Hoja 3. Análisis I - Curso 2011/12.

1. (a) Probar que una función f de varias variables cuyas derivadas parciales de primer orden están definidas en todo punto de una bola abierta centrada en un punto a es lispchitziana en esa bola si y sólo si todas esas derivadas parciales están acotadas en la bola.

   (b) Demostrar que si una función es diferenciable en un punto a, existe una bola $B(a,r)$ y una constante $M>0$ tal que $\|f(x)-f(a)\| \leq M\|x-a\|$ para cada $x \in B(a,r)$.

   (c) Utilizar el apartado (a) para probar que la función $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}$; $f(0)=0$ es derivable en 0, pero no es lipschitziana en ningún entorno de 0.

   (d) Utilizar de nuevo el apartado (a) para probar que la función
$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2};\ f(0,0)=0$$
   es lipschitziana en la bola $B((0,0),1)$ pero no es diferenciable en (0,0).¿Es lipschitziana esta función en todo $\mathbb{R}^2$?

   (e) Si las derivadas parciales de primer orden de una función f están definidas en un entorno de un punto a y son continuas en a entonces f es lipschitziana en alguna bola centrada en a y diferenciable en a.

   (f) Comprobar que la función $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$; $f(0)=0$ es derivable en 0 y lipschitziana en el intervalo $(-1,1)$, pero f' no es continua en 0. De igual modo, comprobar que la función
$$g(x,y) = \frac{xy^4}{x^2+y^4}$$
   es derivable en (0,0) y lipschitziana en la bola $B((0,0),1)$ pero alguna de sus derivadas parciales de primer orden no es continua en $(0,0)$.

2. Sea $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2<1\} \setminus \{0\} \times [0,1]$, y consideremos la función f definida sobre U por
$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 & \text{si } x>0 \text{ e } y \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$
   Probar que U es un abierto (no convexo) sobre el que f es continua, admite derivadas parciales acotadas, pero no es lipschitziana.

3. Estudiar si la función $f(x,y,z) = \cos\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ es una función lipschiziana, diferenciable, de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$. Idem con la función $g(x,y,z) = \operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
4. Probar que el producto de dos funciones de clase C^1 es una función de clase C^1.
5. Probar por inducción que el producto de funciones de clase C^r es también de clase C^r.