XXVII. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen.

[Programm zum Eintritt in die philosophische Fakultät und den Senat der k. Friedrich-Alexanders-Universität zu Erlangen. Erlangen, A. Deichert. 1872.[1]).]

Unter den Leistungen der letzten fünfzig Jahre auf dem Gebiete der Geometrie nimmt die Ausbildung der *projektivischen Geometrie* die erste Stelle ein. Wenn es anfänglich schien, als sollten die sogenannten metrischen Beziehungen ihrer Behandlung nicht zugänglich sein, da sie beim Projizieren nicht ungeändert bleiben, so hat man in neuerer Zeit gelernt, auch sie vom projektivischen Standpunkte aufzufassen, so daß nun die projektivische Methode die gesamte Geometrie umspannt. Die metrischen Eigenschaften erscheinen in ihr nur nicht mehr als Eigenschaften der räumlichen Dinge an sich, sondern als Beziehungen derselben zu einem Fundamentalgebilde, dem unendlich fernen Kugelkreise[2]).

Vergleicht man mit der so allmählich gewonnenen Auffassungsweise der räumlichen Dinge die Vorstellungen der gewöhnlichen (elementaren) Geometrie, so entsteht die Frage nach einem allgemeinen Prinzipe, nach welchem die beiden Methoden sich ausbilden konnten. Diese Frage erscheint um so wichtiger, als sich neben die elementare und die projektivische Geometrie, ob auch minder entwickelt, eine Reihe anderer Methoden stellt, denen man dasselbe Recht selbständiger Existenz zugestehen muß. Dahin gehören die Geometrie der reziproken Radien, die Geometrie der rationalen Umformungen usw., wie sie in der Folge noch erwähnt und dargestellt werden sollen.

Wenn wir es im nachstehenden unternehmen, ein solches Prinzip aufzustellen, so entwickeln wir wohl keinen eigentlich neuen Gedanken, sondern umgrenzen nur klar und deutlich, was mehr oder minder bestimmt von manchem gedacht worden ist. Aber es schien um so berechtigter, derartige

[1]) [Das Erlanger Programm wurde von mir im Jahre 1893 im Bd. 43 der Math. Annalen abgedruckt und damals von mir mit einer Reihe von Bemerkungen versehen, die ich im folgenden der Mehrzahl nach ungeändert übernehme. Sie sind gleich den anderen, nun erst hinzugefügten in eckige Klammern eingeschlossen, denen aber zur Unterscheidung immer die Jahreszahl 1893 hinzugefügt ist. K.]

[2]) Vgl. Note I des Anhangs.

zusammenfassende Betrachtungen zu publizieren, als die Geometrie, die doch ihrem Stoffe nach einheitlich ist, bei der raschen Entwicklung, die sie in der letzten Zeit genommen hat, nur zu sehr in eine Reihe von beinahe getrennten Disziplinen zerfallen ist[3]), die sich ziemlich unabhängig voneinander weiter bilden. Es lag dabei aber auch noch die besondere Absicht vor, Methoden und Gesichtspunkte darzulegen, welche von Lie und mir in neueren Arbeiten entwickelt wurden. Es haben unsere beiderseitigen Arbeiten, auf wie verschiedenartige Gegenstände sie sich auch bezogen, übereinstimmend auf die hier dargelegte allgemeine Auffassungsweise hingedrängt, so daß es eine Art von Notwendigkeit war, auch einmal diese zu erörtern und von ihr aus die betreffenden Arbeiten nach Inhalt und Tendenz zu charakterisieren.

War bisher nur von geometrischen Forschungen die Rede, so sollen darunter mit verstanden sein die Untersuchungen über beliebig ausgedehnte Mannigfaltigkeiten, die sich, unter Abstreifung des für die rein mathematische Betrachtung unwesentlichen räumlichen Bildes[4]), aus der Geometrie entwickelt haben[5]). Es gibt bei der Untersuchung von Mannigfaltigkeiten ebensolche verschiedene Typen wie in der Geometrie, und es gilt, wie bei der Geometrie, das Gemeinsame und das Unterscheidende unabhängig voneinander unternommener Forschungen hervorzuheben. Abstrakt genommen wäre es im folgenden nur nötig, schlechthin von mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten zu reden; aber durch Anknüpfung an die geläufigeren räumlichen Vorstellungen wird die Auseinandersetzung einfacher und verständlicher. Indem wir von der Betrachtung der geometrischen Dinge ausgehen und an ihnen als einem Beispiele die allgemeinen Gedanken entwickeln, verfolgen wir den Gang, den die Wissenschaft in ihrer Ausbildung genommen hat, und den bei der Darstellung zugrunde zu legen gewöhnlich das Vorteilhafteste ist.

Eine vorläufige Exposition des im folgenden besprochenen Inhaltes ist hier wohl nicht möglich, da sich derselbe kaum in eine knappere Form[6]) fügen will; die Überschriften der Paragraphen werden den allgemeinen Fortschritt des Gedankens angeben. Ich habe zum Schlusse eine Reihe von Noten zugefügt, in welchen ich entweder, wo es im Interesse der allgemeinen Auseinandersetzung des Textes nützlich schien, besondere

[3]) Vgl. Note II.
[4]) Vgl. Note III.
[5]) Vgl. Note IV.
[6]) Diese knappe Form ist ein Mangel der im folgenden gegebenen Darstellung, der das Verständnis, wie ich fürchte, wesentlich erschweren wird. Aber dem hätte wohl nur durch eine sehr viel weitere Auseinandersetzung abgeholfen werden können, in der die Einzeltheorien, die hier nur berührt werden, ausführlich entwickelt worden wären.

Punkte weiterentwickelt habe, oder in denen ich bemüht war, den abstrakt mathematischen Standpunkt, der für die Betrachtungen des Textes maßgebend ist, gegen verwandte abzugrenzen.

§ 1.

Gruppen von räumlichen Transformationen. Hauptgruppe. Aufstellung eines allgemeinen Problems.

Der wesentlichste Begriff, der bei den folgenden Auseinandersetzungen notwendig ist, ist der einer *Gruppe* von räumlichen Änderungen.

Beliebig viele Transformationen eines Raumes[7]) ergeben zusammengesetzt immer wieder eine Transformation. Hat nun eine gegebene Reihe von Transformationen die Eigenschaft, daß jede Änderung, die aus den ihr angehörigen durch Zusammensetzung hervorgeht, ihr selbst wieder angehört, so soll die Reihe eine *Transformationsgruppe*[8]) genannt werden.

Ein Beispiel für eine Transformationsgruppe bildet die Gesamtheit der Bewegungen (jede Bewegung als eine auf den ganzen Raum ausgeführte Operation betrachtet). Eine in ihr enthaltene Gruppe bilden etwa die Rotationen um einen Punkt[9]). Eine Gruppe, welche umgekehrt die Gruppe der Bewegungen umfaßt, wird durch die Gesamtheit der Kollineationen vorgestellt. Die Gesamtheit der dualistischen Umformungen bildet dagegen keine Gruppe — denn zwei dualistische Umformungen ergeben zusammen wieder eine Kollineation —, wohl aber wird wieder eine Gruppe erzeugt, wenn man die Gesamtheit der dualistischen mit der Gesamtheit der kollinearen zusammenfügt[10]).

[7]) Wir denken von den Transformationen immer die Gesamtheit der räumlichen Gebilde gleichzeitig betroffen und reden deshalb schlechthin von Transformationen des Raumes. Die Transformationen können, wie z. B. die dualistischen, statt der Punkte andere Elemente einführen; es wird dies im Texte nicht unterschieden.

[8]) Begriffsbildung wie Bezeichnung sind herübergenommen von der *Substitutionstheorie*, in der nur an Stelle der Transformationen eines kontinuierlichen Gebietes die Vertauschungen einer endlichen Zahl diskreter Größen auftreten. [Diese Definition bedarf noch der Ergänzung. Bei den Gruppen des Textes wird nämlich stillschweigend vorausgesetzt, daß dieselben neben jeder Operation, die sie enthalten mögen, immer auch deren inverse enthalten; dies ist aber, wie wohl zuerst Lie hervorhob, bei unendlicher Zahl der Operationen keineswegs eine Folge des Gruppenbegriffs als solchen; unsere Voraussetzung sollte also der im Texte gegebenen Definition dieses Begriffs ausdrücklich zugefügt werden. 1893.]

[9]) Camille Jordan hat alle Gruppen aufgestellt, die überhaupt in der Gruppe der Bewegungen enthalten sind: Sur les groupes de mouvements. Annali di Matematica. Bd. 2 (1869).

[10]) Die Transformationen einer Gruppe brauchen übrigens durchaus nicht, wie das bei den im Texte zu nennenden Gruppen allerdings immer der Fall sein wird, in stetiger Aufeinanderfolge vorhanden zu sein. Eine Gruppe bildet z. B. auch die endliche Reihe von Bewegungen, die einen regelmäßigen Körper mit sich selbst zur Deckung bringen, oder die unendliche, aber diskrete Reihe, welche eine Sinuslinie sich selber superponiert.

Es gibt nun räumliche Transformationen, welche die geometrischen Eigenschaften räumlicher Gebilde überhaupt ungeändert lassen. Geometrische Eigenschaften sind nämlich ihrem Begriffe nach unabhängig von der Lage, die das zu untersuchende Gebilde im Raume einnimmt, von seiner absoluten Größe, endlich auch von dem Sinne[11]), in welchem seine Teile geordnet sind. Die Eigenschaften eines räumlichen Gebildes bleiben also ungeändert durch alle Bewegungen des Raumes, durch seine Ähnlichkeitstransformationen, durch den Prozeß der Spiegelung, sowie durch alle Transformationen, die sich aus diesen zusammensetzen. Den Inbegriff aller dieser Transformationen bezeichnen wir als die *Hauptgruppe*[12]) räumlicher Änderungen; *geometrische Eigenschaften werden durch die Transformationen der Hauptgruppe nicht geändert.* Auch umgekehrt kann man sagen: *Geometrische Eigenschaften sind durch ihre Unveränderlichkeit gegenüber den Transformationen der Hauptgruppe charakterisiert.* Betrachtet man nämlich den Raum einen Augenblick als unbeweglich usw., als eine starre Mannigfaltigkeit, so hat jede Figur ein individuelles Interesse; von den Eigenschaften, die sie als Individuum hat, sind es nur die eigentlich geometrischen, welche bei den Änderungen der Hauptgruppe erhalten bleiben. Dieser hier etwas unbestimmt formulierte Gedanke wird im weiteren Verlaufe der Auseinandersetzung deutlicher erscheinen.

Streifen wir jetzt das mathematisch unwesentliche sinnliche Bild ab, und erblicken im Raume nur eine mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, also, indem wir an der gewohnten Vorstellung des Punktes als Raumelement festhalten, eine dreifach ausgedehnte. Nach Analogie mit den räumlichen Transformationen reden wir von Transformationen der Mannigfaltigkeit; auch sie bilden *Gruppen.* Nur ist nicht mehr, wie im Raume, eine Gruppe vor den übrigen durch ihre Bedeutung ausgezeichnet; jede Gruppe ist mit jeder anderen gleichberechtigt. Als Verallgemeinerung der Geometrie entsteht so das folgende umfassende Problem:

Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben; man soll die der Mannigfaltigkeit angehörigen Gebilde hinsichtlich solcher Eigenschaften untersuchen, die durch die Transformationen der Gruppe nicht geändert werden.

In Anlehnung an die moderne Ausdrucksweise, die man freilich nur auf eine bestimmte Gruppe, die Gruppe aller linearen Umformungen, zu beziehen pflegt, mag man auch so sagen:

---

[11]) Unter dem Sinne verstehe ich hier die Eigenschaft der Anordnung, welche den Unterschied von der symmetrischen Figur (dem Spiegelbilde) begründet. Ihrem Sinne nach unterschieden sind also z. B. eine rechts- und eine linksgewundene Schraubenlinie.

[12]) Daß diese Transformationen eine Gruppe bilden, ist begrifflich notwendig.

Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben. Man entwickle die auf die Gruppe bezügliche Invariantentheorie[13]).

Dies ist das allgemeine Problem, welches die gewöhnliche Geometrie nicht nur, sondern namentlich auch die hier zu nennenden neueren geometrischen Methoden und die verschiedenen Behandlungsweisen beliebig ausgedehnter Mannigfaltigkeiten unter sich begreift. Was besonders betont sein mag, ist die Willkürlichkeit, die hinsichtlich der Wahl der zu adjungierenden Transformationsgruppe besteht, und die daraus fließende und in diesem Sinne zu verstehende gleiche Berechtigung aller sich unter die allgemeine Forderung subsumierenden Betrachtungsweisen.

§ 2.

Transformationsgruppen, von denen die eine die andere umfaßt, werden nacheinander adjungiert. Die verschiedenen Typen geometrischer Forschung und ihr gegenseitiges Verhältnis.

Da die geometrischen Eigenschaften räumlicher Dinge durch *alle* Transformationen der Hauptgruppe ungeändert bleiben, so ist es an und für sich absurd, nach solchen Eigenschaften derselben zu fragen, bei denen dies nur gegenüber einem Teile dieser Transformationen der Fall ist. Diese Fragestellung wird indes berechtigt, ob auch nur *formal*, wenn wir die räumlichen Gebilde in ihrer Beziehung zu fest gedachten Elementen untersuchen. Betrachten wir z. B., wie in der sphärischen Trigonometrie, die räumlichen Dinge unter Auszeichnung eines Punktes. Dann ist zunächst die Forderung: die unter Adjunktion der Hauptgruppe invarianten Eigenschaften nicht mehr der räumlichen Dinge an sich, sondern des von ihnen mit dem gegebenen Punkte gebildeten Systems zu entwickeln. Aber dieser Forderung können wir die andere Form erteilen: Man untersuche die räumlichen Gebilde an sich hinsichtlich solcher Eigenschaften, welche ungeändert bleiben durch diejenigen Transformationen der Hauptgruppe, welche noch stattfinden können, wenn wir den Punkt festhalten. Mit anderen Worten: Es ist

[13]) [Bei diesem Term ist hier und in der Folge keineswegs an die Frage der jeweiligen rationalen ganzen Invarianten irgendwelcher vorgelegter Formen bzw. der zwischen ihnen bestehenden rationalen, ganzen Syzygien gedacht. Diese Frage war mir 1872, entsprechend meinem Verkehr mit Clebsch (der erst 1871 seine Theorie der binären Formen herausgegeben hatte) selbstverständlich durchaus geläufig. Trotzdem fühlte ich mich an sie keineswegs gebunden. Ich verstand unter der Invariantentheorie einer Gruppe schlechtweg die Lehre von den bei der Gruppe unverändert bleibenden Beziehungen irgendwelcher vorgelegter Gebilde. Man vergleiche auch die ausdrückliche Erklärung in § 5 meiner zweiten Abhandlung über Nicht-Euklidische Geometrie, Abb. XVIII der vorliegenden Ausgabe. Zur Invariantentheorie der Elementargeometrie gehören in diesem Sinne beispielsweise die gesamte ebene und sphärische Trigonometrie, die doch gewiß mit dem genannten Schema nicht erschöpft sind. K.]

dasselbe, ob wir die räumlichen Gebilde im Sinne der Hauptgruppe untersuchen und ihnen den gegebenen Punkt hinzufügen, oder ob wir, ohne ihnen irgendein Gegebenes hinzuzufügen, die Hauptgruppe durch die in ihr enthaltene Gruppe ersetzen, deren Transformationen den bez. Punkt ungeändert lassen.

Es ist dies ein in der Folge häufig angewandtes Prinzip, das wir deshalb gleich hier allgemein formulieren wollen; etwa in der folgenden Weise:

Es sei eine Mannigfaltigkeit und zu ihrer Behandlung eine auf sie bezügliche Transformationsgruppe gegeben. Es werde das Problem vorgelegt, die in der Mannigfaltigkeit enthaltenen Gebilde hinsichtlich eines gegebenen Gebildes zu untersuchen. *So kann man entweder dem Systeme der Gebilde das gegebene hinzufügen, und es fragt sich dann nach den Eigenschaften des erweiterten Systems im Sinne der gegebenen Gruppe — oder, man lasse das System unerweitert, beschränke aber die Transformationen, die man bei der Behandlung zugrunde legt, auf diejenigen in der gegebenen Gruppe enthaltenen, welche das gegebene Gebilde ungeändert lassen (und die notwendig wieder eine Gruppe bilden).*

Im Gegensatze zu der zu Anfang des Paragraphen aufgeworfenen Frage beschäftige uns nun die umgekehrte, die von vornherein verständlich ist. Wir fragen nach denjenigen Eigenschaften räumlicher Dinge, welche bei einer Transformationsgruppe erhalten bleiben, die die Hauptgruppe als einen Teil umfaßt. Jede Eigenschaft, die wir bei einer solchen Untersuchung finden, ist eine geometrische Eigenschaft des Dings an sich, aber das Umgekehrte gilt nicht. Bei der Umkehr tritt vielmehr das eben vorgetragene Prinzip in Kraft, wobei die Hauptgruppe nun die kleinere Gruppe ist. Wir erhalten so:

Ersetzt man die Hauptgruppe durch eine umfassendere Gruppe, so bleibt nur ein Teil der geometrischen Eigenschaften erhalten. Die übrigen erscheinen nicht mehr als Eigenschaften der räumlichen Dinge an sich, sondern als Eigenschaften des Systems, welches hervorgeht, wenn man denselben ein ausgezeichnetes Gebilde hinzufügt. Dieses ausgezeichnete Gebilde ist (soweit es überhaupt ein bestimmtes[14]) ist) dadurch definiert, daß es, fest gedacht, dem Raume unter den Transformationen der gegebenen Gruppe nur noch die Transformationen der Hauptgruppe gestattet.

[14]) Man erzeugt ein solches Gebilde beispielsweise, indem man auf ein beliebiges Anfangselement, das durch keine Transformation der gegebenen Gruppe in sich selbst überzuführen ist, die Transformationen der Hauptgruppe anwendet. [Der Satz des Textes bildet ohne Zweifel den Mittelpunkt aller Überlegungen meines Programms und ist dementsprechend von neueren Autoren mit dem besonderen Namen des „Adjunktionssatzes" belegt worden. Aber er wird in dem in der vorigen Fußnote angedeuteten Sinne vielfach mißverstanden, Indem man nur an rationale ganze Invarianten bzw. Syzygien denkt, nennt man den Satz eine bloße Vermutung, oder konstruiert auch Fälle, wo er sich, in falscher Weise interpretiert, nicht bewährt. Man sucht in dem Satze eben viel mehr, als gemeint ist. Ich meine genau das, was

In diesem Satze beruht die Eigenart der hier zu besprechenden neueren geometrischen Richtungen und ihr Verhältnis zur elementaren Methode. Sie sind dadurch eben zu charakterisieren, daß sie an Stelle der Hauptgruppe eine erweiterte Gruppe räumlicher Umformungen der Betrachtung zugrunde legen. Ihr gegenseitiges Verhältnis ist, sofern sich ihre Gruppen einschließen, durch einen entsprechenden Satz bestimmt. Dasselbe gilt von den verschiedenen hier zu betrachtenden Behandlungsweisen mehrfach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten. Es soll dies nun an den einzelnen Methoden gezeigt werden, wobei denn die Sätze, die in diesem und dem vorigen Paragraphen allgemein hingestellt wurden, ihre Erläuterung an konkreten Gegenständen finden.

§ 3.

Die projektivische Geometrie.

Jede räumliche Umformung, die nicht gerade der Hauptgruppe angehört, kann dazu benutzt werden, um Eigenschaften bekannter Gebilde auf neue Gebilde zu übertragen. So verwerten wir die Geometrie der Ebene für die Geometrie der Flächen, die sich auf die Ebene abbilden

Cayley im Sixth Memoir upon Quantics 1859 (Phil.Trans. 1859, Coll.Pap., Bd. II, S. 560 ff., insbesondere die Schlußbemerkung S. 592) für den besonderen Fall der projektiven Geometrie und der elementaren metrischen Geometrie entwickelt hat und was übrigens bereits Laguerre 1853 in seinen oben S. 242—243 abgedruckten Sätzen in mehr partikulärer Fassung zum Ausdruck brachte. Cayley prägt am Schluß seiner Abhandlung den Satz: „Metrical geometry is a part of descriptive geometry and descriptive geometry is all geometry and reciprocally". Ich will das von mir aus hier in einer Fassung ausdrücken, die in ihrer prosaischen Form jedes Mißverständnis ausschließen dürfte: Jede Tatsache der elementaren Geometrie läßt sich durch Beziehungen zwischen Tetraederkoordinaten beschreiben, sofern man nur hinzunimmt, wie sich in den gerade gewählten Koordinaten der Kugelkreis darstellt.

Vielleicht ist es gut, noch folgendes hinzuzufügen: Der Kugelkreis ist mit einem beliebigen nicht zerfallenden Kegelschnitt projektiv, das Koordinatensystem läßt sich daher so wählen, daß er in seiner Ebene durch Nullsetzen einer beliebigen ternären quadratischen Form von nicht verschwindender Determinante dargestellt wird. Wir mögen nun etwa statt seiner, als Beispiel, eine in der unendlich fernen Ebene gelegene C_3 mit Spitze nehmen (welche eine W-Kurve ist, d. h. durch eine kontinuierliche Gruppe von Kollineationen mit einem Parameter in sich übergeht). Die sämtlichen Punkte der unendlich fernen Ebene bleiben bei der G_4 fest, die durch folgende Formeln gegeben ist:

$$x' = \lambda x + a, \quad y' = \lambda y + b, \quad z' = \lambda z + c.$$

Halten wir nun die C_3 nur als Ganzes fest, so haben wir eine G_5 von Kollineationen und können uns eine zugehörige Geometrie entworfen denken. Will man hernach diese Geometrie in die allgemeine projektive Geometrie einordnen, so darf man natürlich nicht eine in der unendlich fernen Ebene gelegene beliebige C_3 adjungieren (wie sie durch Nullsetzen einer *allgemeinen* ternären kubischen Form gegeben ist). Vielmehr wird man besagte Form gleich so spezialisiert einführen müssen, daß sie, gleich Null gesetzt, eben eine C_3 mit Spitze vorstellt. Letztere Bedingung genügt aber auch, weil alle C_3 mit Spitze untereinander projektiv verwandt sind. Und so ähnlich in allen weiteren Fällen, die man ersinnen mag. K.]

lassen; so schloß man schon lange vor dem Entstehen einer eigentlichen projektivischen Geometrie von den Eigenschaften einer gegebenen Figur auf Eigenschaften anderer, die durch Projektion aus ihr hervorgingen. Aber die projektivische Geometrie erwuchs erst, als man sich gewöhnte, die ursprüngliche Figur mit allen aus ihr projektivisch ableitbaren als wesentlich identisch zu erachten und die Eigenschaften, welche sich beim Projizieren übertragen, so auszusprechen, daß ihre Unabhängigkeit von der mit dem Projizieren verknüpften Änderung in Evidenz tritt. Hiermit war denn der Behandlung im Sinne von § 1 *die Gruppe aller projektivischen Umformungen* zugrunde gelegt und *dadurch eben der Gegensatz zwischen projektivischer und gewöhnlicher Geometrie geschaffen.*

Ein ähnlicher Entwicklungsgang, wie der hier geschilderte, kann bei jeder Art von räumlicher Transformation als möglich gedacht werden; wir werden noch öfter darauf zurückkommen. Er hat sich innerhalb der projektivischen Geometrie selbst noch nach zwei Seiten vollzogen. Die eine Weiterbildung der Auffassung geschah durch Aufnahme der *dualistischen* Umformungen in die Gruppe der zugrunde gelegten Änderungen. Für den heutigen Standpunkt sind zwei einander dualistisch entgegenstehende Figuren nicht mehr als zwei unterschiedene, sondern als wesentlich dieselben Figuren anzusehen. Ein anderer Schritt bestand in der Erweiterung der zugrunde gelegten Gruppe kollinearer und dualistischer Umformungen durch Aufnahme der bez. *imaginären* Transformationen. Dieser Schritt bedingt, daß man vorher den Kreis der eigentlichen Raumelemente durch Hinzunahme der imaginären erweitert habe — ganz dem entsprechend, wie die Aufnahme der dualistischen Umformungen in die zugrunde gelegte Gruppe die gleichzeitige Einführung von Punkt und Ebene als Raumelement nach sich zieht. Es ist hier nicht der Ort, auf die Zweckmäßigkeit der Einführung imaginärer Elemente zu verweisen, durch welche allein der genaue Anschluß der Raumlehre an das einmal gewählte Gebiet algebraischer Operationen erreicht wird. Dagegen muß betont werden, daß der Grund für die Einführung eben in der Betrachtung algebraischer Operationen, nicht aber in der Gruppe der projektivischen und dualistischen Umformungen liegt. So gut wir uns bei den letzteren auf reelle Transformationen beschränken können, da schon die reellen Kollineationen und dualistischen Transformationen eine Gruppe bilden, — so gut können wir imaginäre Raumelemente einführen, auch wenn wir nicht auf projektivischem Standpunkte stehen, und sollen es, sofern wir prinzipiell algebraische Gebilde untersuchen.

Wie man vom projektivischen Standpunkte aus die metrischen Eigenschaften aufzufassen hat, bestimmt sich nach dem allgemeinen Satze des vorangehenden Paragraphen. Die metrischen Eigenschaften sind als projektivische Beziehungen zu einem Fundamentalgebilde, dem unendlich fernen Kugelkreise[15]), zu betrachten, einem Gebilde, das die Eigenschaft hat, nur durch diejenigen Transformationen der projektivischen Gruppe, die eben auch Transformationen der Hauptgruppe sind, in sich überzugehen. Der so schlechthin ausgesprochene Satz bedarf noch einer wesentlichen Ergänzung, die der Beschränkung der gewöhnlichen Anschauungsweise auf reelle Raumelemente (und reelle Transformationen) entspricht. Man muß dem Kugelkreise, um diesem Standpunkte gerecht zu werden, noch das System der reellen Raumelemente (Punkte) ausdrücklich hinzufügen; Eigenschaften im Sinne der elementaren Geometrie sind projektivisch entweder Eigenschaften der Dinge an sich oder Beziehungen zu diesem Systeme der reellen Elemente, oder zum Kugelkreise, oder endlich zu beiden.

Es mag hier noch der Art gedacht werden, wie v. Staudt in seiner Geometrie der Lage (1847) die projektivische Geometrie aufbaut — d. h. diejenige projektivische Geometrie, welche sich auf Zugrundelegung der Gruppe aller reeller projektivisch-dualistischer Umformungen beschränkt[16]).

Es ist bekannt, wie er dabei aus dem gewöhnlichen Anschauungsmaterial nur solche Momente herausgreift, die auch bei projektivischen Umformungen erhalten bleiben. Wollte man weiterhin zur Betrachtung auch metrischer Eigenschaften übergehen, so hätte man die letzteren geradezu als Beziehungen zum Kugelkreise einzuführen. Der so vervollständigte Gedankengang ist für die hier vorliegenden Betrachtungen insofern von großer Bedeutung, als ein entsprechender Aufbau der Geometrie im Sinne jeder einzelnen der noch anzuführenden Methoden möglich ist.

§ 4.
Übertragung durch Abbildung.

Ehe wir in der Besprechung der geometrischen Methoden, die sich neben die elementare und die projektivische Geometrie stellen, weitergehen, mögen allgemein einige Betrachtungen entwickelt werden, die im folgenden immer wieder vorkommen und zu denen die bisher berührten Dinge bereits hinreichend viele Beispiele liefern. Auf diese Erörterungen bezieht sich der gegenwärtige und der nächstfolgende Paragraph.

Gesetzt, man habe eine Mannigfaltigkeit A unter Zugrundelegung einer Gruppe B untersucht. Führt man sodann A durch irgendwelche Transformation in eine andere Mannigfaltigkeit A' über, so wird aus der

[15]) Diese Anschauungsweise ist als eine der schönsten Leistungen der französischen Schule zu betrachten; durch sie erst gewinnt die Einteilung in Eigenschaften der Lage und Eigenschaften des Maßes, wie man sie gern an die Spitze der projektivischen Geometrie stellt, einen präzisen Inhalt.

[16]) Den erweiterten Kreis, der auch imaginäre Umformungen umspannt, hat v. Staudt erst in den „Beiträgen zur Geometrie der Lage“ (1856) zugrunde gelegt.

Gruppe B von Änderungen, die A in sich transformierten, nunmehr eine Gruppe B', deren Transformationen sich auf A' beziehen. Dann ist es ein selbstverständliches Prinzip, *daß die Behandlungsweise von A unter Zugrundelegung von B die Behandlungsweise von A' unter Zugrundelegung von B' ergibt*, d. h. jede Eigenschaft, welche ein in A enthaltenes Gebilde mit Bezug auf die Gruppe B hat, ergibt eine Eigenschaft des entsprechenden Gebildes in A' mit Bezug auf die Gruppe B'.

Lassen wir z. B. A eine gerade Linie, B die dreifach unendlich vielen linearen Transformationen bedeuten, welche dieselbe in sich überführen. Die Behandlungsweise von A ist dann eben diejenige, welche die neuere Algebra als Theorie der binären Formen bezeichnet. Nun kann man die gerade Linie auf einen Kegelschnitt A' der Ebene durch Projektion von einem Punkte des letzteren aus beziehen. Aus den linearen Transformationen B der Geraden in sich selbst werden dann die linearen Transformationen B' des Kegelschnittes in sich selbst, wie man leicht zeigt, d. h. diejenigen Änderungen des Kegelschnittes, welche mit den linearen Transformationen der Ebene, die den Kegelschnitt in sich überführen, verknüpft sind.

Es ist nun aber nach dem Prinzip des zweiten Paragraphen[17]) dasselbe: nach der Geometrie auf einem Kegelschnitte zu fragen, wenn man sich den Kegelschnitt als fest denkt und nur auf diejenigen linearen Transformationen der Ebene achtet, welche ihn in sich überführen, oder die Geometrie auf dem Kegelschnitte zu studieren, indem man überhaupt die linearen Transformationen der Ebene betrachtet und sich den Kegelschnitt mit ändern läßt. Die Eigenschaften, welche wir an den Punktsystemen auf dem Kegelschnitte auffaßten, sind mithin im gewöhnlichen Sinne projektivische. Die Verknüpfung der letzten Überlegung mit dem eben abgeleiteten Resultate gibt also:

Binäre Formentheorie und projektivische Geometrie der Punktsysteme auf einem Kegelschnitte ist dasselbe, d. h. jedem binären Satze entspricht ein Satz über derartige Punktsysteme und umgekehrt[18]).

Ein anderes Beispiel, welches geeignet ist, diese Art von Betrachtungen zu veranschaulichen, ist das folgende: Wenn man eine Fläche zweiten Grades mit einer Ebene durch stereographische Projektion in Verbindung setzt, so tritt auf der Fläche ein Fundamentalpunkt auf: der Projektionspunkt, in der Ebene sind es zwei: die Bilder der durch den

[17]) Wenn man will, ist hier das Prinzip unter etwas erweiterter Form angewendet.

[18]) Statt des Kegelschnittes in der Ebene kann man mit gleichem Erfolge eine Raumkurve dritter Ordnung einführen, überhaupt bei n Dimensionen etwas Entsprechendes aufstellen.

Projektionspunkt gehenden Erzeugenden. Man zeigt nun ohne weiteres: Die linearen Transformationen der Ebene, welche die beiden Fundamentalpunkte derselben ungeändert lassen, gehen durch die Abbildung in lineare Transformationen der Fläche zweiten Grades in sich selbst über, aber nur in diejenigen, welche den Projektionspunkt ungeändert lassen. Unter linearen Transformationen der Fläche in sich selbst sind dabei diejenigen Änderungen verstanden, welche die Fläche erfährt, wenn man lineare Raumtransformationen ausführt, welche die Fläche mit sich selbst zur Deckung bringen. Hiernach wird also die projektivische Untersuchung einer Ebene unter Zugrundelegung zweier Punkte und die projektivische Untersuchung einer Fläche zweiten Grades unter Zugrundelegung eines Punktes identisch. Die erstere ist nun — sofern man imaginäre Elemente mit in Betracht zieht — nichts anderes, als die Untersuchung der Ebene im Sinne der elementaren Geometrie. Denn die Hauptgruppe der ebenen Transformationen besteht eben in den linearen Umformungen, welche ein Punktepaar (die unendlich fernen Kreispunkte) ungeändert lassen. Wir erhalten also schließlich:

Die elementare Geometrie der Ebene und die projektivische Untersuchung einer Fläche zweiten Grades unter Hinzunahme eines ihrer Punkte sind dasselbe.

Diese Beispiele ließen sich beliebig vervielfachen[19]); die beiden hier entwickelten sind gewählt worden, da wir in der Folge noch Gelegenheit haben werden, auf dieselben zurückzukommen.

§ 5.

Von der Willkürlichkeit in der Wahl des Raumelements. Das Hessesche Übertragungsprinzip. Die Liniengeometrie.

Als Element der geraden Linie, der Ebene, des Raumes, überhaupt einer zu untersuchenden Mannigfaltigkeit kann statt des Punktes jedes in der Mannigfaltigkeit enthaltene Gebilde: die Punktgruppe, event. die Kurve, die Fläche usw. verwandt werden[20]). Indem über die Zahl willkürlicher Parameter, von denen man diese Gebilde abhängig setzen will, von vornherein gar nichts feststeht, erscheinen Linie, Ebene, Raum usw. je nach der Wahl des Elementes mit beliebig vielen Dimensionen behaftet. *Aber solange wir der geometrischen Untersuchung dieselbe Gruppe von*

[19]) Bez. anderer Beispiele, sowie namentlich der Erweiterungen auf mehr Dimensionen, deren die angeführten fähig sind, verweise ich auf bez. Auseinandersetzungen in einem Aufsatze von mir: *Über Liniengeometrie und metrische Geometrie.* Math. Annalen, Bd. 5 [s. Abh. VIII dieser Ausgabe], sowie auf die sogleich noch zu nennenden Lieschen Arbeiten.

[20]) Vgl. Note III.

Änderungen zugrunde legen, bleibt der Inhalt der Geometrie unverändert, das heißt, jeder Satz, der bei *einer* Annahme des Raumelements sich ergab, ist auch ein Satz bei beliebiger anderer Annahme, nur die Anordnung und Verknüpfung der Sätze ist geändert.

Das Wesentliche ist also die Transformationsgruppe; die Zahl der Dimensionen, die wir einer Mannigfaltigkeit beilegen wollen, erscheint als etwas Sekundäres.

Diese Verknüpfung dieser Bemerkung mit dem Prinzip des vorigen Paragraphen ergibt eine Reihe schöner Anwendungen, von denen hier einige entwickelt werden mögen, da diese Beispiele mehr als alle langen Auseinandersetzungen geeignet scheinen, den Sinn der allgemeinen Betrachtung darzulegen.

Die projektivische Geometrie auf der Geraden (die Theorie der binären Formen) ist nach dem vorigen Paragraphen mit der projektivischen Geometrie auf dem Kegelschnitte gleichbedeutend. Auf letzterem mögen wir jetzt statt des Punktes das Punktepaar als Element betrachten. Die Gesamtheit der Punktepaare des Kegelschnitts läßt sich aber auf die Gesamtheit der Geraden der Ebene beziehen, indem man jede Gerade dem Punktepaare zuordnet, in welchem sie den Kegelschnitt trifft. Bei dieser Abbildung gehen die linearen Transformationen des Kegelschnitts in sich selbst in die linearen Transformationen der (aus Geraden bestehend gedachten) Ebene über, welche den Kegelschnitt ungeändert lassen. Ob wir aber die aus den letzteren bestehende Gruppe betrachten, oder die Gesamtheit der linearen Transformationen der Ebene zugrunde legen und den zu untersuchenden Gebilden der Ebene den Kegelschnitt allemal hinzufügen, ist nach § 2 gleichbedeutend. Indem wir alle diese Überlegungen zusammennehmen, haben wir:

Die Theorie der binären Formen und die projektivische Geometrie der Ebene unter Zugrundelegung eines Kegelschnittes sind gleichbedeutend.

Da endlich projektivische Geometrie der Ebene unter Zugrundelegung eines Kegelschnittes wegen der Gleichheit der Gruppe mit der projektivischen Maßgeometrie koinzidiert, die man in der Ebene auf einen Kegelschnitt gründen kann[21]), so mögen wir auch so sagen:

Die Theorie der binären Formen und die allgemeine projektivische Maßgeometrie in der Ebene sind dasselbe.

Statt des Kegelschnitts in der Ebene können wir in der vorstehenden Betrachtung die Kurve dritter Ordnung im Raume setzen usw., doch mag dies unausgeführt bleiben. Der hier dargelegte Zusammenhang zwischen der Geometrie der Ebene, weiterhin des Raumes oder einer beliebig aus-

[21]) Vgl. Note V.

gedehnten Mannigfaltigkeit deckt sich im wesentlichen mit dem von Hesse vorgeschlagenen Übertragungsprinzipe (Borchardts Journal, Bd. 66 (1866)).

Ein Beispiel ganz ähnlicher Art ergibt die projektivische Geometrie des Raumes, oder, anders ausgedrückt, die Theorie der quaternären Formen. Faßt man die gerade Linie als Raumelement und erteilt ihr, wie in der Liniengeometrie geschieht, sechs homogene Koordinaten, zwischen denen eine Bedingungsgleichung vom zweiten Grade stattfindet, so erscheinen die linearen und dualistischen Transformationen des Raumes als diejenigen linearen Transformationen der unabhängig gedachten sechs Veränderlichen, welche die Bedingungsgleichung in sich überführen. Durch eine Verknüpfung ähnlicher Überlegungen, wie sie soeben entwickelt wurden, erhält man hieraus den Satz:

Die Theorie der quaternären Formen deckt sich mit der projektivischen Maßbestimmung in einer durch sechs homogene Veränderliche erzeugten Mannigfaltigkeit.

Wegen der näheren Ausführung dieser Auffassung verweise ich auf einen demnächst in den Math. Annalen, Bd. 6 [s. Abh. XVIII dieser Ausgabe] erscheinenden Aufsatz: „Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie" zweite Abhandlung), sowie auf eine Note am Schlusse dieser Mitteilung[22]).

Ich knüpfe an die vorstehenden Auseinandersetzungen noch zwei Bemerkungen, von denen die erste zwar schon implizite in dem Bisherigen enthalten ist, aber ausgeführt werden soll, weil der Gegenstand, auf den sie sich bezieht, zu leicht Mißverständnissen ausgesetzt ist.

Wenn wir beliebige Gebilde als Raumelemente einführen, so erhält der Raum beliebig viele Dimensionen. Wenn wir dann aber an der uns geläufigen (elementaren oder projektivischen) Anschauungsweise festhalten, so ist die Gruppe, welche wir für die mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit zugrunde zu legen haben, von vornherein gegeben; es ist eben die Hauptgruppe bez. die Gruppe der projektivischen Umformungen. Wollten wir eine andere Gruppe zugrunde legen, so müßten wir von der gewöhnlichen bez. der projektivischen Anschauung abgehen. So richtig es also ist, daß bei geschickter Wahl der Raumelemente der Raum Mannigfaltigkeiten von beliebig vielen Ausdehnungen repräsentiert, so wichtig ist es, hinzuzufügen, *daß bei dieser Repräsentation entweder von vornherein eine bestimmte Gruppe der Behandlung der Mannigfaltigkeiten zugrunde zu legen ist, oder daß wir, wollen wir über die Gruppe verfügen, unsere geometrische Auffassung entsprechend auszubilden haben.* — Es könnte, ohne diese Bemerkung, z. B. eine Repräsentation der Liniengeometrie in der folgenden Weise gesucht werden. Die Gerade erhält in der Liniengeometrie

[22]) Vgl. Note VI.

sechs Koordinaten, ebensoviele Koeffizienten besitzt der Kegelschnitt in der Ebene. Das Bild der Liniengeometrie würde also die Geometrie in einem Kegelschnittsysteme sein, das aus der Gesamtheit der Kegelschnitte durch eine quadratische Gleichung zwischen den Koeffizienten ausgesondert wird. Das ist richtig, sowie wir als Gruppe der ebenen Geometrie die Gesamtheit der Transformationen zugrunde legen, die durch lineare Umformungen der Kegelschnittskoeffizienten repräsentiert werden, welche die quadratische Bedingungsgleichung in sich überführen. Halten wir aber an der elementaren bez. der projektivischen Auffassung der ebenen Geometrie fest, so haben wir eben *kein* Bild.

Die zweite Bemerkung bezieht sich auf folgende Begriffsbildung. Sei im Raume irgendeine Gruppe, etwa die Hauptgruppe gegeben. So wähle man ein einzelnes räumliches Gebilde, etwa einen Punkt, oder eine Gerade, oder auch ein Ellipsoid usw. aus und wende auf dasselbe alle Transformationen der Hauptgruppe an. Man erhält dann eine mehrfach unendliche Mannigfaltigkeit mit einer Anzahl von Dimensionen, die im allgemeinen gleich der Zahl der in der Gruppe enthaltenen willkürlichen Parameter ist, die in besonderen Fällen herabsinkt, wenn nämlich das ursprünglich gewählte Gebilde die Eigenschaften besitzt, durch unendlich viele Transformationen der Gruppe in sich übergeführt zu werden. Jede so erzeugte Mannigfaltigkeit heiße mit Bezug auf die erzeugende Gruppe ein *Körper*[23]). Wollen wir nun den Raum im Sinne der Gruppe untersuchen und dabei bestimmte Gebilde als Raumelemente auszeichnen, und wollen wir nicht, daß Gleichberechtigtes ungleichartig dargestellt werde, *so müssen wir die Raumelemente ersichtlich so wählen, daß ihre Mannigfaltigkeit entweder selbst einen Körper bildet oder in Körper zerlegt werden kann*[24]). Von dieser evidenten Bemerkung soll später (§ 9) eine Anwendung gemacht werden. Der Körperbegriff selbst wird im Schlußparagraphen in Verbindung mit verwandten Begriffen noch einmal zur Sprache kommen.

---

[23]) Ich wähle den Namen nach dem Vorgange von Dedekind, der in der Zahlentheorie ein Zahlengebiet als Körper bezeichnet, wenn es aus gegebenen Elementen durch gegebene Operationen entstanden ist. (Zweite Auflage von Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie.)

[24]) [Im Texte ist nicht hinreichend beachtet, daß die vorgelegte Gruppe sogenannte ausgezeichnete Untergruppen enthalten kann. Bleibt ein geometrisches Gebilde bei den Operationen einer ausgezeichneten Untergruppe ungeändert, so gilt das Gleiche für alle Gebilde, die aus ihm durch die Operationen der Gesamtgruppe hervorgehen, d. h. für alle Gebilde des aus ihm entspringenden Körpers. Ein so beschaffener Körper würde aber zur Darstellung der Operationen der Gruppe durchaus ungeeignet sein. Es sind also im Texte nur solche Körper zuzulassen, die aus Raumelementen entstehen, welche bei keiner einzigen ausgezeichneten Untergruppe der vorgelegten Gruppe ungeändert bleiben. (1893).]

§ 6.

Die Geometrie der reziproken Radien. Die Interpretation von $x + iy$.

Wir kehren mit diesem Paragraphen zur Besprechung der verschiedenen Richtungen der geometrischen Forschung zurück, wie sie in §§ 2, 3 begonnen wurde.

Als ein Seitenstück zu den Betrachtungsweisen der projektivischen Geometrie kann man in vielfacher Hinsicht eine Klasse geometrischer Überlegungen betrachten, bei denen von der Umformung durch reziproke Radien fortlaufender Gebrauch gemacht wird. Es gehören hierher die Untersuchungen über die sog. Zykliden und anallagmatischen Flächen, über die allgemeine Theorie der Orthogonalsysteme, ferner Untersuchungen über das Potential usw. Wenn man die in denselben enthaltenen Betrachtungen noch nicht gleich den projektivischen zu einer besonderen Geometrie zusammengefaßt hat, *die dann als Gruppe die Gesamtheit derjenigen Umformungen zugrunde zu legen hätte, welche durch Verbindung der Hauptgruppe mit der Transformation durch reziproke Radien entstehen,* so ist das wohl dem zufälligen Umstande zuzuschreiben, daß die genannten Theorien seither nicht im Zusammenhange dargestellt worden sind; den einzelnen Autoren, die in dieser Richtung arbeiteten, wird eine solche methodische Auffassung nicht fern gelegen haben.

Die Parallele zwischen dieser Geometrie der reziproken Radien und der projektivischen ergibt sich, sowie einmal die Frage nach einem Vergleiche vorhanden ist, von selbst, und es mag daher nur ganz im allgemeinen auf die folgenden Punkte aufmerksam gemacht werden:

In der projektivischen Geometrie sind Punkt, Gerade, Ebene die Elementarbegriffe. Kreis und Kugel sind nur spezielle Fälle von Kegelschnitt und Fläche zweiten Grades. Das unendlich Ferne der elementaren Geometrie erscheint als Ebene; das Fundamentalgebilde, auf welches sich die elementare Geometrie bezieht, ist ein unendlich ferner, imaginärer Kegelschnitt.

In der Geometrie der reziproken Radien sind Punkt, Kreis und Kugel die Elementarbegriffe. Gerade und Ebene sind spezielle Fälle der letzteren, dadurch charakterisiert, daß sie einen, im Sinne der Methode übrigens nicht weiter ausgezeichneten Punkt, den unendlich fernen Punkt, enthalten. Die elementare Geometrie erwächst, sowie man diesen Punkt fest denkt.

Die Geometrie der reziproken Radien ist einer Einkleidung fähig, welche sie neben die Theorie der binären Formen und die Liniengeometrie stellt, falls man die letzteren in der Weise behandelt, wie das im vorigen Paragraphen angedeutet wurde. Wir mögen zu diesem Zwecke die Betrachtung zunächst auf ebene Geometrie und also auf Geometrie der reziproken Radien in der Ebene[25]) beschränken.

Es wurde bereits des Zusammenhangs gedacht, der zwischen der elementaren Geometrie der Ebene und der projektivischen Geometrie der mit einem ausgezeichneten Punkte versehenen Fläche zweiten Grades besteht (§ 4). Sieht man von dem ausgezeichneten Punkte ab und betrachtet also die projektivische Geometrie auf der Fläche an sich, so hat man ein Bild der Geometrie der reziproken Radien in der Ebene. Denn man überzeugt sich leicht[26]), daß der Transformationsgruppe der reziproken Radien in der Ebene vermöge der Abbildung der Fläche zweiten Grades die Gesamtheit der linearen Transformationen der letzteren in sich selbst entspricht. Man hat also:

Geometrie der reziproken Radien in der Ebene und projektivische Geometrie auf einer Fläche zweiten Grades ist dasselbe,

und ganz entsprechend:

Geometrie der reziproken Radien im Raume ist mit der projektivischen Behandlung einer Mannigfaltigkeit gleichbedeutend, die durch eine quadratische Gleichung zwischen fünf homogenen Veränderlichen dargestellt wird.

Die Raumgeometrie ist also durch die Geometrie der reziproken Radien in ganz dieselbe Verbindung mit einer Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen gesetzt, wie vermöge der Liniengeometrie mit einer Mannigfaltigkeit von fünf Ausdehnungen.

Die Geometrie der reziproken Radien in der Ebene gestattet, sofern man nur auf *reelle* Transformationen achten will, noch nach einer anderen Seite eine interessante Darstellung resp. Verwendung. Breitet man nämlich eine komplexe Variable $x + iy$ in gewöhnlicher Weise in der Ebene aus, so entspricht ihren linearen Transformationen die Gruppe der reziproken Radien, mit der erwähnten Beschränkung auf das Reelle[27]). Die Untersuchung der Funktionen einer komplexen Veränderlichen, die beliebigen

[25]) Geometrie der reziproken Radien auf der Geraden ist mit der projektivischen Untersuchung der Geraden gleichbedeutend, da die bez. Umformungen die nämlichen sind. Man kann daher auch in der Geometrie der reziproken Radien von einem *Doppelverhältnisse* von vier Punkten einer Geraden und weiterhin eines Kreises reden.

[26]) Vgl. die bereits genannte Arbeit: Über Liniengeometrie und metrische Geometrie. Math. Annalen, Bd. 5 [s. Abh. VIII dieser Ausgabe].

[27]) [Die Ausdrucksweise des Textes ist ungenau. Den linearen Transformationen $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ (wo $z' = x' + iy'$, $z = x + iy$) entsprechen nur diejenigen Operationen aus der Gruppe der reziproken Radien, bei denen keine Umlegung der Winkel stattfindet (bei denen die beiden Kreispunkte der Ebene nicht miteinander vertauscht werden). Will man die Gesamtgruppe der reziproken Radien umspannen, so hat man den genannten Transformationen noch die anderen (nicht minder wichtigen) hinzuzufügen: $z' = \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta}$, wo z' wieder $= x' + iy'$, $\bar{z}$ aber $= x - iy$. (1893).]

linearen Transformationen unterworfen gedacht ist, ist aber nichts anderes, als was bei einer etwas abgeänderten Darstellungsweise Theorie der binären Formen genannt wird. Also:

Die Theorie der binären Formen findet ihre Darstellung durch die Geometrie der reziproken Radien in der reellen Ebene, so zwar, daß auch die komplexen Werte der Variabeln repräsentiert werden.

Von der Ebene mögen wir, um in den gewohnteren Vorstellungskreis der projektivischen Umformungen zu gelangen, zur Fläche zweiten Grades aufsteigen. Da wir nur reelle Elemente der Ebene betrachteten, ist es nicht mehr gleichgültig, wie man die Fläche wählt; sie ist ersichtlich nicht geradlinig zu nehmen. Insbesondere können wir uns dieselbe — wie man das zur Interpretation einer komplexen Veränderlichen auch sonst tut — als Kugelfläche denken und erhalten so den Satz:

Die Theorie der binären Formen komplexer Variabeln findet ihre Repräsentation in der projektivischen Geometrie der reellen Kugelfläche.

Ich habe mir nicht versagen mögen, in einer Note[28]) noch auseinanderzusetzen, wie schön dieses Bild die Theorie der binären kubischen und biquadratischen Formen erläutert.

§ 7.

Erweiterungen des Vorangehenden. Lies Kugelgeometrie.

An die Theorie der binären Formen, die Geometrie der reziproken Radien und die Liniengeometrie, welche im vorstehenden koordiniert und nur durch die Zahl der Veränderlichen unterschieden scheinen, lassen sich gewisse Erweiterungen knüpfen, die nun auseinandergesetzt werden mögen. Dieselben sollen einmal dazu beitragen, den Gedanken, daß die Gruppe, welche die Behandlungsweise gegebener Gebiete bestimmt, beliebig erweitert werden kann, an neuen Beispielen zu erläutern; dann aber ist namentlich die Absicht gewesen, Betrachtungen, welche Lie in einer neueren Abhandlung niedergelegt hat[29]), in ihrer Beziehung zu den hier vorgetragenen Überlegungen darzulegen. Der Weg, auf welchem wir zu Lies Kugelgeometrie gelangen, weicht insofern von dem von Lie eingeschlagenen ab, als Lie an liniengeometrische Vorstellungen anknüpft, während wir, um uns mehr der gewöhnlichen geometrischen Anschauung anzuschließen und im Zusammenhang mit dem Vorhergehenden zu bleiben, bei den bez. Auseinandersetzungen eine geringere Zahl von Veränderlichen voraussetzen. Die Betrachtungen sind, wie bereits Lie selbst hervorgehoben hat (Göttinger Nachrichten 1871, Nr. 7, 22) von der Zahl der Variabeln unabhängig. Sie

---

[28]) Vgl. Note VII.

[29]) Partielle Differentialgleichungen und Komplexe. Math. Annalen, Bd. 5 (1870).

gehören dem großen Kreise von Untersuchungen an, welche sich mit der projektivischen Untersuchung quadratischer Gleichungen zwischen beliebig vielen Veränderlichen beschäftigen, Untersuchungen, die wir bereits öfter berührt haben und die uns noch wiederholt begegnen werden (vgl. § 10 u. a.).

Ich knüpfe an den Zusammenhang an, der zwischen der reellen Ebene und der Kugelfläche durch stereographische Projektion hergestellt wird. Wir setzten bereits in § 5 die Geometrie der Ebene mit der Geometrie auf einem Kegelschnitte in Verbindung, indem wir der Geraden der Ebene das Punktepaar zuordneten, in welchem sie den Kegelschnitt trifft. Entsprechend können wir einen Zusammenhang zwischen der Raumgeometrie und der Geometrie auf der Kugel aufstellen, indem wir jeder Ebene des Raumes den Kreis zuordnen, in welchem sie die Kugel schneidet. Übertragen wir dann durch stereographische Projektion die Geometrie auf der Kugel von derselben auf die Ebene, wobei jeder Kreis in einen Kreis übergeht, so entsprechen einander also:

die Raumgeometrie, welche als Element die Ebene, als Gruppe diejenigen linearen Transformationen benutzt, welche eine Kugel in sich überführen;

die ebene Geometrie, deren Element der Kreis, deren Gruppe die Gruppe der reziproken Radien ist.

Die erstere Geometrie wollen wir nun nach zwei Seiten verallgemeinern, indem wir statt ihrer Gruppe eine umfassendere setzen. Die resultierende Erweiterung überträgt sich dann durch die Abbildung ohne weiteres auf ebene Geometrie.

Statt der linearen Transformationen des aus Ebenen bestehenden Raumes, welche die Kugel in sich überführen, liegt es nahe, entweder die Gesamtheit der linearen Transformationen des Raumes, oder die Gesamtheit der Ebenentransformationen des Raumes zu wählen, welche [in einem noch erst anzugebenden Sinne] die Kugel ungeändert lassen, indem wir das eine Mal von der Kugel, das andere Mal von dem linearen Charakter der anzuwendenden Transformationen absehen. Die erste Verallgemeinerung ist ohne weiteres verständlich und wir mögen sie also zuerst betrachten und in ihrer Bedeutung für ebene Geometrie verfolgen; auf die zweite kommen wir hernach zurück, wobei es sich denn zunächst darum handelt, die allgemeinste betreffende Transformation zu bestimmen.

Die linearen Transformationen des Raumes haben die Eigenschaft gemein, Ebenenbüschel und Ebenenbündel wieder in solche überzuführen, Aber auf die Kugel übertragen ergibt das Ebenenbüschel ein Kreisbüschel, d. h. eine einfach unendliche Reihe von Kreisen mit gemeinsamen Schnittpunkten; das Ebenenbündel ergibt ein Kreisbündel, d. h. eine zweifach unendliche Schar von Kreisen, die auf einem festen Kreise senkrecht stehen (dem Kreise, dessen Ebene die Polarebene des den Ebenen des gegebenen Bündels gemeinsamen Punktes ist). Den linearen Transformationen des Raumes entsprechen also auf der Kugel und weiterhin in der Ebene Kreistransformationen von der charakteristischen Eigenschaft, Kreisbüschel und Kreisbündel in ebensolche überzuführen[30]). *Die ebene Geometrie, welche die Gruppe der so gewonnenen Transformationen benutzt, ist das Bild der gewöhnlichen projektivischen Raumgeometrie.* Als Element der Ebene wird man in dieser Geometrie nicht den Punkt benutzen können, da die Punkte für die gewählte Transformationsgruppe keinen Körper bilden (§ 5), sondern man wird die Kreise als Elemente wählen.

Bei der zweiten Erweiterung, die wir nannten, gilt es zunächst die Frage nach der Art der bezüglichen Transformationsgruppe zu erledigen. Es handelt sich darum, Ebenentransformationen zu finden, die aus jedem [Ebenenbüschel, dessen Achse die Kugel berührt, wieder ein solches Büschel] machen. Wir mögen der kürzeren Ausdrucksweise wegen zunächst die Frage dualistisch umkehren und überdies einen Schritt in der Zahl der Dimensionen hinabgehen; wir wollen also nach Punkttransformationen der Ebene fragen, welche aus jeder Tangente eines gegebenen Kegelschnittes wiederum eine Tangente erzeugen. Zu dem Zwecke betrachten wir die Ebene mit ihrem Kegelschnitte als Bild einer Fläche zweiten Grades, die man von einem nicht auf ihr befindlichen Raumpunkte aus so auf die Ebene projiziert hat, daß der bezeichnete Kegelschnitt die Übergangskurve vorstellt. Den Tangenten des Kegelschnitts entsprechen die Erzeugenden der Fläche, und die Frage ist auf die andere zurückgeführt nach der Gesamtheit der Punkttransformationen der Fläche in sich selbst, bei denen die Erzeugenden Erzeugende bleiben.

Solcher Transformationen gibt es nun zwar beliebig unendlich viele: denn man braucht nur den Punkt der Fläche als Durchschnitt der Erzeugenden zweierlei Art zu betrachten und jedes der Geradensysteme beliebig in sich zu transformieren. Aber unter den Transformationen sind insbesondere die linearen. Nur auf diese wollen wir achten. Hätten wir nämlich nicht mit einer Fläche, sondern mit einer mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit zu tun, die durch eine quadratische Gleichung repräsentiert wird, so blieben nur die linearen Transformationen, die anderen kämen in Wegfall[31]).

Diese linearen Transformationen der Fläche in sich selbst ergeben, durch (nicht stereographische) Projektion auf die Ebene übertragen, zwei-

---

[30]) Diese Transformationen werden gelegentlich in Graßmanns Ausdehnungslehre betrachtet (in der Auflage von 1862, S. 278).

[31]) Projiziert man die Mannigfaltigkeit stereographisch, so erhält man den bekannten Satz: In mehrfach ausgedehnten Gebieten (schon im Raume) gibt es außer den Transformationen, die sich in der Gruppe der reziproken Radien befinden, keine konformen Punkttransformationen. In der Ebene gibt es dagegen beliebig viele andere. Vgl. auch die zitierten Arbeiten von Lie.

deutige Punkttransformationen, vermöge deren aus jeder Tangente des Kegelschnittes, der die Übergangskurve bildet, allerdings wieder eine Tangente wird, aus jeder anderen Geraden aber im allgemeinen ein Kegelschnitt, der die Übergangskurve doppelt berührt. Es läßt sich diese Transformationsgruppe passend charakterisieren, wenn man auf den Kegelschnitt, der die Übergangskurve bildet, eine projektivische Maßbestimmung gründet. Die Transformationen haben dann die Eigenschaft, Punkte, welche im Sinne der Maßbestimmung voneinander eine Entfernung gleich Null haben, sowie Punkte, welche von einem anderen Punkte eine konstante Entfernung haben, wieder in solche Punkte zu verwandeln.

Alle diese Betrachtungen lassen sich auf beliebig viele Variabeln übertragen, insbesondere also für die ursprüngliche Fragestellung, die sich auf die Kugel und die Ebene als Element bezog, verwerten. Man kann dem Resultate dabei eine besonders anschauliche Form geben, weil der Winkel, den zwei Ebenen im Sinne der auf eine Kugel gegründeten projektivischen Maßbestimmung miteinander bilden, mit dem Winkel gleich ist, den ihre Durchschnittskreise mit der Kugel im gewöhnlichen Sinne miteinander bilden.

Wir erhalten also auf der Kugel und weiterhin auf der Ebene eine Gruppe von Kreistransformationen, welche die Eigenschaft haben, *Kreise die einander berühren (einen Winkel gleich Null einschließen), sowie Kreise, die einen anderen Kreis unter demselben Winkel schneiden, in ebensolche Kreise überzuführen.* In der Gruppe dieser Transformationen sind auf der Kugel die bez. linearen, in der Ebene die Transformationen der Gruppe der reziproken Radien enthalten[32]).

[32]) [Die Betrachtungen des Textes dürften durch Zufügung einiger weniger analytischer Formeln wesentlich klarer werden. Sei die Gleichung der Kugel, die wir stereographisch auf unsere Ebene beziehen, in gewöhnlichen Tetraederkoordinaten:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0;$$

die an diese Bedingungsgleichung gebundenen x erhalten dann bei uns die Bedeutung ebener tetrazyklischer Punktkoordinaten,

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

wird die allgemeine Kreisgleichung der Ebene. Berechnet man den Radius des solcherweise dargestellten Kreises, so kommt man dabei auf die Quadratwurzel

$$\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2},$$

die wir mit iu_5 bezeichnen mögen. Wir können jetzt die Kreise als Elemente der Ebene betrachten. Die Gruppe der reziproken Radien stellt sich dann durch die Gesamtheit der homogenen linearen Umsetzungen der $u_1 u_2 u_3 u_4$ dar, bei denen

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$$

in ein Multiplum seiner selbst übergeht. Die erweiterte Gruppe aber derjenigen Kreisgeometrie, welche der Lieschen Kugelgeometrie entspricht, besteht aus den homogenen linearen Umsetzungen der *fünf* Variabeln $u_1 u_2 u_3 u_4 u_5$, welche

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2$$

in ein Multiplum seiner selbst verwandeln (1893).]

Die auf diese Gruppe zu gründende Kreisgeometrie ist nun das Analogon zu der *Kugelgeometrie*, wie sie Lie für den Raum entworfen hat, und wie sie bei Untersuchungen über Krümmung der Flächen von ausgezeichneter Bedeutung scheint. Sie schließt die Geometrie der reziproken Radien in demselben Sinne in sich, wie letztere wieder die elementare Geometrie. —

Die nunmehr gewonnenen Kreis- (Kugel-)Transformationen haben insbesondere die Eigenschaft, sich berührende Kreise (Kugeln) in ebensolche überzuführen. Betrachtet man alle Kurven (Flächen) als Umhüllungsgebilde von Kreisen (Kugeln), so werden infolgedessen Kurven (Flächen), die sich berühren, immer wieder in solche übergehen. Die fraglichen Transformationen gehören also in die Klasse der später allgemein zu betrachtenden *Berührungstransformationen*, d. h. solcher Umformungen, bei denen Berührung von Punktgebilden eine invariante Beziehung ist. Die im vorliegenden Paragraphen zuerst erwähnten Graßmannschen Kreistransformationen, denen man analoge Kugeltransformationen an die Seite stellen kann, sind keine Berührungstransformationen. —

Wurden vorstehend die zweierlei Erweiterungen nur an die Geometrie der reziproken Radien angeknüpft, so gelten dieselben in entsprechender Weise für Liniengeometrie, überhaupt für die projektivische Untersuchung einer durch eine quadratische Gleichung ausgeschiedenen Mannigfaltigkeit, wie bereits angedeutet wurde, hier aber nicht weiter ausgeführt werden soll.

§ 8.

Aufzählung weiterer Methoden, denen eine Gruppe von Punkttransformationen zugrunde liegt.

Elementare Geometrie, Geometrie der reziproken Radien und auch projektivische Geometrie, sofern man von den mit Wechsel des Raumelements verknüpften dualistischen Umformungen absieht, subsumieren sich als einzelne Glieder unter die große Menge von denkbaren Betrachtungsweisen, welche überhaupt Gruppen von Punkttransformationen zugrunde legen. Wir mögen hier nur die folgenden drei Methoden, die hierin mit den genannten übereinstimmen, hervorheben. Sind diese Methoden auch lange nicht in dem Maße, wie die projektivische Geometrie, zu selbständigen Disziplinen entwickelt, so treten sie doch deutlich erkennbar in den neueren Untersuchungen auf[33]).

[33]) [Während es sich bei den bis jetzt behandelten Beispielen um Gruppen mit endlicher Parameterzahl handelte, kommen nunmehr im Texte sogenannte unendliche Gruppen in Betracht (1893).] [Zur Vermeidung von Mißverständnissen ist aber zu bemerken, daß in den späteren Untersuchungen von Lie der Begriff der unendlichen Gruppen viel enger gefaßt, nämlich auf solche Gruppen eingeschränkt wurde, die sich durch Differentialgleichungen definieren lassen. K.]

1. *Die Gruppe der rationalen Umformungen.*

Bei rationalen Umformungen muß wohl unterschieden werden, ob dieselben für *alle* Punkte des Gebietes, in welchem man operiert, also des Raumes oder der Ebene usw., rational sind, oder nur für die Punkte einer in dem Gebiete enthaltenen Mannigfaltigkeit, einer Fläche, einer Kurve. Nur die ersteren sind zu verwenden, wenn es gilt, im bisherigen Sinne eine Geometrie des Raumes, der Ebene zu entwerfen; die letzteren gewinnen von dem hier gegebenen Standpunkte aus erst Bedeutung, wenn Geometrie auf einer gegebenen Fläche, Kurve studiert werden soll. Dieselbe Unterscheidung gilt bei der sogleich anzuführenden Analysis situs.

Die seitherigen Untersuchungen, hier wie dort, haben sich aber wesentlich mit Transformationen der zweiten Art beschäftigt. Insofern dabei nicht die Frage nach der Geometrie auf der Fläche, der Kurve war, es sich vielmehr darum handelte, Kriterien zu finden, damit zwei Flächen, Kurven ineinander transformiert werden können, treten diese Untersuchungen aus dem Kreise der hier zu betrachtenden heraus[34]). Der hier aufgestellte allgemeine Schematismus umspannt eben nicht die Gesamtheit mathematischer Forschung überhaupt, sondern er bringt nur gewisse Richtungen unter einen gemeinsamen Gesichtspunkt.

Für eine Geometrie der rationalen Umformungen, wie sie sich unter Zugrundelegung der Transformationen der ersten Art ergeben muß, sind bis jetzt erst die Anfänge vorhanden. Im Gebiete erster Stufe, auf der geraden Linie, sind die rationalen Umformungen mit den linearen identisch und liefern also nichts Neues. In der Ebene kennt man freilich die Gesamtheit der rationalen Umformungen (der Cremonaschen Transformationen), man weiß, daß sie sich durch Zusammensetzung quadratischer erzeugen lassen. Man kennt auch invariante Charaktere der ebenen Kurven: ihr Geschlecht, die Existenz der Moduln; aber eigentlich zu einer Geo-

[34]) [Von einer anderen Seite ordnen sie sich wieder, was mir 1872 noch nicht bekannt war, aufs beste in die Betrachtungen des Textes ein. Ist irgendein algebraisches Gebilde (Kurve, oder Fläche, ...) vorgelegt, so übertrage man dasselbe in einen höheren Raum, indem man die Verhältnisse

$$\varphi_1 : \varphi_2 : \cdots : \varphi_p$$

der zugehörigen Integranden erster Gattung als homogene Koordinaten einführt. In diesem Raume hat man dann einfach der weiteren Betrachtung die Gruppe der homogenen linearen Umsetzungen der φ zugrunde zu legen. Vgl. verschiedene Arbeiten der Herren Brill, Nöther und Weber, sowie z. B. meine eigene Abhandlung: „Zur Theorie der Abelschen Funktionen" in Bd. 36 der Math. Annalen [s. Bd. III dieser Ausgabe] (1893)]. [Auch bei den in den vorangehenden Paragraphen behandelten Beispielen konnte die jeweils in Betracht kommende Gruppe bei Übergang zu einem zweckmäßig gewählten höheren Raum durch eine Gruppe linearer Transformationen ersetzt werden. Die Untersuchung kann daraufhin immer projektiv gewandt werden. Die naheliegende Frage, wie weit sich hieraus ein allgemeines Prinzip machen läßt, scheint immer noch nicht erledigt zu sein. K.]

metrie der Ebene in dem hier gemeinten Sinne entwickelt sind diese Betrachtungen noch nicht. Im Raume ist die ganze Theorie noch erst im Entstehen begriffen. Von den rationalen Umformungen kennt man bis jetzt nur wenige und benutzt dieselben, um bekannte Flächen mit unbekannten durch Abbildung in Verbindung zu setzen. —

2. *Die Analysis situs.*

In der sogenannten Analysis situs sucht man das Bleibende gegenüber solchen Umformungen, die aus unendlich kleinen Verzerrungen durch Zusammensetzung entstehen. Auch hier muß man, wie bereits gesagt, unterscheiden, ob das ganze Gebiet, also etwa der Raum, als Objekt der Transformationen gedacht werden soll, oder nur eine aus ihm ausgesonderte Mannigfaltigkeit, eine Fläche. Die Transformationen der ersten Art sind es, die man einer Raumgeometrie würde zugrunde legen können. Ihre Gruppe wäre wesentlich anders konstituiert, als die bisher betrachteten es waren. Indem sie alle Transformationen umfaßt, die sich aus reell gedachten unendlich kleinen Punkttransformationen zusammensetzen, trägt sie die prinzipielle Beschränkung auf reelle Raumelemente in sich, und bewegt sich auf dem Gebiete der willkürlichen Funktion. Man kann diese Transformationsgruppe nicht ungeschickt erweitern, indem man sie noch mit den reellen Kollineationen, die auch das unendlich Ferne modifizieren, verbindet. —

3. *Die Gruppe aller Punkttransformationen.*

Wenn gegenüber dieser Gruppe keine Fläche mehr individuelle Eigenschaften besitzt, da jede in jede andere durch Transformationen der Gruppe übergeführt werden kann, so sind es höhere Gebilde, bei deren Untersuchung die Gruppe mit Vorteil Anwendung findet. Bei der Auffassung der Geometrie, wie sie hier zugrunde gelegt ist, kann es gleichgültig sein, wenn diese Gebilde seither nicht sowohl als geometrische, sondern nur als analytische betrachtet wurden, die gelegentlich geometrische Anwendung fanden, und wenn man bei ihrer Untersuchung Prozesse anwandte (wie eben beliebige Punkttransformationen), die man erst in neuerer Zeit bewußt als geometrische Umformungen aufzufassen begonnen hat. Unter diese analytischen Gebilde gehören vor allen die homogenen Differentialausdrücke, sodann auch die partiellen Differentialgleichungen. Bei der allgemeinen Diskussion der letzteren scheint aber, wie in dem folgenden Paragraphen ausgeführt wird, die umfassendere Gruppe aller Berührungstransformationen noch vorteilhafter.

Der Hauptsatz, der in der Geometrie, welche die Gruppe aller Punkttransformationen zugrunde legt, in Geltung ist, ist der, *daß eine Punkttransformation für eine unendlich kleine Partie des Raumes immer den Wert einer linearen Transformation hat.* Die Entwicklungen der projektivischen Geometrie haben also nun ihren Wert für das Unendlichkleine, und hierin liegt, mag sonst die Wahl der Gruppe bei Behandlung von Mannigfaltigkeiten willkürlich sein — *hierin liegt ein auszeichnender Charakter für die projektivische Anschauungsweise.*

Nachdem nun schon lange von dem Verhältnisse der Betrachtungsweisen, die einander einschließende Gruppen zugrunde legen, nicht mehr die Rede war, mag hier noch einmal ein Beispiel für die allgemeine Theorie des § 2 gegeben werden. Wir mögen uns die Frage vorlegen, wie denn vom Standpunkte „aller Punkttransformationen" die gewöhnlichen projektivischen Eigenschaften aufzufassen sind, wobei von den dualistischen Umformungen, die eigentlich mit zur Gruppe der projektivischen Geometrie gehören, abgesehen werden mag. Die Frage deckt sich dann mit der andern: durch welche Bedingung aus der Gesamtheit der Punkttransformationen die Gruppe der linearen ausgeschieden wird. Das Charakteristische der letzteren ist, daß sie jeder Ebene eine Ebene zuordnen: sie sind diejenigen Punkttransformationen, vermöge deren die Mannigfaltigkeit der Ebenen (oder, was auf dasselbe hinauskommt, der geraden Linien) erhalten bleibt. *Die projektivische Geometrie ist aus der Geometrie aller Punkttransformationen ebenso durch Adjunktion der Mannigfaltigkeit der Ebenen zu gewinnen, wie die elementare Geometrie aus der projektivischen durch Adjunktion des unendlich fernen Kugelkreises.* Insbesondere haben wir z. B. vom Standpunkte aller Punkttransformationen die Bezeichnung einer Fläche als einer algebraischen von einer gewissen Ordnung als eine invariante Beziehung zur Mannigfaltigkeit der Ebenen aufzufassen. Es wird dies recht deutlich, wenn man, mit Graßmann, die Erzeugung der algebraischen Gebilde an ihre lineale Konstruktion knüpft.

§ 9.

Von der Gruppe aller Berührungstransformationen.

Berührungstransformationen sind zwar in einzelnen Fällen schon lange betrachtet; auch hat Jacobi bei analytischen Untersuchungen bereits von den allgemeinsten Berührungstransformationen Gebrauch gemacht; aber in die lebendige geometrische Anschauung wurden sie erst durch neuere Arbeiten von Lie eingeführt[35]. Es ist daher wohl nicht überflüssig, hier ausdrücklich auseinanderzusetzen, was eine Berührungstransformation ist,

[35]) Vgl. besonders die bereits zitierte Arbeit: Über partielle Differentialgleichungen und Komplexe. Math. Ann., Bd. 5. Die im Texte gegebenen Ausführungen betr. partielle Differentialgleichungen habe ich wesentlich mündlichen Mitteilungen von Lie entnommen; vgl. dessen Note: Zur Theorie partieller Differentialgleichungen. Göttinger Nachrichten. Okt. 1872.

wobei wir uns, wie immer, auf den Punktraum mit seinen drei Dimensionen beschränken.

Unter einer Berührungstransformation hat man, analytisch zu reden, jede Substitution zu verstehen, welche die Variabelwerte x, y, z und ihre partiellen Differentialquotienten $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$ durch neue x', y', z', p', q' ausdrückt. Dabei gehen, wie ersichtlich, sich berührende Flächen im allgemeinen wieder in sich berührende Flächen über, was den Namen Berührungstransformation begründet. Die Berührungstransformationen zerfallen, wenn man vom Punkte als Raumelement ausgeht, in drei Klassen: solche, die den dreifach unendlich vielen Punkten wieder Punkte zuordnen — das sind die eben betrachteten Punkttransformationen —, solche, die sie in Kurven, endlich solche, die sie in Flächen überführen. Diese Einteilung hat man insofern nicht als eine wesentliche zu betrachten, als bei Benutzung anderer dreifach unendlich vieler Raumelemente, etwa der Ebenen, allerdings wieder eine Teilung in drei Gruppen eintritt, die aber mit der Teilung, die unter Zugrundelegung der Punkte stattfand, nicht koinzidiert.

Wenden wir auf einen Punkt alle Berührungstransformationen an, so geht er in die Gesamtheit aller Punkte, Kurven und Flächen über. In ihrer Gesamtheit erst bilden also Punkte, Kurven und Flächen einen *Körper* unserer Gruppe. Man mag daraus die allgemeine Regel abnehmen, daß die formale Behandlung eines Problems im Sinne aller Berührungstransformationen (also etwa die sogleich vorzutragende Theorie der partiellen Differentialgleichungen) eine unvollkommene werden muß, sowie man mit Punkt- (oder Ebenen-) Koordinaten operiert, da die zugrunde gelegten Raumelemente eben keinen Körper bilden.

Alle in dem genannten Körper enthaltenen Individuen als Raumelemente einzuführen, geht aber, will man in Verbindung mit den gewöhnlichen Methoden bleiben, nicht an, da deren Zahl unendlichfach unendlich ist. Hierin liegt die Notwendigkeit, bei diesen Betrachtungen nicht den Punkt, nicht die Kurve oder die Fläche, sondern das *Flächenelement*, d. h. das Wertsystem x, y, z, p, q als *Raumelement* einzuführen. Bei jeder Berührungstransformation wird aus jedem Flächenelemente ein neues; die fünffach unendlich vielen Flächenelemente bilden also einen Körper.

Bei diesem Standpunkte muß man Punkt, Kurve, Fläche gleichmäßig als Aggregate von Flächenelementen auffassen, und zwar von zweifach unendlich vielen. Denn die Fläche wird von ∞^2 Elementen bedeckt, die Kurve von ebenso vielen berührt, durch den Punkt gehen ∞^2 hindurch. Aber diese zweifach unendlichen Aggregate von Elementen haben noch eine charakteristische Eigenschaft gemein. Man bezeichne als *vereinigte*

Lage zweier konsekutiven Flächenelemente x, y, z, p, q und $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, $p+dp$, $q+dq$ die Beziehung, welche durch

$$dz - p dx - q dy = 0$$

dargestellt wird. So sind Punkt, Kurve, Fläche übereinstimmend *zweifach unendliche Mannigfaltigkeiten von Elementen, deren jedes mit den einfach unendlich vielen ihm benachbarten vereinigt liegt.* Dadurch sind Punkt, Kurve, Fläche gemeinsam charakterisiert, und so müssen sie auch, wenn man die Gruppe der Berührungstransformationen zugrunde legen will, analytisch repräsentiert werden.

Die vereinigte Lage konsekutiver Elemente ist eine bei beliebiger Berührungstransformation invariante Beziehung. Aber auch umgekehrt können die Berührungstransformationen definiert werden *als diejenigen Substitutionen der fünf Veränderlichen x, y, z, p, q, vermöge deren die Relation $dz - p dx - q dy = 0$ in sich selbst übergeführt wird.* Der Raum ist also bei diesen Untersuchungen als eine Mannigfaltigkeit von fünf Dimensionen anzusehen, und diese Mannigfaltigkeit hat man zu behandeln, indem man als Gruppe die Gesamtheit aller Transformationen der Variablen zugrunde legt, welche eine bestimmte Relation zwischen den Differentialen ungeändert lassen.

Gegenstand der Untersuchung werden in erster Linie diejenigen Mannigfaltigkeiten, welche durch eine oder mehrere Gleichungen zwischen den Variabeln dargestellt werden, d. h. *die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung und ihre Systeme.* Eine Hauptfrage wird, wie sich aus den Mannigfaltigkeiten von Elementen, die gegebenen Gleichungen genügen, einfach, zweifach unendliche Reihen von Elementen ausscheiden lassen, deren jedes mit jedem benachbarten vereinigt liegt. Auf eine solche Frage läuft z. B. die Aufgabe der Lösung einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung hinaus. Man soll — so kann man sie formulieren — aus den vierfach unendlich vielen Elementen, die der Gleichung genügen, alle zweifach unendlichen Mannigfaltigkeiten der bewußten Art ausscheiden. Insbesondere die Aufgabe der vollständigen Lösung nimmt jetzt die präzise Form an: man soll die vierfach unendlich vielen Elemente, die der Gleichung genügen, auf irgendeine Weise in zweifach unendlich viele derartige Mannigfaltigkeiten zerlegen.

Ein Verfolg dieser Betrachtung über partielle Differentialgleichungen kann hier nicht in der Absicht liegen; ich verweise in bezug hierauf auf die zitierten Lieschen Arbeiten. Es sei nur noch hervorgehoben, daß für den Standpunkt der Berührungstransformationen eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung keine Invariante hat, daß jede in jede andere übergeführt werden kann, daß also namentlich die linearen Gleichungen nicht weiter ausgezeichnet sind. Unterscheidungen treten erst ein, wenn man zu dem Standpunkte der Punkttransformationen zurückgeht.

Die Gruppen der Berührungstransformationen, der Punkttransformationen, endlich der projektivischen Umformungen lassen sich in einer einheitlichen Weise charakterisieren, die ich nicht unterdrücken mag[36]. Berührungstransformationen wurden bereits definiert als diejenigen Umformungen, bei denen die vereinigte Lage konsekutiver Flächenelemente erhalten bleibt. Die Punkttransformationen haben dagegen die charakteristische Eigenschaft, vereinigt gelegene konsekutive Linienelemente in ebensolche zu verwandeln: die linearen und dualistischen Transformationen endlich bewahren die vereinigte Lage konsekutiver Konnexelemente. Unter einem Konnexelemente verstehe ich die Vereinigung eines Flächenelementes mit einem in ihm enthaltenen Linienelemente; konsekutive Konnexelemente heißen vereinigt gelegen, wenn nicht nur der Punkt, sondern auch das Linienelement des einen in dem Flächenelemente des anderen enthalten ist. Die (übrigens vorläufige) Bezeichnung Konnexelement bezieht sich auf die von Clebsch neuerdings[37]) in die Geometrie eingeführten Gebilde, welche durch eine Gleichung dargestellt werden, die gleichzeitig eine Reihe Punkt-, eine Reihe Ebenen- und eine Reihe Linienkoordinaten enthalten, und deren Analoga in der Ebene Clebsch als Konnexe bezeichnet.

§ 10.

Über beliebig ausgedehnte Mannigfaltigkeiten.

Es wurde bereits wiederholt hervorgehoben, wie bei der Anknüpfung der bisherigen Auseinandersetzungen an die räumliche Vorstellung nur der Wunsch maßgebend war, die abstrakten Begriffe durch Anlehnung an anschauliche Beispiele leichter entwickeln zu können. An und für sich sind diese Betrachtungen von dem sinnlichen Bilde unabhängig und gehören dem allgemeinen Gebiete mathematischer Forschung an, das man als die Lehre von den ausgedehnten Mannigfaltigkeiten oder (nach Graßmann) kurz als *Ausdehnungslehre* bezeichnet. Wie man die Übertragung des Vorhergehenden vom Raume auf den bloßen Mannigfaltigkeitsbegriff zu bewerkstelligen hat, ist ersichtlich. Es sei dabei nur noch einmal bemerkt, daß wir bei der abstrakten Untersuchung, der Geometrie gegenüber, den Vorteil haben, die Gruppe von Transformationen, welche wir zugrunde

---

[36]) Ich verdanke diese Definitionen einer Bemerkung von Lie. [Lie scheint auf diese doch gewiß interessanten Definitionen in seinen späteren Arbeiten nie zurückgekommen zu sein. K.]

[37]) Gött. Abhandlungen, 1872, Bd. 17: Über eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie, sowie namentlich Gött. Nachrichten, 1872, Nr. 22: Über ein neues Grundgebilde der analytischen Geometrie der Ebene.

legen wollen, ganz willkürlich wählen zu können, während in der Geometrie eine kleinste Gruppe, die Hauptgruppe, von vornherein gegeben war.

Wir mögen hier nur die folgenden drei Behandlungsweisen, und auch diese ganz kurz, berühren.

1. *Die projektivische Behandlungsweise oder die moderne Algebra (Invariantentheorie).*

Ihre Gruppe besteht in der Gesamtheit der linearen und dualistischen Transformationen der zur Darstellung des Einzelnen in der Mannigfaltigkeit verwendeten Veränderlichen; sie ist die Verallgemeinerung der projektivischen Geometrie. Es wurde bereits hervorgehoben, wie diese Behandlungsweise bei der Diskussion des unendlich Kleinen in einer um eine Dimension mehr ausgedehnten Mannigfaltigkeit zur Verwendung kommt. Sie schließt die beiden noch zu nennenden Behandlungsweisen in dem Sinne ein, als ihre Gruppe die bei jenen zugrunde zu legende Gruppe umfaßt.

2. *Die Mannigfaltigkeit von konstantem Krümmungsmaße.*

Die Vorstellung einer solchen erwuchs bei Riemann aus der allgemeineren einer Mannigfaltigkeit, in der ein Differentialausdruck der Veränderlichen gegeben ist. Die Gruppe besteht bei ihm aus der Gesamtheit der Transformationen der Variabeln, welche den gegebenen Ausdruck ungeändert lassen. Von einer anderen Seite kommt man zur Vorstellung einer Mannigfaltigkeit von konstanter Krümmung, wenn man im projektivischen Sinne auf eine zwischen den Veränderlichen gegebene quadratische Gleichung eine Maßbestimmung gründet. Bei dieser Weise tritt gegenüber der Riemannschen die Erweiterung ein, daß die Variabeln als komplex gedacht werden; man mag hinterher die Veränderlichkeit auf das reelle Gebiet beschränken. Hierher gehören die große Reihe von Untersuchungen, die wir in §§ 5, 6, 7 berührt haben.

3. *Die ebene Mannigfaltigkeit.*

Als ebene Mannigfaltigkeit bezeichnet Riemann die Mannigfaltigkeit von konstantem verschwindenden Krümmungsmaße. Ihre Theorie ist die unmittelbare Verallgemeinerung der elementaren Geometrie. Ihre Gruppe kann — wie die Hauptgruppe der Geometrie — aus der Gruppe der projektivischen dadurch ausgeschieden werden, daß man ein Gebilde fest hält, welches durch zwei Gleichungen, eine lineare und eine quadratische, dargestellt wird. Dabei hat man zwischen Reellem und Imaginärem zu unterscheiden, wenn man sich der Form, unter der die Theorie gewöhnlich dargestellt wird, anschließen will. Hierher zu rechnen sind vor allem die elementare Geometrie selbst, dann z. B. die in neuerer Zeit entwickelten Verallgemeinerungen der gewöhnlichen Krümmungstheorie usw.

Schlußbemerkungen.

Zum Schlusse mögen noch zwei Bemerkungen ihre Stelle finden, die mit dem bisher Vorgetragenen in enger Beziehung stehen; die eine betrifft den Formalismus, durch welchen man die begrifflichen Entwicklungen des Vorangehenden repräsentieren will, die andere soll einige Probleme kennzeichnen, deren Inangriffnahme nach den hier gegebenen Auseinandersetzungen als wichtig und lohnend erscheint.

Man hat der analytischen Geometrie häufig den Vorwurf gemacht, durch Einführung des Koordinatensystems willkürliche Elemente zu bevorzugen, und dieser Vorwurf trifft gleichmäßig jede Behandlungsweise ausgedehnter Mannigfaltigkeiten, welche das einzelne durch die Werte von Veränderlichen charakterisiert. War dieser Vorwurf bei der mangelhaften Art, mit der man namentlich früher die Koordinatenmethode handhabte, nur zu oft gerechtfertigt, so verschwindet er bei einer rationellen Behandlung der Methode. Die analytischen Ausdrücke, welche bei der Untersuchung einer Mannigfaltigkeit im Sinne einer Gruppe entstehen können, müssen, ihrer Bedeutung nach, von dem Koordinatensysteme, insofern es zufällig gewählt ist, unabhängig sein, und es gilt nun, diese Unabhängigkeit auch *formal* in Evidenz zu setzen. Daß dies möglich ist und wie es zu geschehen hat, zeigt die moderne Algebra, in der der formale Invariantenbegriff, um den es sich hier handelt, am deutlichsten ausgeprägt ist. Sie besitzt ein allgemeines und erschöpfendes Bildungsgesetz für invariante Ausdrücke und operiert prinzipiell nur mit solchen. Die gleiche Forderung soll man an die formale Behandlung stellen, auch wenn andere Gruppen, als die projektivische, zugrunde gelegt sind[38]). Denn der Formalismus soll sich doch mit der Begriffsbildung decken, mag man nun den Formalismus nur als präzisen und durchsichtigen Ausdruck der Begriffsbildung verwerten, oder will man ihn benutzen, um an seiner Hand in noch unerforschte Gebiete einzudringen. —

[38]) [Beispielsweise stellen für die Gruppe der Drehungen des dreidimensionalen Raumes um einen festen Punkt die Quaternionen einen solchen Formalismus dar (1893).]

[Aber ich habe späterhin die Forderung des Textes meinerseits nur wenig befolgt. Maßgebend hierfür war mir die Erfahrung, die ich an mir selbst und insbesondere im Unterricht machte, daß das Erlernen immer wieder neuer Arten symbolischer Schreibweise im allgemeinen mehr Zeit kostet, als durch deren Anwendung gewonnen wird. Hiermit dürfte die Tatsache zusammenhängen, daß immer nur ganz wenige Mathematiker sich die von ihrem jeweiligen Schöpfer lebhaft empfohlene Art der Symbolik aneignen (während umgekehrt sehr viele Mathematiker es bequem finden, ihre Gedanken in irgendwelcher, von ihnen selbst geschaffenen, neuen Symbolik zur Darstellung zu bringen). Wir haben auf Grund des hiermit beschriebenen Verhaltens zurzeit in der Mathematik bereits eine weitgehende Sprachverwirrung, als deren bedenkliches, wenn auch nicht gewolltes Endziel die Selbstsperrung alles mathematischen Fortschritts erscheint. K.]

Die Problemstellung, deren wir noch erwähnen wollten, erwächst durch einen Vergleich der vorgetragenen Anschauungen mit der sogenannten Galoisschen Theorie der Gleichungen.

In der Galoisschen Theorie, wie hier, konzentriert sich das Interesse auf *Gruppen* von Änderungen. Die Objekte, auf welche sich die Änderungen beziehen, sind allerdings verschieden; man hat es dort mit einer endlichen Zahl diskreter Elemente, hier mit der unendlichen Zahl von Elementen einer stetigen Mannigfaltigkeit zu tun. Aber der Vergleich läßt sich bei der Identität des Gruppenbegriffes doch weiter verfolgen[39]; und es mag dies hier um so lieber angedeutet werden, als dadurch die Stellung charakterisiert wird, die man gewissen von Lie und mir begonnenen Untersuchungen[40]) im Sinne der hier entwickelten Anschauungen zuzuweisen hat.

In der Galoisschen Theorie, wie sie z. B. in Serrets Traité d'Algèbre supérieure oder in C. Jordans Traité des substitutions dargestellt wird, ist der eigentliche Untersuchungsgegenstand die Gruppen- oder Substitutionstheorie selbst, die Gleichungstheorie fließt aus ihr als eine Anwendung. Entsprechend verlangen wir eine *Transformationstheorie*, eine Lehre von den Gruppen, welche von Transformationen gegebener Beschaffenheit erzeugt werden können. Die Begriffe der Vertauschbarkeit, der Ähnlichkeit usw. kommen, wie in der Substitutionstheorie, zur Verwendung. Als eine Anwendung der Transformationstheorie erscheint die aus der Zugrundelegung der Transformationsgruppen fließende Behandlung der Mannigfaltigkeit.

In der Gleichungstheorie sind es zunächst die symmetrischen Funktionen der Koeffizienten, die das Interesse auf sich ziehen, sodann aber diejenigen Ausdrücke, welche, wenn nicht bei allen, so durch eine größere Reihe von Vertauschungen der Wurzeln ungeändert bleiben. Bei der Behandlung einer Mannigfaltigkeit unter Zugrundelegung einer Gruppe fragen wir entsprechend zunächst nach den Körpern (§ 5), nach den Gebilden, die durch alle Transformationen der Gruppe ungeändert bleiben. Aber es gibt Gebilde, welche nicht alle aber einige Transformationen der Gruppe zulassen, und diese sind dann im Sinne der auf die Gruppe gegründeten Behandlung besonders interessant, sie haben ausgezeichnete Eigenschaften. Es kommt das also darauf hinaus, im Sinne der gewöhnlichen Geometrie symmetrische, reguläre Körper, Rotations- und Schraubenflächen auszu-

[39]) Ich erinnere hier daran, daß Graßmann bereits in der Einleitung zur ersten Auflage seiner Ausdehnungslehre (1844) die Kombinatorik und die Ausdehnungslehre parallelisiert.

[40]) Vgl. den gemeinsamen Aufsatz: Über diejenigen ebenen Kurven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen. Math. Annalen, Bd. 4 (s. Abh. XXVI dieser Ausgabe

zeichnen. Stellt man sich auf den Standpunkt der projektivischen Geometrie und verlangt insbesondere, daß die Transformationen, durch welche die Gebilde in sich übergehen, vertauschbar sein sollen, so kommt man auf die von Lie und mir in dem zitierten Aufsatze betrachteten Gebilde und auf das in § 6 desselben gestellte allgemeine Problem. Die dort in §§ 1, 3 gegebene Bestimmung aller Gruppen unendlich vieler vertauschbarer linearer Transformationen in der Ebene gehört als ein Teil in die soeben genannte allgemeine Transformationstheorie[41]).

Noten.

I. *Über den Gegensatz der synthetischen und analytischen Richtung in der neueren Geometrie.*

Den Unterschied zwischen neuerer Synthese und neuerer analytischer Geometrie hat man zurzeit nicht mehr als einen wesentlichen zu betrachten, da der gedankliche Inhalt sowohl als die Schlußweise sich auf beiden Seiten allmählich ganz ähnlich gestaltet haben. Daher wählen wir im Texte zur gemeinsamen Bezeichnung beider das Wort „projektivische Geometrie". Wenn die synthetische Methode mehr mit räumlicher Anschauung arbeitet und ihren ersten, einfachen Entwicklungen dadurch einen ungemeinen Reiz erteilt, so ist das Gebiet räumlicher Anschauung der analytischen Methode nicht verschlossen, und man kann die Formeln der analytischen Geometrie als einen präzisen und durchsichtigen Ausdruck der geometrischen Beziehungen auffassen. Man hat auf der anderen Seite den Vorteil nicht zu unterschätzen, den ein gut angelegter Formalismus der Weiterforschung dadurch leistet, daß er gewissermaßen dem Gedanken vorauseilt. Es ist zwar immer an der Forderung festzuhalten, daß man einen mathematischen Gegenstand noch nicht als erledigt betrachten soll,

[41]) Ich muß mir versagen, im Texte auf die Fruchtbarkeit hinzuweisen, welche die Betrachtung unendlich kleiner Transformationen in der Theorie der Differentialgleichungen hat. In § 7 der zitierten Arbeit haben Lie und ich gezeigt: Gewöhnliche Differentialgleichungen, welche gleiche unendlich kleine Transformationen zulassen, bieten gleiche Integrationsschwierigkeiten. Wie die Betrachtungen für partielle Differentialgleichungen zu verwerten seien, hat Lie an verschiedenen Orten, so besonders in dem früher genannten Aufsatze (Math. Annalen, Bd. 5), an verschiedenen Beispielen auseinandergesetzt (vgl. namentlich auch Mitteilungen der Akademie zu Christiania, 3. Mai 1872).

Durch die Auffassungsweise des Textes ordnen sich insbesondere auch meine späteren Untersuchungen über algebraische Gleichungen, wie diejenigen über transzendente automorphe Funktionen (die in den folgenden beiden Bänden dieser Gesamtausgabe abgedruckt werden sollen) mit den Darlegungen des Erlanger Programms zusammen. Vgl. hierzu die Vorrede zu meinen „Vorlesungen über das Ikosaeder" (Leipzig, Teubner, 1883) wo ich auf den Parallelismus meiner einschlägigen Arbeiten zu den gleichzeitigen Untersuchungen Lies über kontinuierliche Transformationsgruppen ausdrücklich hinwies. K.

solange er nicht begrifflich evident geworden ist, und es ist das Vordringen an der Hand des Formalismus eben nur ein erster aber schon sehr wichtiger Schritt.

II. *Trennung der heutigen Geometrie in Disziplinen.*

Wenn man z. B. beachtet, wie der mathematische Physiker sich durchgängig der Vorteile entschlägt, die ihm eine nur einigermaßen ausgebildete projektivische Anschauung in vielen Fällen gewähren kann, wie auf der anderen Seite der Projektiviker die reiche Fundgrube mathematischer Wahrheiten unberührt läßt, welche die Theorie der Krümmung der Flächen aufgedeckt hat, so muß man den gegenwärtigen Zustand des geometrischen Wissens als recht unvollkommen und als hoffentlich vorübergehend betrachten.

III. *Über den Wert räumlicher Anschauung.*

Wenn wir im Texte die räumliche Anschauung als etwas Beiläufiges bezeichnen, so ist dies mit Bezug auf den rein mathematischen Inhalt der zu formulierenden Betrachtungen gemeint. Die Anschauung hat für ihn nur den Wert der Veranschaulichung, der allerdings in pädagogischer Beziehung sehr hoch anzuschlagen ist. Ein geometrisches Modell z. B. ist auf diesem Standpunkte sehr lehrreich und interessant.

Ganz anders stellt sich aber die Frage nach dem Werte der räumlichen Anschauung überhaupt. Ich stelle denselben als etwas Selbständiges hin. Es gibt eine eigentliche Geometrie, die nicht, wie die im Texte besprochenen Untersuchungen, nur eine veranschaulichte Form abstrakter Untersuchungen sein will. In ihr gilt es, die räumlichen Figuren nach ihrer vollen gestaltlichen Wirklichkeit aufzufassen, und (was die mathematische Seite ist) die für sie geltenden Beziehungen als evidente Folgen der Grundsätze räumlicher Anschauung zu verstehen. Ein Modell — mag es nun ausgeführt und angeschaut oder nur lebhaft vorgestellt sein — ist für diese Geometrie nicht ein Mittel zum Zwecke, sondern die Sache selbst.

Wenn wir so, neben und unabhängig von der reinen Mathematik, Geometrie als etwas Selbständiges hinstellen, so ist das an und für sich gewiß nichts Neues. Es ist aber wünschenswert, diesen Gesichtspunkt ausdrücklich einmal wieder hervorzuheben, da die neuere Forschung ihn fast ganz übergeht. Hiermit hängt zusammen, daß umgekehrt die neuere Forschung selten dazu verwendet wurde, wenn es galt, gestaltliche Verhältnisse räumlicher Erzeugnisse zu beherrschen, und doch scheint sie gerade in dieser Richtung sehr fruchtbar[42]).

[42]) [Meine Arbeiten über die Gestalten insbesondere der algebraischen Kurven und Flächen sollen in Bd. II dieser Gesamtausgabe ihre Stelle finden. K.]

IV. *Über Mannigfaltigkeiten von beliebig vielen Dimensionen.*

Daß der Raum, als Ort für Punkte aufgefaßt, nur drei Dimensionen hat, braucht vom mathematischen Standpunkte aus nicht diskutiert zu werden; ebensowenig kann man aber vom mathematischen Standpunkte aus jemanden hindern, zu behaupten, der Raum habe eigentlich vier, oder unbegrenzt viele Dimensionen, wir seien aber nur imstande, drei wahrzunehmen. Die Theorie der mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten, wie sie je länger je mehr in den Vordergrund neuerer mathematischer Forschung tritt, ist, ihrem Wesen nach, von einer solchen Behauptung vollkommen unabhängig. Es hat sich in ihr aber eine Redeweise eingebürgert, die allerdings dieser Vorstellung entflossen ist. Man spricht, statt von den Individuen einer Mannigfaltigkeit, von den Punkten eines höheren Raumes usw. An und für sich hat diese Redeweise manches Gute, insofern sie durch Erinnern an die geometrischen Anschauungen das Verständnis erleichtert. Sie hat aber die nachteilige Folge gehabt, daß in ausgedehnten Kreisen die Untersuchungen über Mannigfaltigkeiten mit beliebig vielen Dimensionen als solidarisch erachtet werden mit der erwähnten Vorstellung von der Beschaffenheit des Raumes. Nichts ist grundloser als diese Auffassung. Die betreffenden mathematischen Untersuchungen würden allerdings sofort geometrische Verwendung finden, wenn die Vorstellung richtig wäre, — aber ihr Wert und ihre Absicht ruht, gänzlich unabhängig von dieser Vorstellung, in ihrem eigenen mathematischen Inhalte.

Etwas ganz anderes ist es, wenn Plücker gelehrt hat, den wirklichen Raum als eine Mannigfaltigkeit von beliebig vielen Dimensionen aufzufassen, indem man als Element des Raumes ein von beliebig vielen Parametern abhängendes Gebilde (Kurve, Fläche usw.) einführt (vgl. §5 des Textes).

Die Vorstellungsweise, welche das Element der beliebig ausgedehnten Mannigfaltigkeit als ein Analogon zum Punkte des Raumes betrachtet, ist wohl zuerst von Graßmann in seiner Ausdehnungslehre (1844) entwickelt worden. Bei ihm ist der Gedanke völlig frei von der erwähnten Vorstellung von der Natur des Raumes; letztere geht auf gelegentliche Bemerkungen von Gauß zurück und wurde durch Riemanns Untersuchungen über mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten, in welche sie mit eingeflochten ist, in weiteren Kreisen bekannt.

Beide Auffassungsweisen — die Graßmannsche wie die Plückersche — haben ihre eigentümlichen Vorzüge; man verwendet sie beide, zwischen ihnen abwechselnd, mit Vorteil[43]).

---

[43]) [Unnötig zu bemerken, welche Entwicklung das mehrdimensionale Denken in den letzten Jahrzehnten genommen hat. Ich verweise, was speziell die Graßmannsche Auffassung und die ihr entsprechende Behandlung algebraischer Gebilde angeht, auf Segres Referat in III_2, Heft 7, der Mathematischen Enzyklopädie, 1918. K.]

V. *Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie.*

Die im Texte gemeinte projektivische Maßgeometrie koinzidiert, wie neuere Untersuchungen gelehrt haben, dem Wesen nach mit der Maßgeometrie, welche unter Nichtannahme des Parallelenaxioms entworfen werden kann und die zurzeit unter dem Namen der Nicht-Euklidischen Geometrie vielfach besprochen und diskutiert wird. Wenn wir im Texte diesen Namen überhaupt nicht berührt haben, so geschah es aus einem Grunde, der mit den in der vorstehenden Note gegebenen Auseinandersetzungen verwandt ist. Man verknüpt mit dem Namen Nicht-Euklidische Geometrie eine Menge unmathematischer Vorstellungen, die auf der einen Seite mit ebenso viel Eifer gepflegt als auf der anderen perhorresziert werden, mit denen aber unsere rein mathematischen Betrachtungen gar nichts zu schaffen haben. Der Wunsch, in dieser Richtung etwas zur Klärung der Begriffe beizutragen, mag die folgenden Auseinandersetzungen motivieren.

Die gemeinten Untersuchungen über Parallelentheorie haben mit ihren Weiterbildungen mathematisch nach zwei Seiten einen bestimmten Wert.

Sie zeigen einmal — und dieses ihr Geschäft kann man als ein einmaliges, abgeschlossenes betrachten —, daß das Parallelenaxiom keine mathematische Folge der gewöhnlich vorangestellten Axiome ist, sondern daß ein wesentlich neues Anschauungselement, welches in den vorhergehenden Untersuchungen nicht berührt wurde, in ihm zum Ausdruck gelangt. Ähnliche Untersuchungen könnte man und sollte man mit Bezug auf jedes Axiom nicht nur der Geometrie durchführen; man würde dadurch an Einsicht in die gegenseitige Stellung der Axiome gewinnen.

Dann aber haben uns diese Untersuchungen mit einem wertvollen mathematischen Begriffe beschenkt: dem Begriffe einer Mannigfaltigkeit von konstanter Krümmung. Er hängt, wie bereits bemerkt und wie in § 10 des Textes noch weiter ausgeführt ist, mit der unabhängig von aller Parallelentheorie erwachsenen projektivischen Maßbestimmung auf das innigste zusammen. Wenn das Studium dieser Maßbestimmung an und für sich hohes mathematisches Interesse bietet und zahlreiche Anwendungen gestattet, so kommt hinzu, daß sie die in der Geometrie gegebene Maßbestimmung als speziellen Fall (Grenzfall) umfaßt und uns lehrt, dieselbe von einem erhöhten Standpunkte aufzufassen.

Völlig unabhängig von den entwickelten Gesichtspunkten steht die Frage, welche Gründe das Parallelenaxiom stützen, ob wir dasselbe als absolut gegeben — wie die einen wollen — oder als durch Erfahrung nur approximativ erwiesen — wie die anderen sagen — betrachten wollen. Sollten Gründe sein, das letztere anzunehmen, so geben uns die fraglichen mathematischen Untersuchungen an die Hand, wie man dann eine exaktere Geometrie zu konstruieren habe. Aber die Fragestellung ist offenbar eine philosophische, welche die allgemeinsten Grundlagen unserer Erkenntnis betrifft. Den Mathematiker *als solchen* interessiert die Fragestellung nicht, und er wünscht, daß seine Untersuchungen nicht als abhängig betrachtet werden von der Antwort, die man von der einen oder der anderen Seite auf die Frage geben mag.

VI. *Liniengeometrie als Untersuchung einer Mannigfaltigkeit von konstantem Krümmungsmaße.*

Wenn wir Liniengeometrie mit der projektivischen Maßbestimmung in einer fünffach ausgedehnten Mannigfaltigkeit in Verbindung setzen, müssen wir beachten, daß wir in den geraden Linien nur die (im Sinne der Maßbestimmung) unendlich fernen Elemente der Mannigfaltigkeit vor uns haben. Es wird daher nötig, zu überlegen, welchen Wert eine projektivische Maßbestimmung für ihre unendlich fernen Elemente hat, und das mag hier etwas auseinandergesetzt werden, um Schwierigkeiten, die sich sonst der Auffassung der Liniengeometrie als einer Maßgeometrie entgegenstellen, zu entfernen. Wir knüpfen diese Auseinandersetzungen an das anschauliche Beispiel, welches die auf eine Fläche zweiten Grades gegründete projektivische Maßbestimmung ergibt.

Zwei beliebig angenommene Punkte des Raumes haben in bezug auf die Fläche eine absolute Invariante: ihr Doppelverhältnis zu den beiden Durchschnittspunkten ihrer Verbindungsgeraden mit der Fläche. Rücken aber die beiden Punkte auf die Fläche, so wird dies Doppelverhältnis unabhängig von der Lage der Punkte gleich Null, außer in dem Falle, daß die beiden Punkte auf eine Erzeugende zu liegen kommen, wo es unbestimmt wird. Dies ist die einzige Partikularisation, die in ihrer Beziehung eintreten kann, wenn sie nicht zusammenfallen, und wir haben also den Satz:

Die projektivische Maßbestimmung, welche man im Raume auf eine Fläche zweiten Grades gründen kann, ergibt für die Geometrie auf der Fläche noch keine Maßbestimmung.

Hiermit hängt zusammen, daß man durch lineare Transformationen der Fläche in sich selbst drei beliebige Punkte derselben mit drei anderen zusammenfallen lassen kann[44]).

Will man auf der Fläche selbst eine Maßbestimmung haben, so muß man die Gruppe der Transformationen beschränken, und dies erreicht man,

---

[44]) Diese Verhältnisse ändern sich bei der gew. Maßgeometrie; zwei unendlich ferne Punkte haben für sie freilich eine absolute Invariante. Der Widerspruch, den man in der Abzählung der linearen Transformationen der unendlich fernen Fläche in sich selbst hiermit finden könnte, erledigt sich dadurch, daß die unter ihnen befindlichen Translationen und Ähnlichkeitstransformationen das Unendlichferne überhaupt nicht ändern.

indem man einen beliebigen Raumpunkt (oder seine Polarebene) festhält. Der Raumpunkt sei zunächst nicht auf der Fläche gelegen. So projiziere man die Fläche von dem Punkte auf eine Ebene, wobei ein Kegelschnitt als Übergangskurve auftritt. Auf diesen Kegelschnitt gründe man in der Ebene eine projektivische Maßbestimmung, die man dann rückwärts auf die Fläche überträgt[45]). Dies ist eine eigentliche Maßbestimmung von konstanter Krümmung, und man hat also den Satz:

Auf der Fläche erhält man eine solche Maßbestimmung, sowie man einen außerhalb der Fläche gelegenen Punkt festhält.

Entsprechend findet man[46]):

Eine Maßbestimmung von verschwindender Krümmung erhält man auf der Fläche, wenn man für den festen Punkt einen Punkt der Fläche selbst wählt.

Für alle diese Maßbestimmungen auf der Fläche sind die Erzeugenden der Fläche Linien von verschwindender Länge. Der Ausdruck für das Bogenelement auf der Fläche ist also für die verschiedenen Bestimmungen nur um einen Faktor verschieden. Ein absolutes Bogenelement auf der Fläche gibt es nicht. Wohl aber kann man von dem Winkel sprechen, den Fortschreitungsrichtungen auf der Fläche miteinander bilden. —

Alle diese Sätze und Betrachtungen können nun ohne weiteres für Liniengeometrie benutzt werden. Für den Linienraum selbst existiert zunächst keine eigentliche Maßbestimmung. Eine solche erwächst erst, wenn wir einen linearen Komplex festhalten, und zwar erhält sie konstante oder verschwindende Krümmung, je nachdem der Komplex ein allgemeiner oder in spezieller (eine Gerade) ist. An die Auszeichnung eines Komplexes ist namentlich auch die Geltung eines absoluten Bogenelements geknüpft Unabhängig davon sind die Fortschreitungsrichtungen zu benachbarten Geraden, welche die gegebene schneiden, von der Länge Null, und auch kann man von einem Winkel reden, den zwei beliebige Fortschreitungsrichtungen miteinander bilden[47]).

VII. *Zur Interpretation der binären Formen.*

Es mag hier der übersichtlichen Gestalt gedacht werden, welche, unter Zugrundelegung der Interpretation von $x + iy$ auf der Kugelfläche, dem Formensysteme der kubischen und der biquadratischen binären Form erteilt werden kann.

Eine kubische binäre Form f hat eine kubische Kovariante Q, eine

---

[45]) Vgl. § 5 des Textes S. 472.

[46]) Vgl. § 4 des Textes S. 470.

[47]) Vgl. den Aufsatz: Über Liniengeometrie und metrische Geometrie. Math. Annalen, Bd. 5 (s. Abh. VIII dieser Ausgabe).

quadratische Δ, und eine Invariante R[48]. Aus f und Q setzt sich eine ganze Reihe von Kovarianten sechsten Grades

$$Q^2 + \lambda \cdot Rf^2$$

zusammen, unter denen auch Δ^3 enthalten ist. Man kann zeigen[49], daß jede Kovariante der kubischen Form in solche Gruppen von sechs Punkten zerfallen muß. Insofern λ komplexe Werte annehmen kann, gibt es zweifach unendlich viele derselben.

Das ganze so umgrenzte Formensystem kann auf der Kugel nun folgendermaßen repräsentiert werden[50]. Durch geeignete lineare Transformation der Kugel in sich selbst bringe man die drei Punkte, welche f repräsentieren, in drei äquidistante Punkte eines größten Kreises. Derselbe mag als Äquator bezeichnet sein; auf ihm haben die drei Punkte f die geographische Länge 0^0, 120^0, 240^0. So wird Q durch die Punkte des Äquators mit der Länge 60^0, 180^0, 300^0, Δ durch die beiden Pole vorgestellt. Jede Form $Q^2 + \lambda R f^2$ ist durch sechs Punkte repräsentiert, deren geographische Breite und Länge, unter α und β beliebige Zahlen verstanden, in dem folgenden Schema enthalten ist:

$$\left.\begin{array}{c|c|c|c|c|c|} \alpha & \alpha & \alpha & -\alpha & -\alpha & -\alpha \\ \beta & 120+\beta & 240+\beta & -\beta & 120-\beta & 240-\beta \end{array}\right. .$$

Verfolgt man diese Punktsysteme auf der Kugel, so ist es interessant, zu sehen, wie f und Q doppelt, Δ dreifach zählend aus denselben entsteht.

Eine biquadratische Form f hat eine ebensolche Kovariante H, eine Kovariante sechsten Grades T, zwei Invarianten i und j. Besonders zu bemerken ist die Schar biquadratischer Formen $iH + \lambda j f$, die alle zu dem nämlichen T gehören, und unter denen die drei quadratischen Faktoren, in welche man T zerlegen kann, doppelt zählend enthalten sind. —

Man lege jetzt durch den Mittelpunkt der Kugel drei zueinander rechtwinklige Achsen OX, OY, OZ. Ihre sechs Durchstoßpunkte mit der Kugel bilden die Form T. Die vier Punkte eines Quadrupels $iH + \lambda j f$ sind, unter x, y, z Koordination eines beliebigen Kugelpunktes verstanden, durch das Schema

$$\begin{array}{rrr} x, & y, & z, \\ x, & -y, & -z, \\ -x, & y, & -z, \\ -x, & -y, & z \end{array}$$

[48] Vgl. hierzu die betr. Abschnitte von Clebsch: Theorie der binären Formen (1871).

[49] Durch Betrachtung der linearen Transformationen von f in sich selbst, vgl. Math. Annalen, Bd. 4, S. 352. [Über eine geometrische Repräsentation der Resolventen algebraischer Gleichungen. Siehe Bd. II dieser Ausgabe.]

[50] [Man vgl. auch Beltrami, Ricerche sulla geometria delle forme binarie cubiche, Accademia di Bologna, Memorie, 1870 (1893).] [Beltramis Werke, Bd. II.]

vorgestellt. Die vier Punkte bilden jedesmal die Ecken eines symmetrischen Tetraeders, dessen gegenüberstehende Seiten von den Achsen des Koordinatensystems halbiert werden, wodurch die Rolle, welche T in der Theorie der biquadratischen Gleichungen als Resolvente von $iH + \lambda j f$ spielt, gekennzeichnet ist[51])

Erlangen, im Oktober 1872.

[51]) [An die Andeutungen des Textes schließen sich als unmittelbare Ausführung meine im Band II dieser Ausgabe abzudruckenden Arbeiten über „Binäre Formen mit linearen Transformationen in sich" an (siehe insbesondere Math. Annalen, Bd. 9, 1875).

Im übrigen verweise ich gern noch, indem ich diesen Wiederabdruck des Erlanger Programms abschließe, auf die Arbeiten von Moebius (die ich selbst erst nach ihrem inneren Zusammenhang erfaßte, nachdem ich bei der von der sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften in den Jahren 1885—1887 veranstalteten Gesamtausgabe seiner Werke mitwirken durfte). Moebius hat den allgemeinen Gruppenbegriff und auch viele der geometrischen Transformationen, die zu seiner Illustration im Erlanger Programm herangezogen werden, noch nicht gekannt, aber er hat, von einem sicheren Gefühl geleitet, seine aufeinanderfolgenden geometrischen Arbeiten genau so eingerichtet, wie es dem Grundgedanken des Programms entspricht. Schon im Mittelabschnitt seines Baryzentrischen Kalkuls (1827) ordnet er die „geometrischen Aufgaben" nach den „Verwandtschaften" der „Gleichheit" (Kongruenz), „Ähnlichkeit", „Affinität" und „Kollineation". Von 1853 an beginnen seine Veröffentlichungen über „Kreisverwandtschaft" (= Geometrie der reziproken Radien in der Ebene). Schon vorher (1849) liegen seine ersten Mitteilungen über die Symmetrie der Kristalle. 1863 aber, im Alter von 73 Jahren, setzt er mit Mitteilungen über „Elementarverwandtschaft" ein (d. h. über dasjenige Gebiet der Geometrie, welches wir heute Analysis situs nennen). Mit diesen Angaben wolle man die interessanten Ausführungen vergleichen, welche Herr Curt Reinhardt in Bd. II und Bd. IV von Moebius' Gesammelten Werken über die Entstehung und den Zusammenhang der einzelnen Arbeiten gemäß dem reichen Inhalt des handschriftlichen Nachlasses hat geben können. K.]