ANÁLISIS MATEMÁTICO I (2^o Grado de Matemáticas). 11 Noviembre, 2013.

Examen parcial

1) Probar que dos normas sobre el espacio vectorial E son equivalentes si y sólo si los entornos de cada punto son los mismos para las dos normas.

2) Sea $(E, \| \, \|)$ un espacio normado. Probar que la aplicación "multiplicación por escalares" $\mathbb{R} \times E \to E$; $(\lambda, x) \to \lambda x$, es continua en cada punto.

3) Supongamos que la función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to F$ admite derivadas en todas las direcciones en el punto $a \in \overset{\circ}{A}$ y que la aplicación $h \to D_h f(a)$ es lineal. Probar que f es diferenciable en a si y sólo si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - D_h f(a)}{\|h\|} = 0.$$

4) Probar el siguiente teorema de valor medio:

Sea $[a, b]$ un segmento de $\mathbb{R}^n$ y $f \colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ una función continua en $[a, b] \subset \overset{\circ}{A}$ y derivable en (a, b). Si para para algún $M \geq 0$ se tiene

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right| \leq M, \qquad \forall x \in (a, b); \quad i = 1, \ldots, p\,; \; j = 1, \ldots, n.$$

Entonces

$$\|f(b) - f(a)\|_\infty \leq M \, \|b - a\|_1.$$

A) Se define

$$\|(x,y)\| = \sqrt{(\text{máx}\{|x|,|y|\})^2 + x^2 + y^2}$$

5) Demostrar que la aplicación $\| \ \|$ definida por la igualdad anterior es una norma sobre $\mathbb{R}^2$.
6) Dibujar la esfera de centro $(0,0)$ y radio 1, respecto a esta norma.
7) Encontrar dos constantes α, β tales que $\|(x,y)\| \leq \alpha\|(x,y)\|_1$; $\|(x,y)\|_1 \leq \beta\|(x,y)\|$

B) Sea $f(x,y) = \sqrt[3]{x(x^2+y^2)} - x$.

8) Demostrar que f no es diferenciable en $(0,0)$.
9) Probar que el vector $(1, \sqrt{7}, 1)$ es tangente a la gráfica de f en $(0,0,0)$.
10) Probar la función f^2 es diferenciable en $(0,0)$.