Hoja 2. Análisis I - Curso 2010/11.

1. (a) Supongamos que f es una función de 2-variables cuyas derivadas parciales de primer orden son funciones constantes (i.e., $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = k_1$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = k_2,\ \forall (x,y)$). Probar que entonces f es un polinomio de primer grado.
   (b) Probar que f es un polinomio de primer grado si y sólo si todas las derivadas parciales segundas de la función f son nulas.

2. Sea $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$, si $(x,y) \neq (0,0)$; $f(0,0) = 0$.

   (a) Estudiar si f es lipschitziana.
   (b) Estudiar si es diferenciable en (0,0).
   (c) Estudiar si las derivadas parciales de primer orden son continuas en (0,0).
   (d) Calcular $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

3. Sea $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 < 1\} \setminus \{0\} \times [0,1]$, y consideremos la función f definida sobre U por

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 & \text{si } \ x > 0 \text{ e } y \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   Probar que U es un abierto (no convexo) sobre el que f es continua, admite derivadas parciales acotadas, pero no es lipschitziana.

4. Sea f una función escalar de dos variables. Supongamos que para cada (x,y) de alguna bola centrada en el punto (a,b), existen $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$, y que la aplicación $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ es continua en (a,b).
   Se trata de probar en los siguientes pasos que también existe la otra derivada cruzada en (a,b), y se verifica que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$.

   a) Probar que de la definición resulta que
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) = \lim_{y \to b}\left(\lim_{x \to a} \frac{f(x,y) - f(a,y) - f(x,b) + f(a,b)}{(x-a)(y-b)}\right).$$
   b) Probar que existe ξ_y comprendido entre b e y tal que
$$\frac{f(x,y) - f(a,y) - f(x,b) + f(a,b)}{(x-a)(y-b)} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi_y) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,\xi_y)}{x-a}.$$
   c) Probar que existe ξ_x comprendido entre x y a tal que
$$\frac{f(x,y) - f(a,y) - f(x,b) + f(a,b)}{(x-a)(y-b)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi_x, \xi_y).$$
   d) Deducir de lo anterior y de la continuidad en (a,b) de la aplicación $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, que existe $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$ y coincide con $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$.
   e) Deducir en consecuencia un teorema como el anterior pero para más de 2-variables.

5. Probar por inducción que el producto y la composición de funciones de clase C^r es también de clase C^r.

6. Demostrar los siguientes pasos del Teorema de Existencia de F. Implícitas:
   a) Sea $g(x, y) = D_2 f(a, b)y - f(x, y)$. Aplicar el teorema del valor medio a la función $g_x(y) = g(x, y)$ para probar que, dado $\varepsilon > 0$ existen $B[a, s_1]$ y $B[b, r]$ tal que cuando $x \in B[a, s_1]$, se tiene $\|g(x, u) - g(x, v)\| \leq \varepsilon \|u - v\|_1$, $\forall u, v \in B[b, r]$.
   b) Probar que existe $0 < s < s_1$ tal que cuando $x \in B[a, s]$ la aplicación $k_x(y) = k(x, y)$ aplica la bola cerrada $B[b, r]$ en la bola abierta $B(b, r)$.

7. Supongamos en el terorema de las Funciones Implícitas f de clase C^r. Deducir de la fórmula
$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x) = \frac{-1}{\det D_2 f(x, h(x))} \sum A_{ik}(x, h(x)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x, h(x)),$$
que h de clase C^1 implica h de clase C^2. Luego por inducción h es de clase C^r(Utilizar el ejercicio 5).