Hoja 1. Análisis Matemático I - Curso 2014/15.

1. *a*) Justificar que la sucesión $\{\cos k\pi\}_{k=1}^{\infty}$ no converge a 1.
   b) Justificar que la función $f(t) = \operatorname{sen} 1/t,\ t \neq 0;\ f(0) = 0$ no es continua en 0.
   c) Justificar que la aplicación $f(t) = t^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.
   d) Justificar que la aplicación $f(t) = \sqrt{t}$ no es lipschitziana en $[0,1]$ pero sí que es lipschitziana en $[1,\infty)$.

2. *a*) Demostrar que la aplicación $\|(x,y)\| = |y| + \sqrt{x^2+y^2}$ satisface las tres condiciones de norma. Dibujar la bola cerrada unidad (i.e la bola centrada en (0,0) y de radio 1). Comprobar que esta norma es equivalente a las normas $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$; $\|(x,y)\|_\infty = \text{máx}\{|x|,|y|\}$ y $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$.
   b) Lo mismo que en el apartado anterior pero con la aplicación $\|(x,y)\| = |x - y| + |2x - y|$.
   c) Sea $\|(x,y)\| = \sqrt{(x-y)^2 + x^2 + y^2}$. Tened en cuenta que $\|(x,y)\| = \|(x - y, x, y)\|_2$ para probar que de esta forma se define una norma sobre $\mathbb{R}^2$.
   d) Estudiar si $\|(x,y,z)\| = \text{máx}\{|x|, |y| + |x - z|\}$ es una norma en $\mathbb{R}^3$.
   e) Probar que $\|(x,y,z)\| = |x| + \sqrt{y^2+z^2}$ es una norma sobre $\mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$.
   f) Probar que si $\|\ \|$ es una norma sobre $\mathbb{R}^3$ entonces también es norma la aplicación $\|(x,y,z)\|^* = \|(x-y,y,z)\|$. Deducir que $\|(x,y,z)\|^* = |x-y| + \sqrt{y^2+z^2}$ es una norma.
   g) Probar que las igualdades $\|(x,y)\| = (\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^2$ y $\|(x,y)\| = |x| + \sqrt{|x^2-y^2|}$ no definen normas en $\mathbb{R}^2$.

3. Probar que $\mathbb{R}^n$ es un espacio normado completo (un espacio de Banach) respecto a cualquier norma i.e., cada sucesión de Cauchy en $(\mathbb{R}^n, \|\ \|)$ es convergente cualquiera que sea la norma $\|\ \|$.

4. Por definición, un conjunto B de un espacio normado $(E, \|\ \|)$ se dice acotado si existe alguna constante $M \geq 0$ tal que $\|x\| \leq M$ para todo $x \in B$. Probar que que si las normas $\|\ \|$ y $\|\ \|^*$ son equivalentes entonces un subconjunto B de E es $\|\ \|$-acotado si y sólo si es $\|\ \|^*$-acotado.

5. Probar que las bolas en un espacio normado son conjuntos acotados. Probar que $\overline{B(a,r)} = B[a,r]$ y que, en consecuencia las bolas cerradas y las esferas son conjuntos cerrados.

6. Probar que cada conjunto finito de un espacio normado es cerrado.

7. En un espacio normado E, probar que si $\emptyset \neq A \neq E$ entonces $\partial A \neq \emptyset$. Constatar que esto es lo mismo que decir que en un espacio normado E los únicos conjuntos que son a la vez abiertos y cerrados son $\emptyset$ y E (i.e. todo espacio normado es conexo).

8. Sea E un espacio normado. Si A, B son dos subconjuntos de E se define $A + B = \{x + y : x \in A;\ y \in B\}$. Probar
   i) A, B convexos entonces $A + B$ convexo.
   ii) A, B abiertos entonces $A + B$ abierto.
   iii) A, B cerrados no implica que $A + B$ sea cerrado.
   iv) A convexo entonces $\bar{A}$ convexo.
   v) A convexo entonces $\overset{\circ}{A}$ convexo (ó $\emptyset$).

9. Probar que en la definición de límite de una función en un punto se pueden cambiar las normas de los espacios por otras equivalentes. En particular si éstos son de dimensión finita no importa la norma que se utilice.
10. Probar que si f, g son funciones escalares (i.e que toman sus valores en $\mathbb{R}$) definidas sobre un conjunto A del espacio normado E y $a \in A'$, entonces $\lim_{x\to a}(f \cdot g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$.
11. Probar que en todo espacio normado la suma y la multiplicación por escalares son aplicaciones continuas.
12. Probar que si $T : \mathbb{R}^n \to F$ es una aplicación lineal entonces T es lipschitziana.
13. Sea $(E, \| \,\|)$ un espacio normado. Estudiar si las aplicaciones T_1 y T_2 definidas para $x \in E$ por $T_1(x) = x\|x\|, T_2(x) = \frac{x}{1+\|x\|}$ son continuas, uniformemente continuas o lipschitzianas.
14. Sea A un subconjunto del espacio normado E. Probar que la aplicación

    $$x \to d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$$

    es lipschitziana.
15. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $B = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0\}$. ¿Es cierto que $\overset{\circ}{B} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$?
16. Probar que los conjuntos $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\},\ A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 1\},\ A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - xy \leq 1\}$ y $A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 - xy = 1\}$ son conjuntos cerrados de $\mathbb{R}^2$ ¿Cúales de ellos son además acotados?.