Probabilidad y Procesos Estocásticos
Licenciatura en Ciencias y Técnicas Estadísticas

Hoja 1: Variables Aleatorias

1. Sea la función
$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta^2 x \exp\{-\theta x\}, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}, \text{ con } \theta > 0.$$

   a) ¿Define una función de densidad?

   b) Encontrar la función de distribución asociada a $f_\theta(x)$.

   c) Si X es una v.a. con función de densidad $f_\theta(x)$, encontrar el valor de $P[X \geq 1]$.

2. Sea X una v.a. con función de densidad
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ 1/2, & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{1}{2x^2}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
   Encontrar la función de densidad de la v.a. $1/X$.

3. Sea X una v.a. positiva de tipo continuo con función de densidad $f(x)$.

   a) Encontrar la función de densidad de la v.a. $Y = \dfrac{X}{1+X}$.

   b) Si X tiene función de densidad
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$
   ¿cuál es la función de densidad de Y?

4. Un punto es elegido aleatoriamente sobre la circunferencia de un círculo de radio r con centro en el origen. Es decir, el ángulo polar θ del punto elegido tiene como función de densidad:
$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi}, \text{ si } \theta \in (-\pi, \pi)$$
   Encontrar la función de densidad de la v.a. X que representa la abscisa del punto elegido.

   Indicación: El paso de coordenadas polares (r, θ) *a coordenadas cartesianas* (x, y) *se realiza mediante la transformación* $x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$.

5. Sea X una v.a. con función de distribución

$$F_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -\alpha \\ \dfrac{\alpha x + \alpha^2}{2}, & \text{si } -\alpha \leq x < \alpha \\ 1, & \text{si } x \geq \alpha \end{cases}$$

   a) ¿Para qué valores de α es $F_\alpha(x)$ una función de distribución?

   b) ¿Para qué valores X es continua y para qué valores es discreta?

   c) Hallar la distribución de $Y = X^2 + 1$.

   d) Determinar la función de densidad de X para los valores de α que hagan a X continua.

6. Se consideran los polígonos convexos cuyo número de lados es una v.a. X con función de probabilidad:

$$P[X = n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}, \quad n \geq 3$$

   Calcular el número medio de diagonales.

7. Sea X una v.a. discreta que toma los valores $k = 1, 2, \ldots, n$ con probabilidad :

$$P[X = k] = c\frac{k-1}{n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

   a) Determinar c para que $\{P[X = k]\}_{k=1}^n$ sea una función de probabilidad.

   b) Calcular $E[X]$.

8. Supongamos una reunión con n personas que al salir cogen sus sombreros al azar. Sea $X_i = 1$ si la i-ésima persona coge su propio sombrero y $X_i = 0$ en otro caso. Sea $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Luego, S_n es el número de personas que han cogido su propio sombrero. Calcular a) $E(X_i^2)$, b) $E(X_i \cdot X_j),\ i \neq j$, c) $E(S_n^2)$ y d) $V(S_n)$.

9. Sea X una v.a. con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1/2, & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ \dfrac{3-x}{2}, & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

   Demostrar que tiene momentos de todos los órdenes. Calcular su media y su varianza.

10. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + xy/3, & \text{si } 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

   a) Encontrar los momentos ordinarios y centrales de orden 1 y 2.

   b) Escribir la matriz de covarianzas

   c) Calcular el coeficiente de correlación

11. Sea (X, Y) un v.a. con función de densidad conjunta:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1 + xy(x^2 - y^2)}{4}, & \text{si } |x| \leq 1, \quad |y| \leq 1 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

   a) ¿Son X e Y independientes?

   b) Calcular la matriz de covarianzas

c) Calcular el coeficiente de correlación

12. Dado el v.a. (X, Y) con función de densidad

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/2e^{-x}, & \text{si } -x < y < x, \quad x > 0 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Hallar la matriz de covarianzas.

b) Ver si X e Y son independientes y/o incorreladas.

c) Si $X_1 = -X + Y$ y $X_2 = X - Y$, calcular su matriz de covarianzas

d) Ver si X_1 y X_2 son independientes y/o incorreladas.

13. Sean X_1, X_2 vv.aa. iid. de función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Encontrar la función de densidad de X_1+X_2, X_1-X_2, X_1/X_2, $\text{mín}\{X_1, X_2\}$, $\text{máx}\{X_1, X_2\}$, $\text{mín}\{X_1, X_2\}/\text{máx}\{X_1, X_2\}$ y $\dfrac{X_1}{X_1 + X_2}$

b) Sea $U = X_1 + X_2$ y $V = X_1 - X_2$. Encontrar la función de densidad condicional de V dado $U = u$, para algún $u > 0$ fijo.

c) ¿Son U y $Z = \dfrac{X_1}{X_1 + X_2}$ independientes?

14. Sean X e Y vv.aa. iid. con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

Encontrar la función de densidad de $X+Y$, XY, X/Y, $\text{mín}\{X, Y\}$, $\text{máx}\{X, Y\}$ y $\text{mín}\{X, Y\}/\text{máx}\{X, Y\}$.

15. Obtener la probabilidad de que la ecuación $a^2 - 2aX + Y = 0$ tenga raíces complejas, sabiendo que X e Y son vv.aa. iid. con función de densidad

$$f(t) = \begin{cases} 1/h, & \text{si } t \in (0, h) \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

16. Demuestra que para una variable aleatoria continua con valores no negativos se cumple

$$E(X) = \int_0^\infty (1 - F(x))dx$$

donde $F(x)$ es la función de distribución de X.

17. Un juego se desarrolla como sigue: Se elige aleatoriamente un número según una distribución uniforme en $[0, 1]$. Posteriormente, se extrae una sucesión $Y_1, Y_2, ...$ de números aleatorios independientes según una distribución uniforme en $[0, 1]$. La sucesión para cuando $Y_i > X$. Entonces debes pagar $(i - 1)$ euros. ¿Cuál debe ser el premio para que el juego sea equilibrado?