(B)N_t$,

$$\beta_t = \nu(B)\alpha_t + \eta_t.$$

$$\nu_k = \rho_{\alpha,\beta}(k)\frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha}.$$

Identificación de modelos de función de transferencia

Método del preblanqueado

$$Y_t = \nu(B)X_t + N_t$$

$\{X_t\}_{t\in T}$ $\quad ARMA : \phi(B)X_t = \theta(B)\alpha_t,\ \{\alpha_t\}_{t\in T}$ ruido blanco

$\psi(B) = \phi(B)/\theta(B)$ $\quad \psi(B)Y_t = \nu(B)\psi(B)X_t + \psi(B)N_t,$

Definiendo $\beta_t = \psi(B)Y_t$ y $\eta_t = \psi(B)N_t,$

$$\beta_t = \nu(B)\alpha_t + \eta_t.$$

$$\nu_k = \rho_{\alpha,\beta}(k)\frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha}.$$

Identificación de modelos de función de transferencia
Método del preblanqueado

$$Y_t = \nu(B)X_t + N_t$$

$\{X_t\}_{t\in T}$ $\quad ARMA : \phi(B)X_t = \theta(B)\alpha_t,\ \{\alpha_t\}_{t\in T}$ ruido blanco

$$\psi(B) = \phi(B)/\theta(B) \quad \psi(B)Y_t = \nu(B)\psi(B)X_t + \psi(B)N_t,$$

Definiendo $\beta_t = \psi(B)Y_t$ y $\eta_t = \psi(B)N_t$,

$$\beta_t = \nu(B)\alpha_t + \eta_t.$$

$$\nu_k = \rho_{\alpha,\beta}(k)\frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha}.$$

Identificación de modelos de función de transferencia

Método del preblanqueado

$$Y_t = \nu(B)X_t + N_t$$

$\{X_t\}_{t\in T}$ $ARMA : \phi(B)X_t = \theta(B)\alpha_t$, $\{\alpha_t\}_{t\in T}$ ruido blanco

$$\psi(B) = \phi(B)/\theta(B) \quad \psi(B)Y_t = \nu(B)\psi(B)X_t + \psi(B)N_t,$$

Definiendo $\beta_t = \psi(B)Y_t$ y $\eta_t = \psi(B)N_t$,

$$\beta_t = \nu(B)\alpha_t + \eta_t.$$

$$\nu_k = \rho_{\alpha,\beta}(k)\frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha}.$$

Identificación de modelos de función de transferencia

Método del preblanqueado

$$Y_t = \nu(B)X_t + N_t$$

$\{X_t\}_{t\in T}$ $\quad ARMA : \phi(B)X_t = \theta(B)\alpha_t,\ \{\alpha_t\}_{t\in T}$ ruido blanco

$$\psi(B) = \phi(B)/\theta(B) \quad \psi(B)Y_t = \nu(B)\psi(B)X_t + \psi(B)N_t,$$

Definiendo $\beta_t = \psi(B)Y_t$ y $\eta_t = \psi(B)N_t$,

$$\beta_t = \nu(B)\alpha_t + \eta_t.$$

$$\nu_k = \rho_{\alpha,\beta}(k)\frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha}.$$

Identificación de modelos de función de transferencia
Método del preblanqueado

$$Y_t = \nu(B)X_t + N_t$$

$\{X_t\}_{t\in T}$ $ARMA : \phi(B)X_t = \theta(B)\alpha_t$, $\{\alpha_t\}_{t\in T}$ ruido blanco

$$\psi(B) = \phi(B)/\theta(B) \quad \psi(B)Y_t = \nu(B)\psi(B)X_t + \psi(B)N_t,$$

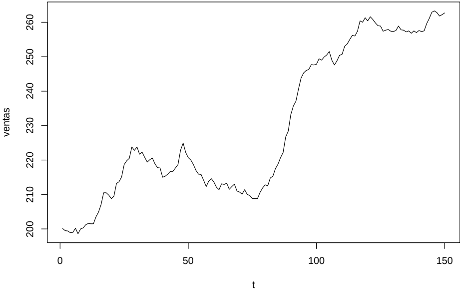
Definiendo $\beta_t = \psi(B)Y_t$ y $\eta_t = \psi(B)N_t$,

$$\beta_t = \nu(B)\alpha_t + \eta_t.$$

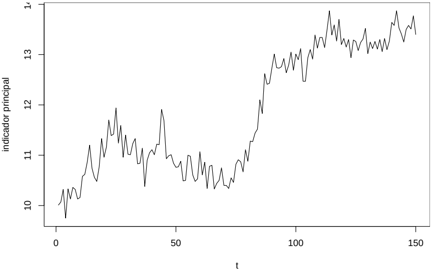
$$\nu_k = \rho_{\alpha,\beta}(k)\frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha}.$$

Identificación de modelos de función de transferencia
Método del preblanqueado

Box & Jenkins (1976)

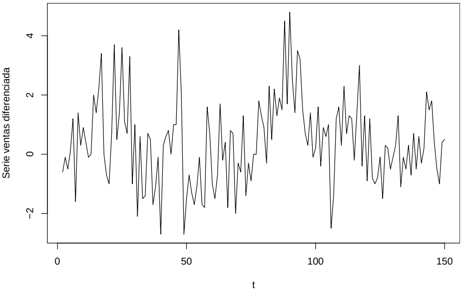


Serie de ventas $\{Y_t\}$

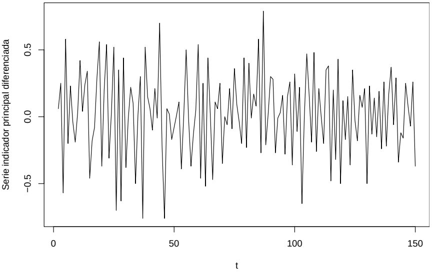


Serie indicador principal $\{X_t\}$

Ejemplo: Identificación

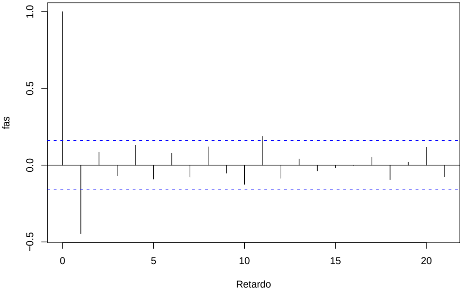


Serie ∇Y_t

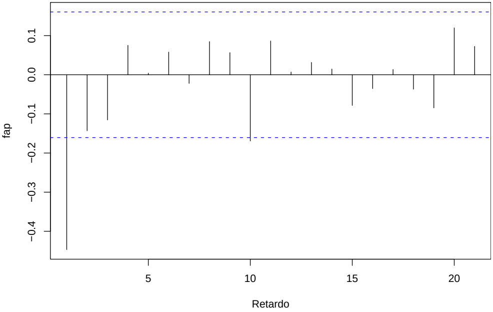


Serie ∇X_t

Ejemplo: Identificación



Fas de ∇X_t



Fap de ∇X_t.

Ejemplo: Identificación

El resultado de la etapa de estimación del modelo para la serie indicador principal es

$$\nabla X_t = (1 - 0.4475B)\alpha_t,$$

siendo la varianza estimada del proceso de ruido 0.0798.

A continuación procedemos a preblanquear las series aplicando el filtro $\psi(B) = (1 - 0.4475B)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} 0.4475^j B^j$, obteniendo las series

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_t &= (1 - 0.4475B)^{-1}\nabla X_t, \ \hat{\sigma}_\alpha^2 = 0.07982, \\ \hat{\beta}_t &= (1 - 0.4475B)^{-1}\nabla Y_t, \ \hat{\sigma}_\beta^2 = 3.7936.\end{aligned}$$

Ejemplo: Identificación

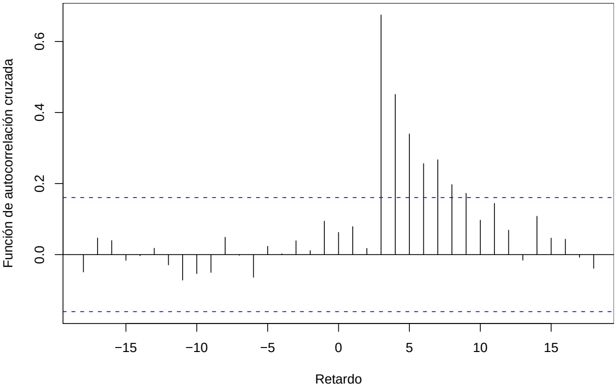
El resultado de la etapa de estimación del modelo para la serie indicador principal es

$$\nabla X_t = (1 - 0.4475B)\alpha_t,$$

siendo la varianza estimada del proceso de ruido 0.0798.
A continuación procedemos a preblanquear las series aplicando el filtro $\psi(B) = (1 - 0.4475B)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} 0.4475^j B^j$, obteniendo las series

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}_t &= (1 - 0.4475B)^{-1}\nabla X_t,\ \hat{\sigma}^2_\alpha = 0.07982,\\
\hat{\beta}_t &= (1 - 0.4475B)^{-1}\nabla Y_t,\ \hat{\sigma}^2_\beta = 3.7936.
\end{aligned}$$

Ejemplo: Identificación



Función de autocorrelación cruzada para las series $\{\hat{\alpha}_t\}_{t=2}^{150}$ y $\{\hat{\beta}_t\}_{t=2}^{150}$.

Ejemplo: Identificación

Identificamos la siguiente función de transferencia

$$\nu(B) = \frac{\omega_0}{1 - \delta B} B^3.$$

Ahora bien teniendo en cuenta:

$$\nu_j = \begin{cases} 0 & j < 3 \\ \delta \nu_{j-1} + \omega_0 & j = 3 \\ \delta \nu_{j-1} & j > 3 \end{cases}$$

Ejemplo: Identificación

Estimaciones preliminares de los parámetros de la función de transferencia:

$$\widehat{\omega}_0 = \widehat{\nu}_3 = \widehat{\rho}_{\alpha,\beta}\frac{\widehat{\sigma}_\beta}{\widehat{\sigma}_\alpha} = 4.86, \ \widehat{\delta} = \frac{\widehat{\nu}_4}{\widehat{\nu}_3} = 0.698.$$

Identificación de modelos de función de transferencia

Método LTF

Este método explícitamente, aunque no formalmente, hace uso del concepto de cointegración.

$$Y_t = C + \nu(B)X_t + N_t = C + \sum_{i=1}^{K} \nu_i X_{t-i} + \frac{1}{(1-\Phi B^s)(1-\phi B)} Z_t,$$

K una constante elegida procurando incluir todos los retardos posibles donde puedan existir efectos, C una constante arbitraria y $\{Z_t\}_{t \in T}$ un proceso de ruido blanco

Identificación de modelos de función de transferencia

Método LTF

Este método explícitamente, aunque no formalmente, hace uso del concepto de cointegración.

$$Y_t = C + \nu(B)X_t + N_t = C + \sum_{i=1}^{K} \nu_i X_{t-i} + \frac{1}{(1-\Phi B^s)(1-\phi B)} Z_t,$$

K una constante elegida procurando incluir todos los retardos posibles donde puedan existir efectos, C una constante arbitraria y $\{Z_t\}_{t \in T}$ un proceso de ruido blanco

Identificación de modelos de función de transferencia

$$Y_t = C + \frac{\omega(B)}{\delta(B)} B^b X_t + \frac{\theta_q(B)\Theta_Q(B^s)}{\phi_p(B)\Phi_P(B^s)\nabla^d \nabla_s^D} Z_t.$$

Objetivo: Identificar los órdenes (r, h, b) y (p, P, q, Q) y obtener estimaciones iniciales de los parámetros.

1. Identificación de la función de transferencia
   - Método de preblanqueado
   - Método LTF
2. Identificación del modelo del proceso de ruido

Identificación de modelos de función de transferencia

Generamos la serie

$$\widehat{n}_t = Y_t - \widehat{\delta}^{-1}(B)\widehat{\omega}(B)X_{t-b}$$

usando las estimaciones preliminares $\widehat{\delta}$ y $\widehat{\omega}$ y aplicamos la teoría de serie univariantes para especificar un modelo *ARMA* apropiado

$$\phi_n(B)\Phi_n(B^s)\widehat{n}_t = \theta_n(B)\Theta_n(B^s)Z_t.$$

Ejemplo: Identificación

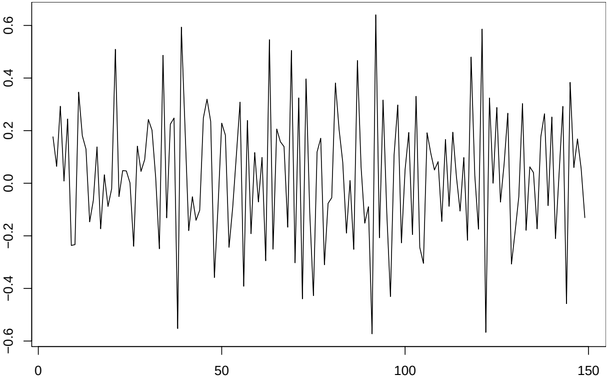
Estimaciones preliminares de los parámetros de la función de transferencia:

$$\widehat{\omega}_0 = \widehat{\nu}_3 = \widehat{\rho}_{\alpha,\beta} \frac{\widehat{\sigma}_\beta}{\widehat{\sigma}_\alpha} = 4.86, \; \widehat{\delta} = \frac{\widehat{\nu}_4}{\widehat{\nu}_3} = 0.698.$$

Las *estimaciones* de la sucesión de ruido se obtiene en la forma

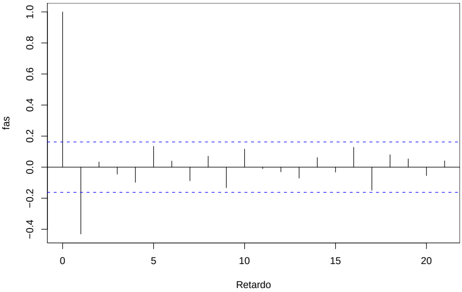
$$\widehat{n}_t = \nabla X_t - 4.86 B^3 (1 - 0.689 B)^{-1} \nabla Y_t, \; t = 4, 5, \ldots, 149.$$

Ejemplo: Identificación

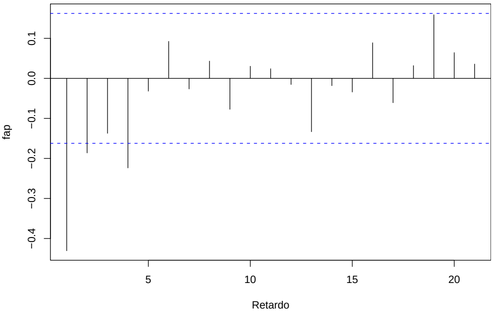


Representación de $\{\widehat{n}_t\}_{t=4}^{149}$.

Ejemplo: Identificación



Fas de $\{\widehat{n}_t\}_{t=4}^{149}$



Fap de $\{\widehat{n}_t\}_{t=4}^{149}$.

Ejemplo: Identificación

Ajustamos un modelo $MA(1)$ a la serie $\{\widehat{n}_t\}_{t=4}^{149}$ y obtenemos $n_t = (1 - 0.364B)Z_t$ siendo la varianza del proceso Z_t igual a 0.0644. De donde el modelo preliminar que obtenemos es

$$\nabla Y_t = 4.86B^3(1 - 0.689B)^{-1}\nabla X_t + (1 - 0.364B)Z_t.$$

Estimación de los modelos de función de transferencia

$$Y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} B^b X_t + \frac{\theta_n(B)}{\phi_n(B)} Z_t. \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\beta}' = (\boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{\delta}', \boldsymbol{\phi}', \boldsymbol{\theta}') = (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_h, \delta_1, \ldots, \delta_r, \phi_1, \ldots, \phi_p, \theta_1, \ldots, \theta_q)'.$$

$$\delta(B)\phi_n(B)Y_t = \phi_n(B)\omega(B)X_{t-b} + \delta(B)\theta_n(B)Z_t$$

$$\begin{aligned} Z_t &= Y_t + d_1 Y_{t-1} + \ldots + d_{p+r} Y_{t-p-r} + c_0 X_{t-b} + c_1 X_{t-b-1} + \ldots + c_{p+h} X_{t-b-p-h} \\ &+ b_1 Z_{t-1} + b_2 Z_{t-2} + \ldots + b_{r+q} Z_{t-r-q} \end{aligned}$$

donde los coeficientes $\boldsymbol{d}$ se obtienen a partir de δ y ϕ, los coeficientes de $\boldsymbol{c}$ se obtienen a partir de ω y ϕ y finalmente, los coeficientes de $\boldsymbol{b}$ se obtienen a partir de δ y θ.

Estimación de los modelos de función de transferencia

$$Y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} B^b X_t + \frac{\theta_n(B)}{\phi_n(B)} Z_t. \qquad (3)$$

$$\boldsymbol{\beta}' = (\boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{\delta}', \boldsymbol{\phi}', \boldsymbol{\theta}') = (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_h, \delta_1, \ldots, \delta_r, \phi_1, \ldots, \phi_p, \theta_1, \ldots, \theta_q)'.$$

$$\delta(B)\phi_n(B) Y_t = \phi_n(B)\omega(B) X_{t-b} + \delta(B)\theta_n(B) Z_t$$

$$\begin{aligned} Z_t &= Y_t + d_1 Y_{t-1} + \ldots + d_{p+r} Y_{t-p-r} + c_0 X_{t-b} + c_1 X_{t-b-1} + \ldots + c_{p+h} X_{t-b-p-h} \\ &+ b_1 Z_{t-1} + b_2 Z_{t-2} + \ldots + b_{r+q} Z_{t-r-q} \end{aligned}$$

donde los coeficientes $\boldsymbol{d}$ se obtienen a partir de δ y ϕ, los coeficientes de $\boldsymbol{c}$ se obtienen a partir de ω y ϕ y finalmente, los coeficientes de $\boldsymbol{b}$ se obtienen a partir de δ y θ.

Estimación de los modelos de función de transferencia

$$Y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} B^b X_t + \frac{\theta_n(B)}{\phi_n(B)} Z_t. \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\beta}' = (\boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{\delta}', \boldsymbol{\phi}', \boldsymbol{\theta}') = (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_h, \delta_1, \ldots, \delta_r, \phi_1, \ldots, \phi_p, \theta_1, \ldots, \theta_q)'.$$

$$\delta(B)\phi_n(B) Y_t = \phi_n(B)\omega(B) X_{t-b} + \delta(B)\theta_n(B) Z_t$$

$$\begin{aligned} Z_t &= Y_t + d_1 Y_{t-1} + \ldots + d_{p+r} Y_{t-p-r} + c_0 X_{t-b} + c_1 X_{t-b-1} + \ldots + c_{p+h} X_{t-b-p-h} \\ &+ b_1 Z_{t-1} + b_2 Z_{t-2} + \ldots + b_{r+q} Z_{t-r-q} \end{aligned}$$

donde los coeficientes $\boldsymbol{d}$ se obtienen a partir de $\boldsymbol{\delta}$ y ϕ, los coeficientes de $\boldsymbol{c}$ se obtienen a partir de $\boldsymbol{\omega}$ y ϕ y finalmente, los coeficientes de $\boldsymbol{b}$ se obtienen a partir de $\boldsymbol{\delta}$ y $\boldsymbol{\theta}$.

Estimación de los modelos de función de transferencia

La función de verosimilitud condicionada, sobre los valores de inicio $\boldsymbol{X_0} = (X_{1-b-p-h}, \ldots, X_0)'$, $\boldsymbol{Y_0} = (Y_{1-p-r}, \ldots, Y_0)'$, y $\boldsymbol{a_0} = (a_{1-r-q}, \ldots, a_0)'$ es:

$$L(\beta, \sigma_a^2 | \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X_0}, \boldsymbol{Y_0}, \boldsymbol{a_0}) \propto \sigma^{-n} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^{n} Z_t^2(\beta) \right\},$$

con $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ e $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)'$. Los cálculos de Z_t se empiezan a partir de

$$t_* = \max\{p + r + 1, b + p + h + 1\}$$

y los valores iniciales se igualan a cero.

Las estimaciones de máxima verosimilitud condicional y las estimaciones de mínimos cuadrados condicional se obtienen minimizando

$$\sum_{t=t_*}^{n} Z_t^2(\beta).$$

Estimación de los modelos de función de transferencia

La función de verosimilitud condicionada, sobre los valores de inicio $\boldsymbol{X_0} = (X_{1-b-p-h}, \ldots, X_0)'$, $\boldsymbol{Y_0} = (Y_{1-p-r}, \ldots, Y_0)'$, y $\boldsymbol{a_0} = (a_{1-r-q}, \ldots, a_0)'$ es:

$$L(\beta, \sigma_a^2 | \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X_0}, \boldsymbol{Y_0}, \boldsymbol{a_0}) \propto \sigma^{-n} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^{n} Z_t^2(\beta) \right\},$$

con $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ e $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)'$. Los cálculos de Z_t se empiezan a partir de

$$t_* = \max\{p + r + 1, b + p + h + 1\}$$

y los valores iniciales se igualan a cero.

Las estimaciones de máxima verosimilitud condicional y las estimaciones de mínimos cuadrados condicional se obtienen minimizando

$$\sum_{t=t_*}^{n} Z_t^2(\beta).$$

Estimación de los modelos de función de transferencia

La función de verosimilitud condicionada, sobre los valores de inicio $\boldsymbol{X_0} = (X_{1-b-p-h}, \ldots, X_0)'$, $\boldsymbol{Y_0} = (Y_{1-p-r}, \ldots, Y_0)'$, y $\boldsymbol{a_0} = (a_{1-r-q}, \ldots, a_0)'$ es:

$$L(\beta, \sigma_a^2 | \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X_0}, \boldsymbol{Y_0}, \boldsymbol{a_0}) \propto \sigma^{-n} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^{n} Z_t^2(\beta) \right\},$$

con $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ e $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)'$. Los cálculos de Z_t se empiezan a partir de

$$t_* = \max\{p + r + 1, b + p + h + 1\}$$

y los valores iniciales se igualan a cero.
Las estimaciones de máxima verosimilitud condicional y las estimaciones de mínimos cuadrados condicional se obtienen minimizando

$$\sum_{t=t_*}^{n} Z_t^2(\beta).$$

Ejemplo: Estimación

El modelo preliminar que obtenemos es

$$\nabla Y_t = 4.86B^3(1-0.689B)^{-1}\nabla X_t + (1-0.364B)Z_t.$$

Reestimamos todos los parámetros del modelo de función de transferencia-ruido por mínimos cuadrados condicionales, obteniéndose

$$\nabla Y_t = 0.033 + 4.717B^3(1-0.724B)^{-1}\nabla X_t + (1-0.582B)Z_t$$

siendo la varianza estimada del proceso de ruido Z_t igual a 0.0486.

Ejemplo: Estimación

El modelo preliminar que obtenemos es

$$\nabla Y_t = 4.86B^3(1 - 0.689B)^{-1}\nabla X_t + (1 - 0.364B)Z_t.$$

Reestimamos todos los parámetros del modelo de función de transferencia-ruido por mínimos cuadrados condicionales, obteniéndose

$$\nabla Y_t = 0.033 + 4.717B^3(1 - 0.724B)^{-1}\nabla X_t + (1 - 0.582B)Z_t$$

siendo la varianza estimada del proceso de ruido Z_t igual a 0.0486.

Diagnosis de los modelos de función de transferencia

- $\{Z_t\}_{t\in T}$ y $\{\alpha_t\}_{t\in T}$ son incorreladas.

Diagnosis de los modelos de función de transferencia

- $\{Z_t\}_{t\in T}$ y $\{\alpha_t\}_{t\in T}$ son incorreladas.

▶ $\widehat{\rho}_{\hat{\alpha},\hat{z}}(k)$ debería no mostrar ninguna conducta evidente y caer dentro de las bandas de confianza $\pm 1.96 n^{-1/2}$.

Diagnosis de los modelos de función de transferencia

- $\{Z_t\}_{t\in T}$ y $\{\alpha_t\}_{t\in T}$ son incorreladas.

▶ $\widehat{\rho}_{\hat{\alpha},\hat{z}}(k)$ debería no mostrar ninguna conducta evidente y caer dentro de las bandas de confianza $\pm 1.96 n^{-1/2}$.

▶ Estadístico de Portmanteau

$$Q_0 = m(m+2)\sum_{k=0}^{K} \frac{\widehat{\rho}^2_{\hat{\alpha},\hat{z}}(k)}{m-k}$$

el cual, bajo la hipótesis de que el modelo es adecuado sigue una distribución χ^2 con $K+1-(r+h+1) = K-r-h$ grados de libertad, donde m son el número de residuos $\hat{Z}_t$ calculados.

Diagnosis de los modelos de función de transferencia

- Comprobar que la serie $\{\hat{Z}_t\}$ es un ruido blanco.

Diagnosis de los modelos de función de transferencia

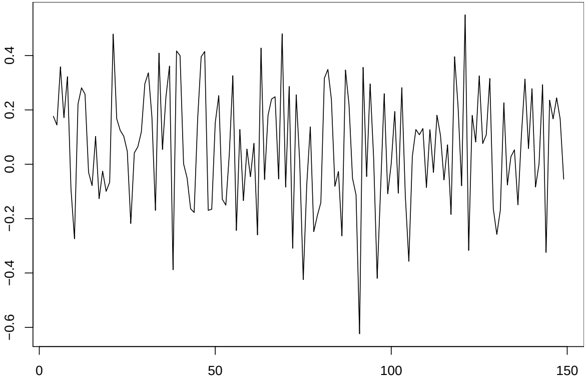
- Comprobar que la serie $\{\hat{Z}_t\}$ es un ruido blanco.

Estadístico de Portmanteau

$$Q_1 = m(m+2)\sum_{k=1}^{K}\frac{\widehat{\rho}^2_{\hat{a}}(k)}{m-k}$$

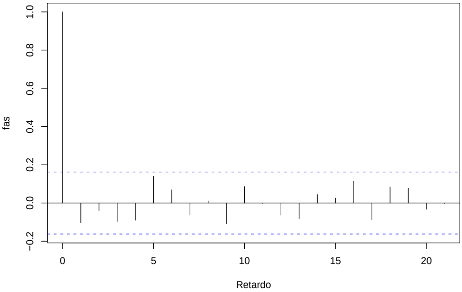
donde m es el número de residuos disponibles. Bajo la hipótesis de que el modelo es adecuado, Q_1 sigue aproximadamente una distribución χ^2 con $K-p-q$ grados de libertad .

Ejemplo: Diagnosis

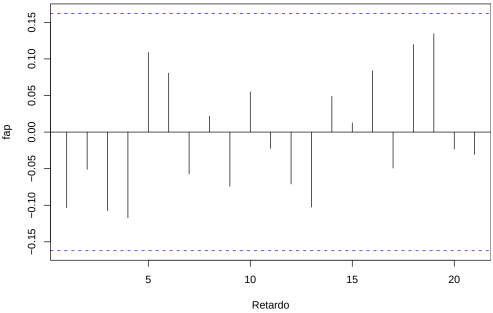


Representación de $\{\widehat{Z}_t\}_{t=4}^{149}$.

Ejemplo: Diagnosis

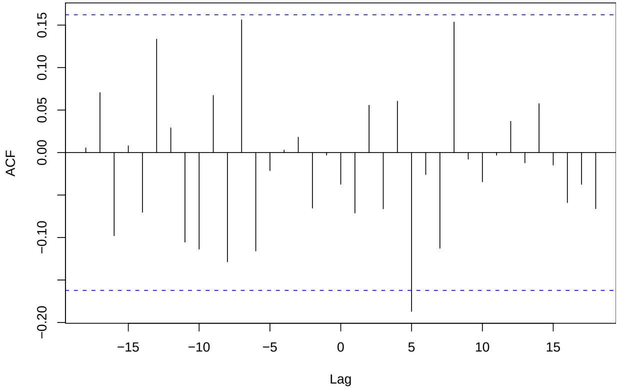


Fas de $\{\widehat{Z}_t\}_{t=4}^{149}$



Fap de $\{\widehat{Z}_t\}_{t=4}^{149}$.

Ejemplo: Diagnosis



Representación de la función de correlaciones cruzadas $\hat{\rho}_{\hat{\alpha},\hat{z}}(k)$.

Ejemplo

$$\nabla Y_t = 0.033 + 4.717B^3(1 - 0.724B)^{-1}\nabla X_t + (1 - 0.582B)Z_t$$

Interpretación: Cuando la variable X_t aumenta en una unidad, Y_t no responde a tal cambio durante tres periodos ($b = 3$). Luego Y_t crece ($\hat{\omega}_0 > 0$), inicialmente por 4.717 unidades ($\hat{\omega}_0 = 4.717$) y se ve afectada por sumas acumuladas que van decreciendo de acuerdo a $\hat{\delta}_1 = 0.724$. Además de estos efectos, la variable Y_t mantiene un subida constante de 0.033 unidades en cada periodo de tiempo.

Ejemplo

$$\nabla Y_t = 0.033 + 4.717B^3(1 - 0.724B)^{-1}\nabla X_t + (1 - 0.582B)Z_t$$

Interpretación: Cuando la variable X_t aumenta en una unidad, Y_t no responde a tal cambio durante tres periodos ($b = 3$). Luego Y_t crece ($\hat{\omega}_0 > 0$), inicialmente por 4.717 unidades ($\hat{\omega}_0 = 4.717$) y se ve afectada por sumas acumuladas que van decreciendo de acuerdo a $\hat{\delta}_1 = 0.724$. Además de estos efectos, la variable Y_t mantiene un subida constante de 0.033 unidades en cada periodo de tiempo.

Predicción en los modelos de función de transferencia

$$Y_t = \frac{\omega(B)B^b}{\delta(B)} X_t + \frac{\theta_n(B)}{\phi_n(B)(1-B)^d} Z_t$$

puede escribirse como

$$Y_t = (\pi_1 Y_{t-1} + \pi_2 Y_{t-2} + \ldots) + (\nu_0^* X_t + \nu_1^* X_{t-1} + \ldots) + Z_t$$

donde los coeficientes π vienen dados por

$$1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \ldots = \frac{(1-B)^d \phi_n(B)}{\theta_n(B)}$$

y los coeficientes ν^* por

$$\nu_0^* + \nu_1^* B + \ldots = \frac{(1-B)^d \nu(B) \phi_n(B)}{\theta_n(B)}.$$

Predicción en los modelos de función de transferencia

$$Y_t = \frac{\omega(B)B^b}{\delta(B)}X_t + \frac{\theta_n(B)}{\phi_n(B)(1-B)^d}Z_t$$

puede escribirse como

$$Y_t = (\pi_1 Y_{t-1} + \pi_2 Y_{t-2} + \ldots) + (\nu_0^* X_t + \nu_1^* X_{t-1} + \ldots) + Z_t$$

donde los coeficientes π vienen dados por

$$1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \ldots = \frac{(1-B)^d \phi_n(B)}{\theta_n(B)}$$

y los coeficientes ν^* por

$$\nu_0^* + \nu_1^* B + \ldots = \frac{(1-B)^d \nu(B)\phi_n(B)}{\theta_n(B)}.$$

Predicción en los modelos de función de transferencia

Predecir Y_{n+l} $(l \geq 1)$ como una combinación lineal de las observaciones pasadas $Y_n, Y_{n-1}, \ldots$ y $X_n, X_{n-1}, \ldots$, por tanto consideramos predicciones de la forma

$$Y_n(l) = (\eta_0^{(1)} Y_n + \eta_1^{(1)} Y_{n-1} + \ldots) + (\eta_0^{(2)} X_n + \eta_1^{(2)} X_{n-1} + \ldots).$$

De $\phi(B)(1-B)^d X_t = \theta(B)\alpha_t$ e $Y_t = \nu(B)X_t + \frac{\theta_n(B)}{\phi_n(B)(1-B)^d} Z_t,$

$$\begin{aligned} Y_{n+l} &= U(B)\alpha_{n+l} + \Psi(B) Z_{n+l} = \\ &= u_0\alpha_{n+l} + u_1\alpha_{n+l-1} + \ldots + u_{l-1}\alpha_{n+1} + u_l\alpha_n + u_{l+1}\alpha_{n-1} + \\ &+ \ldots + Z_{n+l} + \Psi_1 Z_{n+l-1} + \ldots + \Psi_{l-1} Z_{n+1} + \Psi_l Z_n + \Psi_{l+1} Z_{n-1} + \ldots \end{aligned}$$

donde $U(B) = \nu(B)(1-B)^{-d}\phi^{-1}(B)\theta(B)$ y $\Psi(B) = (1-B)^{-d}\phi_n^{-1}(B)\theta_n(B)$.

Predicción en los modelos de función de transferencia

Predecir Y_{n+l} $(l \geq 1)$ como una combinación lineal de las observaciones pasadas $Y_n, Y_{n-1}, \ldots$ y $X_n, X_{n-1}, \ldots$, por tanto consideramos predicciones de la forma

$$Y_n(l) = (\eta_0^{(1)} Y_n + \eta_1^{(1)} Y_{n-1} + \ldots) + (\eta_0^{(2)} X_n + \eta_1^{(2)} X_{n-1} + \ldots).$$

De $\phi(B)(1-B)^d X_t = \theta(B)\alpha_t$ e $Y_t = \nu(B)X_t + \frac{\theta_n(B)}{\phi_n(B)(1-B)^d} Z_t$,

$$\begin{aligned} Y_{n+l} &= U(B)\alpha_{n+l} + \Psi(B)Z_{n+l} = \\ &= u_0\alpha_{n+l} + u_1\alpha_{n+l-1} + \ldots + u_{l-1}\alpha_{n+1} + u_l\alpha_n + u_{l+1}\alpha_{n-1} + \\ &+ \ldots + Z_{n+l} + \Psi_1 Z_{n+l-1} + \ldots + \Psi_{l-1} Z_{n+1} + \Psi_l Z_n + \Psi_{l+1} Z_{n-1} + \ldots \end{aligned}$$

donde $U(B) = \nu(B)(1-B)^{-d}\phi^{-1}(B)\theta(B)$ y $\Psi(B) = (1-B)^{-d}\phi_n^{-1}(B)\theta_n(B)$.

Predicción en los modelos de función de transferencia

Predecir Y_{n+l} $(l \geq 1)$ como una combinación lineal de las observaciones pasadas $Y_n, Y_{n-1}, \ldots$ y $X_n, X_{n-1}, \ldots$, por tanto consideramos predicciones de la forma

$$Y_n(l) = (\eta_0^{(1)} Y_n + \eta_1^{(1)} Y_{n-1} + \ldots) + (\eta_0^{(2)} X_n + \eta_1^{(2)} X_{n-1} + \ldots).$$

De $\phi(B)(1-B)^d X_t = \theta(B)\alpha_t$ e $Y_t = \nu(B)X_t + \frac{\theta_n(B)}{\phi_n(B)(1-B)^d} Z_t$,

$$\begin{aligned}
Y_{n+l} &= U(B)\alpha_{n+l} + \Psi(B)Z_{n+l} = \\
&= u_0\alpha_{n+l} + u_1\alpha_{n+l-1} + \ldots + u_{l-1}\alpha_{n+1} + u_l\alpha_n + u_{l+1}\alpha_{n-1} + \\
&+ \ldots + Z_{n+l} + \Psi_1 Z_{n+l-1} + \ldots + \Psi_{l-1}Z_{n+1} + \Psi_l Z_n + \Psi_{l+1}Z_{n-1} + \ldots
\end{aligned}$$

donde $U(B) = \nu(B)(1-B)^{-d}\phi^{-1}(B)\theta(B)$ y $\Psi(B) = (1-B)^{-d}\phi_n^{-1}(B)\theta_n(B)$.

Predicción en los modelos de función de transferencia

Predecir Y_{n+l} $(l \geq 1)$ como una combinación lineal de las observaciones pasadas $Y_n, Y_{n-1}, \ldots$ y $X_n, X_{n-1}, \ldots$, por tanto consideramos predicciones de la forma

$$Y_n(l) = (\eta_0^{(1)} Y_n + \eta_1^{(1)} Y_{n-1} + \ldots) + (\eta_0^{(2)} X_n + \eta_1^{(2)} X_{n-1} + \ldots).$$

De $\phi(B)(1-B)^d X_t = \theta(B)\alpha_t$ e $Y_t = \nu(B)X_t + \frac{\theta_n(B)}{\phi_n(B)(1-B)^d} Z_t$,

$$\begin{aligned} Y_{n+l} &= U(B)\alpha_{n+l} + \Psi(B)Z_{n+l} = \\ &= u_0\alpha_{n+l} + u_1\alpha_{n+l-1} + \ldots + u_{l-1}\alpha_{n+1} + u_l\alpha_n + u_{l+1}\alpha_{n-1} + \\ &+ \ldots + Z_{n+l} + \Psi_1 Z_{n+l-1} + \ldots + \Psi_{l-1} Z_{n+1} + \Psi_l Z_n + \Psi_{l+1} Z_{n-1} + \ldots \end{aligned}$$

donde $U(B) = \nu(B)(1-B)^{-d}\phi^{-1}(B)\theta(B)$ y $\Psi(B) = (1-B)^{-d}\phi_n^{-1}(B)\theta_n(B)$.

Predicción en los modelos de función de transferencia

Predecir Y_{n+l} ($l \geq 1$) como una combinación lineal de las observaciones pasadas $Y_n, Y_{n-1}, \ldots$ y $X_n, X_{n-1}, \ldots$, por tanto consideramos predicciones de la forma

$$Y_n(l) = (\eta_0^{(1)} Y_n + \eta_1^{(1)} Y_{n-1} + \ldots) + (\eta_0^{(2)} X_n + \eta_1^{(2)} X_{n-1} + \ldots).$$

De $\phi(B)(1-B)^d X_t = \theta(B)\alpha_t$ e $Y_t = \nu(B)X_t + \frac{\theta_n(B)}{\phi_n(B)(1-B)^d} Z_t$,

$$\begin{aligned} Y_{n+l} &= U(B)\alpha_{n+l} + \Psi(B)Z_{n+l} = \\ &= u_0\alpha_{n+l} + u_1\alpha_{n+l-1} + \ldots + u_{l-1}\alpha_{n+1} + u_l\alpha_n + u_{l+1}\alpha_{n-1} + \\ &+ \ldots + Z_{n+l} + \Psi_1 Z_{n+l-1} + \ldots + \Psi_{l-1}Z_{n+1} + \Psi_l Z_n + \Psi_{l+1}Z_{n-1} + \ldots \end{aligned}$$

donde $U(B) = \nu(B)(1-B)^{-d}\phi^{-1}(B)\theta(B)$ y
$\Psi(B) = (1-B)^{-d}\phi_n^{-1}(B)\theta_n(B)$.

Predicción en los modelos de función de transferencia

$$Y_n(l) = (\eta_0^{(1)} Y_n + \eta_1^{(1)} Y_{n-1} + \ldots) + (\eta_0^{(2)} X_n + \eta_1^{(2)} X_{n-1} + \ldots).$$

Equivalentemente, podemos expresar la predicción como una combinación lineal de los ruidos Z_t y α_t (proceso de ruido blanco obtenido por el proceso de preblanqueado de la serie X_t),

$$Y_n(l) = (\xi_0^{(1)} Z_n + \xi_1^{(1)} Z_{n-1} + \ldots) + (\xi_0^{(2)} \alpha_n + \xi_1^{(2)} \alpha_{n-1} + \ldots),$$

η y ξ son elegidos para que se minimice el error cuadrático medio i.e.

$$E[(Y_n(l) - Y_{n+l})^2].$$

Se deduce que $\xi_k^{(1)} = \Psi_{l+k}$ y $\xi_k^{(2)} = u_{l+k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Predicción en los modelos de función de transferencia

$$Y_n(l) = (\eta_0^{(1)} Y_n + \eta_1^{(1)} Y_{n-1} + \ldots) + (\eta_0^{(2)} X_n + \eta_1^{(2)} X_{n-1} + \ldots).$$

Equivalentemente, podemos expresar la predicción como una combinación lineal de los ruidos Z_t y α_t (proceso de ruido blanco obtenido por el proceso de preblanqueado de la serie X_t),

$$Y_n(l) = (\xi_0^{(1)} Z_n + \xi_1^{(1)} Z_{n-1} + \ldots) + (\xi_0^{(2)} \alpha_n + \xi_1^{(2)} \alpha_{n-1} + \ldots),$$

η y ξ son elegidos para que se minimice el error cuadrático medio i.e.

$$E[(Y_n(l) - Y_{n+l})^2].$$

Se deduce que $\xi_k^{(1)} = \Psi_{l+k}$ y $\xi_k^{(2)} = u_{l+k}, \; k = 0, 1, 2, \ldots$

Predicción en los modelos de función de transferencia

$$Y_n(l) = (\eta_0^{(1)} Y_n + \eta_1^{(1)} Y_{n-1} + \ldots) + (\eta_0^{(2)} X_n + \eta_1^{(2)} X_{n-1} + \ldots).$$

Equivalentemente, podemos expresar la predicción como una combinación lineal de los ruidos Z_t y α_t (proceso de ruido blanco obtenido por el proceso de preblanqueado de la serie X_t),

$$Y_n(l) = (\xi_0^{(1)} Z_n + \xi_1^{(1)} Z_{n-1} + \ldots) + (\xi_0^{(2)} \alpha_n + \xi_1^{(2)} \alpha_{n-1} + \ldots),$$

η y ξ son elegidos para que se minimice el error cuadrático medio i.e.

$$E[(Y_n(l) - Y_{n+l})^2].$$

Se deduce que $\xi_k^{(1)} = \Psi_{l+k}$ y $\xi_k^{(2)} = u_{l+k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Predicción en los modelos de función de transferencia

$$Y_n(l) = (\eta_0^{(1)} Y_n + \eta_1^{(1)} Y_{n-1} + \ldots) + (\eta_0^{(2)} X_n + \eta_1^{(2)} X_{n-1} + \ldots).$$

Equivalentemente, podemos expresar la predicción como una combinación lineal de los ruidos Z_t y α_t (proceso de ruido blanco obtenido por el proceso de preblanqueado de la serie X_t),

$$Y_n(l) = (\xi_0^{(1)} Z_n + \xi_1^{(1)} Z_{n-1} + \ldots) + (\xi_0^{(2)} \alpha_n + \xi_1^{(2)} \alpha_{n-1} + \ldots),$$

η y ξ son elegidos para que se minimice el error cuadrático medio i.e.

$$E[(Y_n(l) - Y_{n+l})^2].$$

Se deduce que $\xi_k^{(1)} = \Psi_{l+k}$ y $\xi_k^{(2)} = u_{l+k}, \; k = 0, 1, 2, \ldots$

Predicción en los modelos de función de transferencia

Bajo hipótesis del ruido blanco $\{Z_t\}_{t\in T}$ gaussiano,

$$Y_n(l) = E[Y_{n+l}|Y_n, Y_{n-1}, \ldots ; X_n, X_{n-1}, \ldots]$$

Predicción en los modelos de función de transferencia

El correspondiente error de predicción es

$$e_n(l) = u_0\alpha_{n+l} + \ldots + u_{l-1}\alpha_{n+1} + Z_{n+l} + \Psi_1 Z_{n+l-1} + \ldots + \psi_{l-1} Z_{n+1}$$

con varianza

$$\text{Var}[e_n(l)] = \sum_{j=0}^{l-1} (u_j^2\sigma_\alpha^2 + \psi_j^2\sigma_Z^2).$$