Análisis Matemático I. Curso 2010/11
EXAMEN FINAL. 25/01/2011

1. Probar que toda aplicación lineal $T\colon \mathbb{R}^n \to F$ es lipschitziana.
2. Demostrar que si $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to F$ es una aplicación diferenciable en un punto $a \in \overset{\circ}{A}$, entonces existe un entorno U del punto a y una constante M tal que
$$\|f(x) - f(a)\| \leq M\|x - a\|, \quad \forall x \in U.$$
3. Probar que la función $f(x) = x^2 \operatorname{sen} 1/x^2$ $(x \neq 0)$; $f(0) = 0$, es diferenciable en 0, pero no es lipschitziana en ningún entorno de 0.
4. Probar que si todas las derivadas de primer orden de una función $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ son continuas en algún punto $a \in \overset{\circ}{A}$, entonces f es lipschitziana en algún entorno de a.
5. Probar que si todas las derivadas parciales de segundo orden son continuas en un punto $a \in \overset{\circ}{A}$, entonces f es de clase C^1 en algún entorno de a.
6. Sea $h\colon A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una aplicación que admite derivadas en todas las direcciones en un punto $(a, b) \in \overset{\circ}{A}$ y sea M la gráfica de h. Probar que todos los vectores de la forma $(h, k, D_{(h,k)}f(a, b))$ con $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ son tangentes a M en el punto $c = (a, b, h(a, b))$.
7. Sea M el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^4$ que satisfacen el sistema
$$x^2yz - t^3 = 1; \quad x + t = 1.$$
Demostrar que M define en un entorno de $c = (1, 1, 1, 0)$ a las variables x, t como funciones diferenciables de y, z y obtener las derivadas parciales de primer orden de x, t respecto y, z en $(1, 1)$.
8. Demostrar que la transformación dada por las ecuaciones
$$x = u^2 - v;\ y = vw;\ z = u + w$$
admite inversa diferenciable,
$$u = u(x, y, z);\ v = v(x, y, z);\ w = w(x, y, z),$$
en algún entorno del punto $(u_0, v_0, w_0) = (1, 1, -1)$. Obtener la derivadas parciales de u, v, z respecto a x, y, z en el punto $(x_0, y_0, z_0) = (0, -1, 0)$.
9. Utilizar el teorema local de Taylor para probar que la función
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$
es diferenciable en (0,0).
10. Sea f una función de clase C^∞ y supongamos que
$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{f(x, y, z) - (x^3 - y^2 + z)^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = 0.$$
¿Cuál es el polinomio de Taylor de orden 4 de f en (0,0,0)? ¿Cuál es el valor de
$$\frac{\partial f^4}{\partial x^3 \partial z}(0, 0, 0)$$