

1 Septiembre, 2011

ANÁLISIS MATEMÁTICO I (2º Grado de Matemáticas)

Examen final

- (a) Probar que toda aplicación lineal $T: \mathbb{R}^n \rightarrow F$ es lipschitziana.
(b) Demostrar que la función $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow F$ es diferenciable en un punto $a \in \overset{\circ}{A}$ si y sólo si existe una aplicación lineal $J: \mathbb{R}^n \rightarrow F$ tal que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - [f(a) + J(x - a)]}{\|x - a\|} = 0.$$

- (c) Demostrar que si $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow F$ es diferenciable en un punto $a \in \overset{\circ}{A}$ entonces f es derivable en a en todas las direcciones y para cada $h \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$D_h f(a) = Df(a)h = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j.$$

- (a) Sea $[a, b]$ un segmento de \mathbb{R}^n , U un abierto que lo contiene y $f: U \rightarrow \mathbb{R}^p$ una función tal que f es continua en $[a, b]$, diferenciable en cada punto de (a, b) y para algún $M \geq 0$

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right| \leq M, \quad \forall x \in (a, b); \quad i = 1, \dots, p; \quad j = 1, \dots, n.$$

Probar entonces que

$$\|f(b) - f(a)\|_{\infty} \leq M \|b - a\|_1.$$

- (b) Se dice que una función f satisface la condición (T_r) en un punto a si (T_r) f admite derivadas parciales de orden r en algún entorno de a y éstas son continuas en a .

Probar por inducción que si $f, g: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisfacen la condición (T_r) en un punto $a \in \overset{\circ}{A}$, entonces la función $f \cdot g$ satisface la condición (T_r) en a .

3. (a) Estudiar la existencia de derivadas parciales y direccionales en $(0, 0)$ para la función

$$f(x, y) = \frac{xy(\cos x - \cos y)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}; \quad f(0, 0) = 0.$$

(b) Obtener el polinomio de Taylor de orden 3 de la función $g(x, y) = xy(\cos x - \cos y)$ en $(0, 0)$.

(c) Estudiar si f es continua o diferenciable en $(0, 0)$.

4. Sea $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación de clase C^1 tal que $\varphi(0) = -1$, $\varphi'(0) = 1$ y considerar la función

$$g(x, y, z) = 2x - y + \varphi(2x - y - z).$$

Probar que la ecuación $g(x, y, z) = 0$ define, en algún entorno del punto $(1, 1, 1)$, a z como función implícita de las otras coordenadas, es decir $z = z(x, y)$. Calcular

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1), \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1, 1).$$

5. (a) Definición implícita de variedad.
- (b) Probar que si M es una variedad diferenciable de \mathbb{R}^k determinada en un entorno de un punto $c \in M$ por las funciones f_1, f_2, \dots, f_p ($1 \leq p < k$) entonces $T_c(M) = \cap_{i=1}^p \ker Df_i(c)$.
- (c) Sea M el lugar geométrico de los puntos de \mathbb{R}^3 que satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 - z + xyz = 0$. Probar que M es una variedad diferenciable y obtener la ecuación del plano tangente a M en $(1, -1, 1)$.