



DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS
CURSO 2003-2004

Examen de Probabilidad y Procesos Estocásticos.
LICENCIATURA EN CIENCIAS Y TÉCNICAS ESTADÍSTICAS
30 de Junio de 2004

Teoría:

1. Ley débil de los grandes números (da el resultado más completo que conozcas)
2. Clasificación de las cadenas de Markov en tiempo discreto.
3. Define cadena de Markov en tiempo continuo y la Q -matriz asociada a la cadena.

Problemas:

1. Consideremos el espacio de probabilidad $([0, 1], \mathcal{B}[0, 1], P)$, siendo P la distribución uniforme en $[0, 1]$. Definimos $X_n = n I_{(0, 1/n)}$, para $n \geq 1$.
 - (a) Estudiar las trayectorias del proceso $\{X_n, n \geq 1\}$.
 - (b) Estudiar la convergencia c.s., en L^1 y en L^2 del proceso.
2. Un jubilado juega a la lotería del siguiente modo. Si en el sorteo pasado no le tocó nada, compra un sólo décimo de su número favorito. Si le tocó el reintegro (última cifra), compra además de su número, otro décimo con una terminación distinta. Si le tocaron las dos últimas cifras, compra 3 décimos distintos. Está esperando a que le toquen al menos las tres últimas cifras, en cuyo caso dejará de jugar a la lotería, y se irá de viaje a la playa.
 - (a) Modelizar la cadena de Markov asociada a lo que hará el jubilado en el próximo sorteo de lotería. Calcular su matriz de transición.
 - (b) Si en el último sorteo le tocó el reintegro, ¿cuál es la probabilidad de que deje de jugar en 2 sorteos más?
3. En una oficina trabajan 5 empleados. A cada uno de ellos le puede surgir algo que lo aparte del trabajo durante un tiempo (un café, ir al banco...), pero sólo pueden ausentarse si al menos quedan 2 compañeros trabajando. Supongamos que el tiempo que cada empleado está sin trabajar por esos motivos se distribuye exponencialmente con media 20 minutos. Además, a cada empleado le surgen esos asuntos según un proceso de Poisson de tasa 0.5 cada hora.
 - (a) Describir la Q -matriz asociada al número de personas trabajando a lo largo del tiempo.
 - (b) ¿Cuál es, a la larga, la proporción de tiempo que trabajan los 5 empleados?