Hoja 4. Análisis I - Curso 2013/14.

1. Sea g una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y clase C^1 y consideremos las funciones $f_1(x,y,z) = z + g(x^2 - y + z) - 1$; $f_2(x,y,z) = g(x) + yg(z) - 1$.

   a) Probar que f_1 y f_2 son funciones de clase C^1 en $\mathbb{R}^3$, es decir que las funciones $\frac{\partial f_i}{\partial x}, \frac{\partial f_i}{\partial y}, \frac{\partial f_i}{\partial z}$, $i = 1,2$ son continuas.

   b) Supongamos que $g(0) = 1$ y $g'(0) = 2$ y sea M el conjunto de los puntos de $\mathbb{R}^3$ que son solución del sistema $f_1(x,y,z) = 0$; $f_2(x,y,z) = 0$.

   i) Probar que este sistema permite despejar en algún entorno del punto $(0,0,0)$ a x, y como funciones de z ($x = h_1(z) \equiv x(z)$; $y = h_2(z) \equiv y(z)$).

   ii) Expresar de forma precisa el significado del apartado i).

   iii) Obtener $h_1'(0) \equiv x'(0)$ y $h_2'(0) \equiv y'(0)$ a partir de la fórmula general $Dh(a) = -D_2 f(a,b)^{-1} \circ D_1 f(a,b)$.

   iv) Obtener $h_1'(0) \equiv x'(0)$ y $h_2'(0) \equiv y'(0)$ aplicando la regla de la cadena en las identidades $f_1(x(z), y(z), z) = 0$; $f_2(x(z), y(z), z) = 0$ (observar que $x(0) = 0$; $y(0) = 0$).

2. Considerar las funciones

$$f_1(x,y) = (y-x)(x^2+y^2+xy); \quad f_2(x,y) = (y-x)(x^2+y^2+2y);$$
$$f_3(x,y) = (y-x^2)(x^2+y^2+2y),$$

y probar que todas ellas son de clase C^∞, pero sus derivadas parciales de primer orden en (0,0) son iguales a 0, por lo que no se satisfacen las condiciones para poder aplicar el teorema de las funciones implícitas en (0,0). Se trata de ver que las consecuencias derivadas de esto son variadas: Comprobar que al despejar y en la ecuación $f_1(x,y) = 0$, la única función que se obtiene es la $h(x) = x$. En cambio existen varias funciones definidas implícitamente por la ecuación $f_2(x,y) = 0$ i.e., tales que $f_2(x, h(x)) = 0$, por ejemplo

$$h_1(x) = x; \qquad h_2(x) = -1 + \sqrt{1-x^2};$$
$$h_3(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \le 0 \\ -1 + \sqrt{1-x^2} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Todas ellas están definidas en algún entorno de 0. h_1 y h_2 derivables en 0, aunque $h_1'(0) = 1 \neq 0 = h_2'(0)$, y h_3 no derivable en 0.

Por último la ecuación $f_3(x,y) = 0$ también proporciona implícitamente varias funciones h continuas en algún entorno de 0 y tales que $h(0) = 0$. Pero, ahora todas ellas son también derivables y con la misma derivada en 0.

3. *a*) Probar que la función $g(x,y,z,t) = \sqrt[3]{(x^2-y^2)^2 - z^2t^2}$ es diferenciable en $(0,0,0,0)$ pero no es de clase C^1 en $(0,0,0,0)$.

   b) Sea M el lugar geométrico de los puntos $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ que satisfacen el sistema

$$\sqrt[3]{(x^2-y^2)^2 - z^2t^2} + z + t - 2x = 0$$
$$z - t - 2y = 0.$$

   Si f es la función de funciones coordenadas $f_1(x,y,z,t) = \sqrt[3]{(x^2-y^2)^2 - z^2t^2} + z + t - 2x$ y $f_2(x,y,z,t) = z - t - 2y$. Probar f es diferenciable en $(0,0,0,0)$ pero no de clase C^1 en $(0,0,0,0)$ y

$$\det \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(z,t)}(0,0,0,0) \neq 0.$$

c) Comprobar que, a pesar de no poder aplicar el teorema de existencia de F.I., la función $h(x,y) = (z(x,y), t(x,y)) = (x+y, x-y)$ satisface la ecuación

$$f(x, y, z(x,y), t(x,y)) = 0$$

y comprobar que, de acuerdo al lema de derivación de funciones implícitas, $Dh(0,0) = -D_2 f(0,0,0,0)^{-1} \circ D_1 f(0,0,0,0)$.

4. Sea M el lugar geométrico de los puntos de $\mathbb{R}^2$ que satisfacen la ecuación $\operatorname{sen}(xy) = 1$ y llamemos $f(x,y) = -1 + \operatorname{sen}(xy)$. Probar que el rango de la matriz las derivadas parciales de f es 0 en todo punto de M, pero sin embargo M es una variedad diferenciable. Obtener la ecuación de la recta tangente a M en el punto $(-1, 3\pi/2)$.

5. a) Sea M el lugar geométrico de los puntos de $\mathbb{R}^3$ que satisfacen la ecuación $f_1(x,y,z) = 0$, donde f es la función de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ definida por $f_1(x,y,z) = x^2 - y + yz$. Probar que para todo punto (x,y,z) de M distinto del $(0,0,1)$ el rango de $Df_1(x,y,z)$ es igual a 1 y que, por lo tanto, $M^* = M \setminus \{(0,0,1)\}$ es una variedad diferenciable de dimensión 2.

   b) Si $c = (1,1,0)$, obtener una base del subespacio vectorial $T_c(M^*)$ y la ecuación del plano afín tangente a M^* en c.
   Probar que M^* es, en algún entorno del punto c, la gráfica de una función $z = z(x,y)$ de clase C^∞ y obtener $(\partial z/\partial x)(1,1)$ y $(\partial z/\partial y)(1,1)$.

6. a) Sea M el lugar geométrico de los puntos de $\mathbb{R}^4$ que satisfacen el sistema $f(x,y,z,t) = 0$, donde $f = (f_1, f_2)$ y f_1, f_2 las funciones de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}$ definida por $f_1(x,y,z,t) = x^2 - y + yz$; $f_2(x,y,z,t) = t - xzt - 1$. Probar que para todo punto (x,y,z,t) de M distinto del $(0,0,1,1)$ el rango de $Df(x,y,z,t)$ es igual a 2 y que, por lo tanto, $M^* = M \setminus \{(0,0,1,1)\}$ es una variedad diferenciable de dimensión 2.

   b) Si $c = (1,1,0,1)$, obtener una base del subespacio vectorial $T_c(M^*)$.
   Probar que M^* es, en algún entorno del punto c, la gráfica de una función $h(x,y) = (z(x,y), t(x,y))$ de clase C^∞ y obtener $Dh(1,1)$.

7. a) Sea M el lugar geométrico de los puntos de $\mathbb{R}^5$ que satisfacen el sistema $f(x,y,z,t,u) = 0$, donde $f = (f_1, f_2, f_3)$ y f_1, f_2, f_3 las funciones de $\mathbb{R}^5$ en $\mathbb{R}$ definida por $f_1(x,y,z,t,u) = x^2 - y + yz$; $f_2(x,y,z,t,u) = t - xzt - 1$; $f_3(x,y,z,t,u) = x + y + z + t + u - 3$. Probar que para todo punto (x,y,z,t,u) de M distinto del $(0,0,1,1,1)$ el rango de $Df(x,y,z,t,u)$ es igual a 3 y que, por lo tanto, $M^* = M \setminus \{(0,0,1,1,1)\}$ es una variedad diferenciable de dimensión 2.

   b) Si $c = (1,1,0,1,0)$, obtener una base del subespacio vectorial $T_c(M^*)$.
   Probar que M^* es, en algún entorno del punto c, la gráfica de una función $h(t,u) = (x(t,u), y(t,u), z(t,u))$ de clase C^∞ y obtener $Dh(1,0)$.

8. Sea $t \xrightarrow{\varphi} x$ una trasformación de $\mathbb{R}$ dada por por la ecuación $x = \varphi(t) = 2t + \cos t$.

   a) Probar que φ es una aplicación estrictamente creciente, por lo tanto inyectiva.

   b) Probar que φ es también epiyectiva.

   c) Probar que la inversa $x \xrightarrow{\varphi^{-1}} t$ es diferenciable por lo que

   $$(\varphi^{-1})'(x) \equiv t'(x) = \frac{1}{x'(t)} \equiv \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{1}{2 - \operatorname{sen} t}.$$

   De acuerdo con esto obtener $t'(\pi)$.

9. Sea $(-\pi/2, \pi/2) \xrightarrow{\operatorname{tg}} \mathbb{R}$. Deducir la fórmula $(\operatorname{arc\,tg})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

10. Considerar la transformación $(x,y) \xrightarrow{g} (u,v)$, definida mediante las ecuaciones

$$u = \sqrt[3]{x^3 + y^3};\ v = x - y.$$

Probar que g es una biyección de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y que el determinante de la matriz de las derivadas parciales de g en $(0,0)$ es distinta de 0. Sin embargo, la matriz de las derivadas parciales de g^{-1} en $(0,0) = g(0,0)$ no es la inversa de la de las derivadas parciales de g en $(0,0)$. El motivo de esto es que g no es diferenciable en $(0,0)$.