

ANÁLISIS MATEMÁTICO I (2º Grado de Matemáticas). 26 Noviembre, 2012.

Examen parcial

1. a) Probar que si  $\| \cdot \|$  y  $\| \cdot \|^*$  son normas equivalentes sobre el espacio vectorial  $E$ , entonces un conjunto  $U$  es  $\| \cdot \|$ -abierto si y sólo es  $\| \cdot \|$ -abierto.  
b) Probar que si  $\| \cdot \|$  y  $\| \cdot \|$  son normas equivalentes de  $\mathbb{R}^n$ , entonces una aplicación  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es  $\| \cdot \|$ -diferenciable en el punto  $a \in \overset{\circ}{A}$  si y sólo si  $f$  es  $\| \cdot \|$ -diferenciable en  $a$ .
2. a) Concepto de diferencial de una función en un punto.  
b) Probar que para cada norma  $\| \cdot \|$  de  $\mathbb{R}^n$  la función  $f(x) = x\|x\|$  es diferenciable en 0 y  $Df(0) = 0$ .  
c) Probar que si  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  es una función diferenciable en el punto  $a \in \overset{\circ}{A}$  y  $g : B \subset \mathbb{R}^k \rightarrow F$  (siendo  $B$  un conjunto que contiene a  $f(A)$  y  $F$  un espacio normado) es diferenciable en  $f(a) \in \overset{\circ}{B}$ , entonces  $g \circ f$  es diferenciable en  $a$  y  $D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$ .
3. a) Probar que mediante las identidades  $\|(x, y)\| = |x| + |y - x|$  y  $\|(x, y)\|^* = \sqrt{x^2 + (y - x)^2}$  se definen dos normas en  $\mathbb{R}^2$ . Comprobar que son equivalentes.  
b) Probar que la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(|x|+|y-x|)^2 x}{x^2+(y-x)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

es una función continua en todo punto, no diferenciable en  $(0,0)$  y diferenciable en  $(0,1)$ . Calcular la diferencial de  $f$  en  $(0,0)$  y en  $(0,1)$  siguiendo el vector  $(2,-1)$

4. a) Sea  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right| \leq M, \forall x \in A,$$

y sean  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  dos puntos tales que  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset A$ . Probar que entonces

$$|f(b) - f(a)| \leq M\|b - a\|_1$$

- b) Probar que existen las derivadas parciales de la función

$$h(x, y, z) = \cos \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

en el punto  $(0,0,0)$ , a pesar de que no existen las de la función  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  en  $(0,0,0)$ . Demostrar que, de hecho, la función  $h$  es de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}^3$ . ¿Es también lipschitziana en  $\mathbb{R}^3$ ?