

Hoja 1. Análisis Matemático I - Curso 2015/16.

1. Estudiar si son normas las aplicaciones siguientes:
 - a) $\|(x, y, z)\| = |x - y| + |y + 2z| + |x - y + z|$
 - b) $\|(x, y, z)\| = |x - y| + |y + 2z| + |x + y + 4z|$
 - c) $\|(x, y, z)\| = |x - y| + \sqrt{(y + 2z)^2 + (x - y + z)^2}$
 - d) $\|(x, y, z)\| = |x| + \sqrt{y^2 + z^2}$
 - e) $\|(x, y, z)\| = |x| + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
 - f) $\|(x, y, z, t)\| = |x| + |t| + \sqrt{y^2 + z^2}$
 - g) $\|(x, y, z, t)\| = \max(|x| + |t|, |y| + |z|)$
 - h) $\|(x, y, z, t)\| = \sqrt{\max(|x|, |t|)^2 + \max(|y|, |z|)^2}$
2. Probar que cada bola en un espacio normado es un conjunto convexo que tiene infinitos puntos.
3. Probar que la aplicación $\|(x, y)\| = (\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^2$ satisface las dos primeras condiciones de norma, pero no la tercera, de las tres formas siguientes:
 - a) Directamente, comprobando por ejemplo que $\|(1, 0) + (0, 1)\| > \|(1, 0)\| + \|(0, 1)\|$.
 - b) Viendo que el segmento de extremos $(0, 1)$, $(1, 0)$ no está contenido en la bola cerrada de centro el origen y radio 1 (luego la bola cerrada unidad no es un conjunto convexo).
 - c) Dibujando la bola cerrada unidad y viendo (con los ojos) que, efectivamente, no es convexa.
4. Probar que las igualdades $\|(x, y)\| = \max(|x - y|, |x + y|)$ y $\|(x, y)\|^* = |x| + \sqrt{x^2 + y^2}$ definen dos normas en \mathbb{R}^2 . Dibujar las esferas de centro $(0, 0)$ y radio 1.
 1. Comprobar que son equivalentes, i.e. encontrar dos constantes α, β tales que $\|\cdot\| \leq \alpha \|\cdot\|^*$ y $\|\cdot\|^* \leq \beta \|\cdot\|$.
5. Comprobar (encontrando las constantes correspondientes para compararlas) que en \mathbb{R}^2 la norma $\|\cdot\|_p$ es equivalente a la norma $\|\cdot\|_\infty$ y también a la norma $\|\cdot\|_q$, cualquiera que sea $q \geq 1$.
6. Probar que para cada subconjunto A de un espacio normado, $\overset{\circ}{A}$ es el mayor conjunto abierto contenido en A .
7. Probar que $\overline{B(a, r)} = B[a, r]$ y que, en consecuencia las bolas cerradas y las esferas son conjuntos cerrados.
8.
 - a) Justificar que la sucesión $\{\cos k\pi\}_{k=1}^\infty$ no converge a 1 y la sucesión $\{\frac{k}{k - \cos k\pi}\}_{k=1}^\infty$ sí.
 - b) Justificar que la función $f(t) = \text{sen } 1/t$, $t \neq 0$; $f(0) = 0$ no es continua en 0 y que, en cambio, la función

$$g(x, y) = \begin{cases} x \text{ sen } \frac{1}{xy} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$
 sí que es continua en $(0, 0)$ ¿y en los puntos $(1, 0)$ y $(0, 1)$?
 - c) Justificar que la aplicación $f(t) = t^2$ no es uniformemente continua en \mathbb{R} ¿y la función $g(t) = \sqrt{|t|}$? ¿y la función $h(x, y) = xy$?
9. Sean E y F espacios normados y $f : A \subset E \rightarrow F$.

- a) Probar que f es continua en $a \in A$ si y sólo si para cada sucesión $\{a_p\}$ de puntos de A que converge a a se tiene que la sucesión de sus imágenes $\{f(a_p)\}$ converge a $f(a)$.
- b) Probar que f es uniformemente continua si y sólo si la imagen por f de cada sucesión de Cauchy de A es de Cauchy en F .
- c) Probar que si F es de Banach y f es uniformemente continua, entonces puede extenderse continuamente a \overline{A} .
10. Probar que \mathbb{R}^n es un espacio normado completo (un espacio de Banach) respecto a cualquier norma i.e., cada sucesión de Cauchy en $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ es convergente cualquiera que sea la norma $\|\cdot\|$.
11. Probar que en todo espacio normado la suma y la multiplicación por escalares son aplicaciones continuas.
12. Sea $T : E \rightarrow F$ lineal. Probar que si E es de dimensión finita entonces T es automáticamente continua. Si E es de dimensión infinita pueden ponerse ejemplos de aplicaciones lineales no continuas (?). En todo caso, probar que si T es lineal y continua entonces también es lipschitziana.
13. Probar que la función

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0; \end{cases}$$

es continua en todo punto y deducir de ello que igual sucede con la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} xy}{xy} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0; \end{cases}$$

14. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y sea $B = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$. ¿Es cierto que $\overline{B} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0\}$?
15. Probar que los conjuntos $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$, $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \operatorname{sen}(xy) = 1\}$, $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - xy \leq 1\}$ y $A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 - xy = 1\}$ son conjuntos cerrados de \mathbb{R}^2 ¿Cuáles son acotados?