Hoja 3. Análisis Matemático I. Curso 2013/14.

1. Dar ejemplos de alguna función f satisfaciendo:

   a) f "lipschitziana en un punto a" y que no sea lipschitziana en nigún entorno de a ni diferenciable en a.

   b) f lipschitziana en un entorno de un punto a pero no diferenciable en a.

   c) f diferenciable en a lipschitziana en algún entorno de a pero que no sea diferenciable en ningún entorno de a.

   d) f diferenciable en algún entorno de a pero no lipschitziana en ningún entorno de a.

   e) f lipschitziana y diferenciable en algún entorno de a pero no de clase C^1 en ningún entorno de a.

2. a) Probar que si f es de clase C^2 en un punto a entonces f es de clase C^1 en algún entorno de a, luego diferenciable y lipschitziana en algún entorno de a.

   b) Probar que la función $f(x,y) = \sqrt{x^4 + y^4}$ es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$ pero no es de clase C^2 en el punto $(0,0)$.

3. Sea $f : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Probar que no existe ningún $c \in [0, 2\pi]$ tal que $f(2\pi) - f(0) = f'(c)(2\pi - 0)$.

4. a) Probar que si existen las derivadas parciales de una función f en una bola reducida de centro a (i.e. en la bola menos el centro) y están acotadas entonces la función f es lipschitziana en toda la bola (es decir con su centro también).

   b) Considerar la aplicación $f(x,y) = \operatorname{sen}(x + \sqrt{x^2 + y^2})$. Probar que f es una aplicación lipschitziana en $\mathbb{R}^2$ que no es diferenciable en $(0,0)$.

5. Sabemos que si las derivadas parciales de una función son todas nulas en un abierto conexo U, entonces f es constante en U. Probar que si todas las derivadas parciales segundas son nulas, entonces f es un polinomio de grado menor o igual que 1. En general, si todas las derivadas parciales de orden r son nulas, entonces f es un polinomio de grado menor o igual que r.

6. Se define el *Laplaciano* de una función escalar f mediante la fórmula

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

   Probar que $\Delta f = 0 \;\Rightarrow\; \Delta\Delta((x_1^2 + \cdots + x_n^2)\, f) = 0$.

7. a) Probar que el producto de dos funciones de clase C^r en un punto a es también de clase C^r en a.

b) Probar que si f, g son de clase C^r en a entonces $P_r(f.g)(a)x = [P_r f(a)x \cdot P_r g(a)x]_{\leq r}$.

8. Obtener $P_3 h(1,0,1)(x,y,z)$ siendo $h(x,y,z) = z^2 e^{x^2 - yz}$.

9. Sea g una función escalar de dos variables y clase C^∞y supongamos que $P_3 g(0,1)(x,y) = 1 - 2x + xy + y^2$. Obtener $P_3 h(0)x$, donde $h(x) = xg(x, e^x)$.

10. Estudiar la existencia del siguiente límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x \operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2(x+y) + \operatorname{sen}^2(x-y)}.$$