

Hoja 2. Análisis Matemático I. Curso 2014/15.

1. Comprobar que

a) Las funciones

$$f(x, y) = \frac{x^5}{x^4 + y^2}, \quad f(0, 0) = 0; \quad g(t) = t \operatorname{sen} \frac{1}{t}, \quad g(0) = 0.$$

son lipschitzianas en los punto $(0,0)$ y 0 respectivamente. Pero no son diferenciables en ninguno de estos puntos ni lipschitzianas en ningún entorno de los mismos.

b) Las funciones

$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}, \quad f(0, 0) = 0; \quad g(t) = |t|$$

son lipschitzianas en algún entorno de los punto $(0,0)$ y 0 respectivamente. Pero no son diferenciables en estos puntos.

c) La función

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 y^2 z}{y^2 + z^2}; \quad f(x, 0, 0) = 0$$

es de clase C^1 en $(0, 0, 0)$ pero no diferenciable en ningún entorno de $(0, 0, 0)$. Probar que las derivadas parciales de esta función son incluso diferenciables en $(0, 0, 0)$.

d) La función

$$f(t) = t^2 \operatorname{sen} \frac{1}{t^2}; \quad f(0) = 0$$

es diferenciable en algún entorno de 0 pero no lipschitziana en ningún entorno de 0 . Dar un ejemplo de f lipschitziana y diferenciable en algún entorno de a pero no de clase C^1 en a .

2. a) Probar que si f es de clase C^2 en un punto a entonces f es de clase C^1 en algún entorno de a , luego diferenciable y lipschitziana en algún entorno de a .

b) Probar que la función $f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}$ es de clase C^1 en \mathbb{R}^2 pero no es de clase C^2 en el punto $(0, 0)$.

3. Sea $f : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Probar que no existe ningún $c \in [0, 2\pi]$ tal que $f(2\pi) - f(0) = f'(c)(2\pi - 0)$. ¿Pasa lo mismo en $[0, 1]$ con la función $t \rightarrow (t, t^2)$ ¿y con la función $t \rightarrow (t^2, t^3)$?

4. a) Probar que si existen las derivadas parciales de una función f en una bola reducida de centro a (i.e. en la bola menos el centro) y están acotadas entonces la función f tiene límite en a y que tomando este límite como valor de la función en a , entonces f es lipschitziana en toda la bola (es decir con su centro también).

b) Considerar la aplicación $f(x, y) = \text{sen}(x + \sqrt{x^2 + y^2})$. Probar que f es una aplicación lipschitziana en \mathbb{R}^2 que no es diferenciable en $(0, 0)$.

5. Sabemos que si las derivadas parciales de una función son todas nulas en un abierto conexo U , entonces f es constante en U . Probar que si todas las derivadas parciales segundas son nulas, entonces f es un polinomio de grado menor o igual que 1. En general, si todas las derivadas parciales de orden r son nulas, entonces f es un polinomio de grado menor o igual que r .

6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = (x^2 - y, x^2 + y^2)$ y $g = f \circ f$.

a) Demostrar que existe $r > 0$ tal que para todo $(x, y) \in B[(0, 0), r]$ las parciales de g en (x, y) están acotadas por $1/2$.

b) Demostrar que la función g admite un único punto fijo en $B[(0, 0), r]$.

7. Sea

$$f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0); \quad f(0, 0) = 0.$$

Comprobar que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

8. Se define el *Laplaciano* de una función escalar f mediante la fórmula

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

Probar que $\Delta f = 0 \Rightarrow \Delta \Delta((x_1^2 + \cdots + x_n^2) f) = 0$.

9. Probar que la composición de funciones de clase C^r en abiertos es también de clase C^r .

10. Probar que una función f de 2-variables satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

en un abierto conexo si y sólo si $f(x, y) = g(x) + h(y)$ con g y h derivables.

11. Obtener $P_3 h(1, 0, 1)(x, y, z)$ siendo $h(x, y, z) = z^2 e^{x^2 - yz}$.

12. Obtener $P_r h(0, 0)(x, y)$ siendo $h(x, y) = \frac{\cos(xy)}{x + e^y}$.

13. Sea g una función escalar de tres variables y clase C^∞ y supongamos que $P_3 g(0, 1, 0)(x, y, z) = x - 2y^2 + xz$. Obtener $P_3 h(0)x$, donde $h(x) = xg(x^2, e^x, x)$ y $P_3 \varphi(1, 1)(x, y)$, donde $\varphi(x, y) = g(x - y^2, x, x - y)$.

14. Considerar la función

$$f(x, y) = \frac{x e^y - y e^x - x + y}{e^x - x \cos y + \text{sen}^2 y - 1} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \quad f(0, 0) = 0.$$

- a) Comprobar que f está bien definida y que es continua en $(0, 0)$.
- b) Estudiar si f es diferenciable en $(0, 0)$.

15. Estudiar la existencia del siguiente límite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2(x+y) + \operatorname{sen}^2(x-y)}.$$

16. En cada uno de los ejemplos estudiar la existencia del límite en $(0,0)$.

$$1. h(x, y) = \frac{x^5 + y^3x - x^2y^2 + y^4x}{x^4 + y^4 - x^2y^2 + y^6} \quad 2. h(x, y) = \frac{x^5 + y^3x - x^2y^2 + y^4x}{x^4 + y^4 - 2x^2y^2 + y^6}$$