

## Hoja 2. Análisis I - Curso 2011/12.

- (a) Demostrar que la función  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $f(t) = 1/n$  si  $t \in (1/(n+1), 1/n]$ ;  $f(0) = 0$ , es derivable en 0 pero no es continua en ningún entorno de 0
- (b) Demostrar que lo mismo le sucede a la función de 2-variables

$$f(x, y) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{xy}; \quad f(x, 0) = f(0, y) = 0.$$

- (a) Probar que la función

$$f(x, y) = \frac{y^4}{x^2 + (x - y^2)^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0); \quad f(0, 0) = 0$$

no es continua en  $(0, 0)$

- (b) Demostrar que la función

$$g(x, y) = \frac{y^5}{x^2 + (x - y^2)^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0); \quad f(0, 0) = 0$$

es continua en todo punto.

- (c) Obtener las derivadas parciales de la función  $g$  del apartado anterior en los puntos  $(1, 2)$  y  $(0, 0)$ .
  - (d) Probar que la función  $g$  no es diferenciable en  $(0, 0)$ .
- Probar que si  $f, g: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  aplicaciones diferenciables en un punto  $a \in \overset{\circ}{A}$  entonces su producto,  $f \cdot g$ , es también diferenciable en  $a$ , viendo directamente que se satisface la condición de diferenciability en  $a$ .
  - Sea  $g$  una función escalar de 2-variables y diferenciable en todo punto. Se define  $h(x, y, z) = g(xz, g(y, z))$  y se pide calcular las derivadas parciales de  $h$  en el punto  $(0, 0, 1)$  supuesto que  $g(0, 1) = 0$ ; la matriz jacobiana de  $g$  en  $(0, 0)$  es  $(1, 2)$ ; y la matriz jacobiana de  $g$  en  $(0, 1)$  es  $(-3, 4)$ .
  - Supongamos que  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una curva derivable en el punto  $t_0 \in \overset{\circ}{I}$  y que su conjunto imagen  $C$  es como el de la figura. Probar que entonces  $\gamma'(t_0) = 0$ .

