Hoja 2. Análisis I - Curso 2013/14.

1. Se define la función f sobre $\mathbb{R}^2$ por
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x - \sin y}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ \cos x & \text{si } x = y. \end{cases}$$
   a) Probar que f es continua en todo punto.
   b) Obtener las derivadas parciales de f en cada punto (x,y). Distinguir según que $x \neq y$ o $x = y$.

2. Sea la función g sobre $\mathbb{R}^2$ definida por
$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\cos x - \cos y}{x^2 - y^2} & \text{si } |x| \neq |y| \\ -\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } |x| = |y| \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = y = 0. \end{cases}$$
   Estudiar continuidad, existencia de derivadas parciales y direccionales de g en cada punto (a,b). Distinguir según que $|a| = |b|$ (y en particular $a = b = 0$) o $|a| \neq |b|$.

3. Estudiar continuidad y diferenciabilidad en el punto $(0,0)$ de la función
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3(x+y)}{(x+y)^2 + x^2y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0. \end{cases}$$

4. Estudiar continuidad y diferenciabilidad de las funciones
$$f_1(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{z^3}{(x-y)^2 + z^2}, & \text{si } z \neq 0 \\ 0, & \text{si } z = 0 \end{cases}; \quad f_2(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xz^3}{(x-y)^2 + z^2}, & \text{si } z \neq 0 \\ 0, & \text{si } z = 0, \end{cases}$$
   en los puntos de la forma $(c,c,0)$ ¿es especial el caso $c = 0$?

5. Encontrar los puntos sobre el paraboloide $z = 4x^2 + y^2$ donde el plano tangente es paralelo al plano $x + 2y + z = 6$. La misma cuestión con el plano $3x + 5y - 2z = 3$.

6. Sea f una función de 2-variables y continua en el punto $(0,0)$. Probar que entonces la función $g(x,y) = xf(x,y)$ es diferenciable en $(0,0)$.

7. Considerar la función
$$g(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0); \;\; g(0,0) = 0.$$
   a) Calcular las derivadas parciales de f en $(0,0)$ y probar que g no es diferenciable en $(0,0)$.
   b) Si $f(t) = (t,t)$, comprobar que $g \circ f$ es derivable en todo punto t, pero
$$(g \circ f)'(0) \neq \frac{\partial g}{\partial x}(0,0)f_1'(0) + \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)f_2'(0).$$
   c) $f_2(t) = (t, t^2)$, comprobar que también $g \circ f$ es derivable en todo punto t, pero ahora
$$(g \circ f)'(0) = \frac{\partial g}{\partial x}(0,0)f_1'(0) + \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)f_2'(0).$$

8. Considerar la función

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0); \; f(0,0) = 0.$$

a) Obtener las derivadas direccionales de f en $(0,0)$ y deducir que, puesto que la aplicación $(h,k) \to D_{(h,k)}f(0,0)$ no es lineal, f no es diferenciable en $(0,0)$.

b) Comprobar que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - D_{(h,k)}f(0,0)}{\|(h,k)\|} = 0.$$

c) Demostrar que $T_c(M) = \{(h,k,D_{(h,k)}f(0,0)) : (h,k) \in \mathbb{R}^2\}$, $(c = (0,0,0)$; y M la gráfica de $f)$.

9. Sean las funciones

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \neq x^2 \\ x & \text{si } y = x^2 \end{cases}; \quad g(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \neq x^2 \\ x \operatorname{sen} \frac{1}{y} & \text{si } y = x^2 \end{cases}$$

a) Probar que tanto f como g son continuas en $(0,0)$. Son“lipschitzianas en (0,0)” pero no lo son en ningún entorno de $(0,0)$. Sus derivadas direccionales en este punto son todas iguales a 0. Ni f ni g son diferenciables en $(0,0)$.

b) Comprobar que el espacio tangente $T_c(M)$ de f en $c = (0,0,0)$ contiene propiamente al plano $z = 0$, es decir además de los vectores de este plano existen otros vectores tangentes a la gráfica de f en c. En cambio, $T_c(M)$ para la función g es exactamente el plano $z = 0$.

10. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} y^4 - x^2, & \text{si } y \geq \sqrt{|x|} \\ x^2 - y^2, & \text{si } y < \sqrt{|x|} \end{cases}.$$

1. Estudiar la continuidad de f y calcula sus derivadas parciales.
2. Estudiar la diferenciabilidad de f.
3. Calcular, si existe, la derivada direccional de f según el vector $v = (2,1)$ en los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$.

11. Sea g una función escalar de 2-variables y diferenciable en todo punto. Se define $h(x,y,z) = g(xz, g(y,z))$ y se pide calcular las derivadas parciales de h en el punto $(0,0,1)$ supuesto que $g(0,1) = 0$; la matriz jacobiana de g en $(0,0)$ es $(1,2)$; y la matriz jacobiana de g en $(0,1)$ es $(-3,4)$.

12. Supongamos que g y φ son funciones escalares diferenciables en todo punto. Sean:

a) $h(x,y,z) = g(xy, \varphi(yz))$, con

$$\varphi(0) = 0\,; \quad \varphi'(0) = 1\,; \quad Dg(0,0) \equiv (2,3)$$

Calcular las derivadas parciales de h en $(0,1,0)$.

b) $h(x,y) = x \cdot g(x,y,y)$, con

$$g(1,0,0) = 1\,; \quad Dg(1,0,0) \equiv (1,2,-2).$$

Calcular las derivadas parciales de h en $(1,0)$.

c) $h(x,y,z) = g(xz, g(y,z))$, con

$$g(0,1) = 0\,; \quad Dg(0,0) \equiv (1,2)\,; \quad Dg(0,1) \equiv (-3,4).$$

Calcular las derivadas parciales de h en $(0,0,1)$.