Hoja 1. Análisis Matemático I - Curso 2011/12.

1. Demostrar que en todo espacio normado
   a) La adherencia de un subespacio vectorial es un espacio vectorial.
   b) Las bolas cerradas y las esferas son conjuntos cerrados.
   c) Ningún subespacio vectorial propio tiene puntos interiores.
   d) Si $a \neq b$ entonces existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \cap B(b, r) = \emptyset$.
   e) Una sucesión tiene a lo sumo un punto límite.

2. Sean f, g dos funciones continuas en un punto $a \in A$ de un espacio normado que toman sus valores en $\mathbb{R}$. Probar entonces que si $g(a) \neq 0$ existe un $r > 0$ tal que la función f/g está bien definida en $B(a, r) \cap A$ y es continua en a.

3. Sea $(E, \| \, \|)$ un espacio normado y T la aplicación de E en E definida por $T(x) = x\|x\|$ estudiar si T es continua, uniformemente continua o lipschitziana.

4. *a*) Probar que si $\| \, \|$ es una norma en $\mathbb{R}^n$ entonces existe una constante $\alpha_n > 0$ tal que $\|(u_1, u_2, \ldots, u_n)\| \leq \alpha_n \|(u_1, u_2, \ldots, u_n)\|_\infty$.
   b) Probar por inducción que si $\| \, \|$ es una norma en $\mathbb{R}^n$ entonces existe una constante $\beta_n > 0$ tal que $\|(u_1, u_2, \ldots, u_n)\|_\infty \leq \beta_n \|(u_1, u_2, \ldots, u_n)\|$.

5. Probar que dos normas $\| \, \|, \| \, \|^*$ sobre el mismo espacio vectorial E son equivalentes si y sólo si existen dos números reales α, β mayores estrictamente que 0 tales que $\alpha\|x\| \leq \|x\|^* \leq \beta\|x\|, \forall x \in E$.

6. Probar que mediante la fórmula $\|(x, y)\| = \text{máx}(|y - 2x|, |x|)$ se define una norma en $\mathbb{R}^2$. Dibujar la esfera $E((0, 0), 1)$. Encontrar dos constantes α, β mayores estrictamente que 0 tales que $\alpha\|(x, y)\| \leq \|(x, y)\|_\infty \leq \beta\|(x, y)\|, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

7. Un subconjunto F de $\mathbb{R}^n$ es completo si y sólo si es cerrado.

8. Demostrar que el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ es compacto.

9. Probar que un conjunto K de $\mathbb{R}^2$ es compacto si y sólo si cada sucesión de puntos de K tiene una subsucesión convergente a un punto de K.