Hoja 1. Análisis Matemático I - Curso 2013/14.

1. *a)* Justificar que la sucesión $\{\cos k\pi\}_{k=1}^{\infty}$ no converge a 1.
   b) ¶Justificar que la función $f(t) = \operatorname{sen} 1/t,\ t \neq 0;\ f(0) = 0$ no es continua en 0.
   c) Justificar que la aplicación $f(t) = t^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.
   d) ¶Justificar que la aplicación $f(t) = \sqrt{t}$ no es lipschitziana en $[0, 1]$ pero sí que es lipschitziana en $[1, \infty)$.

2. *a)* Probar que mediante las igualdades ¶$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + (y - x)^2}$; $\|(x, y)\| = |x| + \text{máx}\{|x|, 2|y|\}$; $\|(x, y)\| = \text{máx}(|y - 2x|, |x|)$; $\|(x, y)\| = |x| + |x - y|$ se definen normas sobre $\mathbb{R}^2$ (ya sabemos que todas ellas son equivalentes). Comparar cada una de ellas con la norma $\|(x, y)\| = |x| + |y|$ y dibujar las esferas de centro 0 y radio 1 para cada una de ellas.
   b) Probar que las igualdades ¶$\|(x, y)\| = (\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^2$ y $\|(x, y)\| = |x| + \sqrt{|x^2 - y^2|}$ no definen normas en $\mathbb{R}^2$.
   c) Estudiar si $\|(x, y, z)\| = \text{máx}\{|x|, |y| + |x - z|\}$ es una norma en $\mathbb{R}^3$.

3. Una norma $\| \; \|$ sobre $\mathbb{R}^n$ la llamaremos monótona si satisface la condición:

$$|x_i| \leq |y_i|, \quad i = 1, \ldots, n \quad \Rightarrow \quad \|(x_1, \ldots, x_n)\| \leq \|(y_1, \ldots, y_n)\|.$$

   a) Probar que las normas $\| \; \|_p$ y la norma producto son normas monótonas de $\mathbb{R}^n$.
   b) Probar que la norma $\|(x, y)\| = |x| + |x - y|$ no es una norma monótona de $\mathbb{R}^2$.
   c) ¶Si $E_i,\ i = 1, \ldots, n$ son espacios normados y $\| \; \|^*$ es una norma monótona de $\mathbb{R}^n$, entonces mediante la fórmula

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \Big\| \Big(\|x_1\|, \ldots, \|x_n\| \Big) \Big\|^*$$

   se define una norma en $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$.
   d) Si $\| \; \|_1, \ldots, \| \; \|_n$ son normas sobre el mismo espacio vectorial E y $\| \; \|^*$ es una norma monótona de $\mathbb{R}^n$, entonces mediante la fórmula

$$\|x\| = \Big\| \Big(\|x\|_1, \ldots, \|x\|_n \Big) \Big\|^*$$

   se define una norma en E.
   e) Utilizar uno de los dos apartados anteriores para justificar que las siguientes expresiones son normas

   en $\mathbb{R}^2$:

$$\|(x, y)\| = |x| + |y| + \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$¶\|(x, y)\| = \sqrt{(\text{máx}\{|x|, |y|\})^2 + x^2 + y^2 + (|x| + |y|)^2}$$

   en $\mathbb{R}^3$:

$$\|(x, y, z)\| = 2|x| + 3|y| + |z|$$

$$¶\|(x, y, z)\| = \text{máx}\{|x|, \sqrt[3]{|y|^3 + |z|^3}\}$$

$$\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + (|x| + |y| + |z|)^2}$$

   f) Procediendo de la misma forma, construir más normas.

4. Por definición, un conjunto B de un espacio normado $(E, \| \ \|)$ se dice acotado si existe alguna constante $M \geq 0$ tal que $\|x\| \leq M$ para todo $x \in B$. Probar que que si las normas $\| \ \|$ y $\| \ \|^*$ son equivalentes entonces un subconjunto B de E es $\| \ \|$-acotado si y sólo si es $\| \ \|^*$-acotado.
5. Probar que en todo espacio normado ¶las bolas cerradas y las esferas son conjuntos cerrados y acotados.
6. Probar que en todo espacio normado la suma y la multiplicación por escalares son aplicaciones continuas.
7. Sea $(E, \| \ \|)$ un espacio normado. Estudiar si las aplicaciones T_1 y T_2 definidas para $x \in E$ por $T_1(x) = x\|x\|$, ¶$T_2(x) = \frac{x}{1+\|x\|}$ son continuas, uniformemente continuas o lipschitzianas.
8. Probar que los conjuntos $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$, ¶$A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 1\}$, $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - xy \leq 1\}$ y ¶$A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 - xy = 1\}$ son conjuntos cerrados de $\mathbb{R}^2$ ¿Cúales de ellos son además acotados?.
9. Probar que $\mathbb{R}^n$ es un espacio normado completo (un espacio de Banach) respecto a cualquier norma i.e., cada sucesión de Cauchy en $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$ es convergente cualquiera que sea la norma $\| \ \|$.
10. Estudiar existencia de los siguiente límites

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (1,1) \\ (x,y) \in A}} \frac{(y-x)^2}{x^2+y^2-x-y}, \quad \text{donde } A = \{(x,y) \colon x^2+y^2-x-y \neq 0\}$$

¶ $$\lim_{\substack{(x,y) \to (\pi,0) \\ (x,y) \in A}} \frac{xy^2}{y - \operatorname{sen} x} \quad \text{donde } A = \{(x,y) \colon y \neq \operatorname{sen} x\}$$

¶ $$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^4+z^4}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x+y-1)\ln(x^2+2y^2)}{(x-1)^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2 \ln y}{x^4+(x^2+\ln y)^2}$$

11. (a) Probar que la función

$$f(x,y) = \frac{y^4}{x^2+(x-y^2)^2}, \ (x,y) \neq (0,0); \ f(0,0) = 0$$

no es continua en $(0,0)$

(b) ¶Demostrar que la función

$$g(x,y) = \frac{y^5}{x^2+(x-y^2)^2}, \ (x,y) \neq (0,0); \ f(0,0) = 0$$

es continua en todo punto.