

Hoja 4. Análisis I - Curso 2011/12.

1. Considerar la función $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$; $f(0, 0) = 0$ y probar que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^3 - yx^2}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

- (a) Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \frac{1}{y}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = \frac{1}{x},$$

verificar que las derivadas parciales de f no están acotadas en ninguna bola centrada en $(0, 0)$.

- (b) Sabemos que

“Si una función f de varias variables cuyas derivadas parciales de primer orden están definidas en todo punto de un abierto U es lipschitziana en U entonces todas esas derivadas parciales están acotadas en U ” (volver a probar este resultado como repaso), por tanto,

i) f no es lipschitziana en ninguna bola centrada en $(0, 0)$.

Esto ya lo sabíamos, pues esta función ya la hemos estudiado en otro momento y sabemos que no es continua en $(0, 0)$.

ii) Probar que f tampoco es lipschitziana en ninguna bola reducida centrada en $(0, 0)$ (es decir en la bola sin el centro).

Ver esto también directamente: por ejemplo, demostrando que no existe ninguna constante M tal que $|f(x, x) - f(x, 0)| \leq M|x|$ para todo $x \neq 0$.

- (c) Probar que f es de clase C^1 en el abierto $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

y que por lo tanto f es localmente lipschitziana en U , como aplicación del siguiente resultado:

Si todas las derivadas parciales de una función f son continuas en un abierto U de \mathbb{R}^n entonces f es localmente lipschitziana y diferenciable en U (reparar ahora la demostración de este resultado).

- (d) Demostrar que si (x, y) pertenece al **complementario** del cuadrado $D = (-1, 1) \times (-1, 1)$ entonces

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \leq 1; \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq 1.$$

Teniendo en cuenta el resultado

“Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ una función continua en el segmento cerrado $[a, b] \subset \overset{\circ}{A}$ y derivable en el segmento abierto (a, b) . Si además existe alguna constante M tal que $|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)| \leq M$ para todo $x \in (a, b)$, entonces $\|f(b) - f(a)\|_\infty \leq M\|b - a\|_1$ ” (reparar demostración),

deducir que si (x, y) y (u, v) son dos puntos de D^c tales que el segmento determinado por ellos está contenido en D^c , entonces

$$\left| \frac{xy}{x^2 + y^2} - \frac{uv}{u^2 + v^2} \right| \leq |u - x| + |v - y|$$

- (e) Probar que la función f es lipschitziana en D^c (a pesar de que D^c no es convexo) y con constante de Lipschitz igual a 1, respecto a la norma $\|\cdot\|_1$. Es decir si (x, y) y (u, v) son dos puntos de D^c , entonces

$$\left| \frac{xy}{x^2 + y^2} - \frac{uv}{u^2 + v^2} \right| \leq |u - x| + |v - y|.$$

Para hacer este apartado se sugieren los siguientes pasos:

i) Supongamos en primer lugar que los puntos (x, y) y (u, v) están en los lados del cuadrado D . Si están en un mismo lado, basta aplicar (d). Si están en lados consecutivos, por ejemplo $(x, y) = (x, 1)$ y $(u, v) = (1, v)$ entonces

$$\begin{aligned} |f(x, 1) - f(1, v)| &\leq |f(x, 1) - f(1, 1)| + |f(1, 1) - f(1, v)| \\ &\leq |1 - x| + |v - 1|, \end{aligned}$$

ya que los puntos $(x, 1), (1, 1)$ están en un mismo lado y también los puntos $(1, 1), (1, v)$.

Si los puntos no están en lados consecutivos, por ejemplo $(x, y) = (x, 1); (u, v) = (u, -1)$, entonces

$$|f(x, 1) - f(u, -1)| = \left| \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{u}{u^2 + 1} \right| \leq 2 \leq |u - x| + |-1 - 1|.$$

ii) Consideremos el segmento determinado por los puntos (x, y) y (u, v) . El caso en que este segmento está contenido en D^c ya está resuelto en el apartado (d). Supongamos que dicho segmento corta a los lados del cuadrado D en los puntos $(x_1, y_1), (u_1, v_1)$, entonces

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(u, v)| &\leq |f(x, y) - f(x_1, y_1)| + |f(x_1, y_1) - f(u_1, v_1)| \\ &\quad + |f(u_1, v_1) - f(u, v)| \\ &\leq \|(x_1, y_1) - (x, y)\|_1 + \|(u_1, v_1) - (x_1, y_1)\|_1 \\ &\quad + \|(u, v) - (u_1, v_1)\|_1 \\ &= \|(u, v) - (x, y)\|_1, \end{aligned}$$

donde la igualdad última se obtiene por que los puntos $(x, y), (x_1, y_1), (u_1, v_1), (u, v)$ están alineados.

2. Sea g una función de \mathbb{R} en \mathbb{R} y clase C^1 y consideremos las funciones $f_1(x, y, z) = z + g(x^2 - y + z) - 1$; $f_2(x, y, z) = g(x) + yg(z) - 1$.

a) Probar que f_1 y f_2 son funciones de clase C^1 en \mathbb{R}^3 , es decir que las funciones $\frac{\partial f_i}{\partial x}, \frac{\partial f_i}{\partial y}, \frac{\partial f_i}{\partial z}$, $i = 1, 2$ son continuas.

b) Supongamos que $g(0) = 1$ y $g'(0) = 2$ y sea M el conjunto de los puntos de \mathbb{R}^3 que son solución del sistema $f_1(x, y, z) = 0$; $f_2(x, y, z) = 0$.

i) Probar que este sistema permite despejar en algún entorno del punto $(0, 0, 0)$ a x, y como funciones de z ($x = h_1(z) \equiv x(z)$; $y = h_2(z) \equiv y(z)$).

ii) Expresar de forma precisa el significado del apartado i).

iii) Obtener $h'_1(0) \equiv x'(0)$ y $h'_2(0) \equiv y'(0)$ a partir de la fórmula general $Dh(a) = -D_2f(a, b)^{-1} \circ D_1f(a, b)$.

iv) Obtener $h'_1(0) \equiv x'(0)$ y $h'_2(0) \equiv y'(0)$ aplicando la regla de la cadena en las identidades $f_1(x(z), y(z), z) = 0$; $f_2(x(z), y(z), z) = 0$ (observar que $x(0) = 0$; $y(0) = 0$).

3. Sea $t \xrightarrow{\varphi} x$ una transformación de \mathbb{R} dada por la ecuación $x = \varphi(t) = 2t + \cos t$.

a) Probar que φ es una aplicación estrictamente creciente, por lo tanto inyectiva.

b) Probar que φ es también epiyectiva.

c) Probar que φ es un difeomorfismo de \mathbb{R} en \mathbb{R} . Si $x \xrightarrow{\varphi^{-1}} t$ es la transformación inversa sabemos que

$$(\varphi^{-1})'(x) \equiv t'(x) = \frac{1}{x'(t)} \equiv \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{1}{2 - \operatorname{sen} t}.$$

De acuerdo con esto obtener $t'(\pi)$.

d) Sea ahora $(u, v) \xrightarrow{g} (x, y)$ la transformación de \mathbb{R}^2 dada por las ecuaciones $x = 2u + \cos u$; $y = uv + v^2$. Probar que g no es inyectiva. Tampoco es epiyectiva: observar por ejemplo que el punto $(1, -1)$ no tiene ninguna anti-imagen por g .

e) Utilizar el resultado

“Si U un abierto de \mathbb{R}^n y $g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase C^r sobre U , entonces g es un difeomorfismo local de clase C^r sobre U si y sólo si para cada $x \in U$

$$\det \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) \right) \neq 0$$

para demostrar que g no es un difeomorfismo local sobre \mathbb{R}^2 pero sí que lo es su restricción al abierto U = igual al complementario de la recta $u + 2v = 0$.

f) Probar que si $V = \{(u, v) : u + 2v > 0\}$ entonces V es abierto y la restricción de g a V

es un difeomorfismo entre V y $g(V)$. Sea $(x, y) \xrightarrow{g|_V^{-1}} (u, v)$ la transformación inversa de la restricción de g a V . Teniendo en cuenta que $D(g|_V)^{-1}(x, y) = (Dg|_V(u, v))^{-1}$,

obtener $\frac{\partial v}{\partial x}(1, 2)$.

4. Sea M el lugar geométrico de los puntos de \mathbb{R}^2 que satisfacen la ecuación $\sin(xy) = 1$ y llamemos $f(x, y) = -1 + \sin(xy)$. Probar que el rango de la matriz las derivadas parciales de f es 0 en todo punto de M , pero sin embargo M es una variedad diferenciable. Obtener la ecuación de la recta tangente a M en el punto $(-1, 3\pi/2)$.