Hoja 1. Análisis I - Curso 2010/11.

1. Probar que mediante la expresión $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$ se define una norma en $\mathbb{R}^2$ ¿y mediante la expresión $\|(x,y)\| = \sqrt{|x|+|y|}$?
2. Demostrar las siguientes propiedades relativas a la topología de un espacio normado:
   a) Un punto $a \in \mathrm{cl}(A)$ si y sólo si $d(a,A) = \inf\{\|x-a\| : x \in A\} = 0$ o equivalentemente si existe una sucesión de puntos de A que converge a a. Luego si F es un cerrado y $\{x_p\}$ es una sucesión convergente de puntos de F entonces su límite pertenece a F.
   b) Las bolas cerradas y las esferas son conjuntos cerrados.
   c) Ningún subespacio vectorial propio tiene puntos interiores.
   d) Si $a \neq b$ entonces existe $r > 0$ tal que $B(a,r) \cap B(b,r) = \emptyset$.
3. Sean f, g dos funciones continuas en un punto $a \in A$ de un espacio normado que toman sus valores en $\mathbb{R}$. Probar entonces que si $g(a) \neq 0$ existe un $r > 0$ tal que la función f/g está bien definida en $B(a,r) \cap A$ y es continua en a.
4. (a) Probar que cada abierto U de $\mathbb{R}^n$ se puede escribir como unión de abiertos del tipo $(p_1,q_1) \times (p_2,q_2) \times \cdots \times (p_n,q_n)$, donde p_i, q_i son números racionales (puesto que $\mathbb{Q}$ es numerable se trata entonces de una unión numerable)

   (b) . Demostrar que si F es numerablemente compacto entonces también es compacto.
5. Probar que todo subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ es cerrado.
6. Sea $(E, \| \, \|)$ un espacio normado y T la aplicación de E en E definida por $T(x) = x\|x\|$ estudiar si T es continua, uniformemente continua o lipschitziana.
7. Estudiar continuidad, existencia de derivadas parciales, y diferenciabilidad en el origen de coordenadas, para cada una de las funciones siguientes. (Supondremos que todas estas funciones toman el valor 0 en el origen).

   1. $f(x,y) = \dfrac{x^4+x^2y^2+y^5}{x^2+y^4}$ 2. $f(x,y,z) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^3+xyz)}{x^2+y^2+z^2}$
8. Probar que si $f, g\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ aplicaciones diferenciables en un punto $a \in \overset{\circ}{A}$ entonces su producto, $f \cdot g$, es también diferenciable en a
9. Sea g una función escalar de 2-variables y diferenciable en todo punto. Se define $h(x,y,z) = g(xz, g(y,z))$ y se pide calcular las derivadas parciales de h en el punto $(0,0,1)$ supuesto que $g(0,1) = 0$; la matriz jacobiana de g en $(0,0)$ es $(1,2)$; y la matriz jacobiana de g en $(0,1)$ es $(-3,4)$.