

APUNTES PARA UNA LICENCIATURA
BASADOS EN LAS LECCIONES DEL
PROF. SANCHO GUIMERÁ

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA

11 de diciembre de 2017

SANCHO GUIMERÁ

In Memoriam

El pasado 15 de octubre, festividad de Santa Teresa, falleció en Salamanca Juan Bautista Sancho Guimerá, catedrático que fue de las universidades de Barcelona y Salamanca, y mi profesor, maestro y amigo.

Le conocí en 1974, sin yo saberlo, en las asignaturas de Álgebra y Geometría Proyectiva que explicaban sus alumnos Loygorri y Pedro Luis en el segundo año de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad de Salamanca. Sobre todo en la Teoría de Galois que Loygorri desarrollaba usando sistemáticamente el producto tensorial para cambiar el cuerpo base, determinar los puntos de un álgebra, explicar qué propiedades son geométricas y cuáles son locales,...; en fin, para dar una visión geométrica de toda la teoría.

Al año siguiente fui alumno de Sancho en el curso de tercero. Sus clases comenzaban hacia las 12 y normalmente se prolongaban hasta las 4 ó las 5 de la tarde, paseando al final por los pasillos de la Facultad, o sus alrededores si el tiempo acompañaba. Cualquier tema de matemáticas pronto se entrelazaba con algún otro de física, historia, teología, poesía, política, filosofía, religión, literatura,... y nos hablaba de lo divino y de lo humano en el sentido literal de estos términos, de su vida y sus recuerdos familiares, de España y su historia, del $\lambda\acute{o}\gamma\omicron\varsigma$, de la ciencia y la bondad, de Dios y de Cristo, de etimologías, del canto gregoriano, de la universidad, de San Juan de la Cruz,... y, por supuesto, nos enseñaba matemáticas.

En su curso explicaba los haces de módulos sobre el espectro de un anillo, la descomposición primaria, la completación, la teoría de la dimensión, la dependencia entera y la desingularización de curvas algebraicas; señalando siempre la relación de estos temas con las otras asignaturas, la unidad y cohesión interna de las matemáticas. Estudiar a fondo su curso era también estudiar y entender mejor las otras asignaturas de tercero. Al explicar los anillos de fracciones nos decía que también en los espacios metrizable toda función continua en un abierto es cociente de dos funciones continuas globales, y que lo mismo es cierto para las funciones diferenciables en las variedades, y cómo esto ilumina la Topología, el Análisis y la Geometría Diferencial. Al explicar la teoría de la dimensión de los anillos nos decía que, llamando suma a la intersección y producto a la unión, los cerrados de un espacio topológico forman un anillo (salvo por la existencia de opuesto) y nos enseñaba cómo las cadenas de ideales primos permiten obtener también la teoría de la dimensión de espacios topológicos. Nos indicaba una demostración geométrica y evidente del Teorema de la Proyección de sistemas de Pfaff, y nos insistía en que de él se sigue directamente la integrabilidad de las distribuciones involutivas, un teorema fundamental del curso de Análisis de tercero. Al explicar la dependencia entera, nos decía que ese estudio de los morfismos finitos permite copiar al pie de la letra las definiciones, enunciados y demostraciones de la Teoría de Galois de segundo, cuando el cuerpo base se sustituye por un anillo noetheriano A , obteniéndose así la teoría del grupo fundamental del espectro de A . ¡Qué conmoción comprender que el teorema de Hermite de inexistencia de extensiones de discriminante ± 1 afirma que el espectro de \mathbb{Z} es simplemente conexo! ¡ver cómo se funden así la Geometría, el Álgebra, la Aritmética y la Topología! Seguir sus cursos era ir descubriendo la unidad esencial de las matemáticas y de toda la ciencia, la uni-versidad en su etimología. Y siempre transmitiendo su convicción de que cualquier tema, por difícil y enrevesado que parezca, se vuelve transparente y sencillo cuando se mira desde el punto de vista adecuado, cuando una mano de nieve introduce las buenas definiciones, intrínsecas y generales. Siempre directo a lo esencial, a los enunciados que iluminan toda la teoría. Como decía en el Prólogo de su tesis doctoral: *Permítaseme opinar aquí que la verdadera originalidad en todo saber es siempre paradójicamente la “luz nueva” que engendra la*

asimilación cada vez más profunda de los fundamentos, y no un amontonamiento (que empieza a sobarnos) de datos a la luz de lo ya conocido.

Hablaba mucho; pero escribía muy poco. Un alumno solía poner en la pizarra lo que iba entendiendo, y Sancho le corregía si algo estaba mal. Yo no lo vi personalmente; pero me ha llegado la anécdota de que a veces, si por algún motivo no podía dar su clase, en vez de avisar a los alumnos, se presentaba en el aula y afirmaba: *Lo que estamos estudiando lo entienden si comprenden ...* y, diciendo algo que iluminara todo el tema en cuestión, se marchaba sin más. Por supuesto que, al explicarnos los temas en clase, no los exponía con una sola frase; pero tendía a ello con fuerza y tesón admirables. Y si no con una sola frase, desde luego sí con pocas, y sin dejar fuera nada esencial. Mis apuntes “en limpio” de ese curso inolvidable son 28 folios, de líneas bien espaciadas y con algún que otro dibujo.

Después fui su alumno en el curso de cuarto, dedicado al Teorema de Riemann-Roch en curvas. Nos enseñaba que los haces son ubicuos en matemáticas y que la cohomología de haces ha de ser también el fundamento de la Topología Algebraica. Nos explicaba que los espacios topológicos finitos tienen una realización geométrica natural, que esencialmente son poliedros y tienen un papel importante en Topología y en Geometría Algebraica, y calculaba la cohomología de los haces de línea en la recta proyectiva proyectando ésta sobre un espacio topológico finito con 2 puntos cerrados y un punto denso. Nos decía que, aplicando el teorema de representabilidad al dual del primer grupo de cohomología se obtiene directamente la existencia del haz dualizante, y que es sencillo ver que en las curvas lisas es un haz de línea. El problema radica en probar que es el haz de diferenciales, lo que nuestro año hacía con un penoso cálculo local del conductor de una proyección de la curva sobre la recta proyectiva. Pero al final de ese año cayó en la cuenta de que si el teorema de representabilidad se aplica antes de tomar cohomología, a una resolución adecuada y no al último grupo de cohomología, el teorema de representabilidad da directamente la existencia del complejo dualizante tanto para variedades algebraicas como para sus morfismos propios y las aplicaciones propias entre espacios topológicos localmente compactos (y por supuesto las aplicaciones continuas entre espacios topológicos finitos¹). Además, aplicando a la inmersión diagonal $X \rightarrow X \times X$ el cálculo del dualizante de los productos directos y de las inmersiones regulares, se obtiene directamente que el dualizante de una variedad lisa de dimensión n es el haz de las n -formas diferenciales. Una vez más, puesta la teoría en su debida generalidad (dimensión arbitraria y morfismos, no sólo curvas) las propiedades obvias disolvían las dificultades.

Al terminar la carrera fui profesor no numerario en la Universidad de Salamanca, junto a un nutrido grupo de compañeros, y él dirigió mi tesis doctoral. Pasábamos de vez en cuando por su casa, siempre que queríamos comentarle algo, preguntarle sobre una dificultad, enseñarle un breve manuscrito que alguno había redactado, o algún texto más voluminoso y preparado... La costumbre era ir al caer la tarde, sin avisar nunca, y quedarse varias horas. Siempre estaba en su casa, siempre disponible, siempre abierto a todo el que pasara por allí. Hablando de lo divino y de lo humano, interesándose en todas las asignaturas de la carrera, indicando la importancia crucial de las buenas definiciones y el misterioso lazo que une el trabajo intelectual y la bondad moral. Enseñando cómo los temas se entrelazan y simplifican cuando se introducen puntos de vista adecuadamente generales y conceptos naturales y canónicos, cómo las ideas

¹A mediados de los años 80 Loygorri me pasó una copia de la obra *À la Poursuite des Champs* de Grothendieck, que en alguna parte usa órdenes finitos (que son espacios topológicos finitos) y plantea sobre ellos alguna cuestión que tiene respuesta evidente a partir de lo que Sancho nos enseñaba ya en cuarto sobre los espacios finitos, y que yo me había dado el gusto de poner en limpio en unas breves notas, incluyendo la teoría de la dualidad. Cuando se las envié a Grothendieck a Montpellier, en su respuesta se mostró sorprendido de la definición de realización geométrica de los órdenes finitos que daba Sancho, *qui a de quoi intriguer!* decía, y añadía: *Je suis enchanté que vous ayez (semble-t-il) entièrement tiré au claire la théorie de dualité dans le contexte des ordres finis.* ¡Vaya con el curso de cuarto de Sancho!

fundamentales son fecundas en todas partes. Exponiendo siempre su visión tan sugestiva y coherente de las matemáticas. En cierta ocasión me dijo: *En matemáticas, la única cuestión sería, la que realmente merece la pena ser pensada, es la pregunta ¿Qué decimos cuando decimos que...? ¿Qué fascinante su comprensión de los dos últimos siglos de las matemáticas como una sucesiva aclaración de los fundamentos implícitos en la geometría griega, en ese mundo diáfano que descubrieron los griegos hace ya 25 siglos!*

Y en su casa no es que escribiera muy poco, como en las clases de la Facultad, es que no escribía absolutamente nada, explicando siempre las matemáticas sin poner una sola letra en un papel. Me parece que pensaba que si un tema no se podía explicar en una conversación amigable, eso era señal inequívoca de que la comprensión aún era deficiente. ¡Cuántas veces no me habrá hablado de su visión de la Física! (que, definido lo que se entiende por observar, se llega de modo natural a la mecánica cuántica) y nunca logré entenderle bien.

Su convicción profunda e inquebrantable era que las matemáticas son una parte de la realidad especialmente cercana a Dios, en la que casi Le tocamos y palpamos, que forman parte del misterio de la Encarnación. De Sancho aprendí que dentro de nosotros llevamos inscrita un ansia insaciable de teorías claras y generales, de definiciones canónicas y naturales, de enunciados breves y precisos, de demostraciones sencillas y evidentes, y que las matemáticas nos muestran una y otra vez que ese anhelo siempre se ve colmado más allá de toda imaginación, que nuestras esperanzas siempre se quedan cortas.

He hablado de lo que hacía y decía Sancho; pero un hombre, mejor que a través de su obra, se comprende a la luz de lo que pretende, de lo que verdaderamente quiere. Su empeño era la realización de una Licenciatura de Matemáticas, con sus textos, que permitiera a los alumnos captar y aprender las ideas y conceptos esenciales de las matemáticas, y creía firmemente que, si no en una sola frase, a finales del siglo XX bien podían enseñarse en cinco años, y que la obra de Grothendieck era clave para lograrlo. Esos textos no llegaron a escribirse, más que de forma fragmentaria y embrionaria. Pero él nos enseñó, con Quevedo, que el hombre que realmente ha amado, podrá morir, y *será ceniza, mas tendrá sentido; polvo será, mas polvo enamorado*. Y Sancho amó mucho, y con pasión; también a las matemáticas. Ha reclinado el rostro sobre el Padre

dejando su cuidado
entre las azucenas olvidado.

Y el Padre, con esa costumbre Suya de colmar nuestros verdaderos anhelos mucho más allá de toda esperanza, entre otros regalos que ni siquiera podemos sospechar, le habrá recibido en Su regazo con esa última clase, esa luz, ese *λόγος* que vuelve transparente toda la ciencia.

Descanse en paz en el seno de nuestro Padre que está en los cielos, y que a todos nosotros también nos espera.

Badajoz, noviembre de 2011

Prólogo

Al escribir esas líneas en memoria del Prof. Sancho Guimerá era consciente de que algunos recuerdos dispersos y unas breves pinceladas no podían dar ni una somera idea de aquella Licenciatura que descubrí al iniciar con 17 años, como tantos jóvenes de mi generación, los estudios universitarios. Por eso me he decidido a redactar unos apuntes de los cursos que he juzgado más significativos para comprender su forma de entender una Licenciatura.

Con la intención de dar una idea cabal de aquellos estudios, he respetado esencialmente el nivel de cada curso y los temas que estudié en ellos, aunque me he dejado en el tintero algunos temas importantes que nos explicaron. Entre ellos, el estudio de las funciones elípticas (hasta dar el revestimiento universal de la esfera privada de 3 puntos con la función modular λ) en el curso de Análisis III; el estudio de las correspondencias de las curvas algebraicas (hasta obtener la desigualdad de Castelnuovo y la coincidencia con los endomorfismos de la variedad jacobiana) en el curso de Geometría Algebraica I; y el estudio de las conexiones en fibrados principales y sus fibrados asociados hasta llegar al teorema de holonomía (y que he sustituido por el estudio de los fibrados naturales) en el curso de Geometría Diferencial II.

Mi deuda y gratitud a mis profesores de la Universidad de Salamanca en los años 70, principalmente a D. Juan Bautista Sancho Guimerá y sus alumnos D. Antonio Pérez-Rendón Collantes, D. Pedro Luis García Pérez, D. Cristóbal García-Loygorri y Urzaiz, D. Jesús Muñoz Díaz, D. Agustín Marcelo Vega, D. Jaime Muñoz Masqué, D. Vicente Sierra Pouparelli y D. Ramón Galián Jiménez.

A lo largo de los años, algunos alumnos han elaborado apuntes y textos sobre las más diversas partes de esos cursos, con múltiples variaciones y sus propias aportaciones. Así, en la redacción de cada tema particular, a la hora de fijar con detalle el desarrollo de las demostraciones, he seguido las notas disponibles que me han parecido más claras y acabadas, debidas a muchos compañeros: Daniel Ruipérez, Gerardo Rodríguez, Muñoz Porrás, Juan Sancho y sus hermanos Teresa, Carlos, Pedro y Fernando, y a Ricardo Faro y mis hijos José y Alberto.

Por eso estos apuntes no son un libro al uso por varias razones:

1. No tienen autor definido, sino que se basan en cursos de muchos profesores y usan notas de muchos alumnos.
2. No pueden ser leídos secuencialmente, sino que cada asignatura supone el estudio simultáneo de las otras del mismo curso (incluyendo sendos cursos de Análisis en los dos primeros años, sobre las funciones de una y varias variables reales, y la Topología General).
3. Pretenden reflejar el estilo conciso e informal de los apuntes de un alumno, dando por sentadas muchas convenciones e hipótesis que están implícitas en el ambiente de cada curso, y sin duda serán claras para quien lo lea con atención desde el principio. Y aunque he procurado ser breve, he puesto siempre en cada asignatura los conceptos fundamentales y teoremas centrales, con demostraciones precisas y completas de todos ellos.

Pero bien sé que en estos apuntes no hay cabida para lo mejor de aquella Licenciatura fascinante y añorada.

Juan Antonio Navarro González

Parte I
Primer Curso

Capítulo 1

Álgebra I

1.1. Números Enteros, Racionales y Complejos

Una relación \equiv en un conjunto X es de **equivalencia** si es

1. *Reflexiva*: $x \equiv x, \forall x \in X$.
2. *Simétrica*: $x, y \in X, x \equiv y \Rightarrow y \equiv x$.
3. *Transitiva*: $x, y, z \in X, x \equiv y, y \equiv z \Rightarrow x \equiv z$.

La **clase de equivalencia** de $x \in X$ es $\bar{x} = [x] = \{y \in X : x \equiv y\}$.

Un subconjunto $C \subseteq X$ es una clase de equivalencia si $C = [x]$ para algún $x \in X$.

El **conjunto cociente** X/\equiv está formado por las clases de equivalencia.

La aplicación epimorfismo $\pi: X \rightarrow X/\equiv, \pi(x) = [x]$ es la **proyección canónica**.

Teorema: En X/\equiv sólo se identifican elementos equivalentes; $[x] = [y] \Leftrightarrow x \equiv y$.

Demostración: Si $[x] = [y]$, entonces $y \in [y] = [x]$, y $x \equiv y$.

Recíprocamente, si $x \equiv y$, como es reflexiva, basta ver que $[y] \subseteq [x]$.

Si $z \in [y]$, entonces $y \equiv z$; luego $x \equiv z$, y $z \in [x]$.

Corolario: Cada elemento de X está en una única clase de equivalencia de \equiv .

Demostración: Si $x \in [y]$, entonces $y \equiv x$; luego $[y] = [x]$.

Construcción de los Números Enteros: Sea $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

El conjunto \mathbb{Z} de los números enteros es el cociente de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ por la relación de equivalencia

$$(m, n) \equiv (m', n') \text{ cuando } m + n' = m' + n,$$

y la clase de (m, n) se denota $m - n$. Cada número natural n define un número entero, $n - 0$, lo que identifica \mathbb{N} con un subconjunto de $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

La **suma** y el **producto** de dos números enteros $a = m - n, b = r - s$ son

$$\begin{aligned} a + b &= (m + r) - (n + s) \\ a \cdot b &= (mr + ns) - (nr + ms) \end{aligned}$$

y están bien definidos. Si $a = m' - n'$, entonces $m + n' = m' + n$, y por tanto

$$\begin{aligned} m + n' + r + s &= m' + n + r + s \\ (m + n')r + (m' + n)s &= (m' + n)r + (m + n')s \end{aligned}$$

de modo que también $a + b = m' + r - (n' + s)$ y $ab = m'r + n's - (n'r + m's)$.

Reducimos así cada enunciado sobre \mathbb{Z} a un enunciado sobre \mathbb{N} .

Si los números naturales están libres de contradicción, también los números enteros lo están.

Ejemplo: Fijado un número natural n , la relación $a \equiv b$ (mód. n) cuando $b - a \in n\mathbb{Z}$, es una relación de equivalencia en \mathbb{Z} , y $[a] = a + n\mathbb{Z} = \{a + cn : c \in \mathbb{Z}\}$.

El conjunto cociente $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tiene exactamente n elementos:

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[1], [2], \dots, [n] = [0]\}.$$

Construcción de los Números Racionales: El conjunto \mathbb{Q} de los números racionales es el cociente de $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ por la relación de equivalencia

$$(a, s) \equiv (b, t) \text{ cuando } at = bs,$$

y la clase de (a, s) se denota $\frac{a}{s}$. Cada número entero a define un número racional $\frac{a}{1}$, lo que identifica \mathbb{Z} con un subconjunto de \mathbb{Q} .

La **suma** y el **producto** de $q = \frac{a}{s}$ y $r = \frac{b}{t}$ son

$$q + r = \frac{at + bs}{st}$$

$$q \cdot r = \frac{ab}{st}$$

Están bien definidos: si $q = \frac{a'}{s'}$, entonces $as' = a's$ y por tanto

$$(at + bs)s't = a'tst + bss't = (a't + bs')st$$

$$abs't = a'bst$$

de modo que también $q + r = \frac{a't + bs'}{s't}$ y $qr = \frac{a'b}{s't}$.

Reducimos así cada enunciado sobre \mathbb{Q} a un enunciado sobre \mathbb{Z} .

Si los números naturales están libres de contradicción, los números racionales también.

Números Complejos: En el curso de Análisis se construye el conjunto de los números reales \mathbb{R} como cociente de las sucesiones de Cauchy de números racionales, identificando las de igual límite, reduciendo así la teoría de números reales a la de números naturales.

Los números **complejos** son las parejas de números reales $z = x + yi$ que se suman y multiplican con las siguientes operaciones ($i^2 = -1$)

$$(x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$

$$(x_1 + y_1i) \cdot (x_2 + y_2i) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i.$$

y el conjunto de los números complejos se denota \mathbb{C} .

El **conjugado** de un número complejo $z = x + yi$ es $\bar{z} = x - yi$, y el **módulo** de z es el número real $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$.

$$\overline{z + u} = \bar{z} + \bar{u} \quad \overline{zu} = \bar{z}\bar{u} \quad \overline{\bar{z}} = z \quad |z| = |\bar{z}|$$

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \quad |zu| = |z| \cdot |u| \quad z + \bar{z} \leq 2|z| \quad |z + u| \leq |z| + |u|$$

Definición: Si $t \in \mathbb{R}$, ponemos $e^{it} = \cos t + i \sin t$, donde el seno y coseno se consideran siempre en radianes para que $\frac{d}{dt}(e^{it}) = ie^{it}$.

Luego $e^{2\pi ni} = 1$ cuando $n \in \mathbb{Z}$, y si $z \in \mathbb{C}$ es de módulo $\rho \neq 0$, entonces

$$z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

para algún número real θ (bien definido salvo la adición de un múltiplo entero de 2π) llamado **argumento** de z .

Las fórmulas del seno y coseno de una suma expresan que *el argumento de un producto es la suma de los argumentos*: $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$.

Así, un número complejo no nulo $z = \rho e^{i\theta}$ tiene n raíces n -ésimas complejas

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad ; \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Si $z = x + yi$, pondremos $e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$, de modo que $e^{z'+z} = e^{z'}e^z$.

1.2. El Grupo Cociente

Un subconjunto H de un grupo G es un **subgrupo** si es grupo con la operación de G ,

1. $a, b \in H \Rightarrow a \cdot b \in H$.
2. $1 \in H$.
3. $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$.

Ejemplos: Todo grupo admite los subgrupos **triviales** 1 y G .

La intersección de cualquier familia de subgrupos también es un subgrupo.

El subgrupo (a_1, \dots, a_n) **generado** por $a_1, \dots, a_n \in G$ es el menor subgrupo que los contiene (la intersección de todos los subgrupos que los contienen).

El subgrupo de \mathbb{Z} generado por a y b es $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} := \{ax + by : x, y \in \mathbb{Z}\}$.

El subgrupo generado por un elemento es $(a) = \{\dots, a^{-2}, a^{-1}, 1, a, a^2, \dots\}$.

Teorema: Cada subgrupo H de \mathbb{Z} está generado por un único número natural, $H = n\mathbb{Z}$.

Demostración: Si $H = 0$, tomamos $n = 0$.

Si $H \neq 0$, tomamos el menor número positivo n de H (existe porque $-H = H$), y $n\mathbb{Z} \subseteq H$ porque H es subgrupo. Ahora, si $m \in H$, dividimos m por n :

$$\begin{aligned} m &= cn + r, \quad 0 \leq r < n, \\ r &= m - cn \in H, \end{aligned}$$

Luego $r = 0$, por la elección de n , y $m \in n\mathbb{Z}$. Por tanto $H = n\mathbb{Z}$.

La unicidad es evidente.

Ejemplo: Dados $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, tendremos $n_1\mathbb{Z} + n_2\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$, $n_1\mathbb{Z} \cap n_2\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$ para ciertos $d, m \in \mathbb{N}$, que son el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de n_1 y n_2 .

Por tanto n_1 y n_2 son primos entre sí y sólo si $n_1\mathbb{Z} + n_2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

Proposición: Sea $f: G \rightarrow \bar{G}$ un morfismo de grupos. Si H es un subgrupo de G , entonces $f(H)$ es un subgrupo de \bar{G} . Si \bar{H} es un subgrupo de \bar{G} , entonces $f^{-1}(\bar{H})$ es un subgrupo de G .

En particular la **imagen** $\operatorname{Im} f = f(G)$ es un subgrupo de \bar{G} , y el **núcleo** $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(1)$ es un subgrupo de G .

Demostración: $1 \in f(H)$ porque $f(1) = 1$ y $1 \in H$.

Si $f(h'), f(h) \in f(H)$, entonces $f(h')f(h) = f(h'h) \in f(H)$ y $f(h)^{-1} = f(h^{-1}) \in f(H)$.

$1 \in f^{-1}(\bar{H})$, porque $f(1) = 1 \in \bar{H}$.

Si $g', g \in f^{-1}(\bar{H})$, entonces $f(g')f(g) = f(g'g) \in \bar{H}$ y $f(g^{-1}) = f(g)^{-1} \in \bar{H}$.

Proposición: *Un morfismo de grupos f es inyectivo si y sólo si $\text{Ker}(f) = 1$.*

Demostración: Si f es inyectivo, y $f(g) = 1 = f(1)$, entonces $g = 1$.

Si $\text{Ker } f = 1$, y $f(a) = f(b)$, entonces $f(a^{-1}b) = 1$; luego $a^{-1}b = 1$, y $a = b$.

Definición: $a, b \in G$ son **congruentes** módulo un subgrupo H , $a \equiv b$ (mód. H), cuando $a^{-1}b \in H$; es decir, $b \in aH$. Esta relación es de equivalencia,

1. $a \equiv a$, porque $a^{-1}a = 1 \in H$ para todo $a \in G$.
2. Si $a \equiv b$, entonces $a^{-1}b \in H$; luego $b^{-1}a = (a^{-1}b)^{-1} \in H$, y $b \equiv a$.
3. Si $a \equiv b$ y $b \equiv c$, entonces $a^{-1}b, b^{-1}c \in H$; luego $a^{-1}c = (a^{-1}b)(b^{-1}c) \in H$, y $a \equiv c$.

La clase de equivalencia de $a \in G$ es $aH = \{ah : h \in H\}$, y el cociente se denota G/H .

El **orden** de G es su cardinal, y el **índice** de H en G es el cardinal de G/H .

Teorema de Lagrange: *Sea H un subgrupo de un grupo finito G . El orden de H divide al orden de G , y el cociente es el índice de H en G ,*

$$|G/H| = |G| / |H|.$$

Demostración: Cada clase aH tiene el mismo cardinal que H , porque la aplicación epiyectiva

$$H \xrightarrow{a \cdot} aH, \quad h \mapsto ah,$$

es biyectiva: si $ax = ay$, entonces $x = a^{-1}(ax) = a^{-1}(ay) = y$.

Luego $|G|$ es el producto de $|H|$ por el número de clases, que es $|G/H|$.

Definición: Un subgrupo H de G es **normal** cuando $gHg^{-1} \subseteq H$, $\forall g \in G$.

El núcleo de un morfismo de grupos $f: G \rightarrow G'$ es un subgrupo normal:

Si $h \in \text{Ker } f$, entonces $f(ghg^{-1}) = f(g)f(h)f(g)^{-1} = f(g)f(g)^{-1} = 1$, y $ghg^{-1} \in \text{Ker } f$.

Teorema: *Si H es un subgrupo normal de G , existe una única estructura de grupo en G/H tal que $\pi: G \rightarrow G/H$ es morfismo de grupos. Además, $\text{Ker } \pi = H$.*

Demostración: La única estructura posible es $[a] \cdot [b] = [ab]$, y esta operación está bien definida, y define en G/H una estructura de grupo,

1. Si $[a'] = [a]$, $a' = ah$, $a'b = ahb = ab(b^{-1}hb) \in abH$, $[a'b] = [ab]$.
2. $([a] \cdot [b]) \cdot [c] = [ab] \cdot [c] = [(ab)c] = [a(bc)] = [a] \cdot [bc] = [a] \cdot ([b] \cdot [c])$.
3. $[a] \cdot [1] = [a \cdot 1] = [a]$, $[1] \cdot [a] = [1 \cdot a] = [a]$.
4. $[a] \cdot [a^{-1}] = [a \cdot a^{-1}] = [1]$, $[a^{-1}] \cdot [a] = [a^{-1} \cdot a] = [1]$.
5. $\text{Ker } \pi = \{a \in G : [a] = [1]\} = [1] = H$.

Propiedad Universal: *Sea H un subgrupo normal de G . Si $f: G \rightarrow G'$ es un morfismo de grupos y $H \subseteq \text{Ker } f$, existe un único morfismo $\phi: G/H \rightarrow G'$ tal que $\phi([a]) = f(a)$,*

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & G' \\ \pi \searrow & & \nearrow \phi \\ & G/H & \end{array} \quad f = \phi \pi$$

Demostración: La aplicación $\phi: G/H \rightarrow G'$, $\phi([g]) = f(g)$, está bien definida,

$$[g'] = [g], \quad g' = gh \in gH \subseteq g(\text{Ker } f), \quad f(g') = f(g)f(h) = f(g),$$

y es morfismo: $\phi([a] \cdot [b]) = \phi([ab]) = f(ab) = f(a) \cdot f(b) = \phi([a]) \cdot \phi([b])$.

Teorema de Isomorfía: Si $f: G \rightarrow G'$ es un morfismo de grupos, entonces la aplicación $\phi: G/\text{Ker } f \rightarrow \text{Im } f$, $\phi([g]) = f(g)$, es un isomorfismo de grupos.

Demostración: Tenemos un epimorfismo $\phi: G/\text{Ker } f \rightarrow \text{Im } f$, $\phi([g]) = f(g)$, por la propiedad universal, y es inyectivo: Si $1 = \phi([g]) = f(g)$, entonces $g \in \text{Ker } f$, y $[g] = 1$.

Definición: Un grupo G es **cíclico** si está generado por un elemento:

$$G = (g) = \{\dots, g^{-n}, \dots, g^{-1}, g^0 = 1, g, g^2, \dots, g^n, \dots\}.$$

Por ejemplo, el grupo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es cíclico, generado por la clase $[1]$.

Teorema: Todo grupo cíclico G es isomorfo a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ para algún número natural n .

Demostración: Si $G = (g)$, el morfismo $f: \mathbb{Z} \rightarrow G$, $f(m) = g^m$, es epiyectivo.

Como $\text{Ker } f = n\mathbb{Z}$ para algún $n \in \mathbb{N}$, tenemos un isomorfismo $\phi: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq G$, $\phi([m]) = g^m$.

Definición: El **orden** de un elemento g es el orden del subgrupo (g) que genera.

1. El orden de g es el primer número natural no nulo r tal que $g^r = 1$ (si existe), en cuyo caso $g^m = 1$ si y sólo si m es múltiplo de r .

En efecto, $\phi: \mathbb{Z}/r\mathbb{Z} \rightarrow (g)$, $\phi([m]) = g^m$, es un isomorfismo.

2. Si G es un grupo de orden n , entonces $g^n = 1$ para todo $g \in G$.
3. El orden de una permutación de forma d_1, \dots, d_r es el m.c.m. (d_1, \dots, d_r) .
4. Los generadores del grupo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ son las clases $[m]$ de los números primos con n .

Si $\pi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es la proyección canónica, tenemos que $[m]$ genera $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si y sólo si $\pi^{-1}([m\mathbb{Z}]) = m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}$ coincide con \mathbb{Z} .

5. El **subgrupo alternado** A_n es el núcleo del morfismo $\text{sgn}: S_n \rightarrow \{\pm 1\}$. Es un subgrupo normal de índice 2, porque $S_n/A_n \simeq \{\pm 1\}$; luego $|A_n| = n!/2$.

1.3. Polinomios con Coeficientes en un Cuerpo

Sea A un anillo (como siempre conmutativo y con unidad).

Un elemento $a \in A$ es un **divisor de cero** si $ab = 0$ para algún $b \neq 0$, es decir, si el morfismo de grupos $A \xrightarrow{a} A$ no es inyectivo. Un anillo $A \neq 0$ es **íntegro** (o un **dominio**) si carece de divisores de cero no nulos: $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ ó $b = 0$.

Un elemento **propio** (no nulo ni invertible) de un anillo íntegro es **irreducible** si no es producto de dos elementos propios.

Todo cuerpo k es íntegro: Si $ab = 0$ y $b \neq 0$, entonces $0 = abb^{-1} = a$. Los polinomios en una indeterminada x con coeficientes en un cuerpo k forman un anillo $k[x]$

$$(a_n x^n + \dots + a_0)(b_m x^m + \dots + b_0) = a_n b_m x^{n+m} + \dots + \left(\sum_{i+j=d} a_i b_j \right) x^d + \dots + a_0 b_0$$

y tenemos que $\text{gr}(PQ) = \text{gr } P + \text{gr } Q$ porque los cuerpos son íntegros.

Luego el anillo $k[x]$ es íntegro, sus invertibles son los polinomios constantes no nulos, y un polinomio es irreducible si no descompone en producto de polinomios de menor grado.

Teorema de División: *Sea Q un polinomio no nulo con coeficientes en un cuerpo k . Para cada polinomio $P \in k[x]$ existe una única pareja de polinomios $C, R \in k[x]$ (llamados **cociente** y **resto** de la división de P por Q) tal que*

$$P = C \cdot Q + R, \quad \text{gr } R < \text{gr } Q \quad \text{ó} \quad R = 0$$

Demostración: La existencia viene dada por el algoritmo usual de división de polinomios.

Para la unicidad, si $P = C_1Q + R_1$, donde $\text{gr } R_1 < \text{gr } Q$ ó $R_1 = 0$, entonces

$$Q(C_1 - C) = R - R_1.$$

Como $\text{gr}(R - R_1) < \text{gr } Q$, ha de ser $C_1 - C = 0$, y por tanto $R - R_1 = 0$.

Regla de Ruffini: *$P(x)$ es múltiplo de $x - a$ si y sólo si $P(a) = 0$.*

Demostración: Si $P(x) = C(x)(x - a) + r$, tenemos que $P(a) = C(a) \cdot 0 + r = r$. q.e.d.

1. *Todo polinomio irreducible en $k[x]$ de grado > 1 carece de raíces en k .*
2. *Sea P un polinomio de grado 2 ó 3. La condición necesaria y suficiente para que P sea irreducible en $k[x]$ es que no tenga raíces en k .*

Si P no es irreducible en $k[x]$, tendremos $P = Q_1Q_2$ donde algún factor tiene grado 1, y por tanto tiene una raíz en k .

3. *Si $a_1, \dots, a_r \in k$ son raíces distintas de un polinomio $P \in k[x]$, entonces P es múltiplo de $(x - a_1) \cdots (x - a_r)$.*

Por Ruffini, $P = (x - a_1)Q$, donde a_2, \dots, a_r son raíces de Q . Por inducción sobre r , $(x - a_2) \cdots (x - a_r)$ divide a Q , y $(x - a_1) \cdots (x - a_r)$ divide a P .

4. *El número de raíces de $P \neq 0$ en k está acotado por el grado de P .*

Fórmula de Interpolación de Lagrange: *Dados $a_1, \dots, a_n \in k$ distintos, y $b_1, \dots, b_n \in k$, existe un único polinomio $P \in k[x]$ de grado $< n$, tal que $P(a_1) = b_1, \dots, P(a_n) = b_n$,*

$$P(x) = \sum_{j=1}^n b_j \frac{Q_j(x)}{Q_j(a_j)}, \quad Q_j(x) = \frac{(x - a_1) \cdots (x - a_n)}{x - a_j}.$$

Demostración: $P(a_i) = \sum_j b_j \frac{Q_j(a_i)}{Q_j(a_j)} = b_i \frac{Q_i(a_i)}{Q_i(a_i)} = b_i$, y si coincidiera en a_1, \dots, a_n con otro polinomio Q de grado $< n$, entonces $Q - P$ tendría n raíces, y $Q - P = 0$.

Raíces de la Unidad: Las raíces complejas de $x^n - 1$ son las **raíces n -ésimas de la unidad** complejas. Como $(e^{\frac{2\pi k}{n}i})^n = e^{2\pi ki} = 1$ cuando $k \in \mathbb{Z}$, y un polinomio de grado n no puede tener más de n raíces, forman un grupo cíclico de orden n ,

$$\mu_n = \{\varepsilon_n, \varepsilon_n^2, \dots, \varepsilon_n^n = 1\}, \quad \varepsilon_n = e^{\frac{2\pi}{n}i} = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Las raíces n -ésimas de la unidad **primitivas** son los generadores de μ_n ; i.e., ε_n^m , donde m es primo con n (p. 7), y son las raíces del **polinomio ciclotómico** n -ésimo

$$\Phi_n(x) = \prod_m (x - e^{\frac{2\pi i}{n}m}); \quad \text{m.c.d.}(m, n) = 1, \quad 1 \leq m \leq n.$$

Como el orden de cualquier elemento de μ_n es un divisor de n , tenemos que los elementos de orden d son las raíces d -ésimas de la unidad primitivas, y por tanto

$$x^n - 1 = \prod_{\alpha \in \mu_n} (x - \alpha) = \prod_{d|n} \Phi_d(x) = \Phi_1(x) \dots \Phi_n(x)$$

lo que permite calcular inductivamente los polinomios $\Phi_n(x)$ y, al ser mónicos, muestra que tienen coeficientes enteros. Así, $\Phi_1(x) = x - 1$, $\Phi_2(x) = x + 1$, $\Phi_3(x) = x^2 + x + 1$, $\Phi_4(x) = x^2 + 1$, $\Phi_6(x) = x^2 - x + 1$ y, cuando p es un primo impar, $\Phi_p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$, $\Phi_{2p}(x) = \Phi_p(-x) = x^{p-1} - x^{p-2} + \dots - x + 1$.

1.4. El Anillo Cociente

Un subgrupo aditivo \mathfrak{a} de un anillo A es un **ideal** si es estable por el producto por elementos de A arbitrarios ($a \in A$, $b \in \mathfrak{a} \Rightarrow ab \in \mathfrak{a}$).

Un ideal $\mathfrak{m} \neq A$ es **maximal** si A es el único ideal que contiene estrictamente a \mathfrak{m} .

Un ideal $\mathfrak{p} \neq A$ es **primo** cuando $ab \in \mathfrak{p} \Rightarrow a \in \mathfrak{p}$ ó $b \in \mathfrak{p}$.

Un subgrupo aditivo $B \subseteq A$ es un **subanillo** si es estable por el producto y $1 \in B$.

Ejemplos: Si un ideal \mathfrak{a} contiene un elemento invertible, entonces $1 \in \mathfrak{a}$, y por tanto $\mathfrak{a} = A$. En particular, los únicos ideales de un cuerpo k son 0 y k .

La intersección de ideales de A también es un ideal de A .

La **suma** $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \{a + b : a \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{b}\}$ de dos ideales es el menor ideal que los contiene.

El ideal **generado** por $a_1, \dots, a_n \in A$ es el ideal $(a_1, \dots, a_n) = a_1A + \dots + a_nA$.

Un ideal \mathfrak{a} es **principal** si está generado por un elemento, $\mathfrak{a} = aA$.

Un **dominio de ideales principales** es un anillo íntegro en que todo ideal es principal.

El **producto** de dos ideales \mathfrak{a} y \mathfrak{b} es el ideal

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \{a_1b_1 + \dots + a_nb_n : a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{a}, b_1, \dots, b_n \in \mathfrak{b}\}$$

Los ideales maximales de \mathbb{Z} son los ideales $p\mathbb{Z}$, donde p es un número primo.

El núcleo de un morfismo de anillos $A \rightarrow B$ es un ideal, y su imagen es un subanillo.

Teorema: Sea \mathfrak{a} un ideal de un anillo A . Existe una única estructura de anillo en el grupo A/\mathfrak{a} tal que la proyección canónica $\pi : A \rightarrow A/\mathfrak{a}$ es morfismo de anillos.

Demostración: El único producto posible, $[a] \cdot [b] = [ab]$, está bien definido (y es fácil comprobar que define una estructura de anillo en A/\mathfrak{a} , cuya unidad es $[1]$):

$$[a] = [a'], \quad a' = a + c \in a + \mathfrak{a}, \quad a'b = ab + cb \in ab + \mathfrak{a}, \quad [a'b] = [ab].$$

Propiedad Universal: Si un morfismo de anillos $f : A \rightarrow B$ se anula en un ideal \mathfrak{a} , factoriza de modo único por un morfismo $\phi : A/\mathfrak{a} \rightarrow B$ tal que $\phi([a]) = f(a)$,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \pi \searrow & & \nearrow \phi \\ & A/\mathfrak{a} & \end{array} \quad f = \phi \pi$$

Demostración: Por la propiedad universal del grupo cociente, existe un único morfismo de grupos $\phi : A/\mathfrak{a} \rightarrow B$ tal que $f = \phi\pi$, y ϕ es morfismo de anillos:

$$\begin{aligned} \phi([a] \cdot [b]) &= \phi([ab]) = f(ab) = f(a)f(b) = \phi([a])\phi([b]), \\ \phi(1) &= \phi(\pi(1)) = f(1) = 1. \end{aligned}$$

Teorema de Isomorfía: Si $f: A \rightarrow B$ es un morfismo de anillos, entonces la aplicación $\phi: A/\text{Ker } f \rightarrow \text{Im } f$, $\phi([a]) = f(a)$, es un isomorfismo de anillos.

Demostración: Es isomorfismo de grupos, y morfismo de anillos por la propiedad universal.

Teorema Chino del Resto: Sean \mathfrak{a} y \mathfrak{b} ideales de un anillo A . Si $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = A$, entonces $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, y tenemos un isomorfismo de anillos

$$\phi: A/\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \longrightarrow (A/\mathfrak{a}) \times (A/\mathfrak{b}), \quad \phi([x]_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}) = ([x]_{\mathfrak{a}}, [x]_{\mathfrak{b}})$$

Demostración: Sea $1 = a + b \in \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$. Si $c \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, entonces $c = c(a + b) = ca + cb \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}$; así que $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, pues la inclusión $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ siempre es cierta.

Además, el núcleo del morfismo $f: A \rightarrow (A/\mathfrak{a}) \times (A/\mathfrak{b})$, $f(x) = ([x]_{\mathfrak{a}}, [x]_{\mathfrak{b}})$, es $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, y f es epiyectivo porque $f(bx + ay) = ([x]_{\mathfrak{a}}, [y]_{\mathfrak{b}})$:

$$\begin{aligned} x &= (a + b)x \equiv bx \equiv bx + ay && \text{(mód. } \mathfrak{a}) \\ y &= (a + b)y \equiv ay \equiv bx + ay && \text{(mód. } \mathfrak{b}) \end{aligned}$$

Corolario: $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$, cuando m y n son primos entre sí.

Teorema: Un ideal \mathfrak{a} de un anillo A es primo si y sólo si el anillo A/\mathfrak{a} es íntegro.

Un ideal \mathfrak{a} de un anillo A es maximal si y sólo si el anillo A/\mathfrak{a} es un cuerpo.

Demostración: Si \mathfrak{a} es primo y $[a] \cdot [b] = 0$, entonces $ab \in \mathfrak{a}$, y $a \in \mathfrak{a}$ ó $b \in \mathfrak{a}$; es decir, $[a] = 0$ ó $[b] = 0$.

Recíprocamente, si A/\mathfrak{a} es íntegro y $ab \in \mathfrak{a}$, entonces $[a] \cdot [b] = [ab] = 0$, y $[a] = 0$ ó $[b] = 0$; es decir, $a \in \mathfrak{a}$ ó $b \in \mathfrak{a}$.

Si \mathfrak{a} es maximal y $[a] \neq 0$, la inclusión $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a} + aA$ es estricta; luego $A = \mathfrak{a} + aA$, y $1 = x + ab$, donde $x \in \mathfrak{a}$, $b \in A$. Se sigue que $[a] \cdot [b] = 1$ y $[a]$ es invertible en A/\mathfrak{a} .

Recíprocamente, si A/\mathfrak{a} es cuerpo y $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$, tomamos $b \in \mathfrak{b}$ que no esté en \mathfrak{a} . Como $[b] \neq 0$, existe $[a] \in A/\mathfrak{a}$ tal que $[a][b] = 1$. Luego $1 \in ab + \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$, y $\mathfrak{b} = A$.

Corolario: $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ es un cuerpo cuando el número p es primo.

Corolario: Todo ideal maximal es primo.

Demostración: Todo cuerpo es íntegro.

Lema de Euclides: Si un número primo p divide a un producto, divide a un factor.

Demostración: $p\mathbb{Z}$ es un ideal maximal de \mathbb{Z} ; luego es un ideal primo.

Definición: El **indicador de Euler** $\phi(n)$ es el número de números primos con n que hay entre 1 y n . Coincide con el número de generadores de los grupos cíclicos de orden n , y por tanto con el grado del polinomio ciclotómico $\Phi_n(x)$, y también con el orden del grupo de invertibles $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ del anillo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

En efecto, una clase $[m]$ es invertible, $[1] = [a] \cdot [m] = a[m]$, precisamente cuando genera el grupo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Propiedades: $\phi(p^r) = (p - 1)p^{r-1}$ si p es un número primo.

$$\phi(n \cdot m) = \phi(n) \cdot \phi(m) \text{ si } n \text{ y } m \text{ son primos entre sí.}$$

Demostración: Los números entre 1 y p^r que no son primos con p^r son $p, 2p, \dots, p^{r-1}p$.

En cuanto a la segunda igualdad, por el teorema chino del resto

$$(\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z})^* = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*.$$

Congruencia de Euler: Si a es primo con n , entonces $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

Demostración: Si $[a] \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$, entonces $[1] = [a]^{\phi(n)} = [a^{\phi(n)}]$ (p. 7).

Congruencia de Fermat: $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, cuando el primo p no divide a n .

Corolario: Si p es primo, entonces $n^p \equiv n \pmod{p}$.

Congruencia de Wilson: $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$, cuando p es primo.

Demostración: $x^{p-1} - 1 = (x-1)(x-2)\dots(x-(p-1))$ en $\mathbb{F}_p[x]$, porque $x^{p-1} - 1$ tiene en \mathbb{F}_p las raíces $1, \dots, p-1$. Se termina al igualar los términos independientes.

Definición: Si $a \in \mathbb{Z}$ no es múltiplo de un primo impar p , el **símbolo de Legendre** $\left(\frac{a}{p}\right)$ es 1 si $\bar{a} \in \mathbb{F}_p^*$ es un cuadrado y -1 si no lo es.

Corolario: Sea p un primo impar. Los restos cuadráticos no nulos módulo p forman un subgrupo de \mathbb{F}_p^* de orden $\frac{p-1}{2}$, y

$$\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \left(\frac{b}{p}\right).$$

Demostración: El núcleo del morfismo $f: \mathbb{F}_p^* \rightarrow \mathbb{F}_p^*$, $f(x) = x^2$, es $\{\pm 1\}$ porque $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$; y $-1 \neq 1$ al ser $p \neq 2$.

Por el teorema de isomorfía, la imagen \mathbb{F}_p^{*2} de f tiene orden $\frac{p-1}{2}$.

Ahora, $\mathbb{F}_p^*/\mathbb{F}_p^{*2} \simeq \{\pm 1\}$ porque es un grupo de orden 2, y el símbolo de Legendre es la proyección canónica $\pi: \mathbb{F}_p^* \rightarrow \mathbb{F}_p^*/\mathbb{F}_p^{*2} \simeq \{\pm 1\}$; luego es morfismo de grupos.

Corolario: $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$.

Demostración: Si $a \in \mathbb{F}_p^*$, entonces $a^{\frac{p-1}{2}} = \pm 1$ porque $(a^{\frac{p-1}{2}})^2 = a^{p-1} = 1$.

Si a es un cuadrado, $a = b^2$, y $a^{\frac{p-1}{2}} = b^{p-1} = 1$. Como $x^{\frac{p-1}{2}} - 1$ no puede tener más raíces que el grado, $a^{\frac{p-1}{2}} = 1$ si y sólo si a es un cuadrado en \mathbb{F}_p .

Corolario: -1 es resto cuadrático módulo $p \neq 2$ si y sólo si $p \equiv 1 \pmod{4}$.

1.4.1. Lema de Gauss

Lema: Si p es un número primo, $p\mathbb{Z}[x]$ es un ideal primo de $\mathbb{Z}[x]$.

Demostración: El ideal $p\mathbb{Z}[x]$ es el núcleo del morfismo epiyectivo de anillos

$$\phi: \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{F}_p[x], \quad \phi\left(\sum_i a_i x^i\right) = \sum_i \bar{a}_i x^i.$$

Luego $\mathbb{Z}[x]/p\mathbb{Z}[x] \simeq \mathbb{F}_p[x]$, que es un anillo íntegro, y el ideal $p\mathbb{Z}[x]$ es primo.

Lema de Gauss: Si $P \in \mathbb{Z}[x]$ descompone en producto $P = Q_1 Q_2$ de polinomios con coeficientes racionales, multiplicando los factores por constantes tenemos una descomposición $P = Q'_1 Q'_2$ en $\mathbb{Z}[x]$. Por tanto, si P es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$, también lo es en $\mathbb{Q}[x]$.

Demostración: Reduciendo a común denominador los coeficientes de Q_1 y Q_2 tenemos

$$P = \frac{1}{a}(a_0 x^n + \dots + a_n) \cdot \frac{1}{b}(b_0 x^m + \dots + b_m)$$

$$abP = (a_0 x^n + \dots + a_n)(b_0 x^m + \dots + b_m)$$

donde $a, a_0, \dots, a_n, b, b_0, \dots, b_m \in \mathbb{Z}$.

Si p es un factor primo de ab , por el lema divide a un factor del segundo miembro.

Después de suprimir todos los factores primos de ab , obtenemos una descomposición en $\mathbb{Z}[x]$,

$$P = (a'_0 x^n + \dots + a'_n)(b'_0 x^m + \dots + b'_m).$$

Criterio de Reducción: Sea $Q = c_0 x^n + \dots + c_n \in \mathbb{Z}[x]$, y p un primo que no divide a c_0 . Si Q tiene un factor de grado d en $\mathbb{Z}[x]$, entonces la reducción $\bar{Q} = \bar{c}_0 x^n + \dots + \bar{c}_n \in \mathbb{F}_p[x]$ también tiene un factor de grado d en $\mathbb{F}_p[x]$.

Por tanto, si \bar{Q} es irreducible en $\mathbb{F}_p[x]$, entonces Q es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$.

Demostración: Tenemos que $\text{gr } \bar{Q} = \text{gr } Q$, porque $\bar{c}_0 \neq 0$.

Si tenemos una descomposición $Q = AB$ en $\mathbb{Z}[x]$, entonces $\bar{Q}(x) = \bar{A}\bar{B}$ y

$$\text{gr } \bar{A} + \text{gr } \bar{B} = \text{gr } \bar{Q} = \text{gr } Q = \text{gr } A + \text{gr } B.$$

Como $\text{gr } \bar{A} \leq \text{gr } A$ y $\text{gr } \bar{B} \leq \text{gr } B$, concluimos que $\text{gr } \bar{A} = \text{gr } A$, y $\text{gr } \bar{B} = \text{gr } B$.

Por último, si \bar{Q} es irreducible, entonces Q no admite en $\mathbb{Z}[x]$ factores de grado $1, \dots, n-1$; luego tampoco en $\mathbb{Q}[x]$ por el Lema de Gauss.

Criterio de Eisenstein: Un polinomio $Q = c_0 x^n + \dots + c_n \in \mathbb{Z}[x]$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ cuando hay un número primo p que no divide a c_0 y

1. p divide a c_1, \dots, c_n .
2. p^2 no divide a c_n .

Demostración: Por el lema de Gauss, si Q no es irreducible, es producto de polinomios no constantes con coeficientes enteros, y reduciendo módulo p obtenemos

$$Q = (a_0 + a_1 x + \dots + a_r x^r)(b_0 + b_1 x + \dots + b_{n-r} x^{n-r}),$$

$$\bar{c}_0 x^n = (\bar{a}_0 + \bar{a}_1 x + \dots + \bar{a}_r x^r)(\bar{b}_0 + \bar{b}_1 x + \dots + \bar{b}_{n-r} x^{n-r}),$$

$$\bar{c}_0 x^n = (\bar{a}_r x^r)(\bar{b}_{n-r} x^{n-r}).$$

Luego $\bar{a}_0 = \bar{b}_0 = 0$, y $c_n = a_0 b_0$ es múltiplo de p^2 , contra la hipótesis de que no lo es.

Corolario: Si p es primo, el polinomio ciclotómico $\Phi_p(x)$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$.

Demostración: $\Phi_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + \dots + x + 1$ es irreducible si y sólo si lo es

$$\Phi_p(x+1) = \frac{(x+1)^p - 1}{x} = x^{p-1} + \binom{p}{1} x^{p-2} + \dots + \binom{p}{i} x^{p-i-1} + \dots + \binom{p}{p-1}.$$

El número combinatorio $\binom{p}{i} = \frac{p(p-1)\dots(p-i+1)}{i!}$ es múltiplo de p cuando $1 \leq i \leq p-1$, y $\binom{p}{p-1} = p$ no es múltiplo de p^2 . Luego $\Phi_p(x+1)$ es irreducible.

1.5. Anillos Euclídeos

Un anillo íntegro A es **euclídeo** si hay una aplicación $\delta : A - \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que

1. $\delta(a) \leq \delta(ab)$ para todo $a, b \in A$ no nulos.
2. Si $a, b \in A$, $a \neq 0$, existen $c, r \in A$ tales que $b = ac + r$, $\delta(r) < \delta(a)$ ó $r = 0$.

Ejemplos: \mathbb{Z} es euclídeo, con $\delta(n) = |n|$; y $k[x]$ es euclídeo, con $\delta(P) = \text{gr } P$.

El anillo de los **enteros de Gauss** $A = \mathbb{Z}[i] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$, con $\delta(z) = z \cdot \bar{z} = |z|^2$, es euclídeo. En efecto, para cada número complejo $u + vi$ existe $x + yi \in A$ tal que $|(u + vi) - (x + yi)| < 1$ (basta tomar $|u - x|, |v - y| \leq 1/2$). Por tanto, si $a, b \in A$, $a \neq 0$, existe $c \in A$ tal que $|\frac{b}{a} - c| < 1$; luego $r = b - ac \in A$, y $|r| = |a(\frac{b}{a} - c)| < |a|$.

Teorema: *Todo ideal \mathfrak{a} de un anillo euclídeo es principal, $\mathfrak{a} = aA$.*

Demostración: Si $\mathfrak{a} = 0$, tomamos $a = 0$.

Si $\mathfrak{a} \neq 0$, sea $a \in \mathfrak{a}$ con $\delta(a)$ mínimo, y $aA \subseteq \mathfrak{a}$ porque $a \in \mathfrak{a}$. Si $b \in \mathfrak{a}$, dividimos b por a :

$$\begin{aligned} b &= ac + r, \quad \text{con } \delta(r) < \delta(a) \text{ ó } r = 0, \\ r &= b - ac \in \mathfrak{a}, \end{aligned}$$

así que $r = 0$, por la definición de a . Luego $b = ac \in aA$, y $\mathfrak{a} = aA$.

Definición: Sea A un anillo euclídeo. Si $a, b \in A$, tendremos que

$$aA + bA = dA, \quad aA \cap bA = mA$$

donde d es el **máximo común divisor** de a y b (divisor común que es múltiplo de cualquier otro divisor común), y m es el **mínimo común múltiplo**, (múltiplo común que divide a cualquier otro múltiplo común). La igualdad $dA = aA + bA$ prueba sin más la

Identidad de Bézout: $d = \alpha a + \beta b$, donde $\alpha, \beta \in A$.

Lema: *Si a divide a un producto bc y es primo con b , entonces divide a c .*

Demostración: $1 = \alpha a + \beta b$, $c = \alpha ac + \beta bc$. Como a divide a los sumandos, divide a c .

Corolario: *Toda raíz racional de $c_0x^n + c_1x^{n-1} + \dots + c_n \in \mathbb{Z}[x]$ es $x = \frac{a}{b}$, donde a es un divisor de c_n y b es un divisor de c_0 .*

Demostración: Si $\frac{a}{b}$ es una raíz racional, donde a y b son primos entre sí,

$$c_0a^n + c_1a^{n-1}b + \dots + c_{n-1}ab^{n-1} + c_nb^n = 0;$$

y $c_nb^n = -a(c_0a^{n-1} + \dots + c_{n-1}b^{n-1})$. Al ser a primo con b , divide a c_n .

Igualmente b divide a c_0a^n y, al ser primo con a , divide a c_0 .

Lema de Euclides: *Si $p \in A$ no es nulo, las siguientes condiciones son equivalentes,*

1. p es irreducible.
2. pA es un ideal maximal.
3. pA es un ideal primo.

Demostración: (1 \Rightarrow 2) Si p es irreducible y $pA \subseteq bA$, entonces $p = bc$, y al ser p irreducible, b ó c es invertible en A . Si lo es b , $bA = A$, y si lo es c , $bA = bcA = pA$.

(2 \Rightarrow 3) Todo ideal maximal es primo (p. 10).

(3 \Rightarrow 1) Si pA es primo, y $ab = p \in pA$, entonces $a \in pA$ ó $b \in pA$. Si $a \in pA$,

$$a = pc, \quad p = ab = pcb, \quad bc = 1,$$

y b es invertible. Igualmente, a es invertible si $b \in pA$. Luego p es irreducible.

Teorema de Descomposición: *Todo elemento propio de un anillo euclídeo A descompone, de modo único salvo el orden y factores invertibles, en producto de irreducibles.*

Demostración: Probemos la existencia. Si a no es irreducible, $a = bc$, donde los factores son propios. Veamos que $\delta(b), \delta(c) < \delta(a)$.

Si $\delta(b) = \delta(a)$, dividimos b por a ,

$$\begin{aligned} b &= ad + r, \\ r &= b - ad = b(1 - cd), \end{aligned}$$

y $1 \neq cd$ porque c es propio; absurdo, $\delta(r) \geq \delta(b) = \delta(a)$.

Ahora, por inducción sobre $\delta(a)$, ambos factores b, c descomponen en producto de irreducibles; luego a también.

Veamos la unicidad. Si $a = p_1 \cdots p_r$, el número de veces que se repite, salvo invertibles, un factor irreducible p en la descomposición es el mayor exponente n tal que p^n divide a a .

En efecto, si p^n divide a a , por el lema de Euclides p divide a algún factor p_i ; luego p coincide con p_i salvo un factor invertible y p^{n-1} divide a $p_1 \cdots \widehat{p}_i \cdots p_r$.

Reiterando el argumento, vemos que n factores coinciden con p .

Algoritmo de Euclides: Si $a = cb + r$, entonces $\text{m.c.d.}(a, b) = \text{m.c.d.}(b, r)$.

Demostración: $aA + bA \subseteq bA + rA$ porque $a = cb + r$, y $bA + rA \subseteq aA + bA$ porque $r = a - cb$; luego $aA + bA = bA + rA$. q.e.d.

Mediante reiteradas divisiones podemos calcular $d = \text{m.c.d.}(a, b)$, como el último resto no nulo, y los coeficientes de la Identidad de Bézout, pues si $d = \alpha r + \beta b$, entonces

$$d = \alpha r + \beta b = \alpha(a - cb) + \beta b = \alpha a + (\beta - \alpha c)b.$$

Así, la ecuación diofántica $ax + by = c$ tiene solución si y sólo si $c \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$, y en tal caso, si $d = \alpha a + \beta b$, una solución particular es $x_o = \alpha c/d$, $y_o = \beta c/d$.

1.5.1. Extensiones y Raíces

Una **k -álgebra** es un anillo A con un morfismo de anillos $j: k \rightarrow A$, de modo que A es un k -espacio vectorial, $\lambda a = j(\lambda)a$, e identificaremos λ con $j(\lambda)$.

La dimensión de A como k -espacio vectorial es el **grado** $[A : k]$ de A sobre k .

Dadas dos k -álgebras A, B , una aplicación $f: A \rightarrow B$ es **morfismo** de k -álgebras si es morfismo de anillos y $f(\lambda) = \lambda$, y es un **isomorfismo** si es biyectivo.

Una **extensión** es una k -álgebra L que es cuerpo, es **finita** si lo es su grado, y **trivial** si su grado es 1, $k \xrightarrow{\sim} L$. La extensión **generada** por $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$ es

$$k(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \{a/b: a, b \in k[\alpha_1, \dots, \alpha_n], b \neq 0\}.$$

Una **raíz** de $P = c_0x^n + \dots + c_n \in k[x]$ es un elemento α de una extensión L de k tal que $P(\alpha) = c_0\alpha^n + \dots + c_n = 0$, y su **multiplicidad** es el mayor exponente m tal que $(x - \alpha)^m$ divide a P .

Consideremos la descomposición de P en factores irreducibles en $L[x]$:

$$P = c_0(x - \alpha_1)^{m_1} \dots (x - \alpha_r)^{m_r} Q_1^{n_1} \dots Q_s^{n_s}$$

donde $\text{gr } Q_i > 1$ (r ó s puede ser nulo).

Las raíces de P en L son $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ y sus multiplicidades son m_1, \dots, m_r . *El número de raíces en una extensión, contadas con su multiplicidad, nunca supera al grado del polinomio,*

$$m_1 + \dots + m_r \leq \text{gr } P(x),$$

y diremos que P tiene **todas sus raíces** en L si se da la igualdad. En tal caso

$$c_0x^n + c_1x^{n-1} + \dots + c_{n-1}x + c_n = c_0(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n),$$

donde $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son las raíces de P en L , repetidas tantas veces como indique su multiplicidad.

Igualando coeficientes obtenemos las **Fórmulas de Cardano**:

$$(-1)^r \frac{c_r}{c_0} = \sum_{i_1 < \dots < i_r} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_r}, \quad 1 \leq r \leq n.$$

Definición: Un polinomio $P(x_1, \dots, x_n)$ con coeficientes en un anillo A es **simétrico** si cumple que $P(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = P(x_1, \dots, x_n)$, $\forall \sigma \in S_n$.

Las **funciones simétricas elementales** son

$$s_r(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1 < \dots < i_r} x_{i_1} \dots x_{i_r}, \quad 1 \leq r \leq n.$$

Por ejemplo, $s_1(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$, y $s_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 \dots x_n$.

Teorema de las Funciones Simétricas: Si $P(x_1, \dots, x_n) \in A[x_1, \dots, x_n]$ es simétrico, existe un único polinomio $Q(x_1, \dots, x_n)$ con coeficientes en A tal que

$$P(x_1, \dots, x_n) = Q(s_1, \dots, s_n), \quad s_r = s_r(x_1, \dots, x_n).$$

Demostración: Probaremos la existencia por inducción sobre n y el grado de P , y podemos suponer que P es homogéneo.

Como $P(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ es simétrico, existe un polinomio $\bar{Q}(x_1, \dots, x_{n-1})$ tal que

$$P(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \bar{Q}(\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_{n-1}), \quad \bar{s}_r = s_r(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Ahora $P(x_1, \dots, x_n) - \bar{Q}(s_1, \dots, s_{n-1})$ se anula al pasar al cociente por (x_n) ; luego es múltiplo de x_n y, al ser simétrico, es múltiplo de $s_n = x_1 \dots x_n$,

$$P(x_1, \dots, x_n) - \bar{Q}(s_1, \dots, s_{n-1}) = s_n P'(x_1, \dots, x_n).$$

Como $P'(x_1, \dots, x_n)$ es simétrico, y homogéneo de grado $\text{gr } P - n$, por inducción

$$P'(x_1, \dots, x_n) = Q'(s_1, \dots, s_n)$$

para algún polinomio $Q'(x_1, \dots, x_n)$, y tomando $Q = \bar{Q} + x_n Q'$,

$$P(x_1, \dots, x_n) = \bar{Q}(s_1, \dots, s_{n-1}) + s_n Q'(s_1, \dots, s_n) = Q(s_1, \dots, s_n).$$

La unicidad es consecuencia del siguiente teorema:

Teorema: Sea $Q \in A[x_1, \dots, x_n]$. Si $Q(s_1, \dots, s_n) = 0$, entonces $Q(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Demostración: Es evidente cuando $n = 1$.

Si $n \geq 2$, y el teorema fuera falso, tomamos $Q(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ de grado mínimo en x_n tal que $Q(s_1, \dots, s_n) = 0$,

$$Q = Q_0(x_1, \dots, x_{n-1}) + Q_1(x_1, \dots, x_{n-1})x_n + \dots + Q_d(x_1, \dots, x_{n-1})x_n^d.$$

Poniendo $x_n = 0$ en la identidad $Q(s_1, \dots, s_n) = 0$, obtenemos $Q_0(\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_{n-1}) = 0$.

Por inducción $Q_0 = 0$, y

$$Q(x_1, \dots, x_n) = x_n \cdot (Q_1 + \dots + Q_d x_n^{d-1}) = x_n \cdot R(x_1, \dots, x_n).$$

Luego $R(x_1, \dots, x_n)$ es un polinomio no nulo, de grado menor que $Q(x_1, \dots, x_n)$, tal que $R(s_1, \dots, s_n) = 0$, en contra de la elección de Q .

Lema: $k[x]/(P)$ es una k -álgebra de grado $d = \text{gr } P$, y una base es $1, \bar{x}, \dots, \bar{x}^{d-1}$.

Demostración: Si $V = k \oplus \dots \oplus kx^{d-1}$, basta ver que la aplicación lineal

$$\pi: V \rightarrow k[x]/(P(x)), \quad \pi(Q) = [Q]$$

es isomorfismo. Es inyectiva porque V no contiene múltiplos no nulos de P , y epiyectiva porque en $k[x]/(P)$ cada polinomio coincide con el resto de su división por P .

Teorema de Kronecker: Si $P \in k[x]$ es irreducible, entonces una raíz de P es $\bar{x} \in k[x]/(P)$; y si $\alpha \in L$ es otra raíz de P , existe un isomorfismo de k -álgebras $k[x]/(P) \simeq k(\alpha)$, $\bar{x} \mapsto \alpha$.

Demostración: El ideal (P) es maximal por el lema de Euclides; luego $k[x]/(P)$ es una extensión de k . Veamos que \bar{x} es una raíz de $P = \sum_i a_i x^i$

$$P(\bar{x}) = \sum_i a_i [\bar{x}]^i = [\sum_i a_i x^i] = [P(x)] = 0.$$

Si $\alpha \in L$ es otra raíz, la imagen del morfismo de k -álgebras $k[x] \rightarrow k[\alpha]$, $x \mapsto \alpha$, es $k[\alpha]$, y su núcleo contiene al ideal maximal (P) .

Luego el núcleo es (P) y por el teorema de isomorfía tenemos un isomorfismo

$$k[x]/(P) \xrightarrow{\sim} k[\alpha], \quad [Q(x)] \mapsto Q(\alpha).$$

Por tanto $k[\alpha]$ es cuerpo, porque $k[x]/(P)$ lo es, y $k[\alpha] = k(\alpha)$.

Corolario: Sea $P \in k[x]$ irreducible de grado d . Si α es una raíz de P , entonces P divide a todos los polinomios con coeficientes en k que admitan la raíz α , y

$$k(\alpha) = k \oplus k\alpha \oplus k\alpha^2 \oplus \dots \oplus k\alpha^{d-1}.$$

Ejemplos: Los polinomios $x^n - 2$ son irreducibles en $\mathbb{Q}[x]$ por el criterio de Eisenstein; luego $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$ es una extensión finita de \mathbb{Q} de grado n .

La igualdad $k(\alpha) = k[\alpha]$ expresa la posibilidad de racionalizar las expresiones algebraicas: si $Q \in k[x]$ no admite la raíz α , la Identidad de Bézout, $1 = AP + BQ$, permite racionalizar $\frac{1}{Q(\alpha)}$, pues la sustitución $x = \alpha$ muestra que $\frac{1}{Q(\alpha)} = B(\alpha)$.

Teorema: Si $P \in k[x]$ no es constante, tiene todas sus raíces en una extensión finita de k .

Demostración: P tiene una raíz α en una extensión finita K , y $P = (x - \alpha)Q$, $Q \in K[x]$.

Por inducción sobre el grado, Q tiene todas sus raíces en una extensión finita L de K .

Luego $P = (x - \alpha)Q$ tiene todas sus raíces en L , que es una extensión finita de k :

Teorema del Grado: Si $k \rightarrow K \rightarrow L$ son extensiones finitas,

$$[L : k] = [L : K] \cdot [K : k].$$

Demostración: Si $K = ku_1 \oplus \dots \oplus ku_n$, y $L = Kv_1 \oplus \dots \oplus Kv_m$, entonces

$$L = (ku_1 \oplus \dots \oplus ku_n)v_1 \oplus \dots \oplus (ku_1 \oplus \dots \oplus ku_n)v_m = \bigoplus_{i,j} ku_iv_j.$$

Teorema de D'Alembert: Si $P \in \mathbb{C}[x]$ no es constante, tiene alguna raíz compleja.

Demostración: Si $P \in \mathbb{R}[x]$ es de grado $n = 2^d m$, con m impar, procedemos por inducción sobre d , y es cierto cuando $d = 0$ por el Teorema de Bolzano.

Sea L una extensión de \mathbb{C} donde P tenga todas sus raíces, $P = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$.

Dado $a \in \mathbb{R}$, el polinomio de raíces $\alpha_i + \alpha_j + a\alpha_i\alpha_j$ tiene grado $\binom{n}{2} = 2^{d-1}m(n-1)$ y coeficientes reales (son funciones simétricas de las raíces α_i).

Por inducción este polinomio tiene alguna raíz compleja $\alpha_i + \alpha_j + a\alpha_i\alpha_j$.

Luego existen índices i, j , y números reales $a \neq b$ tales que

$$\alpha_i + \alpha_j + a\alpha_i\alpha_j, \alpha_i + \alpha_j + b\alpha_i\alpha_j \in \mathbb{C}.$$

Luego $\alpha_i + \alpha_j, \alpha_i\alpha_j \in \mathbb{C}$, y α_i, α_j son raíces de un polinomio de grado 2 con coeficientes complejos, que tiene todas sus raíces complejas: $\alpha_i, \alpha_j \in \mathbb{C}$.

Si $P \in \mathbb{C}[x]$ y \bar{P} es el polinomio de coeficientes conjugados, $P\bar{P} \in \mathbb{R}[x]$, y $P\bar{P}$ tiene una raíz compleja α , que es raíz de P ó de \bar{P} , en cuyo caso $\bar{\alpha}$ es raíz de P .

1.6. Aplicaciones

1.6.1. Irracionales Cuadráticos

Un elemento α de una extensión L de k es **algebraico** sobre k si es raíz de un polinomio no nulo con coeficientes en k , y por tanto de un factor irreducible P_α (el **polinomio mínimo** de α). Una extensión $k \rightarrow L$ es **algebraica** si todos sus elementos son algebraicos sobre k .

P_α divide a todo polinomio con coeficientes en k que admita la raíz α (p. 16) y

$$[k(\alpha) : k] = \text{gr } P_\alpha.$$

Lema: $\alpha \in L$ es algebraico sobre k si y sólo si $k(\alpha)$ es una extensión finita de k .

Demostración: Si $k(\alpha)$ es una extensión finita de grado d , las potencias $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^d$ son linealmente dependientes, $a_0 + a_1\alpha + \dots + a_d\alpha^d = 0$, y α es algebraico.

Corolario: Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son algebraicos, la extensión $k \rightarrow k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es finita.

Demostración: Por inducción sobre n , las siguientes extensiones son finitas

$$k \longrightarrow k(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \longrightarrow k(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n).$$

Teorema: Los elementos de L algebraicos sobre k forman una extensión de k .

Demostración: Si α, β son algebraicos, entonces $k(\alpha, \beta)$ es una extensión finita de k , y todos sus elementos son algebraicos sobre k . En particular $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ y α/β .

Teorema: Sea $k \rightarrow K$ una extensión algebraica, y L una extensión de K . Si $\alpha \in L$ es algebraico sobre K , entonces α es algebraico sobre k .

Demostración: Si α es raíz de $c_0x^n + \dots + c_n \in K[x]$, entonces $k(c_0, \dots, c_n, \alpha)$ es extensión finita de $k(c_0, \dots, c_n)$, que es extensión finita de k , y α es algebraico sobre k .

Definición: Un cuerpo $K \subset \mathbb{C}$ es una extensión de \mathbb{Q} por **radicales cuadráticos** cuando $K = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, donde $\alpha_i^2 \in \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})$, $1 \leq i \leq n$. Un número complejo es un **irracional cuadrático** si está en alguna extensión de \mathbb{Q} por radicales cuadráticos.

Lema: Si $a \in k$, el grado de $k(\sqrt{a})$ sobre k es 1 ó 2.

Demostración: Sea $\alpha = \sqrt{a}$. $[k(\alpha) : k] = \text{gr } P_\alpha = 1$ ó 2 porque P_α divide a $x^2 - a$.

Teorema: El grado de cualquier extensión por radicales cuadráticos es potencia de 2.

Demostración: Sea $K = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ donde $\alpha_i^2 \in \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})$, $1 \leq i \leq n$.

$$\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}(\alpha_1) \longrightarrow \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2) \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \longrightarrow \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = K.$$

Estas extensiones son de grado 1 ó 2; luego $[K : \mathbb{Q}]$ es potencia de 2.

Corolario: Si α es irracional cuadrático, el grado de P_α es potencia de 2.

Demostración: Sea K una extensión de \mathbb{Q} por radicales cuadráticos.

Si $\alpha \in K$, entonces $\mathbb{Q}(\alpha) \subseteq K$; así que $\text{gr } P_\alpha = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ divide a $[K : \mathbb{Q}] = 2^n$. q.e.d.

Fijado un segmento, cuyos extremos identificamos con los números 0 y 1, los puntos de un plano se corresponden con los números complejos. Como los irracionales cuadráticos se obtienen de 0 y 1 con sumas, restas, productos, cocientes y raíces cuadradas, pueden construirse con regla y compás a partir de los dos puntos dados. Recíprocamente, todo punto que se construya con regla y compás es un irracional cuadrático, porque los puntos de corte de rectas y círculos se expresan con sumas, productos, cocientes y raíces cuadradas¹, al igual que la recta que pasa por dos puntos dados, y el círculo con centro y radio dados.

1. Las raíces $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ de un polinomio $ax^2 + bx + c$ con coeficientes racionales son irracionales cuadráticos, al igual que las raíces de las bicuadradas $ax^4 + bx^2 + c$ y cuárticas recíprocas $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$, porque los cambios de variable $y = x^2$ y $y = x^{-1} + x$ las transforman en ecuaciones cuadráticas.
2. Las raíces de la unidad $e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $e^{\frac{2\pi i}{5}}$ son irracionales cuadráticos, porque son raíces de los polinomios $\Phi_3 = x^2 + x + 1$, $\Phi_5 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Luego también lo es

$$e^{\frac{2\pi i}{15}} = (e^{\frac{2\pi i}{15}})^6 (e^{\frac{2\pi i}{15}})^{-5} = (e^{\frac{2\pi i}{5}})^2 (e^{\frac{2\pi i}{3}})^{-1}.$$

Si $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ es irracional cuadrático, también lo es $e^{\frac{2\pi i}{2n}} = \sqrt{e^{\frac{2\pi i}{n}}}$. Los polígonos regulares de 2^n , $2^n 3$, $2^n 5$ y $2^n 15$ lados son constructibles con regla y compás.

¹Los puntos de corte de dos círculos $P = x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, $P' = x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0$ son los puntos de corte de uno de ellos con la recta $P' - P = 0$.

3. $\sqrt[3]{2}$ no es irracional cuadrático, porque es raíz del polinomio irreducible $x^3 - 2$. *Es imposible duplicar un cubo con regla y compás.*
4. Si p es primo, el polinomio irreducible de $e^{\frac{2\pi i}{p}}$ es $\Phi_p = x^{p-1} + \dots + x + 1$ (p. 12); luego $e^{\frac{2\pi i}{p}}$ no es irracional cuadrático cuando $p-1$ admite algún factor impar. *Es imposible construir con regla y compás los polígonos regulares de 7, 11, 13, ... lados.*
5. $e^{\frac{2\pi i}{9}}$ es raíz de $\Phi_9 = x^6 + x^3 + 1$. La reducción de Φ_9 módulo 2 es irreducible porque no tiene raíces en \mathbb{F}_2 y no es múltiplo de los polinomios irreducibles de grado 2 ó 3: $x^2 + x + 1$, $x^3 + x + 1$, $x^3 + x^2 + 1$. Luego Φ_9 es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$, y $e^{\frac{2\pi i}{9}}$ no es irracional cuadrático. *Es imposible trisecar ángulos con regla y compás.*

1.6.2. Fracciones Simples

Lema: Si $Q_1, \dots, Q_r \in k[x]$ son primos entre sí dos a dos,

$$\frac{P}{Q_1 \cdots Q_r} = \frac{B_1}{Q_1} + \cdots + \frac{B_r}{Q_r}.$$

Demostración: Pongamos $Q = Q_2 \cdots Q_r$.

Por la Identidad de Bézout $1 = AQ_1 + BQ$, donde $A, B \in k[x]$.

Luego $P = PAQ_1 + PBQ$, y concluimos por inducción sobre r ,

$$\frac{P}{Q_1 Q} = \frac{PBQ}{Q_1 Q} + \frac{PAQ_1}{Q_1 Q} = \frac{B_1}{Q_1} + \frac{PA}{Q_2 \cdots Q_r} = \frac{B_1}{Q_1} + \frac{B_2}{Q_2} + \cdots + \frac{B_r}{Q_r}.$$

Lema: Sea $Q \in k[x]$ un polinomio de grado $d \geq 1$. Si $B \in k[x]$, entonces existen polinomios $A_0, \dots, A_n \in k[x]$, de grado menor que d ó nulos, tales que

$$B = A_0 + A_1 Q + A_2 Q^2 + \dots + A_n Q^n.$$

Demostración: Dividiendo B por Q , obtenemos polinomios $C, A_0 \in k[x]$ tales que

$$B = A_0 + QC, \text{ gr } A_0 < d,$$

y, por inducción sobre el grado, existen polinomios A_1, A_2, \dots de grado $< d$, tales que

$$B = A_0 + Q(A_1 + A_2 Q + A_3 Q^2 + \dots).$$

Definición: Una fracción racional es **simple** si es un monomio ax^n , o es $\frac{P}{Q^n}$, donde Q es irreducible y $\text{gr } P < \text{gr } Q$.

Teorema: Toda fracción racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ con coeficientes en k descompone, de modo único salvo el orden, en suma de fracciones simples.

Demostración: Si $Q = Q_1^{n_1} \cdots Q_r^{n_r}$ es la descomposición en factores irreducibles,

$$\frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^r \frac{B_i}{Q_i^{n_i}},$$

y existen polinomios $A_{i0}, A_{i1}, \dots \in k[x]$, $\text{gr } A_{ij} < \text{gr } Q_i$, tales que

$$\frac{B_i}{Q_i^{n_i}} = \frac{A_{i0} + A_{i1} Q_i + A_{i2} Q_i^2 + \dots}{Q_i^{n_i}} = \sum_{j=0}^{n_i-1} \frac{A_{ij}}{Q_i^{n_i-j}} + \text{Polinomio}$$

es suma de fracciones simples.

Veamos ahora la unicidad. Dadas dos descomposiciones

$$\frac{A}{Q_1^{n_1}} + \dots = \frac{B}{Q_1^{n_1}} + \dots, \quad A \neq 0,$$

donde $Q_1^{n_1}$ es la mayor potencia de Q_1 que aparece (eventualmente $B = 0$), multiplicando por el máximo común divisor de los denominadores obtenemos una igualdad

$$(A - B)Q_2^{n_2} \dots Q_r^{n_r} = Q_1 C.$$

Luego Q_1 divide a $A - B$ y, como $\text{gr}(A - B) < \text{gr} Q_1$, tenemos que $A = B$.

Concluimos por inducción sobre el número de sumandos de una descomposición.

1.6.3. Teoría de Operadores

Teorema: Sea $T: E \rightarrow E$ un endomorfismo de un k -espacio vectorial E . Si $P, Q \in k[x]$ son primos entre sí,

$$\text{Ker } P(T)Q(T) = \text{Ker } P(T) \oplus \text{Ker } Q(T).$$

Demostración: Por la identidad de Bézout, existen $A, B \in k[x]$ tales que $1 = AP + BQ$, y todo vector $e \in E$ descompone

$$e = A(T)P(T)e + B(T)Q(T)e.$$

Ahora, si $P(T)Q(T)e = 0$, entonces $A(T)P(T)e \in \text{Ker } Q(T)$, y $B(T)Q(T)e \in \text{Ker } P(T)$; luego $\text{Ker } P(T)Q(T) = \text{Ker } P(T) + \text{Ker } Q(T)$.

Si $e \in \text{Ker } P(T) \cap \text{Ker } Q(T)$, entonces $e = A(T)P(T)e + B(T)Q(T)e = 0 + 0$.

Corolario: Si T es un endomorfismo de un espacio vectorial complejo,

$$\text{Ker } P(T) = \text{Ker } (T - \alpha_1)^{m_1} \oplus \dots \oplus \text{Ker } (T - \alpha_r)^{m_r},$$

donde $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ son las raíces compleja de $P(x)$ y m_1, \dots, m_r sus multiplicidades.

Ecuaciones en Diferencias Finitas

Sea E el espacio vectorial de las sucesiones (s_0, s_1, \dots) de números complejos, ∇ el operador siguiente, $\nabla s_n = s_{n+1}$, y $\Delta = \nabla - 1$ el operador diferencia, $\Delta s_n = s_{n+1} - s_n$.

Fórmula de Conmutación: $P(\nabla)(\alpha^n s_n) = \alpha^n P(\alpha \nabla) s_n$; $P \in \mathbb{C}[x]$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Demostración: Basta verlo cuando $P(x) = x^k$, en cuyo caso

$$\nabla^k(\alpha^n s_n) = \alpha^{n+k} s_{n+k} = \alpha^n (\alpha \nabla)^k s_n.$$

Corolario: Las sucesiones $\alpha^n, n\alpha^n, \dots, n^{k-1}\alpha^n$ forman una base de $\text{Ker } (\nabla - \alpha)^k$.

Demostración: Como $(\nabla - \alpha)^k \alpha^n s_n = \alpha^n (\alpha \nabla - \alpha)^k s_n = \alpha^{n+k} \Delta^k s_n$, basta ver que $\text{Ker } \Delta^k$ está formado por las sucesiones polinómicas $a_0 + a_1 n + \dots + a_{k-1} n^{k-1}$.

Procedemos por inducción sobre k , usando que para toda sucesión $s = (s_n)$ tenemos que

$$s_n = (\nabla^n s)_0 = ((1 + \Delta)^n s)_0 = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (\Delta^i s)_0.$$

Ahora, si $\Delta^k s = 0$, tenemos que s_n es una sucesión polinómica de grado $< k$, ya que $\binom{n}{i} = \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{i!}$ es un polinomio en n de grado i :

$$s_n = s_0 + \binom{n}{1}(\Delta s)_0 + \dots + \binom{n}{k-1}(\Delta^{k-1} s)_0.$$

Además $\Delta^{d+1} n^d = 0$, porque $\Delta^{d+1} n^d = \Delta^d(\Delta n^d) = \Delta^d((n+1)^d - n^d) = 0$, al ser $(n+1)^d - n^d$ un polinomio en n de grado $d-1$. q.e.d.

Las ecuaciones $P(\nabla)x_n = 0$ se resuelven hallando las raíces complejas de P . En cuanto a las soluciones de $P(\nabla)x_n = y_n$, se obtienen sumando una solución particular a las de la ecuación homogénea $P(\nabla)x_n = 0$, y por reiteración, la búsqueda de una solución particular se reduce a la ecuación $(\nabla - \alpha)x_n = y_n$. Por la Fórmula de Conmutación,

$$y_n = (\nabla - \alpha)x_n = (\nabla - \alpha)\alpha^n \alpha^{-n} x_n = \alpha^{n+1} \Delta(\alpha^{-n} x_n),$$

y como una solución de la ecuación $\Delta u_n = v_n$ es $u_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$, una solución de la ecuación $(\nabla - \alpha)x_n = y_n$ es

$$x_n = \alpha^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{-i} y_i.$$

En general no diremos más, salvo que la búsqueda de una solución particular $x_n = \frac{1}{P(\nabla)} y_n$ puede simplificarse descomponiendo $\frac{1}{P(\nabla)}$ en fracciones simples.

No obstante, si $Q(\nabla)y_n = 0$ para algún polinomio Q primo con P , por la Identidad de Bézout tendremos $\text{Id} = P(\nabla)A(\nabla) + B(\nabla)Q(\nabla)$, y aplicando esta identidad a y_n vemos que $x_n = A(\nabla)y_n$ es solución de la ecuación $P(\nabla)x_n = y_n$.

1. En la sucesión de Fibonacci 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... cada término es la suma de los dos anteriores, $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$. Las raíces de $x^2 - x - 1$ son ϕ , $-\phi^{-1}$, donde $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es la proporción áurea; luego la sucesión es

$$x_n = c_1 \phi^n + c_2 (-\phi)^{-n},$$

y las constantes c_1 , c_2 se determinan a partir de los términos iniciales:

$$\left. \begin{array}{l} c_1 + c_2 = x_0 = 0 \\ c_1 \phi - c_2 \phi^{-1} = x_1 = 1 \end{array} \right\}; \quad c_1 = \frac{1}{\phi + \phi^{-1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad c_2 = -c_1.$$

2. Una solución de $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 8^n n^2$, por la Fórmula de Conmutación, es

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{(\nabla - 2)^2} 8^n n^2 = 8^n \frac{1}{(8\nabla - 2)^2} n^2 = 8^n \frac{1}{(8\Delta + 6)^2} n^2 = 8^n \frac{1}{36 + 96\Delta + 64\Delta^2} n^2 \\ &= 8^n \left(\frac{1}{36} - \frac{96}{36^2} \Delta + \frac{6912}{36^3} \Delta^2 + \dots \right) n^2 = 8^n \left(\frac{1}{36} n^2 - \frac{96}{36^2} (2n-1) + \frac{6912}{36^3} \right). \end{aligned}$$

3. Sumemos la serie $\sum_n \frac{n^3}{n!}$ (sin definir e^Δ con rigor). Poniendo $s = (n^3)$,

$$\begin{aligned} \frac{1^3}{1!} + \frac{2^3}{2!} + \dots + \frac{n^3}{n!} + \dots &= \left(s + \frac{\nabla}{1!} s + \frac{\nabla^2}{2!} s + \dots + \frac{\nabla^n}{n!} s + \dots \right)_0 = (e^\nabla s)_0 \\ &= (e^{\Delta+1} s)_0 = e (e^\Delta s)_0 = e \left(s + \frac{\Delta}{1!} s + \frac{\Delta^2}{2!} s + \dots + \frac{\Delta^n}{n!} s + \dots \right)_0 \\ &= e \left(s + \frac{\Delta}{1!} s + \frac{\Delta^2}{2!} s + \frac{\Delta^3}{3!} s \right)_0 = e(0 + 1 + 3 + 1) = 5e. \end{aligned}$$

El Operador Derivada

Sea E el espacio vectorial de las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ infinitamente derivables, y D el operador derivada, $Df = D(x(t) + y(t)i) = x'(t) + y'(t)i$.

Fórmula de Conmutación: $P(D)(e^{\alpha t} f) = e^{\alpha t} P(D + \alpha) f$; $P \in \mathbb{C}[x]$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Demostración: Basta verlo cuando $P(x) = x^k$, y procedemos por inducción sobre k , porque $D(e^{\alpha t} f) = \alpha e^{\alpha t} f + e^{\alpha t} Df = e^{\alpha t} (D + \alpha) f$. En general,

$$\begin{aligned} D^k(e^{\alpha t} f) &= D(D^{k-1} e^{\alpha t} f) = D(e^{\alpha t} (D + \alpha)^{k-1} f) \\ &= \alpha e^{\alpha t} (D + \alpha)^{k-1} f + e^{\alpha t} D(D + \alpha)^{k-1} f = e^{\alpha t} (D + \alpha)^k f. \end{aligned}$$

Corolario: Las funciones $e^{\alpha t}, te^{\alpha t}, \dots, t^{k-1} e^{\alpha t}$ forman base de $\text{Ker}(D - \alpha)^k$.

Demostración: $(D - \alpha)^k(e^{\alpha t} f) = e^{\alpha t} D^k f$, y $\text{Ker } D^k = \langle 1, t, \dots, t^{k-1} \rangle$. q.e.d.

Las ecuaciones $P(D)f = 0$ se resuelven hallando las raíces complejas de P . En cuanto a las soluciones de $P(D)f = g$, se obtienen sumando una solución particular a las de la ecuación homogénea $P(D)f = 0$, y por reiteración, la búsqueda de una solución particular se reduce a la ecuación $(D - \alpha)f = g$. Por la Fórmula de Conmutación,

$$(D - \alpha)f = (D - \alpha)e^{\alpha t} e^{-\alpha t} f = e^{\alpha t} D(e^{-\alpha t} f),$$

y una solución particular de la ecuación $(D - \alpha)f = g$ es $f = e^{\alpha t} \int e^{-\alpha t} g(t) dt$.

Otra posibilidad es usar la descomposición en fracciones simples,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{(D - \alpha_1)^{m_1} \dots (D - \alpha_r)^{m_r}} g = \sum_{i,j} \frac{a_{ij}}{(D - \alpha_i)^j} g \\ &= \sum_{i,j} a_{ij} e^{\alpha_i t} \frac{1}{D^j} e^{-\alpha_i t} g = \sum_{i,j} a_{ij} e^{\alpha_i t} \int \dots \int e^{-\alpha_i t} g(t) dt, \end{aligned}$$

o usar la Identidad de Bézout $\text{Id} = P(D)A(D) + B(D)Q(D)$, cuando $Q(D)g = 0$ para algún polinomio Q primo con P , que muestra que $f = A(D)g$ es solución de $P(D)f = g$.

Ejemplo: $\int e^{2t} t^3 dt = \frac{1}{D} e^{2t} t^3 = e^{2t} \frac{1}{D+2} t^3 = \frac{e^{2t}}{2} \frac{1}{1+\frac{1}{2}D} t^3$
 $= \frac{e^{2t}}{2} (1 - \frac{D}{2} + \frac{D^2}{4} - \frac{D^3}{8} + \dots) t^3 = e^{2t} (\frac{t^3}{2} - \frac{3t^2}{4} + \frac{3t}{4} - \frac{3}{8})$.

1.6.4. Separación de Raíces

Si $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ son primos entre sí, diremos que $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ tiene un **polo** de orden m en $x = a$ si Q tiene un cero de orden m en tal punto. El **exceso** de f en $x = a$ es

$$E_a \frac{P}{Q} = \begin{cases} +1 & \text{si } \frac{P}{Q} \text{ pasa de } -\infty \text{ a } +\infty \text{ al pasar por } a. \\ -1 & \text{si } \frac{P}{Q} \text{ pasa de } +\infty \text{ a } -\infty \text{ al pasar por } a. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y el exceso $E_b^c f$ entre b y c es la suma de los excesos de f en los puntos del intervalo $[b, c]$, supuesto que b y c no son polos de f .

Las variaciones de signo $V(c_1, \dots, c_n)$ en una sucesión es el número de cambios de signo, después de suprimir los posibles ceros. La **variación** entre a y b de unos polinomios es la diferencia $V_a^b(P_1, \dots, P_n) = V(P_1(a), \dots, P_n(a)) - V(P_1(b), \dots, P_n(b))$.

1. $E_a^b(\text{Polinomio}) = 0$.
2. $E_a^b(f_1 + f_2) = E_a^b f_1 + E_a^b f_2$, cuando f_1 y f_2 no tienen polo común.
3. $E_a^b \lambda f = (\text{sgn } \lambda) E_a^b f$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ no es nulo.
4. $E_a^b \frac{1}{Q} = \frac{1}{2}(\text{sgn } Q(b) - \text{sgn } Q(a))$.
5. $E_a^b \frac{P}{Q} + E_a^b \frac{Q}{P} = V_a^b(P, Q)$.

Demostración: Sólo la 5 no es obvia. Como $\frac{P}{Q}$ y $\frac{Q}{P}$ no tienen polos comunes,

$$E_a^b \frac{P}{Q} + E_a^b \frac{Q}{P} = E_a^b \frac{P^2 + Q^2}{PQ} = E_a^b \frac{1}{PQ} = \frac{1}{2}(\text{sgn } P(b)Q(b) - \text{sgn } P(a)Q(a)) = V_a^b(P, Q).$$

Cálculo del Exceso: Aplicando el algoritmo de Euclides (cambiando de signo los restos)

$$\begin{array}{lll} P = Q_1 Q - R_1 & \frac{P}{Q} = Q_1 - \frac{R_1}{Q} & E_a^b \frac{P}{Q} = -E_a^b \frac{R_1}{Q} \\ Q = Q_2 R_1 - R_2 & \frac{Q}{R_1} = Q_2 - \frac{R_2}{R_1} & E_a^b \frac{Q}{R_1} = -E_a^b \frac{R_2}{R_1} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ R_{n-1} = Q_{n+1} R_n & \frac{R_{n-1}}{R_n} = Q_{n+1} & E_a^b \frac{R_{n-1}}{R_n} = 0 \\ E_a^b \frac{Q}{P} = E_a^b \frac{Q}{P} + E_a^b \frac{P}{Q} + E_a^b \frac{R_1}{Q} + E_a^b \frac{Q}{R_1} + E_a^b \frac{R_2}{R_1} + \dots + E_a^b \frac{R_n}{R_{n-1}} + E_a^b \frac{R_{n-1}}{R_n} = \\ = V_a^B(P, Q) + V_a^b(Q, R_1) + \dots + V_a^b(R_{n-1}, R_n) = V_a^b(P, Q, R_1, \dots, R_n) \end{array}$$

Teorema de Sturm: $\left[\begin{array}{l} \text{número de raíces} \\ \text{de } P \text{ entre } a \text{ y } b \end{array} \right] = V_a^b(P, P', R_1, \dots, R_n); \quad P(a)P(b) \neq 0.$

Demostración: Sea $P = (x - a_1)^{m_1} \dots (x - a_r)^{m_r} Q$, donde Q carece de raíces reales.

$$\frac{P'}{P} = \frac{m_1}{x - a_1} + \dots + \frac{m_r}{x - a_r} + \frac{Q'}{Q}.$$

Como $E_a^b \frac{Q'}{Q} = 0$, al carecer $\frac{Q'}{Q}$ de polos, $E_a^b \frac{P'}{P}$ coincide con el número de raíces distintas de P entre a y b , cada una contada una sola vez. q.e.d.

Esta demostración, y el cálculo del exceso, requieren que los polinomios Q, R_1, \dots, R_n no se anulen en a ni en b . Si alguno se anulase, habría que desplazar ligeramente a y b .

Primero se observa que no puede haber dos términos consecutivos anulándose en a (ó en b), porque a sería raíz de su máximo común divisor, y por tanto de P . Además, si $R_i(a) = 0$, como $R_{i-1} = Q_i R_i - R_{i+1}$, los signos de $R_{i-1}(a)$ y $R_{i+1}(a)$ son opuestos.

Modificando los extremos, $a' = a + \varepsilon$, $b' = b + \varepsilon$, de modo que ningún resto se anule, el exceso no varíe, ni los signos de los restos no nulos, nos reducimos al caso anterior,

$$E_a^b \frac{Q}{P} = E_{a'}^{b'} \frac{Q}{P} = V_{a'}^{b'}(P, Q, R_1, \dots, R_n) = V_a^b(P, Q, R_1, \dots, R_n).$$

1.6.5. Raíces Múltiples

La derivada de $P = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in k[x]$ es $P' = a_1 + 2a_2 x + \dots + na_n x^{n-1}$, donde $ia_i = a_i + \dots + a_i \in k$. (Puede ocurrir que $\text{gr } P' < n - 1$, porque $i = 1 + \dots + 1$ puede ser nulo en k . Si $k = \mathbb{F}_p$, la derivada de $x^p + 1$ es nula).

La derivada tiene las siguientes propiedades, que basta probar cuando $P = x^i$, $Q = x^j$,

$$\begin{aligned}(aP + bQ)' &= aP' + bQ'; \quad a, b \in k \\ (P \cdot Q)' &= P' \cdot Q + P \cdot Q'.\end{aligned}$$

Si $P(x) = c_0x^n + \dots + c_n = c_0(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$, vamos a calcular las sumas $\sigma_r = \alpha_1^r + \dots + \alpha_n^r$, y por convenio $\sigma_0 = n$.

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x - \alpha_i} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x} + \frac{\alpha_i}{x^2} + \frac{\alpha_i^2}{x^3} + \dots \right)$$

y obtenemos la **Fórmula de Girard**:

$$\begin{aligned}\frac{P'}{P} &= \frac{\sigma_0}{x} + \frac{\sigma_1}{x^2} + \frac{\sigma_2}{x^3} + \dots \\ nc_0x^{n-1} + \dots + c_{n-1} &= (c_0x^n + \dots + c_n)(\sigma_0x^{-1} + \sigma_1x^{-2} + \sigma_2x^{-3} + \dots).\end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de x^{n-r-1} ,

$$\begin{aligned}(n-r)c_r &= \sum_{i+j=r} c_i\sigma_j = \sum_{i=0}^r c_i\sigma_{r-i}, \quad 1 \leq r \leq n-1, \\ 0 &= \sum_{i+j=r} c_i\sigma_j = \sum_{i=0}^n c_i\sigma_{r-i}, \quad r \geq n,\end{aligned}$$

Fórmulas de Newton:
$$\begin{cases} 0 = c_0\sigma_r + c_1\sigma_{r-1} + \dots + c_{r-1}\sigma_1 + rc_r & r \leq n \\ 0 = c_0\sigma_r + c_1\sigma_{r-1} + c_2\sigma_{r-2} + \dots + c_n\sigma_{r-n} & r \geq n \end{cases}$$

Teorema: Una raíz de P es múltiple si y sólo si es raíz de P' .

Demostración: $P = (x - \alpha)^m Q$, $Q(\alpha) \neq 0$.

Si $m = 1$, entonces $P' = Q + (x - \alpha)Q'$; luego $P'(\alpha) = Q(\alpha) \neq 0$.

Si $m \geq 2$, entonces $P' = m(x - \alpha)^{m-1} + (x - \alpha)^m Q'$; luego $P'(\alpha) = 0$.

Corolario: Las raíces múltiples de P son las raíces de $D = \text{m.c.d.}(P, P')$.

Demostración: Las raíces de D son raíces de P y P' ; luego raíces múltiples de P .

Recíprocamente, por la Identidad de Bézout $D = AP + BP'$, si α es raíz múltiple de P , también es raíz de P' ; luego α es raíz de D .

Corolario: Todas las raíces de un polinomio irreducible P son simples, o $P' = 0$.

Demostración: $D = \text{m.c.d.}(P, P')$ es 1 ó P , porque P es irreducible.

Si $D = 1$, por el corolario anterior P no tiene raíces múltiples.

Si $D = P$, como divide a P' , y $\text{gr } P' < \text{gr } P$, tenemos que $P' = 0$.

Definición: Si A es un anillo, existe un único morfismo de anillos $\mathbb{Z} \rightarrow A$, y su núcleo es un ideal $d\mathbb{Z}$. La **característica** de A es d . Es nula cuando $1 + \dots + 1 \neq 0$ para todo $n \geq 1$, y positiva cuando $1 + \dots + 1 = 0$ para algún $n \geq 1$.

\mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} y \mathbb{C} tienen característica nula, y la característica de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es n .

La fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ para las raíces de $ax^2 + bx + c$ sólo es válida cuando la característica del cuerpo no es 2 (pues supone que $2a \neq 0$).

Característica Nula

Teorema: *Todas las raíces de un polinomio irreducible son simples.*

Demostración: $P' \neq 0$, porque $\text{gr } P' = \text{gr } P - 1$.

Teorema: *Toda raíz de multiplicidad m de P es raíz de multiplicidad $m - 1$ de P' .*

Demostración: Si α es una raíz de multiplicidad m , $P = (x - \alpha)^m Q$, $Q(\alpha) \neq 0$.

$$P' = (x - \alpha)^{m-1}(mQ + (x - \alpha)Q'),$$

donde $mQ(\alpha) + (\alpha - \alpha)Q'(\alpha) = mQ(\alpha) \neq 0$, porque $m \neq 0$ al ser $\text{car } k = 0$.

Regla de Descartes: *El número de raíces positivas $r_+(P)$ de un polinomio con coeficientes reales $P = a_0 + \dots + a_n x^n$, contadas con su multiplicidad, no supera al número de variaciones de signo $V(P)$ en los coeficientes, y es igual cuando P tiene todas sus raíces reales.*

$$r_+(P) \leq V(a_0, a_1, \dots, a_n).$$

Demostración: Quitando la raíz nula si es preciso, podemos suponer que $a_0 > 0$.

Si suponemos probada la regla para polinomios de grado $< n$, tendremos $r_+(P') \leq V(P')$.

$$V(P') = \begin{cases} V(P) & \text{si } a_0 \text{ tiene igual signo que el siguiente coeficiente no nulo } a_j & (I) \\ V(P) - 1 & \text{si } a_0 \text{ tiene distinto signo que } a_j & (II) \end{cases}$$

Vamos a comparar $r_+(P')$ y $r_+(P)$. Si las raíces positivas de P son $\alpha_1 < \dots < \alpha_r$, con multiplicidades m_1, \dots, m_r , entonces α_i es una raíz de P' de multiplicidad $m_i - 1$ y, por el teorema de Rolle, P' se anula entre dos raíces consecutivas, así que $r_+(P') \geq r_+(P) - 1$.

En el caso (II) la regla queda probada.

En el caso (I), P' tiene una raíz más entre 0 y α_1 , porque P es mayor que a_0 en puntos de ese intervalo, al ser positiva la primera derivada no nula de P en $x = 0$.

Luego $r_+(P') \geq r_+(P)$ y terminamos.

Por último, pongamos $\bar{P}(x) = P(-x)$, y sea $r_-(P) = r_+(\bar{P})$ el número de raíces negativas de P . Tenemos que $r_+(P) \leq V(P)$, $r_-(P) \leq V(\bar{P})$, y $V(P) + V(\bar{P}) \leq n$.

Cuando P tiene todas sus raíces reales, $r_+(P) + r_-(P) = n$, porque P no tiene la raíz nula al ser $a_0 > 0$. Luego $r_+(P) = V(P)$, y $r_-(P) = V(\bar{P})$.

Característica Positiva

Teorema: *La característica de un anillo íntegro es nula o es un número primo.*

Demostración: Sea A un anillo íntegro de característica positiva $d = nm$.

En A tenemos que $nm = 0$; luego $n = 0$ ó $m = 0$, y vemos que $n = d$ ó $m = d$ en \mathbb{Z} .

Lema: $(a + b)^p = a^p + b^p$, cuando la característica es un número primo p .

Demostración: El número $\binom{p}{i} = \frac{p(p-1)\dots(p-i+1)}{i!}$ es un múltiplo de p cuando $0 < i < p$, porque el numerador lo es y el denominador no. Luego

$$(a + b)^p = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} a^i b^{p-i} = a^p + b^p.$$

Teorema: Si $Q \in \mathbb{F}_p[x]$ es irreducible, todas sus raíces son simples.

Demostración: Si $Q = \sum_i a_i x^i$ tiene una raíz múltiple, $0 = Q' = \sum_i i a_i x^{i-1}$ (p. 24).

Luego $a_i = 0$ cuando i no es múltiplo de p , y Q no es irreducible,

$$Q(x) = a_0 + a_p x^p + a_{2p} x^{2p} + \dots = (a_0 + a_p x + a_{2p} x^2 + \dots)^p.$$

Ejemplo: Sea $k = \mathbb{F}_2(t)$. El polinomio $P = x^2 - t$ es irreducible en $k[x]$, porque no tiene raíces en k , pero todas sus raíces son múltiples. Si α es una raíz, $x^2 - t = (x - \alpha)^2$.

1.7. Anillos de Fracciones

$S \subseteq A$ es un **sistema multiplicativo** si $1 \in S$, y $s, t \in S \Rightarrow st \in S$.

Consideremos en $A \times S$ la relación, claramente simétrica y reflexiva,

$$(a, s) \equiv (b, t) \Leftrightarrow \text{existen } u, v \in S \text{ tales que } au = bv, su = tv.$$

y transitiva: si $(a, s) \equiv (b, t)$, $(b, t) \equiv (c, r)$, existen $u, v, u', v' \in S$ tales que $au = bv$, $su = tv$, $bu' = cv'$, $tu' = rv'$. Luego $auu' = bvu' = cvv'$, $suu' = tvu' = rvv'$, y $(a, s) \equiv (c, r)$.

La **localización** A_S de A por S es el cociente $(A \times S)/\equiv$, con la estructura de anillo

$$\begin{aligned} \frac{a}{s} + \frac{b}{t} &= \frac{at + bs}{st} \\ \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} &= \frac{ab}{st} \end{aligned}$$

donde $\frac{a}{s}$ es la clase de (a, s) . Para ver que estas operaciones no dependen de los representantes elegidos, basta comprobarlo cuando $\frac{a}{s}$ se sustituye por $\frac{au}{su}$:

$$\begin{aligned} \frac{au}{su} + \frac{b}{t} &= \frac{(at + bs)u}{stu} = \frac{at + bs}{st} \\ \frac{au}{su} \cdot \frac{b}{t} &= \frac{abu}{stu} = \frac{ab}{st} \end{aligned}$$

En A_S , $0 = \frac{0}{1}$, $1 = \frac{1}{1}$, y $-\frac{a}{s} = \frac{-a}{s}$. Además, $\frac{a}{s} = 0$ si y sólo si $ua = 0$ para algún $u \in S$.

Luego $\frac{a}{s} = \frac{b}{t}$ si y sólo si $u(at - bs) = 0$ para algún $u \in S$.

El morfismo de anillos canónico $\gamma: A \rightarrow A_S$, $\gamma(a) = \frac{a}{1}$, es el **morfismo de localización**, y $\gamma(s) = \frac{s}{1}$ es invertible en A_S para todo $s \in S$, pues su inverso es $\frac{1}{s}$.

Teorema: Si A es un anillo íntegro, entonces $S = A - \{0\}$ es un sistema multiplicativo, A_S es cuerpo (el **cuerpo de fracciones** de A) y $\gamma: A \rightarrow A_S$ es inyectivo.

Demostración: S es un sistema multiplicativo porque $1 \neq 0$, y el producto de elementos no nulos nunca es nulo.

Si $\frac{a}{1} = 0$, existe $s \neq 0$ tal que $sa = 0$; luego $a = 0$, y γ es inyectivo, y $A_S \neq 0$.

Ahora, si $\frac{a}{s} \neq 0$, entonces $a \neq 0$, y $\frac{s}{a} \in A_S$ es el inverso de $\frac{a}{s}$.

Propiedad Universal: Si $f: A \rightarrow B$ es un morfismo de anillos y $f(s)$ es invertible en B para todo $s \in S$, existe un único morfismo de anillos $\psi: A_S \rightarrow B$ tal que $\psi(\frac{a}{1}) = f(a)$,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow \gamma & \nearrow \psi \\ & & A_S \end{array} \quad f = \psi \gamma$$

Demostración: El único morfismo posible, $\psi: A_S \rightarrow B$, $\psi\left(\frac{a}{s}\right) = f(a)f(s)^{-1}$, no depende del representante $\frac{a}{s}$ elegido,

$$\psi\left(\frac{au}{su}\right) = f(au)f(su)^{-1} = f(a)f(u)f(s)^{-1}f(u)^{-1} = f(a)f(s)^{-1}.$$

Definición: Un **dominio de factorización única** es un anillo íntegro en que todo elemento propio descompone, de modo único salvo el orden y factores invertibles, en producto de elementos irreducibles. En ellos vale el lema de Euclides: *Si un elemento irreducible p divide a un producto de elementos, entonces divide a algún factor (pA es un ideal primo de A).*

En efecto, si $bc = pa$, al descomponer b y c en producto de irreducibles, algún factor debe coincidir, salvo un invertible, con p ; luego b ó c es múltiplo de p .

Si d divide a bc y no tiene factores irreducibles comunes con b , entonces divide a c .

Además, el Lema de Gauss y su demostración (p. 11) son válidos en $A[x]$.

Lema: *Si A es íntegro, entonces $A[x]$ es íntegro y $A[x]^* = A^*$.*

Demostración: $(a_n x^n + \dots)(b_m x^m + \dots) = a_n b_m x^{n+m} + \dots$, así que $\text{gr}(PQ) = \text{gr} P + \text{gr} Q$.

Luego $A[x]$ es íntegro, y los polinomios invertibles son de grado 0.

Teorema: *Si A es un dominio de factorización única, $A[x]$ también lo es.*

Demostración: La descomposición en factores irreducibles se prueba por inducción sobre el grado, y ponemos $P = dQ$, donde los coeficientes de Q no tienen factores irreducibles comunes.

Si Q es irreducible, $P = dQ$ es producto de irreducibles.

Si Q no es irreducible, $Q = Q_1 Q_2$, donde Q_1 y Q_2 son producto de irreducibles por inducción; luego $P = dQ_1 Q_2$ también.

En cuanto a la unicidad, consideremos dos descomposiciones en factores irreducibles:

$$p_1 \dots p_r P_1(x) \dots P_s(x) = q_1 \dots q_m Q_1(x) \dots Q_n(x),$$

donde $p_i, q_j \in A$; $\text{gr} P_i, \text{gr} Q_j \geq 1$. Sea Σ el cuerpo de fracciones de A .

El anillo $\Sigma[x]$ es euclídeo, y los factores P_i, Q_j son irreducibles en $\Sigma[x]$ (lema de Gauss).

Luego $s = n$, y reordenando tendremos $Q_i = \frac{a_i}{b_i} P_i$ (donde a_i, b_i no tienen factores irreducibles comunes); $b_i Q_i = a_i P_i$, y los factores irreducibles de b_i (resp. a_i) dividirían a P_i (resp. Q_i), que es irreducible: a_i y b_i son invertibles, y $p_1 \dots p_r = u q_1 \dots q_m$, con $u \in A$ invertible.

Luego $r = m$, y reordenando $p_i = q_i$ salvo invertibles.

Corolario: $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ y $k[x_1, \dots, x_n]$ son dominios de factorización única.

Ejemplo: Veamos la fórmula del **determinante de Vandermonde**,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Este determinante es un polinomio $V(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$, y se anula en el cociente por el ideal $(x_j - x_i)$; luego es múltiplo de $\prod_{i < j} (x_j - x_i)$ porque este anillo es dominio de factorización única, y ambos difieren en un factor constante c porque son polinomios de grado $0 + 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$.

Veamos que $c = 1$, para lo cual basta calcular el coeficiente de un monomio.

El monomio de la diagonal de $V(x_1, \dots, x_n)$ es $x_n^{n-1} \dots x_3^2 x_2$ mientras que, por inducción sobre n , en el otro miembro también lo es

$$\begin{aligned} \prod_{i < j} (x_j - x_i) &= (x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1}) \prod_{i < j < n} (x_j - x_i) = \\ &= (x_n^{n-1} + \dots)(x_{n-1}^{n-2} \dots x_3^2 x_2 + \dots) = x_n^{n-1} \dots x_3^2 x_2 + \dots \end{aligned}$$

1.7.1. La Resultante

Expresemos dos polinomios $P, Q \in k[x]$ en términos de sus raíces:

$$\begin{aligned} P &= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = a_0 (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n) \\ Q &= b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m = b_0 (x - \beta_1) \dots (x - \beta_m) \end{aligned}$$

$P(x)$ y $Q(x)$ tienen alguna raíz común precisamente cuando se anula su **resultante**

$$R(P, Q) = a_0^m b_0^n \prod_{i,j} (\alpha_i - \beta_j) \in k.$$

1. Si $m = 0$, entonces $R(P, Q) = b_0^n$.

2. $R(Q, P) = (-1)^{nm} R(P, Q)$.

$$R(Q, P) = a_0^m b_0^n \prod_{i,j} (\beta_j - \alpha_i) = (-1)^{nm} a_0^m b_0^n \prod_{i,j} (\alpha_i - \beta_j) = (-1)^{nm} R(P, Q).$$

3. $R(P, Q) = a_0^m \prod_i Q(\alpha_i)$.

$$R(P, Q) = a_0^m b_0^n \prod_i \prod_j (\alpha_i - \beta_j) = a_0^m \prod_i (b_0 \prod_j (\alpha_i - \beta_j)) = a_0^m \prod_i Q(\alpha_i).$$

Consideremos ahora P y Q como polinomios con coeficientes en el anillo de polinomios $A = \mathbb{Z}[a_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, b_0, \beta_1, \dots, \beta_m]$.

4. $R(P, Q) \in \mathbb{Z}[a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m]$.

Por la propiedad 3, la resultante es un polinomio simétrico en las α_i , con coeficientes en $\mathbb{Z}[a_0, b_0, \dots, b_m]$; luego es un polinomio en las funciones simétricas elementales de las raíces α_i , que por las fórmulas de Cardano son $\pm \frac{a_i}{a_0}$:

$$(*) \quad R(P, Q) = F\left(a_0, b_0, \dots, b_m, \frac{a_1}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0}\right) = \frac{T(a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m)}{a_0^r}$$

$$(**) \quad R(P, Q) = \pm R(Q, P) = \frac{\bar{T}(a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m)}{b_0^s}$$

Ahora bien, $\mathbb{Z}[a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m]$ es un anillo de polinomios (p. 16); luego dominio de factorización única, y comparando (*) y (**) vemos que $r = s = 0$.

5. $R(P, Q)$ es un polinomio homogéneo de grado m en las variables a_0, \dots, a_n , y homogéneo de grado n en las variables b_0, \dots, b_m .

Multiplicar por una indeterminada t las variables a_0, \dots, a_n significa sustituir P por $tP = ta_0 x^n + ta_1 x^{n-1} + \dots + ta_n = ta_0 (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$, y

$$R(tP, Q) = (ta_0)^m \prod_i Q(\alpha_i) = t^m R(P, Q),$$

lo que muestra que $R(P, Q)$ es homogéneo de grado m en las variables a_0, \dots, a_n .

Como $R(P, Q) = \pm R(Q, P)$, también es homogéneo de grado n en las variables b_0, \dots, b_m .

Teorema: Sea $P = CQ + R$. Si r es el grado del resto R , entonces

$$R(P, Q) = (-1)^{nm} b_0^{n-r} R(Q, R).$$

Demostración: Como $P(\beta_j) = Q(\beta_j)C(\beta_j) + R(\beta_j) = R(\beta_j)$, tenemos que

$$R(Q, P) = b_0^n \prod_j P(\beta_j) = b_0^n \prod_j R(\beta_j) = b_0^{n-r} R(Q, R).$$

Ejemplo: El **discriminante** de un polinomio $P = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ es

$$\Delta = \prod_{i < j} (\alpha_j - \alpha_i)^2 = (-1)^{\binom{n}{2}} \prod_{i, j} (\alpha_j - \alpha_i) = (-1)^{\binom{n}{2}} \prod_i P'(\alpha_i) = (-1)^{\binom{n}{2}} R(P, P').$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_n & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n & \sigma_1 & \dots & \sigma_{n-1} \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n-1} & \sigma_n & \dots & \sigma_{2n-2} \end{vmatrix}$$

Por ejemplo, el discriminante de la cúbica $x^3 - px^2 + qx - r$ es:

$$\sigma_1 = p, \sigma_2 = p^2 - 2q, \sigma_3 = p^3 - 3pq + 3r, \sigma_4 = p^4 - 4p^2q + 4pr + 2q^2$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & \sigma_1 & \sigma_2 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 \end{vmatrix} = -4p^3r - 27r^2 + 18pqr - 4q^3 + p^2q^2.$$

Proposición: P y Q carecen de raíces comunes si y sólo si $\text{m.c.d.}(P, Q) = 1$.

Demostración: Si son primos entre sí, $1 = AP + BQ$, y carecen de raíces comunes.

En caso contrario, las raíces de su máximo común divisor son raíces comunes.

Definición: La **resultante de Bézout** es $R^b(P, Q) = a_0^m (\det h_Q)$, donde h_Q es la aplicación lineal

$$h_Q: k[x]/(P) \longrightarrow k[x]/(P), \quad h_Q(B) = BQ.$$

Teorema: $R^b(P, Q) = R(P, Q)$.

Demostración: Si consideramos $L[x]/(P)$ en vez de $k[x]/(P)$, el determinante de h_Q no cambia, porque la matriz de h_Q en la base $1, x, \dots, x^{n-1}$ es la misma.

$$L[x]/(P) \simeq L[x]/(x - \alpha_1) \oplus \dots \oplus L[x]/(x - \alpha_n) \simeq L \oplus \dots \oplus L,$$

donde el isomorfismo $L[x]/(x - \alpha_i) \simeq L$ es sustituir x por α_i , así que Q se corresponde con $(Q(\alpha_1), \dots, Q(\alpha_n))$ y, en la base usual de L^n , la matriz de h_Q es diagonal,

$$R^b(P, Q) = a_0^m (\det h_Q) = a_0^m Q(\alpha_1) \dots Q(\alpha_n) = R(P, Q). \quad \text{q.e.d.}$$

Vamos ahora a expresar la resultante de Bézout como un determinante cuando $m = n$.

Los siguientes polinomios son de grado menor que n ,

$$\begin{aligned} (a_0x^r + \dots + a_r)Q - (b_0x^r + \dots + b_r)P \\ &= (a_0x^r + \dots + a_r)(b_0x^n + \dots + b_n) - (b_0x^r + \dots + b_r)(a_0x^n + \dots + a_n) \\ &= (a_0x^r + \dots + a_r) [(b_0x^r + \dots + b_r)x^{n-r} + (b_{r+1}x^{n-r-1} + \dots + b_n)] \\ &\quad - (b_0x^r + \dots + b_r) [(a_0x^r + \dots + a_r)x^{n-r} + (a_{r+1}x^{n-r-1} + \dots + a_n)] \\ &= (a_0x^r + \dots)(b_{r+1}x^{n-r-1} + \dots) - (b_0x^r + \dots)(a_{r+1}x^{n-r-1} + \dots). \end{aligned}$$

Escribamos las expresiones anteriores en la forma

$$\begin{aligned} a_0Q - b_0P &= A_{11}x^{n-1} + A_{12}x^{n-2} + \dots + A_{1n} \\ (a_0x + a_1)Q - (b_0x + b_1)P &= A_{21}x^{n-1} + A_{22}x^{n-2} + \dots + A_{2n} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

de modo que en $k[x]/(P)$ tendremos:

$$\begin{aligned} h_Q(a_0) &= A_{11}x^{n-1} + A_{12}x^{n-2} + \dots + A_{1n} \\ h_Q(a_0x + a_1) &= A_{21}x^{n-1} + A_{22}x^{n-2} + \dots + A_{2n} \\ &\dots \dots \dots \\ h_Q(a_0x^{n-1} + \dots + a_{n-1}) &= A_{n1}x^{n-1} + A_{n2}x^{n-2} + \dots + A_{nn} \end{aligned}$$

Fijada una base, el producto exterior de n vectores es su determinante, mientras que $\det h_Q$ es la razón de la homotecia que h_Q induce en los n -vectores; luego

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 \end{vmatrix} \cdot |h_Q| = a_0^n \cdot |h_Q| = R^b(P, Q).$$

Definición: La condición de que P y Q sean primos entre sí significa que $(P, Q) = k[x]$, lo que equivale a que sea epiyectiva la aplicación lineal

$$f: k[x]/(Q) \oplus k[x]/(P) \longrightarrow k[x]/(PQ), \quad f(A, B) = AP + BQ.$$

Ambos espacios son de dimensión $m + n$, y la **resultante de Euler** es el determinante de la matriz de f cuando se fija la base $(1, 0), \dots, (x^{m-1}, 0), (0, 1), \dots, (0, x^{n-1})$ en $k[x]/(Q) \oplus k[x]/(P)$, y la base $1, x, \dots, x^{n+m-1}$ en $k[x]/(PQ)$:

$$R^e(P, Q) = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \dots & \dots & a_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_1 & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & \dots & \dots & b_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & b_1 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & b_1 & b_0 \end{vmatrix}$$

donde hay m filas con los coeficientes de P y n filas con los de Q , y su anulación equivale a la existencia de alguna raíz común. Cuando consideramos $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$ como indeterminadas, $R^e(P, Q)$ es un polinomio homogéneo de grado m en las variables a_0, \dots, a_n , y homogéneo de grado n en las variables b_0, \dots, b_m .

Lema: $R(P, Q)$ no es múltiplo de b_0 en $\mathbb{Z}[a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m]$, (m no nulo).

Demostración: Sea $\bar{Q}(x) = b_1x^{m-1} + \dots + b_m$, de modo que $Q = b_0x^m + \bar{Q}$.

Si $R(P, Q)$ fuera múltiplo de b_0 , pasando al cociente por el ideal (b_0) en el anillo de polinomios $\mathbb{Z}[a_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, b_0, \dots, b_m]$ tendríamos

$$0 = R(P, Q) = a_0^m \prod_i Q(\alpha_i) = a_0^m \prod_i \bar{Q}(\alpha_i) = a_0 R(P, \bar{Q}),$$

en el anillo de polinomios $\mathbb{Z}[a_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, b_1, \dots, b_m]$; luego $R(P, \bar{Q}) = 0$, lo que es falso (todos los polinomios de grados n y $m - 1$ tendrían resultante nula).

Teorema: $R^e(P, Q) = \pm R(P, Q)$.

Demostración: Miremos $R^e(P, Q)$ en el anillo $\mathbb{Z}[a_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, b_0, \beta_1, \dots, \beta_m]$.

Se anula en el cociente por $(\alpha_i - \beta_j)$; luego R^e es múltiplo de $\prod_{i,j} (\alpha_i - \beta_j)$, porque el anillo es dominio de factorización única, y por tanto $a_0^m b_0^n R^e(P, Q)$ es múltiplo de la resultante,

$$a_0^m b_0^n R^e(P, Q) = F \cdot R(P, Q).$$

F es función simétrica de las α_i y de las β_j , porque R y R^e lo son; luego es un polinomio en las funciones simétricas elementales que, por las fórmulas de Cardano, son $\pm a_i/a_0$ y $\pm b_j/b_0$.

Reduciendo a común denominador, tenemos una igualdad

$$a_0^r b_0^s R^e(P, Q) = \bar{F} \cdot R(P, Q)$$

y el lema anterior muestra que R^e es múltiplo de R .

Como ambos polinomios son homogéneos de grado m en las variables a_0, \dots, a_n y de grado n en b_0, \dots, b_m , concluimos que $R^e = cR$ para alguna constante c . Veamos que $c = \pm 1$.

Uno de los monomios de R^e es la diagonal $a_n^m b_0^n$, que en R tiene coeficiente ± 1 ,

$$\pm R(P, Q) = b_0^n \prod_j P(\beta_j) = b_0^n \prod_j (a_n + a_{n-1}\beta_j + \dots) = b_0^n a_n^m + \dots$$

1.7.2. Eliminación

Trabajaremos sobre el cuerpo \mathbb{C} de los números complejos.

$$\begin{cases} 0 = P(x, y) = a_0(y)x^n + a_1(y)x^{n-1} + \dots + a_n(y) \\ 0 = Q(x, y) = b_0(y)x^m + b_1(y)x^{m-1} + \dots + b_m(y) \end{cases}$$

Sea $R(y)$ la resultante de P y Q , considerados como polinomios en x con coeficientes en $\mathbb{C}(y)$. Como la resultante es función polinómica de los coeficientes, $R(y) \in \mathbb{C}[y]$.

Teorema: *Las raíces de $R(y)$ son las raíces comunes de $a_0(y)$ y $b_0(y)$, junto con las ordenadas de las soluciones del sistema*

$$\begin{cases} P(x, y) = 0 \\ Q(x, y) = 0 \end{cases}$$

Demostración: Si $a_0(\beta) = b_0(\beta) = 0$, claramente β es raíz de la resultante de Euler.

Si $a_0(\beta) \neq 0$ (igualmente si $b_0(\beta) \neq 0$), la resultante de Bézout muestra que $R(\beta)$ es el determinante de

$$h_{Q(x,\beta)} : \mathbb{C}[x]/(P(x, \beta)) \longrightarrow \mathbb{C}[x]/(P(x, \beta));$$

luego $R(\beta) = 0$ si y sólo si $Q(x, \beta)$ no es invertible en $\mathbb{C}[x]/(P(x, \beta))$, lo que significa que $Q(x, \beta)$ y $P(x, \beta)$ tienen alguna raíz común $\alpha \in \mathbb{C}$, que el sistema admite una solución $x = \alpha$, $y = \beta$.

Teorema: *Si $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ no tienen factores irreducibles comunes, el número de soluciones complejas del sistema $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = 0$, es finito.*

Demostración: Por hipótesis ambos polinomios no tienen factores irreducibles comunes en $\mathbb{C}[x, y]$, y por el lema de Gauss, tampoco en $\mathbb{C}(y)[x]$; luego su resultante $R(y)$ no es nula, y tiene un

número finito de raíces. Las ordenadas de las soluciones complejas del sistema sólo tienen un número finito de posibilidades.

Un razonamiento análogo, eliminando y en vez de x , prueba que sólo hay un número finito de abscisas posibles. El sistema tiene un número finito de soluciones complejas.

Teorema de Bézout: Sean $P(x, y)$, $Q(x, y)$ polinomios de grados n y m respectivamente. Si carecen de factores irreducibles comunes, entonces nm es mayor o igual que el número de soluciones complejas del sistema $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = 0$.

Demostración: Eligiendo bien los ejes de coordenadas podemos suponer que no hay soluciones con igual ordenada, de modo que el grado de la resultante $R(y)$ acote al número de soluciones, y que en $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ aparecen los monomios x^n y x^m :

$$\begin{aligned} P(x, y) &= a_0x^n + a_1(y)x^{n-1} + \dots + a_n(y) \\ Q(x, y) &= b_0x^m + b_1(y)x^{m-1} + \dots + b_m(y). \end{aligned}$$

Los coeficientes $p_{ij}(y)$ de la resultante de Euler son polinomios de grado

$$\begin{aligned} \text{gr } p_{ij} &\leq n + i - j, \quad 1 \leq i \leq n, \\ \text{gr } p_{m+i,j} &\leq m + i - j, \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Para los sumandos $p_{1,\sigma(1)} \dots p_{m+n,\sigma(m+n)}$ de la resultante de Euler tenemos

$$\begin{aligned} \text{gr } p_{1,\sigma(1)} &\leq n + 1 - \sigma(1) \\ &\dots \dots \dots \\ \text{gr } p_{m,\sigma(m)} &\leq n + m - \sigma(m) \\ \text{gr } p_{m+1,\sigma(m+1)} &\leq m + 1 - \sigma(m + 1) \\ &\dots \dots \dots \\ \text{gr } p_{m+n,\sigma(m+n)} &\leq m + n - \sigma(m + n) \end{aligned}$$

y, sumando, resulta que su grado es menor o igual que

$$\begin{aligned} &[(n + 1) + \dots + (n + m)] + [(m + 1) + \dots + (m + n)] - \sum_i \sigma(i) = \\ &= [(n + 1) + \dots + (n + m)] + [(m + 1) + \dots + (m + n)] - [1 + \dots + (m + n)] \\ &= ((n + 1) + (n + m))\frac{m}{2} + ((m + 1) + (m + n))\frac{n}{2} - (1 + (m + n))\frac{m+n}{2} = nm. \end{aligned}$$

Capítulo 2

Álgebra Lineal

2.1. Grupos y Anillos

Una **aplicación** $f: X \rightarrow Y$ asigna a cada elemento $x \in X$ un único elemento $f(x) \in Y$.

Su **composición** con $g: Y \rightarrow Z$ es $g \circ f: X \rightarrow Z$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Si $A \subseteq X$, ponemos $f(A) = \{f(a) : a \in A\} \subseteq Y$.

Si $B \subseteq Y$, ponemos $f^{-1}(B) = B \cap X = \{x \in X : f(x) \in B\} \subseteq X$.

$f: X \rightarrow Y$ es **inyectiva** si $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$, **epiyectiva** cuando $f(X) = Y$.

Es **biyectiva** si es inyectiva y epiyectiva: $y \in Y$ es imagen de un único elemento $f^{-1}(y) \in X$, y $f^{-1}: Y \rightarrow X$ es una aplicación tal que $f^{-1} \circ f = \text{Id}_X$, $f \circ f^{-1} = \text{Id}_Y$.

Las aplicaciones biyectivas $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ son las **permutaciones** de n elementos, y el producto de permutaciones es la composición de aplicaciones. S_n es el conjunto de todas las permutaciones de n elementos.

Dados números distintos a_1, \dots, a_r , el **ciclo** $(a_1 \dots a_r)$ es la permutación que transforma a_i en a_{i+1} (y a_r en a_1) y deja fijos los restantes números. Dos ciclos $\sigma = (a_1 \dots a_r)$, $\tau = (b_1 \dots b_s)$ son **disjuntos** cuando $a_i \neq b_j$ para todo par de índices i, j , en cuyo caso $\sigma\tau = \tau\sigma$.

Toda permutación es producto $\sigma = \alpha_1 \dots \alpha_r$ de ciclos disjuntos, y de modo único salvo el orden de los factores. Si d_i es la longitud de α_i , la **forma** de σ es d_1, \dots, d_r .

Las **trasposiciones** son los ciclos $(a_1 a_2)$ de longitud 2.

Lema: *Toda permutación es producto de trasposiciones.*

Demostración: $(a_1 \dots a_r) = (a_1 a_2)(a_2 a_3) \dots (a_{r-1} a_r)$.

Proposición: *Dos permutaciones $\sigma, \tau \in S_n$ son **conjugadas** (i.e., $\tau = \gamma\sigma\gamma^{-1}$ para algún $\gamma \in S_n$) si y sólo si tienen igual forma.*

Demostración: Sea $\sigma = (a_1 \dots a_{d_1})(b_1 \dots b_{d_2}) \dots (c_1 \dots c_{d_r})$. Si $\gamma \in S_n$, y ponemos $i' = \gamma(i)$,

$$\gamma\sigma\gamma^{-1} = (a'_1 \dots a'_{d_1})(b'_1 \dots b'_{d_2}) \dots (c'_1 \dots c'_{d_r}).$$

Definición: Sea $\Delta = \prod_{i < j} (x_j - x_i)$. Si $\sigma \in S_n$, los factores de $\sigma\Delta = \prod_{i < j} (x_{\sigma(j)} - x_{\sigma(i)})$ coinciden, salvo el signo, con los de Δ , y el **signo** ± 1 de σ se define por la igualdad

$$(*) \quad \sigma\Delta = (\text{sgn } \sigma)\Delta.$$

Proposición: $\text{sgn}(\tau\sigma) = \text{sgn}(\tau) \cdot \text{sgn}(\sigma)$, $\text{sgn}(a_1 \dots a_r) = (-1)^{r-1}$.

Demostración: Permutando con τ las indeterminadas del polinomio (*),

$$\tau\sigma\Delta = (\text{sgn } \sigma)(\tau\Delta) = (\text{sgn } \sigma)(\text{sgn } \tau)\Delta.$$

Por cálculo directo, $\text{sgn}(12) = -1$, y si τ es otra trasposición, $\tau = \gamma \cdot (12) \cdot \gamma^{-1}$, y

$$\text{sgn}(\tau) = \text{sgn}(\gamma)\text{sgn}(12)\text{sgn}(\gamma)^{-1} = \text{sgn}(12) = -1.$$

Ahora, como $(a_1 \dots a_r)$ es producto de $r - 1$ trasposiciones, su signo es $(-1)^{r-1}$.

Axiomas de Grupo: Una operación $G \times G \rightarrow G$ define una estructura de **grupo** en G si

Axioma 1: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \forall a, b, c \in G.$

Axioma 2: Existe¹ $1 \in G$ tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \forall a \in G.$

Axioma 3: Para cada $a \in G$ existe² $a^{-1} \in G$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$

Si además $a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in G$, el grupo es **abeliano**, la operación se suele denotar $+$, el neutro 0 , y el inverso $-a$ (y se llama **opuesto**).

Ejemplos: Con la suma, \mathbb{Z} es un grupo abeliano.

Con el producto de permutaciones, S_n es un grupo (no conmutativo si $n \geq 3$).

En los grupos se puede simplificar: $ab = ac \Rightarrow a^{-1}ab = a^{-1}ac \Rightarrow b = c.$

Definición: $f: G \rightarrow G'$ es **morfismo de grupos** si $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b), \forall a, b \in G.$

Si además es biyectivo, es un **isomorfismo** (**automorfismo** si $G' = G$), y pondremos $G \simeq G'.$

Dos grupos isomorfos tienen las mismas propiedades en Teoría de Grupos.

1. Si f es morfismo de grupos, $f(1) = 1$ y $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}.$
 $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) \cdot f(1)$, y $f(a) \cdot f(a^{-1}) = f(aa^{-1}) = f(1) = 1.$
2. La composición de morfismos de grupos es morfismo de grupos.
 $(gf)(ab) = g(f(ab)) = g(f(a) \cdot f(b)) = g(f(a)) \cdot g(f(b)) = (gf)(a) \cdot (gf)(b).$
3. Si $f: G \rightarrow G'$ es isomorfismo de grupos, $f^{-1}: G' \rightarrow G$ también.
 $f(f^{-1}(a') \cdot f^{-1}(b')) = f(f^{-1}(a')) \cdot f(f^{-1}(b')) = a' \cdot b' = f(f^{-1}(a'b'))$ y f es inyectivo.

Axiomas de Anillo: Dos operaciones $A \times A \xrightarrow{+} A, A \times A \rightarrow A$ definen una estructura de **anillo** (conmutativo y con unidad) en A si

Axioma 1: $(A, +)$ es grupo conmutativo.

Axioma 2: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \forall a, b, c \in A.$

Axioma 3: $a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in A.$

Axioma 4: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \forall a, b, c \in A.$

Axioma 5: Existe $1 \in A$ (llamado **unidad**) tal que $a \cdot 1 = a, \forall a \in A.$

Las aplicaciones $a \cdot : A \rightarrow A$ son morfismos de grupos para la suma; luego

$$a \cdot 0 = 0, a \cdot (-b) = -(a \cdot b), (-a) \cdot (-b) = a \cdot b.$$

Un elemento $a \in A$ es **invertible** si $ab = 1$ para algún $b \in A.$

¹Tal elemento **neutro** es único, pues si e fuera otro tendríamos $e = e \cdot 1 = 1.$

²El **inverso** es único pues si $a \cdot b = 1$, tenemos que $a^{-1} = a^{-1} \cdot 1 = a^{-1} \cdot (a \cdot b) = (a^{-1} \cdot a) \cdot b = 1 \cdot b = b.$ Por tanto, en todo grupo se verifica que $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}.$

Los elementos invertibles, con el producto, forman un grupo conmutativo A^* .

Un anillo $k \neq 0$ es un **cuerpo** si todo elemento no nulo es invertible. En estas notas, k denotará un cuerpo, y llamaremos **escalares** a los elementos de k .

Un morfismo de grupos $f: A \rightarrow B$ es **morfismo** de anillos si

$$\begin{aligned} f(a \cdot b) &= f(a) \cdot f(b), \\ f(1) &= 1, \end{aligned}$$

y si además es biyectivo, es un **isomorfismo**, en cuyo caso f^{-1} también lo es, y ponemos $A \simeq B$.

Dos anillos isomorfos tienen las mismas propiedades en Teoría de Anillos.

La composición de morfismos de anillos también lo es.

Si a es invertible en A , entonces $f(a)$ es invertible en B y $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$.

En efecto, $f(a^{-1}) \cdot f(a) = f(a^{-1}a) = f(1) = 1$.

2.2. Espacios Vectoriales

Axiomas de Espacio Vectorial: Sea k un cuerpo. Dar una estructura de k -espacio vectorial en un grupo abeliano E (los **vectores** es dar una aplicación $k \times E \rightarrow E$ tal que

Axioma 1: $\lambda(e_1 + e_2) = \lambda e_1 + \lambda e_2$, $\forall \lambda \in k, e_1, e_2 \in E$.

Axioma 2: $(\lambda_1 + \lambda_2)e = \lambda_1 e + \lambda_2 e$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in k, e \in E$.

Axioma 3: $(\lambda\mu)e = \lambda(\mu e)$, $\forall \lambda, \mu \in k, e \in E$.

Axioma 4: $1 \cdot e = e$ para todo vector $e \in E$.

y un subgrupo $V \subseteq E$ es un **subespacio vectorial** si $\lambda \in k, v \in V \Rightarrow \lambda v \in V$.

$h_\lambda: E \rightarrow E, h_\lambda(e) = \lambda e$, y $f_e: k \rightarrow E, f_e(\lambda) = \lambda e$, son morfismos de grupos; luego

$$\lambda \cdot 0 = 0, \lambda \cdot (-e) = -(\lambda e), 0 \cdot e = 0, (-\lambda)e = -(\lambda e).$$

Además, si $\lambda e = 0$, y $\lambda \neq 0$, entonces $0 = \lambda^{-1}(\lambda e) = 1 \cdot e = e$.

Ejemplos: k^n es espacio vectorial con el producto $\lambda(\mu_1, \dots, \mu_n) = (\lambda\mu_1, \dots, \lambda\mu_n)$.

Todo espacio vectorial E admite los subespacios vectoriales triviales 0 y E .

Si V y W son subespacios vectoriales de E , su intersección $V \cap W$ y su **suma** $V + W = \{v + w: v \in V \text{ y } w \in W\}$ también lo son.

Definición: Un morfismo de grupos $f: E \rightarrow F$ es una aplicación **k -lineal** si

$$f(\lambda \cdot e) = \lambda \cdot f(e), \forall \lambda \in k, e \in E;$$

y si además es biyectiva, es un **isomorfismo**, en cuyo caso f^{-1} también lo es, y ponemos $E \simeq F$.

Dos espacios isomorfos tienen las mismas propiedades en Álgebra Lineal.

La composición de aplicaciones lineales también es lineal.

Proposición: Sea $f: E \rightarrow F$ lineal. Si V es un subespacio vectorial de E , entonces $f(V)$ es un subespacio vectorial de F . Si W es un subespacio vectorial de F , entonces $f^{-1}(W)$ es un subespacio vectorial de E . En particular, la imagen $\text{Im } f = f(E)$ es un subespacio vectorial de F , y el núcleo $\text{Ker } f = f^{-1}(0)$ es un subespacio vectorial de E .

Demostración: Sabemos (p. 5) que $f^{-1}(W)$ y $f(V)$ son subgrupos de E y F .

Si $f(v) \in f(V)$, entonces $\lambda f(v) = f(\lambda v) \in f(V)$.

Si $e \in f^{-1}(W)$, entonces $f(\lambda e) = \lambda f(e) \in W$; luego $\lambda e \in f^{-1}(W)$.

Ejemplos: $A \in M_{m \times n}(k)$. La aplicación $f: k^n \rightarrow k^m$, $f(X) = AX$, es lineal, su núcleo está formado por las soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$, y $B \in \text{Im } f$ precisamente cuando el sistema $AX = B$ es compatible.

La aplicación $f: k^n \rightarrow E$, $f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$, es lineal y su imagen es el menor subespacio vectorial que contiene a los vectores e_1, \dots, e_n :

$$\langle e_1, \dots, e_n \rangle = ke_1 + \dots + ke_n = \{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in k\}$$

Teorema: Si $f, g: E \rightarrow F$ son aplicaciones lineales, entonces las aplicaciones

$$\begin{aligned} \lambda f: E &\longrightarrow F, (\lambda f)(e) = \lambda \cdot f(e), \\ f + g: E &\longrightarrow F, (f + g)(e) = f(e) + g(e), \end{aligned}$$

también son lineales, y estas operaciones definen una estructura de k -espacio vectorial en el conjunto $\text{Hom}_k(E, F)$ de todas las aplicaciones k -lineales $E \rightarrow F$.

Demostración: Comprobación directa a partir de las definiciones.

Teorema: Si V es un subespacio vectorial de E , en el grupo E/V existe una única estructura de espacio vectorial tal que $\pi: E \rightarrow E/V$ es lineal. Además, $\text{Ker } \pi = V$.

Demostración: El único producto posible es $\lambda \cdot [e] = [\lambda e]$, y está bien definido:

$$[e] = [e'], e' - e \in V, \lambda e' - \lambda e = \lambda(e' - e) \in V, [\lambda e] = [\lambda e'].$$

Es sencillo ver que define una estructura de espacio vectorial en E/V .

Definición: $X = p + V$ es la **subvariedad lineal** de E de **dirección** V que pasa por p , y E/V está formado por todas las subvariedades lineales de E de dirección V .

Dos subvariedades lineales $p + V$, $q + W$ son **paralelas** si $V \subseteq W$ ó $W \subseteq V$.

Propiedad Universal: Toda aplicación lineal $f: E \rightarrow F$ que se anule en un subespacio vectorial V factoriza de modo único por una aplicación lineal $\phi: E/V \rightarrow F$ tal que $\phi([e]) = f(e)$,

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \pi \searrow & & \nearrow \phi \\ & E/V & \end{array} \quad f = \phi \pi$$

Demostración: Por la propiedad universal del grupo cociente, existe un único morfismo de grupos $\phi: E/V \rightarrow F$ tal que $f = \phi \circ \pi$, y ϕ es lineal:

$$\phi(\lambda[e]) = \phi([\lambda e]) = f(\lambda e) = \lambda f(e) = \lambda \phi([e]).$$

Teorema de Isomorfía: Si $f: E \rightarrow F$ es lineal, entonces la aplicación $\phi: E/\text{Ker } f \rightarrow \text{Im } f$, $\phi([e]) = f(e)$, es un isomorfismo lineal.

Demostración: Es isomorfismo de grupos por el teorema de isomorfía para morfismos de grupos, y es lineal por la propiedad universal del espacio vectorial cociente.

Definiciones: Una relación \leq en un conjunto X es de **orden** si es *reflexiva* ($x \leq x$; $\forall x \in X$) *antisimétrica* ($x \leq y$, $y \leq x \Rightarrow x = y$) y *transitiva* ($x \leq y$, $y \leq z \Rightarrow x \leq z$).

Una biyección $f: X \rightarrow Y$ entre conjuntos ordenados es un **isomorfismo** si $x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, y es un **anti-isomorfismo** cuando $x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Un conjunto ordenado X es un **retículo** si tiene primer ($y \leq x, \forall x \in X$) y último ($x \leq z, \forall x \in X$) elemento, y todo par $x_1, x_2 \in X$ tiene **supremo** (primer elemento de los que son $\geq x_1, x_2$) e **ínfimo** (último elemento de los que son $\leq x_1, x_2$).

Todo conjunto ordenado (X, \leq) define un orden **dual** $X^* = (X, \leq^*)$, donde ponemos $x \leq^* y \Leftrightarrow y \leq x$. Es claro que $X^{**} = X$, y que una aplicación $f: X \rightarrow Y$ es un anti-isomorfismo si y sólo si $f: X^* \rightarrow Y$ es un isomorfismo. Además, X es un retículo si y sólo si lo es X^* .

Las partes de un conjunto, los subgrupos de un grupo, los ideales de un anillo, los subespacios de un espacio vectorial, ordenados por inclusión, forman un retículo.

Teorema: Sea $p: E \rightarrow \bar{E}$ lineal y epiyectiva. Si $V = \text{Ker } p$, tenemos un isomorfismo de retículos (el inverso transforma W en $p(W)$),

$$\left[\begin{array}{c} \text{Subespacios} \\ \text{vectoriales de } \bar{E} \end{array} \right] \xrightarrow{\sim} \left[\begin{array}{c} \text{Subespacios vectoriales} \\ \text{de } E \text{ que contienen a } V \end{array} \right], \quad \bar{W} \mapsto p^{-1}(\bar{W}).$$

Demostración: $p(p^{-1}\bar{W}) = \bar{W}$ porque p es epiyectiva y, cuando $V \subseteq W$, también

$$p^{-1}(pW) = W + \text{Ker } p = W + V = W.$$

Definición: Una sucesión $\dots E_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} E_n \xrightarrow{f_n} E_{n+1} \dots$ de aplicaciones lineales es **exacta** si la imagen de cada una es el núcleo de la siguiente, $\text{Im } f_{n-1} = \text{Ker } f_n$.

Una sucesión $0 \rightarrow E' \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} E'' \rightarrow 0$ es exacta cuando i es inyectiva y p es epiyectiva, de núcleo $V = \text{Im } i$ (luego $E'' \simeq E/V$). Éstas son las sucesiones exactas **cortas**.

2.2.1. Teoría de la Dimensión

Decimos que $E \neq 0$ es **simple** si no tiene más subespacios vectoriales que 0 y E .

Una **bandera** de E de **longitud** n es una sucesión $E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_n$ de subespacios vectoriales que no puede ampliarse de modo que siga siendo estrictamente creciente ($E_0 = 0$, $E_n = E$ y los cocientes E_i/E_{i-1} son simples). E es de **dimensión finita** si admite alguna bandera, y la **dimensión** de E es la menor longitud de sus banderas.

El único espacio vectorial de dimensión 0 es $E = 0$.

Los espacios vectoriales de dimensión 1 son los simples, y k es un espacio simple.

Teorema: Sea E un espacio vectorial de dimensión finita, y V un subespacio vectorial.

1. $\dim V \leq \dim E$, y sólo se da la igualdad cuando $V = E$.
2. Todas las banderas de E tienen igual longitud, que es la dimensión de E .
3. Si $0 \rightarrow E' \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} E'' \rightarrow 0$ es exacta, $\dim E = \dim E' + \dim E''$.

Demostración: Sea $0 = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_n = E$ una bandera con $n = \dim E$, y pongamos $V_i = E_i \cap V$. El núcleo de $V_i \rightarrow E_i/E_{i-1}$ es $E_{i-1} \cap V_i = V_{i-1}$, así que

$$0 \rightarrow V_i/V_{i-1} \rightarrow E_i/E_{i-1}$$

y V_i/V_{i-1} es simple o nulo. Eliminando en $0 \subseteq V_1 \subseteq \dots \subseteq V_n = V$ las repeticiones, obtenemos una bandera de V ; luego $\dim V \leq \dim E$.

Si $\dim V = n$, las inclusiones $V_{i-1} \subset V_i$ son estrictas. Ahora, si $E_{i-1} = V_{i-1} \subset V_i \subseteq E_i$, y también $V_i = E_i$. Como $V_0 = E_0$, vemos que $V = V_n = E_n = E$.

(2) Dada otra bandera $0 \subset \bar{E}_1 \subset \dots \subset \bar{E}_d = E$, tenemos que $d \leq \dim E$, porque $\dim \bar{E}_{i-1} < \dim \bar{E}_i$. Por definición $\dim E \leq d$; luego $d = \dim E$.

(3) Si tenemos banderas $0 \subset E'_1 \dots \subset E'_m = E'$ y $0 \subset E''_1 \dots \subset E''_d = E''$, entonces

$$0 \subset \dots \subset i(E'_m) = p^{-1}(0) \subset \dots \subset p^{-1}(E''_d) = E$$

es una bandera de E (p. 37); luego $\dim E = m + d = \dim E' + \dim E''$.

Fórmulas de la Dimensión:

$$\dim E/V = \dim E - \dim V.$$

$$\dim E = \dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f), \text{ para toda aplicación lineal } f: E \rightarrow F.$$

$$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F.$$

$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W).$$

Demostración: La sucesión $0 \rightarrow V \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} E/V \rightarrow 0$ es exacta.

La sucesión $0 \rightarrow \text{Ker } f \xrightarrow{i} E \xrightarrow{f} \text{Im } f \rightarrow 0$ es exacta.

La sucesión $0 \rightarrow E \xrightarrow{i_1} E \times F \xrightarrow{\pi_2} F \rightarrow 0$ es exacta; $i_1(e) = (e, 0)$, $\pi_2(e, v) = v$.

$0 \rightarrow V \cap W \xrightarrow{i} V \times W \xrightarrow{s} V + W \rightarrow 0$ es exacta; $i(e) = (e, -e)$, $s(v, w) = v + w$.

Corolario: Toda aplicación lineal inyectiva o epiyectiva $f: E \rightarrow F$ entre espacios vectoriales de igual dimensión (finita, por supuesto) es un isomorfismo.

Demostración: $\dim(\text{Ker } f) = \dim F - \dim(\text{Im } f)$; luego $\text{Ker } f = 0 \Leftrightarrow \text{Im } f = F$.

Bases

$$f: k^n \longrightarrow E, \quad f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n.$$

Los vectores e_1, \dots, e_n forman una **base** de E si f es isomorfismo: cada vector descompone de modo único como combinación lineal $e = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. En tal caso $n = \dim E$, y diremos que $(x_1, \dots, x_n) \in k^n$ son las **coordenadas** de e en la base e_1, \dots, e_n .

Los vectores e_1, \dots, e_n **generan** E si f es epiyectiva: $ke_1 + \dots + ke_n = E$.

En tal caso $n \geq \dim E$, y si se da la igualdad, ya forman una base de E .

Los vectores e_1, \dots, e_n son **linealmente independientes** si f es inyectiva: la única combinación lineal nula, $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$, es la que tiene todos sus coeficientes nulos.

En tal caso $n \leq \dim E$, y si se da la igualdad, ya forman una base de E .

La **base usual** de k^n es $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, \dots , $e_n = (0, \dots, 0, 1)$.

Proposición: Todo sistema de generadores e_1, \dots, e_n contiene una base.

Demostración: Pongamos $E_i = ke_1 + \dots + ke_i$.

Eliminando e_i cuando $E_{i-1} = E_i$, podemos suponer que $0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_n = E$.

Luego $n \leq \dim E$; así que $n = \dim E$, y e_1, \dots, e_n ya forman una base de E .

Proposición: En un espacio vectorial de dimensión finita, toda familia de vectores linealmente independiente e_1, \dots, e_n puede ampliarse hasta obtener una base.

Demostración: Pongamos $E_i = ke_1 + \dots + ke_i$. Como $\dim E_i = i$, las inclusiones $E_{i-1} \subset E_i$ son estrictas, y podemos elegir $e_{n+1}, \dots, e_{n+r} \in E$ de modo que tengamos una sucesión estrictamente creciente $0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_{n+r} = E$, donde $E_{n+j} = ke_1 + \dots + ke_{n+j}$.

Luego $n + r \leq \dim E$, y los generadores $e_1, \dots, e_n, \dots, e_{n+r}$ forman una base de E .

Teorema: *Todo espacio vectorial $E \neq 0$ de dimensión finita n admite bases, y $E \simeq k^n$.*

Demostración: Cualquier vector no nulo se puede ampliar hasta obtener una base.

Teorema de Rouché-Frobënus: *La condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineales $AX = B$ sea compatible es que $\text{rg} A = \text{rg}(A|B)$.*

Demostración: Sean A_1, \dots, A_n las columnas de la matriz A .

El sistema $x_1 A_1 + \dots + x_n A_n = B$ es compatible si y sólo si $B \in \langle A_1, \dots, A_n \rangle$; es decir, $\langle A_1, \dots, A_n \rangle = \langle A_1, \dots, A_n, B \rangle$; lo que equivale a la coincidencia de sus dimensiones (p. 37).

Ahora bien, el **rango** de una matriz (el máximo número de columnas linealmente independientes) es la dimensión del subespacio vectorial que generan sus columnas.

Proposición: *Si e_1, \dots, e_n es una base de E , tenemos isomorfismos*

$$\text{Hom}_k(E, F) \xrightarrow{\sim} F \times \dots \times F, \quad f \mapsto (f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

y por tanto $\dim(\text{Hom}_k(E, F)) = (\dim E) \cdot (\dim F)$.

Demostración: Si $f(e_1) = \dots = f(e_n) = 0$, entonces $f(E) = f(ke_1 + \dots + ke_n) = 0$, y $f = 0$.

Además $f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ es lineal, y $f(e_i) = v_i$.

Ahora $\dim(\text{Hom}_k(E, F)) = n(\dim F)$ por la propiedad 3 (p. 38).

q.e.d.

Si $f: E \rightarrow F$ es lineal, (e_1, \dots, e_n) es una base de E , y (v_1, \dots, v_m) es una base de F ,

$$f(e_j) = a_{1j} v_1 + \dots + a_{mj} v_m. \quad (2.1)$$

Diremos que $A = (a_{ij})$ es la matriz de f en tales bases.

Sus columnas son las coordenadas de los vectores $f(e_j)$; luego su rango es la dimensión de $\langle f(e_1), \dots, f(e_n) \rangle$, que es la imagen de f , porque $f(\sum_i \lambda_i e_i) = \sum_i \lambda_i f(e_i)$ (por eso se llama **rango** de f a la dimensión de su imagen),

$$\begin{aligned} \dim(\text{Im } f) &= \text{rg } A, \\ \dim(\text{Ker } f) &= n - \text{rg } A. \end{aligned}$$

Además, si X denota las coordenadas de un vector $e \in E$, en columna, entonces

$$f(e) = \sum_j x_j f(e_j) = \sum_j \sum_i x_j a_{ij} e'_i = \sum_i (\sum_j a_{ij} x_j) e'_i,$$

así que las coordenadas Y del vector $f(e)$ en la base de F son

$$Y = AX. \quad (2.2)$$

Si $h: F \rightarrow W$ es lineal, (w_1, \dots, w_r) es una base de W , y $B = (b_{ki})$ es su matriz,

$$\begin{aligned} h(v_i) &= \sum_k b_{ki} w_k \\ (hf)(e_j) &= h(\sum_i a_{ij} v_i) = \sum_i a_{ij} h(v_i) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ki} w_k = \sum_k (\sum_i b_{ki} a_{ij}) w_k. \end{aligned}$$

La matriz de $h \circ f$ en las bases e_1, \dots, e_n y w_1, \dots, w_r es $BA = (\sum_i b_{ki} a_{ij})$; luego *el producto de matrices es asociativo* (la composición de aplicaciones lo es) y *la matriz de cualquier isomorfismo f es invertible, y su inversa es la matriz de f^{-1} .*

Cambio de Base: Sean (e_1, \dots, e_n) y (e'_1, \dots, e'_n) dos bases de E . La **matriz de cambio de base** es la matriz $B = (b_{ij}) \in M_{n \times n}(k)$ de la identidad en esas bases,

$$e'_j = b_{1j}e_1 + \dots + b_{nj}e_n. \quad (2.3)$$

Según 2.2, si X y X' son las coordenadas de $e \in E$ en estas bases, tenemos que

$$X = BX' \quad , \quad X' = B^{-1}X. \quad (2.4)$$

Si fijamos nuevas bases (e'_1, \dots, e'_n) y (v'_1, \dots, v'_m) en E y F , tenemos las matrices de cambio de base $B \in M_{n \times n}(k)$, $C \in M_{m \times m}(k)$, y el cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} e_1, \dots, e_n & F & \xrightarrow{f} & F & v_1, \dots, v_m \\ & \text{Id} \downarrow & & \uparrow \text{Id} & \\ e'_1, \dots, e'_n & E & \xrightarrow{f} & E & v'_1, \dots, v'_m \end{array}$$

muestra que la matriz $A' \in M_{m \times n}(k)$ de f en las nuevas bases es

$$A' = C^{-1}AB. \quad (2.5)$$

Definición: Diremos que la suma de unos subespacios vectoriales V_1, \dots, V_r es **directa**, y se denota $V_1 \oplus \dots \oplus V_r$, si es isomorfismo la siguiente aplicación lineal epiyectiva

$$s: V_1 \times \dots \times V_r \longrightarrow V_1 + \dots + V_r, \quad s(v_1, \dots, v_r) = v_1 + \dots + v_r,$$

en cuyo caso $\dim(V_1 \oplus \dots \oplus V_r) = \dim V_1 + \dots + \dim V_r$.

Ejemplos: Si e_1, \dots, e_n es una base de E , entonces $E = ke_1 \oplus \dots \oplus ke_n$.

$\text{Ker } s \cong V_1 \cap V_2$ cuando $r = 2$, y la suma es directa si y sólo si $V_1 \cap V_2 = 0$. Si $E = V \oplus W$ (es decir, $V + W = E$ y $V \cap W = 0$) decimos que V y W son **suplementarios** en E .

Definiciones: Una relación de orden \leq en un conjunto X es **total** cuando no hay pares incomparables: $x \leq x'$ o $x' \leq x$; $\forall x, x' \in X$. Un subconjunto Y de X es una **cadena** si, con la ordenación inducida, es un conjunto totalmente ordenado.

Un elemento x es **maximal** si $x \leq x' \Rightarrow x = x'$, y **minimal** si $x' \leq x \Rightarrow x' = x$.

Diremos que $x \in X$ es una **cota superior** (resp. **inferior**) de un subconjunto Y cuando $y \leq x$ (resp. $x \leq y$) para todo $y \in Y$.

Entre los principios que fundamentan las Matemáticas se encuentra el

Lema de Zorn: Sea X un conjunto ordenado no vacío. Si toda cadena de X admite cota superior, entonces X tiene algún elemento maximal.

Teorema: Todo subespacio vectorial V admite un suplementario.

Demostración: Sea X el conjunto de los subespacios vectoriales W de E tales $V \cap W = 0$, ordenado por inclusión. No es vacío porque $V \cap 0 = 0$.

Toda cadena $\{W_i\}$ admite cota superior: el punto crucial es ver que $W = \bigcup_i W_i$ es subgrupo, porque $V \cap W = \bigcup_i (V \cap W_i) = 0$, $W_i \subseteq W$, y $\lambda W = \bigcup_i \lambda W_i \subseteq \bigcup_i W_i = W$. Si $u, w \in W$, al ser cadena, $u, w \in W_i$ para algún índice; luego $u + w \in W_i \subseteq W$.

Por el lema de Zorn, X tiene algún elemento maximal W , y $V \cap W = 0$ porque $W \in X$. Veamos que $E = V + W$. Si $e \in E$, y $e \notin W$, la inclusión $W \subset W + ke$ es estricta, de modo que $V \cap (W + ke) \neq 0$. Existe un vector $0 \neq v = w + \lambda e$, donde $v \in V, w \in W$.

Luego $\lambda \neq 0$, porque $V \cap W = 0$, y despejando $e \in V + W$.

Teorema: Toda sucesión exacta corta $0 \rightarrow E' \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} E'' \rightarrow 0$ de aplicaciones lineales admite una **sección** lineal $s: E'' \rightarrow E$ ($ps = \text{Id}_{E''}$). Luego $j+s: E' \oplus E'' \rightarrow E$ es un isomorfismo y el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & E' & \xrightarrow{i_1} & E' \oplus E'' & \xrightarrow{\pi_2} & E'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \wr j+s & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & E' & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{p} & E'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Demostración: Sea W un suplementario de $\text{Im } j = \text{Ker } p$ en E , de modo que $p: W \rightarrow E''$ es un isomorfismo. Una sección es $s = p^{-1}: E'' \rightarrow WE$, y el diagrama claramente conmuta.

Veamos que $j + s: E' \oplus E'' \rightarrow E$ es isomorfismo.

Si $0 = i(e') + s(e'')$, entonces $0 = pi(e') + ps(e'') = e''$; luego $i(e') = 0$ y $e' = 0$ porque i es inyectiva.

Si $e \in E$, ponemos $e'' = p(e)$, de modo que $e - s(e'') \in \text{Ker } p = \text{Im } i$; luego $e - s(e'') = i(e')$ y concluimos que $e = i(e') + s(e'')$.

2.3. El Espacio Dual

Las **formas lineales** en E son las aplicaciones k -lineales $\omega: E \rightarrow k$.

$E^* = \text{Hom}_k(E, k)$ es el **espacio dual** de E .

Teorema: Si e_1, \dots, e_n es una base de E , existe una única base $\omega_1, \dots, \omega_n$ de E^* , llamada **base dual**, tal que $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$, (1 cuando $i = j$, y 0 en otro caso).

Demostración: Las formas lineales $\omega_i(x_1e_1 + \dots + x_n e_n) = x_i$ verifican que $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$, y generan E^* porque, para toda forma lineal ω , tenemos que

$$\omega = \omega(e_1)\omega_1 + \dots + \omega(e_n)\omega_n \tag{2.6}$$

al coincidir ambas en la base e_1, \dots, e_n . Luego forman una base de E^* .

q.e.d.

2.6 dice que las coordenadas de ω en la base dual son $Z = (\omega(e_1), \dots, \omega(e_n))$, que es la matriz de $\omega: E \rightarrow k$ cuando en k se fija la base que define la unidad.

Si (e'_1, \dots, e'_n) es otra base de E , y $(\omega'_1, \dots, \omega'_n)$ es su base dual, por 2.5 las coordenadas Z' de ω en la nueva base son $Z' = ZB$, donde B es la matriz del cambio de base en E . En esta igualdad Z y Z' son filas, y si las ponemos en columna vemos que $(B^{-1})^t$ es la matriz del cambio de base en E^* .

Lema: Si $e \in E$ no es nulo, existe $\omega \in E^*$ tal que $\omega(e) = 1$.

Demostración: Pongamos $E = ke \oplus V$. La forma lineal $\omega: ke \oplus V \rightarrow k$, $\omega(\lambda e + v) = \lambda$, está bien definida (porque $e \neq 0$) y $\omega(e) = 1$.

q.e.d.

Tenemos una aplicación lineal natural $\psi: E \rightarrow E^{**}$, porque cada vector $e \in E$ define una forma lineal $\psi(e): E^* \rightarrow k$, $\psi(e)(\omega) = \omega(e)$.

Teorema de Reflexividad: Si E es un espacio vectorial de dimensión finita, el morfismo natural $E \rightarrow E^{**}$ es un isomorfismo, $E = E^{**}$.

Demostración: Como $\dim E^{**} = \dim E^* = \dim E$, basta ver que ψ es inyectiva.

Si $\psi(e) = 0$, entonces $\omega(e) = \psi(e)(\omega) = 0$, $\forall \omega \in E^*$, y $e = 0$ por el lema.

Definición: El **incidente** de un subespacio V de E es el subespacio vectorial de E^*

$$V^\circ = \{\omega \in E^* : \omega(v) = 0, \text{ para todo } v \in V\}.$$

Lema: Si la dimensión de E es finita, $V = (V^\circ)^\circ$ vía la identificación $E = E^{**}$.

Demostración: Claramente $V \subseteq (V^\circ)^\circ = \{e \in E : \omega(e) = 0, \text{ para todo } \omega \in V^\circ\}$.

Recíprocamente, si $e \in (V^\circ)^\circ$, y $\pi: E \rightarrow E/V$ es la proyección canónica, tenemos que $0 = \bar{\omega}(\pi e)$ para todo $\bar{\omega} \in (E/V)^*$, porque $\bar{\omega} \circ \pi \in V^\circ$. Luego $\pi(e) = 0$, y $e \in V$.

Teorema: Si la dimensión de E es finita, tenemos un anti-isomorfismo de retículos

$$\left[\begin{array}{c} \text{Subespacios} \\ \text{vectoriales de } E \end{array} \right] \xrightarrow{\sim} \left[\begin{array}{c} \text{Subespacios} \\ \text{vectoriales de } E^* \end{array} \right], V \mapsto V^\circ.$$

Demostración: El lema afirma que la aplicación es biyectiva, y que su inversa es el paso al incidente en E^* . Además, si $V_1^\circ \subseteq V_2^\circ$, entonces $(V_1^\circ)^\circ \supseteq (V_2^\circ)^\circ$, y $V_1 \supseteq V_2$ por el lema.

Corolario: $(V + W)^\circ = V^\circ \cap W^\circ$,

$$(V \cap W)^\circ = V^\circ + W^\circ,$$

$$\dim V^\circ = \dim E - \dim V.$$

Demostración: Estas propiedades se dicen con la relación de orden.

Ejemplo: El incidente V° está formado por las ecuaciones $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ de los hiperplanos que pasan por V . Si $L = k\omega_1 + \dots + k\omega_m$ es un subespacio de E^* , su incidente L° está formado por las soluciones del sistema homogéneo

$$\left. \begin{array}{l} \omega_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \omega_m = a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right\}$$

Definición: La **traspuesta** de una aplicación lineal $f: F \rightarrow E$ es la aplicación lineal

$$f^*: E^* \longrightarrow F^*, f^*(\omega) = \omega \circ f.$$

Es claro que $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$, y que $(\lambda f_1 + \mu f_2)^* = \lambda f_1^* + \mu f_2^*$.

Si $i: V \rightarrow E$ es la inclusión, $i(v) = v$, entonces $i^*(\omega)$ es la restricción de ω a V .

Si (a_{ij}) es la matriz de f en ciertas bases v_1, \dots, v_m de F y e_1, \dots, e_n de E , la matriz de f^* en las bases duales $\theta_1, \dots, \theta_m$ de F^* y $\omega_1, \dots, \omega_n$ de E^* , es la matriz traspuesta

$$(f^*\omega_j)(v_i) = \omega_j(f(v_i)) = a_{ji}.$$

Teorema de Frobenius: Si $0 \rightarrow E_1 \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} E_2 \rightarrow 0$ es una sucesión exacta de aplicaciones lineales, también es exacta la sucesión de aplicaciones traspuestas:

$$0 \longrightarrow E_2^* \xrightarrow{p^*} E^* \xrightarrow{j^*} E_1^* \longrightarrow 0$$

Demostración: Basta considerar la sucesión exacta corta (p. 41)

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{i_1} E_1 \oplus E_2 \xrightarrow{\pi_2} E_2 \longrightarrow 0$$

Tenemos que i_1^* es epiyectiva, π_2^* es inyectiva, e $\text{Im } \pi_2^* \subseteq \text{Ker } i_1^*$ porque

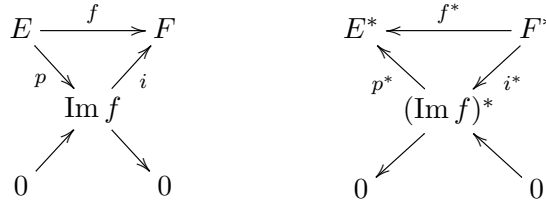
$$i_1^* \pi_1^* = (\pi_1 i_1)^* = \text{Id}, \quad i_2^* \pi_2^* = (\pi_2 i_2)^* = \text{Id}, \quad i_1^* \pi_2^* = (\pi_2 i_1)^* = 0.$$

Ahora, si $\omega \in \text{Ker } i_1^*$, entonces

$$\omega = (i_1 \pi_1 + i_2 \pi_2)^* \omega = (\pi_1^* i_1^* + \pi_2^* i_2^*) \omega = \pi_2^* (i_2^* \omega) \in \text{Im } \pi_2^*.$$

Corolario: $\text{Im } f^* = (\text{Im } f)^*$, (los rangos por filas y columnas de una matriz coinciden).

Demostración: Los siguientes diagramas conmutativos con diagonales exactas, donde $p(e) = f(e)$, muestran que p^* define un isomorfismo de $(\text{Im } f)^*$ con $\text{Im } f^*$:



Nota: La sucesión exacta $0 \rightarrow (E/V)^* \xrightarrow{\pi^*} E^* \xrightarrow{i^*} V^* \rightarrow 0$, al ser $V^o = \text{Ker } i^*$, da otra demostración de que $\dim V^o = \dim E - \dim V$, y que por tanto $V = (V^o)^o$.

2.4. Espacios Vectoriales Euclídeos

Un **producto escalar** en un espacio vectorial real E es una aplicación $E \times E \rightarrow \mathbb{R}$

1. *Bilineal:* $(e + e') \cdot v = e \cdot v + e' \cdot v$, $(\lambda e) \cdot v = \lambda(e \cdot v)$,
 $e \cdot (v + v') = e \cdot v + e \cdot v'$, $e \cdot (\lambda v) = \lambda(e \cdot v)$.

2. *Simétrica:* $e \cdot v = v \cdot e$.

3. *Definido-positiva:* $e \cdot e \geq 0$, y sólo se da la igualdad cuando $e = 0$.

El **módulo** de un vector es $\|e\| = +\sqrt{e \cdot e}$, y $\|\lambda e\| = \sqrt{\lambda^2 e \cdot e} = |\lambda| \cdot \|e\|$.

Lema: $|e \cdot v| \leq \|e\| \cdot \|v\|$ (*desigualdad de Cauchy-Schwarz*).

$$\|e + v\| \leq \|e\| + \|v\| \quad (\textit{desigualdad triangular}).$$

Demostración: El polinomio $(te + v) \cdot (te + v) = (e \cdot e)t^2 + 2(e \cdot v)t + v \cdot v$ no toma valores negativos; luego su discriminante $4(e \cdot v)^2 - 4(e \cdot e)(v \cdot v)$ es ≤ 0 , y $(e \cdot v)^2 \leq (e \cdot e)(v \cdot v)$.

Tomando raíz cuadrada, $|e \cdot v| \leq \|e\| \cdot \|v\|$. En cuanto a la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned} \|e + v\|^2 &= (e + v) \cdot (e + v) = e \cdot e + v \cdot v + 2(e \cdot v) \leq e \cdot e + v \cdot v + 2|e \cdot v| \leq \\ &\leq \|e\|^2 + \|v\|^2 + 2\|e\| \cdot \|v\| = (\|e\| + \|v\|)^2 \end{aligned}$$

Definición: El **coseno** del ángulo α que forman dos vectores e, v no nulos es $\cos \alpha = \frac{e \cdot v}{\|e\| \cdot \|v\|}$, y los vectores son **ortogonales** cuando $e \cdot v = 0$; es decir, $\cos \alpha = 0$.

Definición: Un espacio vectorial **euclídeo** es un espacio vectorial real E de dimensión finita dotado de un producto escalar, que induce una aplicación lineal (la **polaridad**)

$$\phi: E \longrightarrow E^*, (\phi e)(v) = e \cdot v.$$

Teorema: La polaridad $\phi: E \rightarrow E^*$ es un isomorfismo.

Demostración: Si $\phi(e) = 0$, entonces $e \cdot e = (\phi e)(e) = 0$; luego $e = 0$, y ϕ es inyectiva.

Como $\dim E = \dim E^*$, concluimos que ϕ es un isomorfismo.

Definición: El **ortogonal** de un subespacio vectorial V de E es el subespacio vectorial

$$V^\perp = \{e \in E: e \cdot v = 0 \text{ para todo } v \in V\}.$$

Corolario: $\dim V^\perp = \dim E - \dim V$

$$V \subseteq W \Leftrightarrow W^\perp \subseteq V^\perp$$

$$(V + W)^\perp = V^\perp \cap W^\perp$$

$$(V \cap W)^\perp = V^\perp + W^\perp$$

$$(V^\perp)^\perp = V$$

$$E = V^\perp \oplus V$$

Demostración: $\phi(V^\perp) = V^o$, y las 4 primeras propiedades se siguen de las de la incidencia.

En cuanto a la quinta, $V = (V^\perp)^\perp$ porque $V \subseteq (V^\perp)^\perp$, y

$$\dim (V^\perp)^\perp = \dim E - \dim V^\perp = \dim E - (\dim E - \dim V) = \dim V.$$

Por último, $V \cap V^\perp = 0$ porque $v \cdot v = 0 \Rightarrow v = 0$, y $V + V^\perp = E$ porque

$$\dim (V + V^\perp) = \dim V + \dim V^\perp = \dim E.$$

Ejemplo: Dos subvariedades lineales $X = p + V$, $Y = q + W$ son **perpendiculares** si V y W^\perp son incidentes ($V \subseteq W^\perp$ ó $W^\perp \subseteq V$), lo que equivale a que lo sean V^\perp y W .

Si $V \subseteq W^\perp$, tenemos que $V \cap W \subseteq W^\perp \cap W = 0$; luego $V \cap W = 0$.

Si $W^\perp \subseteq V$, tenemos que $E = W^\perp + W \subseteq V + W$; luego $V + W = E$.

Definición: Una base e_1, \dots, e_n es **ortonormal** cuando $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$,

$$e \cdot v = (x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) \cdot (y_1 e_1 + \dots + y_n e_n) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Teorema: Todo espacio vectorial euclídeo $E \neq 0$ admite bases ortonormales.

Demostración: Si $E = \mathbb{R}v$, una base ortonormal es $e = \frac{v}{\|v\|}$, porque $e \cdot e = 1$.

Si $n = \dim E > 1$, tomamos $e_n \in E$ de módulo 1. Ahora $\dim (\mathbb{R}e_n)^\perp = n - 1$, y

$$E = (\mathbb{R}e_n)^\perp \oplus \mathbb{R}e_n.$$

Por inducción $(\mathbb{R}e_n)^\perp$ tiene una base ortonormal e_1, \dots, e_{n-1} .

Los vectores e_1, \dots, e_n cumplen que $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$, y forman una base de E porque lo generan.

2.5. Diagonalización de Endomorfismos

Sea E un k -espacio vectorial de dimensión n .

Los **endomorfismos** de E son las aplicaciones lineales $T: E \rightarrow E$, y forman un espacio vectorial $\text{End}_k(E) = \text{Hom}_k(E, E)$ de dimensión $(\dim E)^2$.

El producto de endomorfismos es la composición, $ST = S \circ T$.

En general, para todo polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_dx^d \in k[x]$, pondremos

$$p(T) = a_0\text{Id}_E + a_1T + a_2T^2 + \dots + a_dT^d.$$

Fijada una base e_1, \dots, e_n de E , cada endomorfismo T tiene una matriz $A = (a_{ij})$,

$$T(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i, \quad j = 1, \dots, n,$$

y si se considera una nueva base en E , y B es la matriz de cambio de base, la matriz A' de T en la nueva base es (p. 40)

$$A' = B^{-1}AB. \quad (2.7)$$

Si I denota la matriz unidad de n filas y columnas, tendremos, usando las propiedades de los determinantes (que probaremos en la próxima sección):

$$\begin{aligned} |xI - A'| &= |xB^{-1}IB - B^{-1}AB| = |B^{-1}(xI - A)B| \\ &= |B^{-1}| \cdot |xI - A| \cdot |B| = |B|^{-1}|B| \cdot |xI - A| = |xI - A|, \end{aligned}$$

y el polinomio $|xI - A|$ no depende de la base elegida.

Es el polinomio **característico** $c_T(x)$ del endomorfismo T ,

$$c_T(x) = \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & x - a_{nn} \end{vmatrix} = x^n - \left(\sum_{i=1}^n a_{ii} \right) x^{n-1} + \dots + (-1)^n |A|.$$

Definición: Un escalar $\alpha \in k$ es un **valor propio** de T si existe un vector no nulo $e \in E$ tal que $T(e) = \alpha e$. Diremos que e es un **vector propio** de T , y pondremos

$$V_\alpha = \text{Ker}(\alpha\text{Id} - T) = \{e \in E: T(e) = \alpha e\}.$$

Teorema: Los valores propios de T son las raíces en k de su polinomio característico.

Demostración: Sea $n = \dim E$. Un escalar α es un valor propio cuando

$$0 \neq \dim(\text{Ker}(\alpha\text{Id} - T)) = n - \text{rg}(\alpha I - A),$$

lo que significa que $\text{rg}(\alpha I - A) < n$; es decir, $c_T(\alpha) = |\alpha I - A| = 0$.

Corolario: El número de valores propios de T es $\leq \dim E$.

Demostración: El número de raíces en k de $c_T(x)$ es $\leq \text{gr } c_T(x) = \dim E$.

Teorema de Hamilton-Cayley: El polinomio característico $c(x) = x^n + \dots + c_1x + c_0$ anula al endomorfismo: $c(T) = T^n + \dots + c_1T + c_0\text{Id} = 0$.

Demostración: Es evidente cuando $n = 1$, pues en tal caso $T = a\text{Id}$, y $c(x) = x - a$.

Si $n > 1$ y A es la matriz de T , la matriz de $c(T)$ es $c(A) = A^n + \dots + c_0I$ y, para ver que $c(A) = 0$, basta probarlo en una extensión de k .

Por el teorema de Kronecker, podemos suponer que $c(x)$ tiene una raíz $\alpha \in k$.

Sea e_1, \dots, e_n una base de E con $T(e_1) = \alpha e_1$,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \cdots \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix}, \quad A^r = \begin{pmatrix} \alpha^r & \cdots \\ 0 & \bar{A}^r \end{pmatrix}.$$

Ahora $c(x) = (x - \alpha)\bar{c}(x)$, donde $\bar{c}(x) = |xI - \bar{A}|$ y, por inducción, $\bar{c}(\bar{A}) = 0$.

$$c(A) = (A - \alpha I)\bar{c}(A) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{c}(\alpha) & \cdots \\ 0 & \bar{c}(\bar{A}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{c}(\alpha) & \cdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Definición: La aplicación lineal $k[x] \rightarrow \text{End}_k(E)$, $p(x) \mapsto p(T)$, no puede ser inyectiva porque la dimensión de $k[x]$ es infinita, y el polinomio **anulador** de T es el generador $\phi_T(x) = x^d + \dots$ del ideal $\mathfrak{a} = \{p(x) \in k[x] : p(T) = 0\}$. En $k[x]$ es el polinomio de menor grado que anula a T , y divide a cualquier otro que anule a T .

Teorema: Los valores propios de T son las raíces en k de su polinomio anulador $\phi_T(x)$.

Demostración: Si $e \neq 0$ y $T(e) = \alpha e$, entonces $0 = \phi(T)e = \phi(\alpha)e$; luego $\phi(\alpha) = 0$.

Recíprocamente, si $\phi(x) = (x - \alpha)p(x)$, tendremos que $p(T) \neq 0$, y $p(T)v \neq 0$ para algún vector v . Luego $(T - \alpha)[p(T)v] = \phi(T)v = 0$, y vemos que α es un valor propio.

Ejemplos: La simetría S de \mathbb{R}^3 respecto de un plano tiene los valores propios $x = 1, -1$. Como $S^2 = \text{Id}$, su anulador divide a $x^2 - 1$; luego $\phi_S(x) = x^2 - 1$.

Un giro T en \mathbb{R}^3 de ángulo recto sólo tiene el valor propio $x = 1$. Como $T^4 = \text{Id}$, su anulador divide a $x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$; luego $\phi_T(x) = (x - 1)(x^2 + 1)$.

Definición: T es **diagonalizable** si existe alguna base e_1, \dots, e_r de E formada por vectores propios, $T(e_j) = \alpha_j e_j$, de modo que la matriz de T en tal base es diagonal:

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_r \end{pmatrix}.$$

Por 2.7, un endomorfismo T de matriz A es diagonalizable si existe una matriz invertible B tal que $D = B^{-1}AB$ sea diagonal. En tal caso

$$A^n = (BDB^{-1})(BDB^{-1}) \dots = BD^n B^{-1} = B \begin{pmatrix} \alpha_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_r^n \end{pmatrix} B^{-1},$$

y obtenemos así la solución $X_n = A^n X_0$ del sistema de ecuaciones en diferencias finitas

$$X_{n+1} = AX_n, \quad \begin{cases} x_{n+1} = a_{11}x_n + \dots + a_{1r}z_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_{n+1} = a_{r1}x_n + \dots + a_{rr}z_n \end{cases}$$

Cuando $k = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} , la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales

$$X' = AX, \quad \begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x'_r = a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r \end{cases}$$

es $X = B\bar{X}$, donde \bar{X} es la solución general del sistema $\bar{X}' = D\bar{X}$,

$$X' = B\bar{X}' = BD\bar{X} = BDB^{-1}X = AX.$$

Ahora bien, el sistema $\bar{X}' = D\bar{X}$ está formado por las ecuaciones diferenciales $\bar{x}'_i = \alpha_i \bar{x}_i$, que ya hemos resuelto (p. 22), $\bar{x}_i(t) = c_i e^{\alpha_i t}$, $c_i \in k$ ($= \mathbb{R}$ ó \mathbb{C}),

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} c_1 e^{\alpha_1 t} \\ \vdots \\ c_r e^{\alpha_r t} \end{pmatrix}.$$

Lema: $\dim(V_{\alpha_1} + \dots + V_{\alpha_m}) = \dim V_{\alpha_1} + \dots + \dim V_{\alpha_m}$, ($\alpha_1, \dots, \alpha_m$ distintos).

Demostración: $\text{Ker}(T - \alpha_1) \dots (T - \alpha_m) = \text{Ker}(T - \alpha_1) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(T - \alpha_m)$, p. 20.

Lema: Un endomorfismo de valores propios $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ es diagonalizable si y sólo si

$$V_{\alpha_1} + \dots + V_{\alpha_r} = E.$$

Demostración: Si T diagonaliza, $V_{\alpha_1} + \dots + V_{\alpha_r}$ es E porque contiene una base de E .

Si $V_{\alpha_1} + \dots + V_{\alpha_r} = E$, tomando una base en cada sumando V_{α_i} vemos que E admite un sistema de generadores formado por vectores propios; luego una base.

Corolario: Si un endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión n tiene n valores propios distintos, es diagonalizable.

Demostración: $\dim(V_{\alpha_1} + \dots + V_{\alpha_n}) = \dim V_{\alpha_1} + \dots + \dim V_{\alpha_n} \geq n = \dim E$.

Criterio de Diagonalización con el Anulador: T es diagonalizable si y sólo si su anulador $\phi_T(x)$ tiene todas sus raíces en k y son simples.

Demostración: Si $\phi_T(x)$ tiene todas sus raíces en k y son simples, $\phi_T(x) = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_r)$, entonces $0 = (T - \alpha_1) \dots (T - \alpha_r)$ y T diagonaliza (p. 20):

$$E = \text{Ker}(T - \alpha_1) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(T - \alpha_r) = V_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus V_{\alpha_r}.$$

Recíprocamente, sean $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ los valores propios.

El endomorfismo $(T - \alpha_1) \dots (T - \alpha_r)$ se anula en una base cuando T diagonaliza; luego es nulo, y $\phi_T(x)$ divide a $(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_r)$, que tiene todas sus raíces en k y son simples.

Criterio de Diagonalización con el Característico: T es diagonalizable si y sólo si $c_T(x)$ tiene todas sus raíces en k y la multiplicidad m_i de cada raíz α_i es

$$m_i = \dim V_{\alpha_i}.$$

Demostración: Si T es diagonalizable, su matriz en alguna base es

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

y $c_T(x) = |xI - D| = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$ tiene todas sus raíces en k .

La multiplicidad de cada raíz es el número de veces que se repite en $\alpha_1, \dots, \alpha_n$; luego

$$m_i = n - \text{rg}(D - \alpha_i I) = \dim(\text{Ker}(T - \alpha_i \text{Id})) = \dim V_{\alpha_i}.$$

Recíprocamente, $\sum_i m_i = \text{gr } c_T(x) = \dim E$ cuando $c_T(x)$ tiene todas sus raíces en k .

Si además $m_i = \dim V_{\alpha_i}$, entonces $\dim(\sum_i V_{\alpha_i}) = \sum_i \dim V_{\alpha_i} = \dim E$, y $\sum_i V_{\alpha_i} = E$.

2.6. Tensores

Una aplicación $T: E_1 \times \dots \times E_r \rightarrow F$, donde E_1, \dots, E_r, F son k -espacios vectoriales, es **multilineal** si es lineal en cada una de sus r variables:

$$\begin{aligned} T(\dots, e_i + v_i, \dots) &= T(\dots, e_i, \dots) + T(\dots, v_i, \dots), \\ T(\dots, \lambda e_i, \dots) &= \lambda T(\dots, e_i, \dots). \end{aligned}$$

Las aplicaciones multilineales $E_1 \times \dots \times E_r \rightarrow F$ forman un k -espacio vectorial con la suma y producto por escalares usuales:

$$\begin{aligned} (T + \bar{T})(e_1, \dots, e_r) &= T(e_1, \dots, e_r) + \bar{T}(e_1, \dots, e_r), \\ (\lambda T)(e_1, \dots, e_r) &= \lambda \cdot T(e_1, \dots, e_r). \end{aligned}$$

Los **tensores** de tipo (p, q) en un k -espacio vectorial E de dimensión finita son las aplicaciones multilineales $T_p^q: E \times \dots \times E \times E^* \times \dots \times E^* \rightarrow k$, y forman un espacio vectorial $T_p^q E$.

Por convenio, $T_0^0 E = k$.

Los tensores **covariantes** de orden p son los de tipo $(p, 0)$, y los **contravariantes** de orden q son los de tipo $(0, q)$. En particular, $T_1 E = E^*$, y $T^1 E = E^{**} = E$.

Cada aplicación lineal $f: F \rightarrow E$ induce aplicaciones lineales

$$\begin{aligned} f^*: T_p E &\longrightarrow T_p F, \quad (f^* T_p)(v_1, \dots, v_p) = T_p(f(v_1), \dots, f(v_p)), \\ f_*: T^q F &\longrightarrow T^q E, \quad (f_* T^q)(\omega_1, \dots, \omega_q) = T^q(f^*(\omega_1), \dots, f^*(\omega_q)), \end{aligned}$$

y si $g: E \rightarrow V$ es lineal, entonces $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$, $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Definición: El **producto tensorial** de dos tensores T_p^q, T_r^s es el tensor

$$(T_p^q \otimes T_r^s)(e_1, \dots, e_{p+r}, \omega_1, \dots, \omega_{q+s}) = T_p^q(e_1, \dots, e_p, \omega_1, \dots, \omega_q) \cdot T_r^s(e_{p+1}, \dots, e_{q+1}, \dots).$$

1. $(\lambda T_p^q + \mu \bar{T}_p^q) \otimes T_r^s = \lambda(T_p^q \otimes T_r^s) + \mu(\bar{T}_p^q \otimes T_r^s)$.
 $T_p^q \otimes (\lambda T_r^s + \mu \bar{T}_r^s) = \lambda(T_p^q \otimes T_r^s) + \mu(T_p^q \otimes \bar{T}_r^s)$.
2. $(T_p^q \otimes T_r^s) \otimes T_a^b = T_p^q \otimes (T_r^s \otimes T_a^b)$.
3. $f^*(T_p \otimes T_r) = f^*(T_p) \otimes f^*(T_r)$.

Demostración: Para abreviar la notación, pongamos $\underline{e} = (e_1, \dots, e_p)$, $\underline{e}' = (e_{p+1}, \dots, e_{p+r})$, $\underline{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_q)$ y $\underline{\omega}' = (\omega_{q+1}, \dots, \omega_{q+s})$.

$$\begin{aligned} ((\lambda T_p^q + \mu \bar{T}_p^q) \otimes T_r^s)(\underline{e}, \underline{e}', \underline{\omega}, \underline{\omega}') &= (\lambda T_p^q + \mu \bar{T}_p^q)(\underline{e}, \underline{\omega}) T_r^s(\underline{e}', \underline{\omega}') \\ &= \lambda T_p^q(\underline{e}, \underline{\omega}) T_r^s(\underline{e}', \underline{\omega}') + \mu \bar{T}_p^q(\underline{e}, \underline{\omega}) T_r^s(\underline{e}', \underline{\omega}') = (\lambda(T_p^q \otimes T_r^s) + \mu(\bar{T}_p^q \otimes T_r^s))(\underline{e}, \underline{e}', \underline{\omega}, \underline{\omega}') \end{aligned}$$

e igual se prueba que $T_p^q \otimes (\lambda T_r^s + \mu \bar{T}_r^s) = \lambda(T_p^q \otimes T_r^s) + \mu(T_p^q \otimes \bar{T}_r^s)$.

La segunda propiedad es inmediata, y en cuanto a la tercera:

$$\begin{aligned} (f^*(T_p \otimes T_r))(\underline{e}, \underline{e}') &= (T_p \otimes T_r)(f(\underline{e}), f(\underline{e}')) = T_p(f(\underline{e})) \cdot T_r(f(\underline{e}')) \\ &= (f^* T_p)(\underline{e}) \cdot (f^* T_r)(\underline{e}') = (f^*(T_p) \otimes f^*(T_r))(\underline{e}, \underline{e}'). \end{aligned}$$

En resumen, el producto tensorial define una estructura de k -álgebra (no conmutativa) en el espacio vectorial $T_\bullet E = \bigoplus_{p,q} T_p^q E$ formado por las sumas finitas formales de tensores $\sum_{p,q} T_p^q$, y f^* es un morfismo de k -álgebras, definido en $T_\bullet E = \bigoplus_p T_p E$.

Teorema: Sea e_1, \dots, e_n una base de E , y $\omega_1, \dots, \omega_n$ su base dual. Los tensores

$$\omega_{i_1} \otimes \dots \otimes \omega_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q},$$

forman una base de $T_p^q E$. Por tanto $\dim(T_p^q E) = (\dim E)^{p+q}$.

Demostración: Fijemos una sucesión $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q$. Como $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$,

$$(\omega_{i_1} \otimes \dots \otimes \omega_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q})(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, \omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_q}) = 1,$$

mientras que los restantes tensores de la familia considerada se anulan todos en esta sucesión $(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, \omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_q})$; luego $\omega_{i_1} \otimes \dots \otimes \omega_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q}$ no es combinación lineal de ellos: tal familia es linealmente independiente. Para probar que generan $T_p^q E$, basta ver que todo tensor T_p^q es

$$T_p^q = \sum_{\substack{1 \leq j_1, \dots, j_q \leq n \\ 1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n}} T_p^q(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, \omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_q}) \omega_{i_1} \otimes \dots \otimes \omega_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q}. \quad (2.8)$$

La diferencia de ambos miembros se anula en las sucesiones $(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, \omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_q})$; luego es nula. En particular, las coordenadas de T_p^q son

$$\lambda_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = T_p^q(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, \omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_q}).$$

Ejemplo: Cada endomorfismo T define un tensor $T_1^1(e, \omega) = \omega(Te)$, y esta aplicación lineal $\text{End}_k(E) \rightarrow T_1^1 E$ es inyectiva: si $\omega(Te) = 0, \forall \omega \in E^*$, entonces $T(e) = 0$ (p. 41).

Como $\dim \text{End}_k(E) = \dim T_1^1 E$, es un isomorfismo, $T_1^1 E = \text{End}_k(E)$. Si $T(e_j) = \sum_i a_{ij} e_i$, las coordenadas de $T_1^1 = \sum_{ij} \lambda_i^j \omega_i \otimes e_j$ son $\lambda_i^j = T_1^1(e_i, \omega_j) = \omega_j(Te_i) = a_{ji}$.

Propiedad Universal: Toda aplicación multilineal $T: E^* \times \dots \times E^* \times E \times \dots \times E \rightarrow F$ factoriza de modo único por una aplicación lineal $f: T_p^q E \rightarrow F$:

$$(*) \quad f(\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_p \otimes e_1 \otimes \dots \otimes e_q) = T(\omega_1, \dots, \omega_p, e_1, \dots, e_q).$$

Demostración: Fijada una base de E , definimos $f: T_p^q E \rightarrow F$ en la correspondiente base de $T_p^q E$ por la igualdad (*). Ahora ambos miembros de (*) son aplicaciones multilineales que coinciden en los vectores de una base; luego coinciden. La unicidad es obvia.

Corolario: $T_p^p E = (T_p^q E)^*$.

Contracción de Índices: Existe una única aplicación lineal $C_1^1: T_p^q E \rightarrow T_{p-1}^{q-1} E$ tal que

$$C_1^1(\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_p \otimes e_1 \otimes \dots \otimes e_q) = \omega_1(e_1) \omega_2 \otimes \dots \otimes \omega_p \otimes e_2 \otimes \dots \otimes e_q.$$

Demostración: Basta aplicar la propiedad universal a la aplicación multilineal

$$\begin{aligned} T: E^* \times \dots \times E^* \times E \times \dots \times E &\longrightarrow T_{p-1}^{q-1} E \\ T(\omega_1, \dots, \omega_p, e_1, \dots, e_q) &= \omega_1(e_1) \omega_2 \otimes \dots \otimes \omega_p \otimes e_2 \otimes \dots \otimes e_q. \end{aligned}$$

Ejemplos: Igualmente se define $C_i^j: T_p^q E \rightarrow T_{p-1}^{q-1} E$ para cualquier otro par de índices, y la **traza** de un endomorfismo $T = \sum_{ij} a_{ji} \omega_i \otimes e_j$ es $C_1^1 T = \sum_{ij} a_{ji} \omega_i(e_j) = \sum_i a_{ii}$.

2.6.1. Tensores Hemisimétricos

Un tensor covariante $\Omega_p \in T_p(E)$ es **hemisimétrico** o **alternado** (una p -**forma**) si se anula en las sucesiones con términos repetidos:

$$\Omega_p(\dots, e, \dots, e, \dots) = 0.$$

Los tensores alternados de orden p forman un subespacio vectorial $\Lambda_p E$ de $T_p E$.

Por convenio $\Lambda_0 E = T_0 E = k$, y $\Lambda_1 E = T_1 E = E^*$.

Si $f: F \rightarrow E$ es una aplicación lineal, $f^* \Omega_p$ también es hemisimétrico, de modo que f induce una aplicación lineal $f^*: \Lambda_\bullet E \rightarrow \Lambda_\bullet F$.

Definición: $(\sigma T_p)(e_1, \dots, e_p) = T_p(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(p)}); \sigma \in S_p, T_p \in T_p E$.

1. $\sigma: T_p E \rightarrow T_p E$ es lineal.
2. $f^*(\sigma T_p) = \sigma(f^* T_p)$, para toda aplicación lineal $f: F \rightarrow E$.
3. $\tau(\sigma T_p) = (\tau\sigma) T_p; \sigma, \tau \in S_p$.
4. $\sigma(\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_p) = \omega_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \omega_{\sigma^{-1}(p)}$.

Demostración: Las dos primeras son inmediatas. En cuanto a la tercera,

$$\begin{aligned} (\tau(\sigma T_p))(e_1, \dots, e_p) &= (\sigma T_p)(e_{\tau(1)}, \dots, e_{\tau(p)}) \stackrel{*}{=} T_p(e_{\tau(\sigma 1)}, \dots, e_{\tau(\sigma p)}) \\ &= T_p(e_{(\tau\sigma)1}, \dots, e_{(\tau\sigma)p}) = ((\tau\sigma) T_p)(e_1, \dots, e_p), \end{aligned}$$

donde la igualdad (*) se debe a que, por definición, σ se aplica a los lugares de las variables, no a los subíndices. Por último,

$$\begin{aligned} (\sigma(\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_p))(e_1, \dots, e_p) &= \omega_1(e_{\sigma(1)}) \cdot \dots \cdot \omega_p(e_{\sigma(p)}) = \omega_{\sigma^{-1}(1)}(e_1) \cdot \dots \cdot \omega_{\sigma^{-1}(p)}(e_p) \\ &= (\omega_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \omega_{\sigma^{-1}(p)})(e_1, \dots, e_p). \end{aligned}$$

Lema: $\sigma \Omega_p = (\text{sgn } \sigma) \Omega_p$, para toda p -forma Ω_p .

Demostración: Basta probar la igualdad para las trasposiciones (ij) , y

$$\begin{aligned} 0 &= \Omega_p(\dots, e_i + e_j, \dots, e_i + e_j, \dots) \\ &= \Omega_p(\dots, e_i, \dots, e_i, \dots) + \Omega_p(\dots, e_i, \dots, e_j, \dots) + \Omega_p(\dots, e_j, \dots, e_i, \dots) + \Omega_p(\dots, e_j, \dots, e_j, \dots) \\ &= \Omega_p(\dots, e_i, \dots, e_j, \dots) + \Omega_p(\dots, e_j, \dots, e_i, \dots). \end{aligned}$$

Definición: La **hemisimetrización** de un tensor covariante T_p es el tensor

$$h(T_p) = \sum_{\sigma \in S_p} (\text{sgn } \sigma) (\sigma T_p),$$

y convenimos que $h(T_p) = T_p$ cuando $p = 0$ ó 1 . Por la propiedad 4,

$$h(\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_p) = \sum_{\sigma \in S_p} (\text{sgn } \sigma) (\omega_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \omega_{\sigma(p)}). \quad (2.9)$$

Lema: $h: T_\bullet E \rightarrow \Lambda_\bullet E$ es lineal y epiyectiva, y su núcleo es un ideal:

$$h(T_p) = 0 \Rightarrow h(T_p \otimes T_q) = h(T_q \otimes T_p) = 0. \quad (2.10)$$

Demostración: Si τ intercambia dos lugares con repetición en $(\dots, e, \dots, e, \dots)$,

$$\sum_{\sigma \in A_p} (\text{sgn } \sigma)(\sigma T_p) \text{ y } \tau(\sum_{\sigma \in A_p} (\text{sgn } \sigma)(\sigma T_p)) = -\sum_{\sigma \in A_p} \text{sgn } (\tau\sigma)(\tau\sigma T_p),$$

coinciden en $(\dots, e, \dots, e, \dots)$, y su diferencia $h(T_p)$ se anula: $h(T_p) \in \Lambda_p E$.

Veamos que h es epiyectiva.

Sea e_1, \dots, e_n una base de E , y $\omega_1, \dots, \omega_n$ su base dual.

Pongamos $\lambda_{i_1 \dots i_p} = \Omega_p(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$, de modo que $\lambda_{\sigma(i_1) \dots \sigma(i_p)} = (\text{sgn } \sigma)\lambda_{i_1 \dots i_p}$, y

$$\begin{aligned} \Omega_p &= \sum_{i_1, \dots, i_p} \lambda_{i_1 \dots i_p} \omega_{i_1} \otimes \dots \otimes \omega_{i_p} = \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_p} \left(\sum_{\sigma \in S_p} (\text{sgn } \sigma) \lambda_{i_1 \dots i_p} \omega_{\sigma(i_1)} \otimes \dots \otimes \omega_{\sigma(i_p)} \right) \\ &= \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_p} \lambda_{i_1 \dots i_p} h(\omega_{i_1} \otimes \dots \otimes \omega_{i_p}) = h\left(\sum_{i_1 \leq \dots \leq i_p} \lambda_{i_1 \dots i_p} \omega_{i_1} \otimes \dots \otimes \omega_{i_p} \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Por último, si cada permutación $\sigma \in S_p$ se identifica con la permutación $\sigma \in S_{p+q}$ que deja fijos los números $p+1, \dots, p+q$, tendremos

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in S_p} (\text{sgn } \sigma) \sigma(T_p \otimes T_q) &= h(T_p) \otimes T_q = 0, \\ \sum_{\sigma \in S_p} (\text{sgn } \tau\sigma) (\tau\sigma(T_p \otimes T_q)) &= 0, \text{ para todo } \tau \in S_{p+q}, \end{aligned}$$

y en $h(T_p \otimes T_q)$ es nula la suma correspondiente a cada clase de equivalencia τS_p .

Luego la suma total es nula. Igualmente se prueba que $h(T_q \otimes T_p) = 0$.

Definición: Al ser $\Lambda_\bullet E$ el cociente de $T_\bullet E$ por un ideal, tenemos un producto en $\Lambda_\bullet E$. El **producto exterior** de dos tensores alternados Ω_p, Ω_q es

$$\Omega_p \wedge \Omega_q = h(T_p \otimes T_q); \quad \Omega_p = h(T_p), \quad \Omega_q = h(T_q).$$

Como $h(\Omega_p) = (p!) \Omega_p$, cuando $\text{car } k = 0$ tenemos que $\Omega_p = h(\frac{1}{p!} \Omega_p)$, y

$$\Omega_p \wedge \Omega_q = \frac{1}{p!q!} h(\Omega_p \otimes \Omega_q).$$

1. $(\lambda \Omega_p + \mu \bar{\Omega}_p) \wedge \Omega_q = \lambda(\Omega_p \wedge \Omega_q) + \mu(\bar{\Omega}_p \wedge \Omega_q)$.
 $\Omega_p \wedge (\lambda \Omega_q + \mu \bar{\Omega}_q) = \lambda(\Omega_p \wedge \Omega_q) + \mu(\Omega_p \wedge \bar{\Omega}_q)$.
2. $(\Omega_p \wedge \Omega_q) \wedge \Omega_r = \Omega_p \wedge (\Omega_q \wedge \Omega_r)$.
3. $\Omega_p \wedge \Omega_q = (-1)^{pq} \Omega_q \wedge \Omega_p$.
4. $\omega \wedge \omega = 0$, $\omega \in E^*$.
5. $f^*(\Omega_p \wedge \Omega_q) = f^*(\Omega_p) \wedge f^*(\Omega_q)$.
6. $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p = \sum_{\sigma \in S_p} (\text{sgn } \sigma) (\omega_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \omega_{\sigma(p)})$.
7. Si $\omega_1, \dots, \omega_n$ es una base de E^* , las p -formas $\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p}$, $i_1 < \dots < i_p$, forman una base de $\Lambda_p E$, y

$$\Omega_p = \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_p} \Omega_p(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p}.$$

En particular $\dim \Lambda_p E = \binom{n}{p}$, y por tanto $\Lambda_p E = 0$ cuando $p > n$.

Demostración: Las propiedades 1, 2 y 5 se siguen de las correspondientes propiedades del producto tensorial, y en cuanto a la cuarta, si $\tau = (12)$, tenemos que:

$$\omega \wedge \omega = h(\omega \otimes \omega) = \omega \otimes \omega - \tau(\omega \otimes \omega) = \omega \otimes \omega - \omega \otimes \omega = 0.$$

(3) Veamos primero el caso $p = q = 1$. Dadas dos 1-formas ω, ω' ,

$$0 = (\omega + \omega') \wedge (\omega + \omega') = \omega \wedge \omega + \omega \wedge \omega' + \omega' \wedge \omega + \omega' \wedge \omega' = \omega \wedge \omega' + \omega' \wedge \omega;$$

luego $\omega \wedge \omega' = -\omega' \wedge \omega$.

En el caso general, podemos reducirnos al caso $\Omega_p = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p$, $\Omega_q = \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_q$, que se sigue directamente del anterior.

(6) Se sigue de 2.9.

(7) Las p -formas $\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p}$ generan $\Lambda_p E$ porque, según 2.11,

$$\Omega_p = \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_p} \Omega_p(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p},$$

y son linealmente independientes porque $(\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p})(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = 0$, salvo cuando j_1, \dots, j_p es una reordenación de $i_1 < \dots < i_p$.

Propiedad Universal: Toda aplicación multilineal alternada $H: E \times \dots \times E \rightarrow F$ factoriza de modo único por una aplicación lineal $f: \Lambda^p E \rightarrow F$:

$$(*) \quad f(e_1 \wedge \dots \wedge e_p) = H(e_1, \dots, e_p).$$

Demostración: Dada una base v_1, \dots, v_n de E , definimos $f: \Lambda^p E \rightarrow F$ de modo que en la correspondiente base $\{v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_p}\}$ de $\Lambda_p E$ se verifique (*). Ahora ambos miembros de la igualdad (*) son aplicaciones multilineales $E \times \dots \times E \rightarrow F$ que coinciden en las sucesiones de vectores de una base; luego coinciden.

La unicidad se debe a que los productos $e_1 \wedge \dots \wedge e_p$ generan $\Lambda^p E$.

Corolario: Tenemos isomorfismos canónicos $(\Lambda^p E)^* = \Lambda^p(E^*)$,

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p)(e_1 \wedge \dots \wedge e_p) = (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p)(e_1, \dots, e_p).$$

Demostración: Basta poner $F = k$ en la propiedad universal.

Corolario: $\omega_1, \dots, \omega_p$ son linealmente independientes $\Leftrightarrow \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p \neq 0$.

Demostración: Si son linealmente independientes, forman parte de una base de E^* .

Luego $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p$ forma parte de una base de $\Lambda_p E$, y no es nula.

Si $\omega_1, \dots, \omega_p$ son linealmente dependientes, alguna es combinación lineal de las restantes, y la propiedad 4 muestra que $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p = 0$.

Corolario: Sea $n = \dim E$ y Ω_E un elemento no nulo de $\Lambda_n E$. Unos vectores e_1, \dots, e_n forman una base de E si y sólo si $\Omega_E(e_1, \dots, e_n) \neq 0$.

Demostración: Si forman una base de E , la coordenada de Ω_E en la correspondiente base de $\Lambda_n E$ es $\Omega_E(e_1, \dots, e_n)$, y no es nula porque $\Omega_E \neq 0$.

Si e_1, \dots, e_n son linealmente dependientes, alguno es combinación lineal de los restantes, y $\Omega_E(e_1, \dots, e_n) = 0$ al ser Ω_E alternado.

Nota: El núcleo de $h: T_\bullet E \rightarrow \Lambda_\bullet E$ es el ideal bilátero I generado por los tensores $\omega \otimes \omega$.

En efecto, tenemos un morfismo epiyectivo $T_\bullet E/I \rightarrow \Lambda_\bullet E$, porque $h(\omega \otimes \omega) = 0$.

Además, en $T_\bullet E/I$ tenemos que $[\omega] \cdot [\omega'] = -[\omega'] \cdot [\omega]$, porque $[\omega] \cdot [\omega] = 0$, y fijada una base, los productos $[\omega_{i_1}] \dots [\omega_{i_p}]$, $i_1 < \dots < i_p$, generan $T_\bullet E/I$ como espacio vectorial.

Concluimos que $T_\bullet E/I \rightarrow \Lambda_\bullet E$ es un isomorfismo: $I = \text{Ker } h$.

Definición: El **determinante** de una matriz $A = (a_{ij})$ con n filas y columnas es

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sgn } \sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)}.$$

Proposición: $(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p)(e_1, \dots, e_p) = |\omega_i(e_j)| = |\omega_j(e_i)|$.

Demostración: $\sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) (\sigma(\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_p)) = \sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) (\omega_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \omega_{\sigma(p)})$. q.e.d.

Las coordenadas de $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p$ en una base e_1, \dots, e_n de E son

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p)(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) = \begin{vmatrix} \omega_1(e_{i_1}) & \dots & \omega_1(e_{i_p}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_p(e_{i_1}) & \dots & \omega_p(e_{i_p}) \end{vmatrix}.$$

Este determinante es el menor de orden p formado con las columnas i_1, \dots, i_p de la matriz cuyas filas son las coordenadas de $\omega_1, \dots, \omega_p$ en la base dual.

Luego la condición necesaria y suficiente para que p filas de una matriz sean linealmente independientes es que con ellas pueda formarse algún menor de orden p no nulo:

El rango de una matriz es el mayor orden de sus menores no nulos (Teorema del Rango).

Definición: La **contracción interior** de $\Omega_p \in \Lambda_p E$ con $e \in E$ es la $(p-1)$ -forma

$$(i_e \Omega_p)(e_2, \dots, e_p) = \Omega_p(e, e_2, \dots, e_p).$$

Teorema: $i_e(\Omega_p \wedge \Omega_q) = (i_e \Omega_p) \wedge \Omega_q + (-1)^p \Omega_p \wedge (i_e \Omega_q)$.

Demostración: Sea $e = e_1, \dots, e_n$ una base y $\omega = \omega_1, \dots, \omega_n$ su base dual. Basta probar la igualdad cuando $\Omega_p = \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p} = \omega_{i_1} \wedge \omega_I$, $\Omega_q = \omega_{j_1} \wedge \dots \wedge \omega_{j_q} = \omega_{j_1} \wedge \omega_J$.

Cuando $i_1 > 1$ y $j_1 > 1$, ambos miembros son nulos. Cuando $i_1 = 1$ y $j_1 > 1$,

$$\begin{aligned} i_e(\Omega_p \wedge \Omega_q) &= i_e(\omega \wedge \omega_I \wedge \Omega_q) = \omega_I \wedge \Omega_q, \\ (i_e \Omega_p) \wedge \Omega_q + (-1)^p \Omega_p \wedge (i_e \Omega_q) &= \omega_I \wedge \Omega_q + (-1)^p \Omega_p \wedge 0 = \omega_I \wedge \Omega_q, \end{aligned}$$

y análogamente cuando $i_1 > 1$ y $j_1 = 1$. Cuando $i_1 = 1$ y $j_1 = 1$,

$$\begin{aligned} i_e(\Omega_p \wedge \Omega_q) &= i_e(\omega \wedge \omega_I \wedge \omega \wedge \omega_J) = i_e(0) = 0, \\ (i_e \Omega_p) \wedge \Omega_q + (-1)^p \Omega_p \wedge (i_e \Omega_q) &= \omega_I \wedge \Omega_q + (-1)^p \omega \wedge \omega_I \wedge \omega_J = \omega_I \wedge \Omega_q - \omega_I \wedge \Omega_q = 0. \end{aligned}$$

Definición: $n = \dim E$. Como $\dim \Lambda_n E = 1$, todo endomorfismo $\Lambda_n E \rightarrow \Lambda_n E$ es una homotecia. Cada endomorfismo $T: E \rightarrow E$ induce un endomorfismo $T^*: \Lambda_n E \rightarrow \Lambda_n E$, que es la multiplicación por un escalar $\det(T)$, llamado **determinante** de T .

Teorema: $\det(TS) = (\det T)(\det S)$.

Demostración: $(TS)^* = S^*T^*$.

Teorema: Un endomorfismo T es invertible si y sólo si $\det(T) \neq 0$.

Demostración: Sea e_1, \dots, e_n una base de E , y Ω_E una n -forma no nula.

$$\Omega_E(T(e_1), \dots, T(e_n)) = (T^*\Omega_E)(e_1, \dots, e_n) = (\det T) \Omega_E(e_1, \dots, e_n). \quad (2.12)$$

Luego $T(e_1), \dots, T(e_n)$ es una base si y sólo si $\det(T) \neq 0$.

Proposición: *El determinante de un endomorfismo T coincide con el determinante de su matriz A en cualquier base: $\det(T) = |A|$.*

Demostración: $T^*(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n) = (T^*\omega_1) \wedge \dots \wedge (T^*\omega_n)$, y $T^*(\omega_i) = \sum_j a_{ij}\omega_j$.

Definiciones: Sea E un espacio vectorial real de dimensión n . Una **forma de volumen** es una n -forma no nula Ω_E , y $\Omega_E(e_1, \dots, e_n)$ es el **volumen** (con signo) del paralelepípedo que determinan los vectores e_1, \dots, e_n .

Dos formas de volumen Ω_E, Ω'_E definen la misma **orientación** cuando $\Omega'_E = \lambda\Omega_E$ para algún $\lambda > 0$. Las dos clases de equivalencia son las dos orientaciones de E . Fijada una orientación $[\Omega_E]$, una base e_1, \dots, e_n de E es **directa** si $\Omega_E(e_1, \dots, e_n) > 0$. Por 2.12,

$$\left[\text{Volumen de } Te_1, \dots, Te_n \right] = (\det T) \left[\text{Volumen de } e_1, \dots, e_n \right]$$

Si además fijamos un producto escalar en E , la polaridad $\phi: E \rightarrow E^*$ induce isomorfismos $\phi: \Lambda_p E \rightarrow \Lambda_p(E^*) = (\Lambda_p E)^*$, que definen un producto escalar en $\Lambda_p E$:

$$\Omega_p \cdot \Omega'_p = (\phi\Omega_p)(\Omega'_p).$$

Si $\omega_1, \dots, \omega_n$ es la base dual de una base ortonormal e_1, \dots, e_n , las p -formas $\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p}$ definen una base ortonormal de $\Lambda_p E$:

$$\phi(\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p})(\omega_{j_1} \wedge \dots \wedge \omega_{j_p}) = (e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p})(\omega_{j_1} \wedge \dots \wedge \omega_{j_p}) = \delta_{i_1 j_1} \dots \delta_{i_p j_p}.$$

Teorema: *En un espacio vectorial euclídeo orientado E , existe una única forma de volumen Ω_E tal que el volumen de cualquier base ortonormal directa es 1.*

Demostración: Como $\dim \Lambda_n E = 1$, en la orientación existe una única forma de volumen Ω_E de módulo 1 y, si e_1, \dots, e_n es una base ortonormal orientada, acabamos de ver que es $\Omega_E = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n$; así que $\Omega_E(e_1, \dots, e_n) = 1$.

Producto Vectorial: Ω_E la forma de volumen de un espacio vectorial euclídeo orientado de dimensión 3; $e, v \in E$. La forma lineal $i_v i_e \Omega_E = \Omega_E(e, v, -)$ se corresponde con un vector $e \times v$, el **producto vectorial** de e y v ,

$$(e \times v) \cdot u = \Omega_E(e, v, u).$$

Claramente es bilineal, $e \times v = -v \times e$, y $e \times v \neq 0$ si y sólo si e y v son linealmente independientes, en cuyo caso $e \times v$ es ortogonal a los factores, el módulo de $e \times v$ es el área del paralelogramo que determinan e y v , y la base $e, v, e \times v$ es directa.

En efecto, pongamos $e \times v = \lambda u$, donde $\lambda = \|e \times v\|$ y el módulo de u es 1. Ahora, $i_u \Omega_E$ es la forma de área del plano $\langle e, v \rangle$, y el área del paralelogramo que determinan e y v es

$$|(i_u \Omega_E)(e, v)| = |\Omega_E(u, e, v)| = |(e \times v) \cdot u| = |\lambda u \cdot u| = \lambda.$$

Además $\Omega_E(e, v, e \times v) = (e \times v) \cdot (e \times v) > 0$, y la base $e, v, e \times v$ es directa.

Parte II
Segundo Curso

Capítulo 3

Álgebra II

3.1. G -Conjuntos

Dar una **acción** por la izquierda¹ de un grupo G en un conjunto X , o un **G -conjunto**, es dar una aplicación $G \times X \rightarrow X$ tal que

1. $(g_1g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$ para todo $g_1, g_2 \in G, x \in X$.
2. $1 \cdot x = x$ para todo $x \in X$.

y define una relación de equivalencia en X : $x \equiv y$ cuando $y = gx$ para algún $g \in G$.

La **órbita** de $x \in X$ es su clase $Gx = \{gx : g \in G\}$, y el **subgrupo de isotropía** es

$$\begin{aligned} I_x &= \{g \in G : gx = x\}. \\ I_{gx} &= gI_xg^{-1}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Una acción es **transitiva** si tiene una única órbita, y $x \in X$ es un punto **fijo** o invariante cuando $I_x = G$. El conjunto de puntos fijos se denota X^G .

Una aplicación $f: X \rightarrow Y$ es un **morfismo** de G -conjuntos si $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$ para todo $g \in G, x \in X$; y $\text{Hom}_G(X, Y)$ denota el conjunto de los G -morfismos $X \rightarrow Y$.

Los **isomorfismos** de G -conjuntos son los morfismos biyectivos.

Teorema: $\text{Hom}_G(G/H, X) = X^H$, para todo subgrupo H de G .

Demostración: La aplicación $f: G/H \rightarrow X, f(gH) = gx$, está bien definida si y sólo si $x \in X^H$.

Teorema: $G/I_x = Gx, [g] \mapsto gx$.

Demostración: Si $g_1x = g_2x$, entonces $g_1^{-1}g_2x = x, g_1^{-1}g_2 \in I_x, [g_1] = [g_2]$.

Fórmula de Clases: Si un grupo finito G actúa en un conjunto finito X , entonces existen puntos no fijos $x_i \in X$ y divisores $d_i > 1$ del orden de G , tales que

$$|X| = |X^G| + \sum_{x_i} [G : I_{x_i}] = |X^G| + \sum_i d_i.$$

Demostración: X es la unión disjunta de las órbitas, $|X^G|$ es el número de órbitas con un único punto, y los cardinales de las restantes órbitas son índices $d_i = [G : I_{x_i}]$, que dividen a $|G|$ por el teorema de Lagrange.

¹Las acciones a derecha e izquierda se corresponden vía la fórmula $x \cdot g = g^{-1} \cdot x$.

Definición: Un p -grupo es un grupo de orden una potencia de un primo p .

Lema: Si G es un p -grupo, para todo G -conjunto finito X tenemos que

$$|X| \equiv |X^G| \pmod{p}.$$

Demostración: En la fórmula de clases, los divisores d_i son potencias p^{n_i} , $n_i \geq 1$.

Teorema: El centro de un p -grupo $G \neq 1$ nunca es trivial:

$$Z(G) = \{a \in G : ag = ga, \forall g \in G\} \neq 1.$$

Demostración: G actúa en sí mismo por conjugación.

El conjunto de puntos fijos es $Z(G)$, así que $|Z(G)|$ es múltiplo de p , y $|Z(G)| \neq 1$.

Teorema de Cauchy: Si p divide a $|G|$, entonces G tiene un subgrupo de orden p .

Demostración: El grupo $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ actúa en $X = \{(g_1, \dots, g_p) \in G^p : g_1 \dots g_p = 1\}$ permutando cíclicamente los factores:

$$g_1 \dots g_p = 1, \quad g_1 \dots g_{p-1} = g_p^{-1}, \quad g_p g_1 \dots g_{p-1} = 1.$$

Como $|X| = |G|^{p-1}$ es múltiplo de p , también lo es el número de puntos fijos, y existe un punto fijo $(g, \dots, g) \neq (1, \dots, 1)$. Es decir, $g^p = 1$, $g \neq 1$, y el orden de (g) es p .

Definición: Sea p un número primo. Los p -subgrupos de Sylow de un grupo finito G son los subgrupos de orden la mayor potencia p^n que divide a $|G| = p^n m$.

Lema: Todo subgrupo H de orden p^i , $i < n$, está contenido en un subgrupo H' de orden p^{i+1} tal que $H \triangleleft H'$ (i.e., H es subgrupo normal de H').

Demostración: Por inducción sobre i , y es el teorema de Cauchy cuando $i = 0$.

Si $i > 0$, el p -grupo H actúa en G/H , y el conjunto de puntos fijos es $N(H)/H$, donde $N(H) = \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$ es el **normalizador** de H en G .

Como $|G/H|$ es múltiplo de p , también lo es el orden de $N(H)/H$, y tiene algún subgrupo \bar{H} de orden p . Ahora $H' = \pi^{-1}(\bar{H})$ es un subgrupo de $N(H)$ de orden p^{i+1} , y $H \triangleleft H'$.

Corolario: Todo p -grupo G admite una sucesión $1 = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \dots \triangleleft H_{n-1} \triangleleft H_n = G$, donde H_i es un subgrupo de orden p^i .

Primer teorema de Sylow: Existen p -subgrupos de Sylow de G .

Segundo teorema de Sylow: Todos los p -subgrupos de Sylow son conjugados.

Demostración: Si P', P son p -subgrupos de Sylow, P' actúa en G/P y $|G/P|$ no es múltiplo de p ; luego hay un punto fijo $\bar{g} \in G/P$, $P' \subseteq gPg^{-1}$, y $P' = gPg^{-1}$ al tener igual orden.

Tercer teorema de Sylow: El número de p -subgrupos de Sylow divide al índice común m y es congruente con 1 módulo p .

Demostración: G actúa transitivamente sobre el conjunto X de los p -subgrupos de Sylow, por conjugación, y $N(P)$ es la isotropía de P . Luego $|X| = [G : N(P)]$ divide a $[G : P] = m$.

Veamos que P es el único punto fijo de la acción de P .

Si $gP'g^{-1} = P'$, $\forall g \in P$, entonces $P \subset N(P')$, y P, P' son p -subgrupos de Sylow de $N(P)$, y $P' = P$ por el segundo teorema. Ahora $|X| \equiv |X^P| = 1 \pmod{p}$.

3.2. Módulos

Sea A un anillo (conmutativo y con unidad). Dar una estructura de A -**módulo** en un grupo abeliano M es dar un producto $A \times M \rightarrow M$ tal que

Axioma 1: $a(m_1 + m_2) = am_1 + am_2$ para todo $a \in A, m_1, m_2 \in M$.

Axioma 2: $(a + b)m = am + bm$ para todo $a, b \in A, m \in M$.

Axioma 3: $(ab)m = a(bm)$ para todo $a, b \in A, m \in M$.

Axioma 4: $1 \cdot m = m$ para todo $m \in M$.

y un subgrupo N de M es un **submódulo** si $a \in A, m \in N \Rightarrow am \in N$.

Un **morfismo** de A -módulos es un morfismo de grupos $f: M \rightarrow M'$ tal que

$$f(am) = a \cdot f(m), \quad \forall a \in A, m \in M;$$

y es un **isomorfismo** de A -módulos si además es biyectivo.

Ejemplos: Los módulos sobre un cuerpo k son los k -espacios vectoriales, los submódulos son los subespacios vectoriales y los morfismos de k -módulos son las aplicaciones k -lineales.

Todo grupo abeliano admite una única estructura de \mathbb{Z} -módulo, los submódulos son los subgrupos y los morfismos de \mathbb{Z} -módulos son los morfismos de grupos.

La suma $N_1 + N_2$ y la intersección $N_1 \cap N_2$ de dos submódulos son submódulos.

Si I es un ideal, $IM = \{a_1m_1 + \dots + a_nm_n : a_i \in I, m_i \in M\}$ es un submódulo.

Los submódulos de A son los ideales de A .

Los morfismos de A -módulos $M \rightarrow N$ forman un A -módulo $\text{Hom}_A(M, N)$.

Productos directos $\prod_I M_i$ y **sumas directas** $\bigoplus_I M_i$ (formada por las sucesiones $\{m_i\}_{i \in I}$ con un número finito de términos no nulos) de A -módulos son A -módulos.

Cada familia $\{m_i\}_{i \in I}$ de elementos de M define un morfismo de A -módulos

$$f: \bigoplus_I A \rightarrow M, \quad f((a_i)) = \sum_i a_i m_i,$$

y su imagen $\sum_i Am_i$ es el submódulo **generado** por $\{m_i\}_{i \in I}$. Si f es un isomorfismo, decimos que $\{m_i\}_{i \in I}$ es una **base** de M , y que M es **libre**.

Un A -módulo es **finito-generado** o **finito** si $M = Am_1 + \dots + Am_n$.

Si N es un submódulo de un A -módulo M , las demostraciones dadas en el caso de los espacios vectoriales prueban que en el grupo cociente M/N existe una única estructura de A -módulo tal que $\pi: M \rightarrow M/N$ es morfismo de A -módulos, que M/N tiene la correspondiente propiedad universal, que el teorema de Isomorfía $M/\text{Ker } f \simeq \text{Im } f$ es válido para morfismos de A -módulos, y que tenemos un isomorfismo de retículos (donde $\bar{P} \subseteq \bar{M} = M/N$ se corresponde con el núcleo $P = \pi^{-1}(\bar{P})$ de $M \rightarrow \bar{M} \rightarrow \bar{M}/\bar{P}$, de modo que $M/P = \bar{M}/\bar{P}$)

$$\left[\begin{array}{c} \text{Submódulos} \\ \text{de } M/N \end{array} \right] \xrightarrow{\sim} \left[\begin{array}{c} \text{Submódulos de } M \\ \text{que contienen a } N \end{array} \right]$$

La teoría de la dimensión sigue siendo válida; pero ahora se llama longitud: los módulos de longitud finita son los que admiten alguna bandera, y la longitud común de todas ellas es la **longitud** $l(M)$ del módulo (pero los A -módulos simples son los **cuerpos residuales** A/\mathfrak{m} de los maximales, por lo que generalmente A no es de longitud finita).

Corolario: Sea I un ideal de A , y $\bar{A} = A/I$. Los ideales \bar{J} de \bar{A} se corresponden con los ideales J de A que contienen a I . Además $A/J = \bar{A}/\bar{J}$, y los ideales primos se corresponden con ideales primos e ideales maximales con ideales maximales.

Teorema: *Todo anillo $A \neq 0$ tiene algún ideal maximal.*

Demostración: Sea X el conjunto de los ideales distintos de A , ordenado por inclusión.

Si $\{I_j\}_{j \in J}$ es una cadena en X , entonces $I = \bigcup_j I_j$ es un ideal $\neq A$ (p. 40) que contiene a todos los ideales I_j . Por el lema de Zorn, X tiene algún elemento maximal.

Corolario: *Todo ideal $I \neq A$ está contenido en algún ideal maximal.*

Demostración: Un maximal de A/I define un maximal de A que contiene a I .

Corolario: *$f \in A$ es invertible si y sólo si no está en ningún ideal maximal.*

Demostración: Si f no es invertible, $fA \neq A$, y fA está contenido en un maximal.

Corolario: *Sea $A \neq 0$. Si $A^n \rightarrow A^m \rightarrow 0$, entonces $n \geq m$. En particular todas las bases de A^n tienen n elementos.*

Demostración: Sea \mathfrak{m} un ideal maximal, y $k = A/\mathfrak{m}$ su cuerpo residual.

Si un morfismo de A -módulos $A^n \rightarrow A^m$ es epiyectivo, también lo es la aplicación k -lineal $A^n/\mathfrak{m}A^n \rightarrow A^m/\mathfrak{m}A^m$.

Como $A^n/\mathfrak{m}A^n = A^n/\mathfrak{m}^n = (A/\mathfrak{m})^n = k^n$, vemos que $n \geq m$. q.e.d.

Cada morfismo de A -módulos $f: M' \rightarrow M$ induce morfismos de A -módulos

$$\begin{aligned} f_*: \text{Hom}_A(N, M') &\longrightarrow \text{Hom}_A(N, M), & f_*(g) &= f \circ g, \\ f^*: \text{Hom}_A(M, N) &\longrightarrow \text{Hom}_A(M', N), & f^*(g) &= g \circ f. \end{aligned}$$

Teorema: *Una sucesión de morfismos de A -módulos $M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \rightarrow 0$ es exacta si y sólo si para todo A -módulo N es exacta la sucesión*

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(M'', N) \xrightarrow{p^*} \text{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{i^*} \text{Hom}_A(M', N)$$

Demostración: Supongamos que $\text{Im } i = \text{Ker } p$ y que p es epiyectivo.

Si $f: M'' \rightarrow N$ se anula en $\text{Im } p = M''$, entonces $f = 0$; luego p^* es inyectivo.

Como $pi = 0$, tenemos que $0 = (pi)^* = i^*p^*$; luego $\text{Im } p^* \subseteq \text{Ker } i^*$.

Por último, si $f: M \rightarrow N$ se anula en $\text{Im } i = \text{Ker } p$, por la propiedad universal del cociente f factoriza a través $p: M \rightarrow M/\text{Ker } p \simeq M''$. Es decir, $f \in \text{Im } p^*$.

Recíprocamente, como p^* es inyectivo cuando $N = M''/\text{Im } p$, se sigue que la proyección canónica $M'' \rightarrow N$ es nula; luego $\text{Im } p = M''$, y p es epiyectivo.

$\text{Im } i \subseteq \text{Ker } p$, porque $pi = (pi)^*(\text{Id}_{M''}) = i^*p^*(\text{Id}_{M''}) = 0$.

Consideremos $\pi: M \rightarrow N = M/\text{Im } i$. Como $i^*(\pi) = 0$, existe un morfismo $f: M'' \rightarrow N$ tal que $\pi = p^*(f) = fp$; luego $\text{Ker } p \subseteq \text{Ker } \pi = \text{Im } i$,

$$\begin{array}{ccccccc} M' & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{p} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \pi & \swarrow f & & & \\ & & M/\text{Im } i & & & & \end{array}$$

Teorema: *Una sucesión de morfismos de A -módulos $0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M''$ es exacta si y sólo si para todo A -módulo N es exacta la sucesión*

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(N, M') \xrightarrow{i_*} \text{Hom}_A(N, M) \xrightarrow{p_*} \text{Hom}_A(N, M'')$$

Demostración: La implicación directa es sencilla. Para el recíproco, basta tomar $N = A$, y usar los isomorfismos naturales $\text{Hom}_A(A, M) = M$, $f \mapsto f(1)$.

Teorema: Sea $0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \rightarrow 0$ una sucesión exacta de A -módulos. Las siguientes condiciones son equivalentes (y decimos que la sucesión **escinde** o **rompe**),

1. Existe una **sección** A -lineal $s: M'' \rightarrow M$ tal que $ps = \text{Id}_{M''}$.
2. Existe un **retracto** A -lineal $r: M \rightarrow M'$ tal que $ri = \text{Id}_{M'}$.
3. $\text{Hom}_A(N, M) \xrightarrow{p_*} \text{Hom}_A(N, M'')$ es epiyectivo para todo A -módulo N .
4. $\text{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{i^*} \text{Hom}_A(M', N)$ es epiyectivo para todo A -módulo N .
5. Hay un isomorfismo $M' \oplus M'' \simeq M$ tal que el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{i_1} & M' \oplus M'' & \xrightarrow{\pi_2} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \wr & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{p} & M'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Demostración: (1 \Rightarrow 3) Porque $p_*s_* = (ps)_* = \text{Id}$.

(3 \Rightarrow 1) Basta tomar $N = M''$ y considerar la identidad de M'' .

(2 \Rightarrow 4) Porque $i^*r^* = (ri)^* = \text{Id}$.

(4 \Rightarrow 2) Basta tomar $N = M'$ y considerar la identidad de M' .

(1 \Rightarrow 5) La demostración de la p. 41 muestra que $i + s: M' \oplus M'' \rightarrow M$ es el isomorfismo requerido.

(2 \Rightarrow 5) El morfismo $(r, p): M \rightarrow M' \oplus M''$ claramente da un diagrama conmutativo.

Veamos que es un isomorfismo:

Si $r(m) = 0$ y $p(m) = 0$, entonces $m = i(m')$ y $m' = ri(m') = r(m) = 0$; luego $m = 0$.

Dados $m' \in M'$ y $m'' = p(m) \in M''$, existe $x \in m'$ tal que $r(m + i(x)) = m'$.

Finalmente, (5 \Rightarrow 1) y (5 \Rightarrow 2) son evidentes. porque π_2 admite la sección $i_2(m'') = (0, m'')$ y i_1 admite el retracto $\pi_1(m', m'') = m'$.

3.2.1. Módulos Inyectivos y Proyectivos

Un A -módulo P es **proyectivo** si $\text{Hom}_A(P, -)$ conserva sucesiones exactas cortas; i.e., para todo epimorfismo $p: M \rightarrow M''$ es epiyectivo el morfismo

$$p_*: \text{Hom}_A(P, M) \longrightarrow \text{Hom}_A(P, M'').$$

Dualmente un A -módulo Q es **inyectivo** si $\text{Hom}_A(-, Q)$ conserva sucesiones exactas cortas; i.e., para todo morfismo inyectivo $i: M' \rightarrow M$ es epiyectivo el morfismo

$$i^*: \text{Hom}_A(M', Q) \longrightarrow \text{Hom}_A(M, Q).$$

Teorema: Si P es proyectivo, toda sucesión exacta $0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} P \rightarrow 0$ escinde.

Dualmente, si Q es inyectivo, toda sucesión exacta $0 \rightarrow Q \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \rightarrow 0$ escinde.

Demostración: Si P es proyectivo, $p_*: \text{Hom}_A(P, M) \longrightarrow \text{Hom}_A(P, P)$ es epiyectivo, y existe un morfismo $s: P \rightarrow M$ tal que $\text{Id}_P = p_*(s) = ps$. La sucesión rompe.

Si Q es inyectivo, $i^*: \text{Hom}_A(M, Q) \rightarrow \text{Hom}_A(Q, Q)$ es epiyectivo, y existe un morfismo $r: M \rightarrow Q$ tal que $\text{Id}_Q = i^*(r) = ri$. La sucesión rompe.

Teorema: $\bigoplus_i P_i$ es proyectivo si y sólo si lo son todos los sumandos P_i .
Dualmente, $\prod_i Q_i$ es inyectivo si y sólo si lo son todos los factores Q_i .

Demostración: $\text{Hom}_A(\bigoplus_i P_i, M) = \prod_i \text{Hom}_A(P_i, M)$,
 $\text{Hom}_A(M, \prod_i Q_i) = \prod_i \text{Hom}_A(M, Q_i)$.

Teorema: Todo módulo libre es proyectivo. Todo módulo es cociente de un proyectivo.

Demostración: A es proyectivo porque $\text{Hom}_A(A, M) = M$; luego $\bigoplus_I A$ es proyectivo.

Cualquier sistema de generadores de M define un epimorfismo $\bigoplus_I A \rightarrow M$, así que M es cociente de un módulo proyectivo.

Criterio del Ideal: Si el morfismo de restricción $\text{Hom}_A(A, Q) \rightarrow \text{Hom}_A(I, Q)$ es epiyectivo para todo ideal I , entonces Q es un A -módulo inyectivo.

Demostración: Si N es un submódulo de M , hemos de ver que todo morfismo $f: N \rightarrow Q$ es restricción de un morfismo $M \rightarrow Q$. Tomemos $m \in M$ que no esté en N , y consideremos el ideal $I = \{a \in A: am \in N\}$ y el morfismo $\phi: I \rightarrow Q$, $\phi(a) = f(am)$.

Por hipótesis se extiende a un morfismo $\phi': A \rightarrow Q$ que, al anularse en el núcleo de $A \rightarrow Am$, induce un morfismo $\phi': Am \rightarrow Q$ que coincide con f en $N \cap Am = Im$. La sucesión exacta

$$0 \rightarrow N \cap Am \xrightarrow{j} N \oplus Am \xrightarrow{s} N + Am \rightarrow 0$$

donde $j(n) = (n, -n)$, muestra que $f + \phi': N \oplus Am \rightarrow Q$ define un morfismo $N + Am \rightarrow Q$ que coincide con f en N .

Aplicando ahora el lema de Zorn a los pares (M', f') , donde M' es un submódulo de M que contiene a N y $f': M' \rightarrow Q$ extiende a f , con el orden

$$(M'_1, f'_1) \leq (M'_2, f'_2) \Leftrightarrow M'_1 \subseteq M'_2, \text{ y } f'_2 \text{ extiende a } f'_1,$$

vemos que existe (M', f') maximal, y $M' = M$ porque f' no se puede extender.

Definición: Un módulo Q es **divisible** si los morfismos $a \cdot: Q \rightarrow Q$, $a \neq 0$, son epiyectivos.

Corolario: Si A es dominio de ideales principales, los módulos divisibles son inyectivos.

Demostración: $a \cdot: Q \rightarrow Q$ es el morfismo $\text{Hom}_A(A, Q) \rightarrow \text{Hom}_A(aA, Q) \simeq \text{Hom}_A(A, Q)$.

Corolario: Si p es un elemento irreducible de un dominio de ideales principales A , entonces $B = A/p^n A$ es un B -módulo inyectivo.

Demostración: Dado un ideal $p^r A/p^n A$ de B y un morfismo de B -módulos $\phi: p^r A/p^n A \rightarrow B$, tendremos que $0 = \phi(\bar{p}^n) = \bar{p}^{n-r} \phi(\bar{p}^r)$.

Luego $\phi(\bar{p}^r) = b\bar{p}^r$ para algún $b \in B$, y la extensión $\phi': B \rightarrow B$ buscada es $\phi'(x) = bx$.

3.2.2. Localización de Módulos

La **localización** M_S de un A -módulo M por un sistema multiplicativo S de A es el cociente de $M \times S$ por la relación de equivalencia

$$(m, s) \equiv (n, t) \Leftrightarrow \text{existen } u, v \in S \text{ tales que } mu = nv, su = tv,$$

y es un A_S -módulo con las operaciones

$$\begin{aligned} \frac{m}{s} + \frac{n}{t} &= \frac{tm + sn}{st} \\ \frac{a}{s} \cdot \frac{m}{t} &= \frac{am}{st} \end{aligned}$$

donde $\frac{m}{s}$ es la clase de (m, s) . Por tanto $\frac{m}{s} = 0$ si y sólo si $um = 0$ para algún $u \in S$.

Cada morfismo de A -módulos $f: M \rightarrow N$ define un morfismo de A_S -módulos

$$f_S: M_S \longrightarrow N_S, f_S\left(\frac{m}{s}\right) = \frac{f(m)}{s},$$

y tenemos un morfismo canónico de **localización** $M \rightarrow M_S, m \mapsto \frac{m}{1}$.

Propiedad Universal: Si N es un A_S -módulo, todo morfismo de A -módulos $f: M \rightarrow N$ factoriza, de modo único, por un morfismo de A_S -módulos $\phi: M_S \rightarrow N$, $\phi\left(\frac{m}{1}\right) = f(m)$.

$$\text{Hom}_{A_S}(M_S, N) = \text{Hom}_A(M, N).$$

Demostración: El único morfismo posible $\phi\left(\frac{m}{s}\right) = s^{-1}f(m)$ está bien definido:

$$\phi\left(\frac{um}{us}\right) = (us)^{-1}f(um) = s^{-1}u^{-1}uf(m) = s^{-1}f(m).$$

Notación: M_f denota la localización por $S = \{1, f, \dots, f^n, \dots\}$.

Si \mathfrak{p} es un ideal primo, $M_{\mathfrak{p}}$ denota la localización por $S = A - \mathfrak{p}$.

Teorema: La localización conserva sucesiones exactas; es decir, si tenemos una sucesión exacta $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$, también es exacta la sucesión

$$M'_S \xrightarrow{f_S} M_S \xrightarrow{g_S} M''_S.$$

Demostración: Si $\frac{m}{s} \in \text{Ker } g_S$, entonces $\frac{g(m)}{s} = 0$, y $0 = tg(m) = g(tm)$ para algún $t \in S$.

Luego $tm = f(m')$, y $\frac{m}{s} = \frac{tm}{ts} = \frac{f(m')}{ts} = f_S\left(\frac{m'}{ts}\right) \in \text{Im } f_S$. q.e.d.

Si N es un submódulo de M , entonces N_S se identifica con un submódulo de M_S , y

1. $(N + N')_S = N_S + N'_S$.
2. $(N \cap N')_S = N_S \cap N'_S$.
3. $(M \oplus M')_S = M_S \oplus M'_S$.
4. $(M/N)_S = M_S/N_S$.
5. $(\text{Ker } f)_S = \text{Ker } f_S$.
6. $(\text{Im } f)_S = \text{Im } f_S$.

Demostración: Las igualdades que no son obvias se obtienen localizando las sucesiones exactas

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow M' \longrightarrow M' \oplus M \longrightarrow M \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow N \cap N' \longrightarrow N \oplus N' \longrightarrow N + N' \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow \text{Ker } f \longrightarrow M \longrightarrow N \end{aligned}$$

3.3. Producto Tensorial

Un conjunto ordenado I es **filtrante** si para cada par $i, j \in I$ existe $k \in I$ tal que $i, j \leq k$. Un **sistema inductivo** de conjuntos es una familia de conjuntos $\{X_i\}_{i \in I}$ con aplicaciones $\phi_j^i: X_i \rightarrow X_j$, $i \leq j$, tales que $\phi_i^i = \text{Id}_{X_i}$ y, cuando $i \leq j \leq k$,

$$\begin{array}{ccc} X_i & \longrightarrow & X_j \\ & \searrow & \swarrow \\ & & X_k \end{array} \quad \phi_k^i = \phi_k^j \phi_j^i$$

El **límite inductivo** $\varinjlim X_i$ es el cociente de la unión disjunta $\coprod X_i$ por la relación

$$x_i \equiv x_j \text{ cuando } x_i = x_j \text{ en } X_k, \text{ para algún } k \geq i, j,$$

que es de equivalencia (sólo la transitiva requiere comprobación): si $x_i = x_j$ en X_k , y $x_j = x_l$ en $X_{k'}$, entonces $x_i = x_j = x_l$ en X_r para cualquier índice $r \geq k, k'$.

Tenemos aplicaciones canónicas $\phi_j: X_j \rightarrow \varinjlim X_i$, $\phi_j(x_j) = [x_j]$, tales que

$$\begin{array}{ccc} X_i & \longrightarrow & X_j \\ & \searrow & \swarrow \\ & & \varinjlim X_i \end{array} \quad \phi_i = \phi_j \phi_j^i$$

Un **sistema proyectivo** de conjuntos es una familia de conjuntos $\{X_i\}_{i \in I}$ con aplicaciones $\phi_i^j: X_j \rightarrow X_i$, $i \leq j$, tales que $\phi_i^i = \text{Id}_{X_i}$ y, cuando $i \leq j \leq k$,

$$\begin{array}{ccc} & X_k & \\ & \swarrow & \searrow \\ X_j & \longrightarrow & X_i \end{array} \quad \phi_i^k = \phi_i^j \phi_j^k$$

El subconjunto del producto directo $\prod_i X_i$ formado por las sucesiones (x_i) congruentes, $\phi_i^j(x_j) = x_i$ cuando $i \leq j$, es el **límite proyectivo** $\varprojlim X_i$.

Tenemos aplicaciones canónicas $\phi_j: \varprojlim X_i \rightarrow X_j$, $\phi_j(x_i) = x_j$, tales que

$$\begin{array}{ccc} & \varprojlim X_i & \\ & \swarrow & \searrow \\ X_j & \longrightarrow & X_i \end{array} \quad \phi_i = \phi_i^j \phi_j$$

Cuando las aplicaciones ϕ_j^i son morfismos de grupos (anillos,...) tanto el límite inductivo como el proyectivo heredan una estructura evidente de grupo (anillo,...) y las aplicaciones canónicas ϕ_i son morfismos de grupos (anillos,...).

Así, los morfismos de anillos $K[x]/(x^n) \rightarrow K[x]/(x^m)$, $m \leq n$, forman un sistema proyectivo de anillos, y su límite proyectivo es el anillo de las series formales $K[[x]]$.

Todo módulo es el límite inductivo de sus submódulos y el límite proyectivo de sus cocientes, porque $\varinjlim X_i = X_k$ y $\varprojlim X_i = X_k$ cuando I tiene un último elemento k .

Propiedad Universal: Sea (X_i, ϕ_j^i) un sistema inductivo. Si $f_i: X_i \rightarrow Y$ son aplicaciones y $f_i = f_j \phi_j^i$ cuando $i \leq j$, existe una única aplicación $f: \varinjlim X_i \rightarrow Y$ tal que $f_i = f \phi_i$,

$$\text{Hom}(\varinjlim X_i, Y) = \varinjlim \text{Hom}(X_i, Y), \quad f \mapsto f \phi_i.$$

Dualmente, sea (X_i, ϕ_i^j) un sistema proyectivo. Si $f_i: Y \rightarrow X_i$ son aplicaciones y $f_i = \phi_i^j f_j$ cuando $i \leq j$, existe una única aplicación $f: Y \rightarrow \varprojlim X_i$ tal que $f_i = \phi_i f$,

$$\text{Hom}(Y, \varprojlim X_i) = \varprojlim \text{Hom}(Y, X_i), \quad f \mapsto \phi_i f.$$

Demostración: En el primer caso la única aplicación posible es $f([x_i]) = f_i(x_i)$, y en el segundo caso la única aplicación posible es $f(y) = (f_i(y))$.

Ambas están bien definidas debido a las igualdades $f_i = f_j \phi_j^i$, y $f_i = \phi_i^j f_j$. q.e.d.

Sean M, N dos A -módulos. Las aplicaciones A -bilineales $M \times N \rightarrow P$ en otro A -módulo P forman un A -módulo que denotamos $F(P) = \text{Bil}_A(M, N; P)$.

Vamos a construir una aplicación bilineal $\xi: M \times N \rightarrow M \otimes_A N$, tal que toda aplicación bilineal $g: M \times N \rightarrow P$ factorice de modo único por un morfismo $f: M \otimes_A N \rightarrow P$:

$$\text{Hom}_A(M \otimes_A N, P) = \text{Bil}_A(M, N; P), \quad f \mapsto f\xi.$$

Decir que f es epiyectivo es decir que la imagen de g genera P , que g no factoriza a través de un submódulo estricto de P . Como todo módulo es el límite proyectivo de sus cocientes, $M \otimes_A N$ será el límite proyectivo de tales módulos. Por eso consideramos las parejas P_g , donde $g: M \times N \rightarrow P$ es A -bilineal, y los morfismos de parejas

$$f: P_{g'} \longrightarrow P_g, \quad g = fg',$$

y una pareja Q_ξ es **mínima** si todo morfismo inyectivo $P_g \rightarrow Q_\xi$ es isomorfismo.

Lema: Si $0 \longrightarrow P' \xrightarrow{i} P \xrightarrow{p} P''$ es exacta, también lo es la sucesión

$$0 \longrightarrow \text{Bil}_A(M, N; P') \xrightarrow{i_*} \text{Bil}_A(M, N; P) \xrightarrow{p_*} \text{Bil}_A(M, N; P'').$$

Además F conserva productos directos y límites proyectivos:

$$\begin{aligned} \text{Bil}_A(M, N; P \times P') &= \text{Bil}_A(M, N; P) \times \text{Bil}_A(M, N; P'), \\ \text{Bil}_A(M, N; \varprojlim P_i) &= \varprojlim \text{Bil}(M, N; P_i). \end{aligned}$$

Si Q_ξ es mínima, dos morfismos de parejas $f_1, f_2: Q_\xi \rightarrow P_g$ siempre coinciden:

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \text{Ker}(f_2 - f_1) \xrightarrow{i} Q \xrightarrow{f_2 - f_1} P \\ 0 &\longrightarrow F(\text{Ker}(f_2 - f_1)) \xrightarrow{i_*} F(Q) \xrightarrow{f_2^* - f_1^*} F(P) \\ &(f_2^* - f_1^*)(\xi) = f_2 \xi - f_1 \xi = g - g = 0 \end{aligned}$$

y existe $\xi' \in F(\text{Ker}(f_2 - f_1))$ tal que $i: \text{Ker}(f_2 - f_1)_{\xi'} \rightarrow Q_\xi$ es morfismo de parejas.

Al ser Q_ξ mínima, $\text{Ker}(f_2 - f_1) = Q$, y $f_1 = f_2$. q.e.d.

Ordenamos las parejas mínimas (identificando isomorfias) poniendo $Q'_{\xi'} \geq Q_\xi$ si existe un morfismo de parejas $f': Q'_{\xi'} \rightarrow Q_\xi$.

Es una relación de orden, pues si también $Q_\xi \geq Q'_{\xi'}$, hay un morfismo $f: Q_\xi \rightarrow Q'_{\xi'}$, y tenemos morfismos $f'f: Q_\xi \rightarrow Q_\xi$, $ff': Q'_{\xi'} \rightarrow Q'_{\xi'}$; luego $f'f = \text{Id}_Q$, $ff' = \text{Id}_{Q'}$, y $Q_\xi = Q'_{\xi'}$.

Lema: Toda pareja P_g está dominada por una mínima: $Q_\xi \rightarrow P_g$, donde Q_ξ es mínima.

Demostración: Basta tomar el submódulo Q que genera la imagen de $g: M \times N \rightarrow P$, con la aplicación bilineal $\xi: M \times N \rightarrow Q$, $\xi(m, n) = g(m, n)$. q.e.d.

La conservación de productos directos asegura que el orden de las parejas mínimas es filtrante: si Q_ξ y $Q'_{\xi'}$ son parejas mínimas, tenemos morfismos

$$(Q \times Q')_{\xi \times \xi'} \begin{array}{l} \nearrow Q_\xi \\ \searrow Q'_{\xi'} \end{array}$$

y cualquier pareja mínima que domine a $(Q \times Q')_{\xi \times \xi'}$ domina a Q_ξ y a $Q'_{\xi'}$.

El límite proyectivo $M \otimes_A N$ de las parejas mínimas $(Q_i)_{\xi_i}$ es a su vez una pareja con el elemento $\xi \in F(M \otimes_A N) = \varprojlim F(Q_i)$ que define la sucesión congruente (ξ_i) .

La pareja mínima que domine a $(M \otimes_A N)_\xi$ domina a todas, y coincide con $(M \otimes_A N)_\xi$.

Luego para cada pareja P_g existe un único morfismo de parejas $(M \otimes_A N)_\xi \rightarrow P_g$. Es decir, $\xi: M \times N \rightarrow M \otimes_A N$ es la aplicación bilineal universal, y poniendo $m \otimes n = \xi(m, n)$,

$$\begin{aligned} (am + a'm') \otimes n &= a(m \otimes n) + a'(m' \otimes n), \\ m \otimes (an + a'n') &= a(m \otimes n) + a'(m \otimes n'). \end{aligned}$$

Propiedad Universal: Toda aplicación bilineal $g: M \times N \rightarrow P$ factoriza de modo único por un morfismo de A -módulos $f: M \otimes_A N \rightarrow P$, $f(m \otimes n) = g(m, n)$,

$$\text{Hom}_A(M \otimes_A N, P) = \text{Bil}_A(M, N; P).$$

Si $f: M \rightarrow M'$, $h: N \rightarrow N'$ son A -lineales, $M \times N \rightarrow M' \otimes_A N'$, $(m, n) \mapsto f(m) \otimes h(n)$, es bilineal e induce un morfismo de A -módulos

$$f \otimes h: M \otimes_A N' \rightarrow M' \otimes_A N', \quad (f \otimes h)(m \otimes n) = f(m) \otimes h(n).$$

Lema: $\text{Bil}_A(M, N; P) = \text{Hom}_A(M, \text{Hom}_A(N, P))$.

Demostración: $f: M \rightarrow \text{Hom}_A(N, P)$ se corresponde con $g(m, n) = f(m)(n)$.

Teorema: Si una sucesión $M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \rightarrow 0$ es exacta, también es exacta

$$M' \otimes_A N \xrightarrow{i \otimes 1} M \otimes_A N \xrightarrow{p \otimes 1} M'' \otimes_A N \rightarrow 0$$

Demostración: Si \mathbf{E} es la sucesión $M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$, para todo A -módulo P es exacta la sucesión $\text{Hom}_A(\mathbf{E}, \text{Hom}_A(N, P)) = \text{Hom}_A(\mathbf{E} \otimes_A N, P)$; luego $\mathbf{E} \otimes_A N$ es exacta. q.e.d.

1. $(M \otimes_A N) \otimes_A P = M \otimes_A (N \otimes_A P)$, donde $(m \otimes n) \otimes p = m \otimes (n \otimes p)$.
2. $M \otimes_A N = N \otimes_A M$, donde $m \otimes n = n \otimes m$.
3. $M \otimes_A (\oplus_i N_i) = \oplus_i (M \otimes_A N_i)$, donde $m \otimes (\sum_i n_i) = \sum_i m \otimes n_i$.
4. $M \otimes_A (\varinjlim N_i) = \varinjlim (M \otimes_A N_i)$.
5. $A \otimes_A M = M$, donde $a \otimes m = am$.
6. $(A/I) \otimes_A M = M/IM$, donde $\bar{a} \otimes m = [am]$.

$$(1) \text{Hom}((M \otimes N) \otimes P, X) = \text{Hom}(M \otimes N, \text{Hom}(P, X)) = \text{Hom}(M, \text{Hom}(N, \text{Hom}(P, X))) \\ = \text{Hom}(M, \text{Hom}(N \otimes P, X)) = \text{Hom}(M \otimes (N \otimes P), X).$$

$$(2) \text{Hom}(M \otimes N, X) = \text{Bil}_A(M, N; X) = \text{Bil}_A(N, M; X) = \text{Hom}(N \otimes M, X).$$

$$(3) \text{Hom}(M \otimes (\oplus_i N_i), X) = \text{Hom}(M, \text{Hom}(\oplus_i N_i, X)) = \text{Hom}(M, \prod_i \text{Hom}(N_i, X)) \\ = \prod_i \text{Hom}(M, \text{Hom}(N_i, X)) = \prod_i \text{Hom}(M \otimes N_i, X) = \text{Hom}(\oplus_i (M \otimes N_i), X).$$

$$(4) \text{Hom}(M \otimes (\varinjlim N_i), X) = \text{Hom}(M, \text{Hom}(\varinjlim N_i, X)) = \text{Hom}(M, \varprojlim \text{Hom}(N_i, X)) \\ = \varprojlim \text{Hom}(M, \text{Hom}(N_i, X)) = \varprojlim \text{Hom}(M \otimes N_i, X) = \text{Hom}(\varinjlim (M \otimes N_i), X).$$

$$(5) \text{Hom}(A \otimes M, X) = \text{Hom}(A, \text{Hom}(M, X)) = \text{Hom}(M, X).$$

$$(6) \text{La sucesión } I \otimes_A M \longrightarrow A \otimes_A M = M \longrightarrow (A/I) \otimes_A M \longrightarrow 0 \text{ es exacta.}$$

Definición: Un A -módulo P es **plano** si $(-)\otimes_A P$ conserva sucesiones exactas; es decir, si $M' \otimes_A P \rightarrow M \otimes_A P$ es inyectivo para todo morfismo inyectivo $M' \rightarrow M$.

Todo módulo libre (o proyectivo, que es sumando directo de un libre) es plano.

Si $i: E' \rightarrow E$ es una aplicación lineal inyectiva, $i \otimes 1: E' \otimes_k F \rightarrow E \otimes_k F$ es inyectiva, porque i admite un retracts (p. 41). Todo espacio vectorial es un módulo plano.

Definición: Sea $A \rightarrow B$ un morfismo de anillos. Los morfismos $1 \otimes b: M \otimes_A B \rightarrow M \otimes_A B$ definen en $M_B = M \otimes_A B$ una estructura de B -módulo

$$b(\sum_i m_i \otimes b_i) = \sum_i m_i \otimes (bb_i),$$

y diremos que se obtiene de M por **cambio de base**.

El morfismo de A -módulos $M \rightarrow M_B$, $m \mapsto m \otimes 1$, es el morfismo de cambio de base.

Cada morfismo de A -módulos $f: M \rightarrow M'$ induce un morfismo de B -módulos

$$f_B = f \otimes 1: M_B \longrightarrow M'_B, f_B(\sum_i m_i \otimes b_i) = \sum_i f(m_i) \otimes b_i.$$

Propiedad Universal: Si N es un B -módulo, todo morfismo de A -módulos $f: M \rightarrow N$ factoriza de modo único por un morfismo de B -módulos $\phi: M_B \rightarrow N$, $\phi(m \otimes 1) = f(m)$,

$$\text{Hom}_A(M, N) = \text{Hom}_B(M_B, N).$$

Demostración: Por la propiedad universal del producto tensorial existe un único morfismo de A -módulos $\phi: M \otimes_A B \rightarrow N$, $\phi(m \otimes b) = bf(m)$, y es morfismo de B -módulos.

Corolario: $M \otimes_A A_S = M_S$, donde $m \otimes \frac{a}{s} = \frac{am}{s}$.

Demostración: $\text{Hom}_{A_S}(M_S, N) = \text{Hom}_A(M, N) = \text{Hom}_{A_S}(M \otimes_A A_S, N)$.

Teorema: $(M \otimes_A B) \otimes_B N = M \otimes_A N$, donde $(m \otimes b) \otimes n = m \otimes (bn)$; (N un B -módulo).

Demostración: En la igualdad $\text{Hom}_A(M \otimes_A N, X) = \text{Hom}_A(M, \text{Hom}_A(N, X))$ es fácil ver que $\text{Hom}_B(M \otimes_A N, X)$ se corresponde con $\text{Hom}_A(M, \text{Hom}_B(N, X))$; luego

$$\text{Hom}_B(M_B \otimes N, X) = \text{Hom}_B(M_B, \text{Hom}_B(N, X)) = \text{Hom}_A(M, \text{Hom}_B(N, X)) \\ = \text{Hom}_B(M \otimes_A N, X).$$

Corolario: $(M_B)_C = M_C$, donde $(m \otimes b) \otimes c = m \otimes (bc)$.

Corolario: $(M_B) \otimes_B (M'_B) = (M \otimes_A M')_B$, donde $(m \otimes b_1) \otimes (m' \otimes b_2) = (m \otimes m') \otimes b_1 b_2$.

Demostración: $(M \otimes_A B) \otimes_B (M'_B) = M \otimes_A (M'_B) = (M \otimes_A M') \otimes_A B$.

Definiciones: Fijado un anillo k (en este curso será un cuerpo) las k -**álgebras** son los morfismos de anillos $k \rightarrow A$, y los morfismos de k -álgebras son los morfismos de anillos $A \rightarrow B$ que hagan conmutativo el triángulo

$$\begin{array}{ccc} & k & \\ \swarrow & & \searrow \\ A & \longrightarrow & B \end{array}$$

Dadas dos k -álgebras A, B , el morfismo k -lineal

$$A \otimes_k B \otimes_k A \otimes_k B \longrightarrow A \otimes_k B, \quad a_1 \otimes b_1 \otimes a_2 \otimes b_2 \mapsto a_1 a_2 \otimes b_1 b_2,$$

induce una aplicación k -bilineal

$$\begin{aligned} (A \otimes_k B) \times (A \otimes_k B) &\rightarrow A \otimes_k B \\ (\sum_i a_i \otimes b_i) \cdot (\sum_j a_j \otimes b_j) &= \sum_{i,j} a_i a_j \otimes b_i b_j \end{aligned}$$

que define una estructura de anillo en $A \otimes_k B$.

Además es una k -álgebra con el morfismo $k \rightarrow A \otimes_k B$, $\lambda \mapsto \lambda \otimes 1 = 1 \otimes \lambda$.

Propiedad Universal: Si $f: A \rightarrow C$, $h: B \rightarrow C$ son morfismos de k -álgebras, existe un único morfismo de k -álgebras $\phi: A \otimes_k B \rightarrow C$ tal que $\phi(a \otimes 1) = f(a)$, $\phi(1 \otimes b) = h(b)$,

$$\text{Hom}_{k\text{-alg}}(A \otimes_k B, C) = \text{Hom}_{k\text{-alg}}(A, C) \times \text{Hom}_{k\text{-alg}}(B, C).$$

Demostración: Por la propiedad universal del producto tensorial existe un único morfismo de k -módulos $\phi: A \otimes_k B \rightarrow C$, $\phi(a \otimes b) = f(a)h(b)$, y es morfismo de k -álgebras.

Corolario: $k[x_1, \dots, x_n] \otimes_k L = L[x_1, \dots, x_n]$.

$$(k[x]/(P)) \otimes_k L = L[x]/(P).$$

3.3.1. Categorías y Teorema de Representabilidad

Dar una **categoría** \mathbf{C} es dar una familia arbitraria (sus elementos son los **objetos** de \mathbf{C}), unos conjuntos disjuntos $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(M, N)$, donde M, N son objetos (sus elementos son los **morfismos** de M en N y se denotan $M \rightarrow N$), y para cada terna M, N, P de objetos, una aplicación (la **composición** de morfismos):

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}}(N, P) \times \text{Hom}_{\mathbf{C}}(M, N) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{C}}(M, P), \quad (f, g) \mapsto f \circ g.$$

Axioma 1: La composición de morfismos es asociativa: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Axioma 2: Para cada objeto M hay un morfismo **identidad** $\text{Id}_M: M \rightarrow M$ tal que $f \circ \text{Id}_M = f$, y $\text{Id}_M \circ g = g$, para todo $f: M \rightarrow N$, $g: N \rightarrow M$.

Un morfismo $M \xrightarrow{f} N$ es **isomorfismo** si existe $N \xrightarrow{g} M$ tal que $fg = \text{id}_N$, $gf = \text{id}_M$.

Sean \mathbf{C} y \mathbf{C}' dos categorías.

Un **functor covariante** $F: \mathbf{C} \rightsquigarrow \mathbf{C}'$ asigna a cada objeto M de \mathbf{C} un objeto $F(M)$ de \mathbf{C}' , y a cada morfismo $f: M \rightarrow N$ de \mathbf{C} un morfismo $F(f): F(M) \rightarrow F(N)$ de \mathbf{C}' , de modo que

1. $F(\text{Id}_M) = \text{Id}_{F(M)}$ para todo objeto M de \mathbf{C} .
2. $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ para cualquier par de morfismos $M \xrightarrow{g} N \xrightarrow{f} P$ de \mathbf{C} .

Análogamente se definen los **funtores contravariantes**, que asignan a cada morfismo $f: M \rightarrow N$ un morfismo $F(f): F(N) \rightarrow F(M)$, de modo que $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$.

La categoría **opuesta** de \mathbf{C} es la que tiene los mismos objetos, y

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}^{\text{op}}}(M, N) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(N, M),$$

siendo la composición $f \circ g$ de dos morfismos en \mathbf{C}^{op} igual a la composición $g \circ f$ en \mathbf{C} .

Los funtores contravariantes $\mathbf{C} \rightsquigarrow \mathbf{C}'$ son los funtores covariantes $\mathbf{C}^{\text{op}} \rightsquigarrow \mathbf{C}'$, así que siempre puede suponerse que un funtor es covariante.

Sean $F, G: \mathbf{C} \rightsquigarrow \mathbf{C}'$ dos funtores (digamos covariantes).

Dar una **transformación natural** o **morfismo de funtores** $\theta: F \rightarrow G$ es dar un morfismo $\theta_M: F(M) \rightarrow G(M)$ en \mathbf{C}' para cada objeto M de \mathbf{C} , de modo que para todo morfismo $f: M \rightarrow N$ en \mathbf{C} se cumpla que el siguiente cuadrado conmuta

$$\begin{array}{ccc} F(M) & \xrightarrow{F(f)} & F(N) \\ \downarrow \theta_M & & \downarrow \theta_N \\ G(M) & \xrightarrow{G(f)} & G(N) \end{array}$$

y es un **isomorfismo de funtores** si θ_M es un isomorfismo en \mathbf{C}' para todo objeto M de \mathbf{C} .

Dos funtores $F: \mathbf{C} \rightsquigarrow \mathbf{C}'$ y $G: \mathbf{C}' \rightsquigarrow \mathbf{C}$ definen una **equivalencia** de categorías cuando $G \circ F$ es isomorfo a la identidad de \mathbf{C} y $F \circ G$ es isomorfo a la identidad de \mathbf{C}' .

En tal caso, ambos funtores definen biyecciones

$$\begin{aligned} F: \text{Hom}_{\mathbf{C}}(M, N) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{C}'}(F(M), F(N)) \\ G: \text{Hom}_{\mathbf{C}'}(M', N') &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{C}}(G(M'), G(N')) \end{aligned}$$

Definiciones: Sea X un objeto de una categoría \mathbf{C} . Decimos que $X^\bullet(T) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(T, X)$ es el conjunto de puntos de X parametrizados por T , o **T -puntos** de X . Cada morfismo $t: S \rightarrow T$ en \mathbf{C} induce una aplicación natural

$$X^\bullet(T) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(T, X) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{C}}(S, X) = X^\bullet(S), \quad x \mapsto x|_t = x \circ t,$$

y $X^\bullet: \mathbf{C} \rightsquigarrow \mathbf{Sets}$ es un funtor contravariante, llamado **funtor de puntos** de X , y decimos que $x|_t$ es la **especialización** del T -punto x en el punto t del espacio de parámetros T . Un punto de X es un **punto genérico** si todo punto de X es especialización suya. Así, la identidad $x_g: X \rightarrow X$ es un punto genérico de X , pues todo punto $x: T \rightarrow X$ es una especialización, $x = \text{Id} \circ x = x_g|_x$.

Lema de Yoneda: Para todo funtor contravariante $F: \mathbf{C} \rightsquigarrow \mathbf{Sets}$ tenemos una biyección canónica

$$\text{Hom}_{\text{nat}}(X^\bullet, F) = F(X) \quad , \quad \theta \mapsto \theta(\text{Id}).$$

Luego $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) = \text{Hom}_{\text{nat}}(X^\bullet, Y^\bullet)$ para todo objeto Y de \mathbf{C} .

Demostración: Todo morfismo de funtores $X^\bullet \rightarrow F$ conserva especializaciones, luego está totalmente determinado por la imagen de un punto genérico, y la aplicación considerada es inyectiva.

Por otra parte cada elemento $\xi \in F(X)$ define un morfismo $\theta: X^\bullet \rightarrow F$, $\theta(x) = F(x)(\xi) \in F(T)$ para todo punto $x: T \rightarrow X$, y tenemos que $\theta(\text{Id}) = F(\text{Id})(\xi) = \xi$, así que la aplicación considerada es epiyectiva.

Definiciones: El **producto directo** de dos objetos X, Y es un par de morfismos

$$\begin{array}{ccc} & X \times Y & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ X & & Y \end{array}$$

con la propiedad universal $(p_{1*}, p_{2*}): \text{Hom}_{\mathbf{C}}(T, X \times Y) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(T, X) \times \text{Hom}_{\mathbf{C}}(T, Y)$.

Dualmente se define la **suma directa** o **coproducto** $X \oplus Y$

$$\begin{array}{ccc} & X \oplus Y & \\ j_1 \swarrow & & \searrow j_2 \\ X & & Y \end{array}$$

con la propiedad universal $(j_1^*, j_2^*): \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X \oplus Y, T) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, T) \times \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, T)$.

Fijado un objeto S , los S -objetos, que son los morfismos $X \rightarrow S$, forman una categoría. El conjunto $\text{Hom}_S(X, Y)$ de morfismos de $X \rightarrow S$ en $Y \rightarrow S$ está formado por los morfismos $f: X \rightarrow Y$ que hacen conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow & \swarrow \\ & S & \end{array}$$

El producto directo en la categoría de objetos sobre S es el **producto fibrado** sobre S . Es decir, el producto fibrado $X \times_S Y$ es un cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X \times_S Y & \xrightarrow{p_1} & X \\ p_2 \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & S \end{array}$$

con la propiedad universal: $(p_{1*}, p_{2*}): \text{Hom}_S(T, X \times_S Y) = \text{Hom}_S(T, X) \times \text{Hom}_S(T, Y)$.

Poniendo $T = X$, y fijando el morfismo $T \rightarrow X$ identidad, obtenemos la

Fórmula de la Gráfica: $\text{Hom}_S(X, Y) = \text{Hom}_X(X, X \times_S Y)$, $f \mapsto \text{Id}_X \times f$.

Ejemplos: $F(E) = \Lambda^p E$, $F(X) = X/G$, $F(X) = X^G$, $F(N) = \text{Hom}_A(M, N)$, $F(M) = M_S$, $F(P) = \text{Bil}_A(M, N; P)$, $F(N) = M \otimes_A N$, $F(M) = M_B$ son funtores covariantes.

Funtores contravariantes: $F(E) = E^*$, $F(E) = T_p E$, $F(N) = \text{Hom}_A(N, M)$.

En los espacios topológicos, la suma directa es la unión disjunta, y $X \times_S Y$ es el subespacio de $X \times Y$ formado por las parejas (x, y) con igual proyección sobre S .

En la categoría opuesta a la de anillos, la suma directa es $A \times B$ (que también denotaremos $A \oplus B$), las k -álgebras son los objetos sobre k , y el producto fibrado es $A \otimes_k B$. La fórmula de la gráfica afirma que $\text{Hom}_{k\text{-alg}}(A, B) = \text{Hom}_{B\text{-alg}}(A \otimes_k B, B)$.

Definiciones: Dado un funtor covariante $F: \mathbf{C} \rightsquigarrow \mathbf{Sets}$, por el lema de Yoneda cada pareja Q_ξ , donde Q es un objeto de \mathbf{C} y $\xi \in F(Q)$, define aplicaciones naturales

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}}(Q, M) \longrightarrow F(M), \quad f \mapsto F(f)(\xi),$$

y Q_ξ **representa** al functor F si son biyectivas; es decir, si para cada $\eta \in F(M)$, existe un único morfismo $f: Q \rightarrow M$ tal que $F(f)(\xi) = \eta$. Si $Q'_{\xi'}$ es otro representante de F , existe un único morfismo $f: Q \rightarrow Q'$ tal que $F(f)(\xi) = \xi'$, y un único morfismo $f': Q' \rightarrow Q$ tal que $F(f')(\xi') = \xi$. Luego $F(f'f)(\xi) = \xi$, y $F(ff')(\xi') = \xi'$, así que $f'f = \text{Id}_Q$, y $ff' = \text{Id}_{Q'}$.

Si existe, el representante de un functor es único, salvo isomorfismos canónicos.

Dualmente, un functor contravariante $F: \mathbf{C} \rightsquigarrow \mathbf{Sets}$ es representable si es el functor de puntos de un objeto X , en el sentido de que para alguna pareja X_ξ , donde $\xi \in F(X)$, son biyectivas las aplicaciones naturales

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}}(T, X) \longrightarrow F(T), \quad f \mapsto F(f)(\xi).$$

En la categoría de conjuntos, una sucesión de aplicaciones

$$X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{f,g} Z$$

es **exacta** cuando i es inyectiva, y su imagen está formada por los elementos en que f y g coinciden. En una categoría \mathbf{C} , una sucesión de morfismos

$$M \xrightarrow{i} N \xrightarrow{f,g} P$$

es exacta (i es el **núcleo** de f y g) cuando lo es la sucesión

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, M) \xrightarrow{i_*} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, N) \xrightarrow{f_*, g_*} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, P)$$

para todo objeto X ; y una sucesión de morfismos

$$M \xrightarrow{f,g} N \xrightarrow{p} P$$

es exacta (p es el **conúcleo** de f y g) si lo son las sucesiones

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}}(P, X) \xrightarrow{p^*} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(N, X) \xrightarrow{f^*, g^*} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(M, X).$$

Ejemplos: En la categoría de A -módulos, la primera condición afirma que es exacta la sucesión $0 \rightarrow M \xrightarrow{i} N \xrightarrow{f-g} P$, y la segunda que lo es $M \xrightarrow{f-g} N \xrightarrow{p} P \rightarrow 0$.

En la categoría de conjuntos, el conúcleo es el cociente de N por la relación de equivalencia que genera la relación $f(m) \equiv g(m)$, y en la categoría de espacios topológicos es tal cociente con la topología cociente (la más fina para la que p es continua). Igualmente, en la categoría de G -conjuntos es dicho cociente, con su estructura obvia de G -conjunto.

Las propiedades universales afirman que cierto functor es representable. En el cociente, ξ es la proyección canónica, en la localización es el morfismo de localización $A \rightarrow A_S$, en el cambio de base es el morfismo de cambio de base $M \rightarrow M_B$, etc.

Definición: Un functor covariante $F: A\text{-mód} \rightsquigarrow \mathbf{Sets}$ es **exacto por la izquierda** si las aplicaciones naturales $F(M \times N) \rightarrow F(M) \times F(N)$ son biyectivas, y para toda sucesión exacta de A -módulos

$$M \xrightarrow{i} N \xrightarrow{f,g} P$$

también es exacta la sucesión de conjuntos

$$F(M) \xrightarrow{F(i)} F(N) \xrightarrow{F(f), F(g)} F(P),$$

y decimos que F conserva límites proyectivos si son biyectivas las aplicaciones naturales

$$F(\varprojlim M_i) \longrightarrow \varprojlim F(M_i).$$

Un funtor contravariante $F: A\text{-mód} \rightsquigarrow \mathbf{Sets}$ es exacto por la izquierda si las aplicaciones $F(M \oplus N) \rightarrow F(M) \times F(N)$ son biyectivas y transforma conúcleos en núcleos; y F transforma límites inductivos en proyectivos si son biyectivas las aplicaciones naturales

$$F(\varinjlim M_i) \longrightarrow \varinjlim F(M_i).$$

Teorema de Representabilidad: *Si un funtor covariante F de la categoría de A -módulos en la de conjuntos es exacto por la izquierda y toda pareja está dominada por una mínima², entonces es límite inductivo de funtores representables,*

$$\varinjlim \text{Hom}_A(Q_i, M) = F(M);$$

y si además transforma límites proyectivos en límites proyectivos, es representable,

$$\text{Hom}_A(Q, M) = F(M).$$

Dualmente, si un funtor contravariante F es exacto por la izquierda y toda pareja está dominada por una mínima, entonces

$$F(M) = \varinjlim \text{Hom}_A(M, Q_i),$$

y si además transforma límites inductivos en límites proyectivos, es representable,

$$F(M) = \text{Hom}_A(M, Q).$$

Demostración: En el caso covariante, la demostración de la p. 65 sigue siendo válida, con la sustitución de la sucesión exacta $0 \rightarrow \text{Ker}(f_2 - f_1) \rightarrow Q \rightarrow P$ por la sucesión exacta

$$\text{Ker}(f_2 - f_1) \xrightarrow{i} Q \xrightarrow{f_1, f_2} P,$$

y también es válida en el caso contravariante con los cambios obvios en las definiciones:

Una pareja Q_ξ es mínima si todo morfismo de parejas $Q_\xi \rightarrow P_g$ epiyectivo es isomorfismo. Una pareja Q_ξ domina a otra P_g cuando exista un morfismo de parejas $P_g \rightarrow Q_\xi$.

Las parejas mínimas son los submódulos del hipotético representante que, si existe, es el límite inductivo de las parejas mínimas. Con estos cambios, la demostración sigue siendo válida, y la coincidencia de los morfismos $f_1, f_2: P_g \rightarrow Q_\xi$, cuando Q_ξ es mínima, se prueba con la sucesión exacta $P \rightrightarrows Q \rightarrow Q/\text{Im}(f_2 - f_1) \rightarrow 0$.

Teorema: *Todo A -módulo M es submódulo de un A -módulo inyectivo.*

Demostración: Todo grupo cíclico es un subgrupo del \mathbb{Z} -módulo inyectivo $Q = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, así que para cada $m \in M$ no nulo tenemos un morfismo de grupos $\omega: M \rightarrow Q$ que no se anula en m .

Si ponemos $M^* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, Q)$, el morfismo de A -módulos natural $M \rightarrow M^{**}$ es inyectivo, y basta sumergir M^{**} en un A -módulo inyectivo.

Ahora, el funtor $F(M) = M^*$ es representable, $M^* = \text{Hom}_A(M, R)$, y el representante R es inyectivo porque F transforma inyecciones en epiyecciones.

²Esta condición (obvia en muchos casos) se sigue de la conservación de límites proyectivos: dada una pareja M_η , consideramos los submódulos $M' \subset M$ tales que la inclusión $M'_{\eta'} \rightarrow M_\eta$ es morfismo de parejas para algún $\eta' \in F(M')$, claramente único, ordenados por inclusión inversa. Un elemento maximal de esta ordenación es una pareja mínima que domina a M_η , y existe porque toda cadena $\{(M_i)_{\eta_i}\}$ admite la cota superior $M'_{\eta'}$, donde $M' = \bigcap_i M_i = \varinjlim M_i$, y $\eta' \in F(M') = \varinjlim F(M_i)$ es el elemento que define la sucesión (η_i) .

En el caso contravariante se consideran submódulos M' tales que $M_\eta \rightarrow (M/M')_{\eta'}$ es morfismo de parejas, ordenados por inclusión, y la cota superior es $\varinjlim (M/M_i) = M/(\bigcup_i M_i)$.

Poniendo $M = A$ vemos que A^* es un A -módulo inyectivo, y tomando un epimorfismo $\bigoplus_I A \rightarrow M^*$, obtenemos un morfismo inyectivo $M^{**} \rightarrow \prod_I A^*$ en un A -módulo inyectivo.

Notas: (1) Realmente, en el teorema de representabilidad falta probar que las parejas mínimas (identificando isomorfas) forman un conjunto. En el caso contravariante, en que son los submódulos del hipotético representante, como para cada submódulo estricto $j: Q' \hookrightarrow Q$ existe un morfismo $A \rightarrow Q$ que no factoriza a través de j , cada pareja mínima Q_ξ está determinada por un subconjunto de $F(A)$, a saber, el de los elementos $\eta \in F(A)$ que admitan un morfismo de parejas $A_\eta \rightarrow Q_\xi$.

En el caso covariante, si para cada módulo monógeno A/\mathfrak{a}_i tomamos un módulo inyectivo $\{I_i\}$ que lo contenga, entonces para cada epimorfismo $p: Q \rightarrow \bar{Q}$ de núcleo no nulo tenemos algún morfismo $Q \rightarrow I_i$ que no se anula en el núcleo de p , y por tanto no factoriza a través de p ; luego cada pareja mínima Q_ξ está determinada por los elementos $\eta \in F(I_i)$ que admitan un morfismo $(I_i)_\eta \rightarrow Q_\xi$.

(2) El teorema de representabilidad, y su demostración, son válidos en una categoría con núcleos, productos directos y límites proyectivos (conúcleos, sumas directas y límites inductivos en el caso contravariante) si los sistemas ordenados considerados son conjuntos.

(3) En el caso de un funtor representable $F: A\text{-mód} \rightsquigarrow A\text{-mód}$, para que las biyecciones naturales $F(M) = \text{Hom}_A(M, Q)$ sean isomorfismos de A -módulos es necesario que F conserve las combinaciones lineales de morfismos, $F(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 F(f_1) + a_2 F(f_2)$.

3.4. El Espectro de un Anillo

El **espectro** de un anillo A es el conjunto $\text{Spec } A$ de sus ideales primos.

El ideal primo de un **punto** $x \in \text{Spec } A$ se denota \mathfrak{p}_x , y decimos que los elementos $f \in A$ son **funciones** sobre $\text{Spec } A$, donde el **valor** $f(x)$ de f en x es la imagen de f en el **cuerpo residual**

$$f(x) = [f] \in \kappa(x) = (A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}, \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_x.$$

Aunque el cuerpo de valores varíe con el punto, *el cero está definido de modo absoluto*, y el ideal \mathfrak{p}_x está formado por las funciones que se anulan en x .

Los **ceros** de los ideales (puntos donde se anulan todas las funciones del ideal)

$$(I)_0 = \bigcap_{f \in I} (f)_0 = \left[\begin{array}{l} \text{Ideales primos de } A \\ \text{que contienen a } I \end{array} \right] = \text{Spec } (A/I),$$

son los cerrados de una topología sobre $\text{Spec } A$, la **topología de Zariski**,

$$\begin{aligned} (0)_0 &= \text{Spec } A \\ (A)_0 &= \emptyset \\ (\sum_j I_j)_0 &= \bigcap_j (I_j)_0 \\ (I \cap J)_0 &= (I)_0 \cup (J)_0, \end{aligned}$$

y sólo la última igualdad requiere demostración. Si $f_1 \in I, f_2 \in J$ no se anulan en un punto x , entonces $f_1 f_2$ no se anula en x , y $f_1 f_2 \in I \cap J$.

Los cerrados son intersección de ceros de funciones, así que una base de la topología está formada por los **abiertos básicos** $U_f = \text{Spec } A - (f)_0$.

Proposición: $\bar{x} = (\mathfrak{p}_x)_0$, y diremos que x es el **punto genérico** de su cierre \bar{x} . Por tanto $\text{Spec } A$ es T_0 y sus puntos cerrados se corresponden con los maximales de A .

Demostración: Un cerrado $(I)_0$ pasa por un punto $x \in \text{Spec } A$ cuando $I \subseteq \mathfrak{p}_x$, en cuyo caso $(\mathfrak{p}_x)_0 \subseteq (I)_0$. Luego $(\mathfrak{p}_x)_0$ es el menor cerrado que contiene a x .

Teorema: *Spec A es un espacio topológico compacto.*

Demostración: Dados cerrados con intersección vacía, $\emptyset = \bigcap_j (I_j)_0 = (\sum_j I_j)_0$, tenemos que $\sum_j I_j = A$, porque todo ideal $\neq A$ está contenido en un maximal.

Luego $1 = f_1 + \dots + f_n$ para ciertos $f_1 \in I_{j_1}, \dots, f_n \in I_{j_n}$, y una subfamilia finita tiene intersección vacía,

$$(I_{j_1})_0 \cap \dots \cap (I_{j_n})_0 = (I_{j_1} + \dots + I_{j_n})_0 = (A)_0 = \emptyset.$$

Definición: Un morfismo de anillos $A \xrightarrow{j} B$ induce una aplicación $\text{Spec } B \xrightarrow{\phi} \text{Spec } A$, donde $x = \phi(y)$ cuando $\mathfrak{p}_x = \mathfrak{p}_y \cap A = \{a \in A : j(a) \in \mathfrak{p}_y\}$, de modo que $\kappa(x) \hookrightarrow \kappa(y)$.

Por definición $(jf)(y) = f(x) = f(\phi(y))$; luego $\phi^{-1}(f)_0 = (fB)_0$, y ϕ es continua:

$$\phi^{-1}(I)_0 = \phi^{-1}\left(\bigcap_{f \in I} (f)_0\right) = \bigcap_{f \in I} \phi^{-1}(f)_0 = \bigcap_{f \in I} (fB)_0 = (IB)_0. \quad (3.2)$$

Teorema: *Sea S un sistema multiplicativo de A . Los primos de A_S se corresponden con los primos de A que no cortan a S , y $\text{Spec } A_S$ es un subespacio de $\text{Spec } A$.*

Demostración: Si \mathfrak{q} es un primo de A_S , es fácil ver que $\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{q}$ no corta a S y $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}A_S$, de modo que la aplicación $\text{Spec } A_S \rightarrow \text{Spec } A$ es inyectiva.

Además, si un primo \mathfrak{p} de A no corta a S , entonces $\mathfrak{p}A_S$ es un primo de A_S , y $A \cap \mathfrak{p}A_S = \mathfrak{p}$,

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{s}, b \in \mathfrak{p} \Rightarrow au = bv \in \mathfrak{p}, u, v \in S \Rightarrow a \in \mathfrak{p}.$$

Como $(a)_0 \cap (\text{Spec } A_S) = (a/1)_0 = (a/s)_0$, esta aplicación define un homeomorfismo de $\text{Spec } A_S$ con su imagen.

Corolario: *El anillo $A_{\mathfrak{p}}$ tiene un único ideal maximal, que es $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$.*

Corolario: $\text{Spec } A_f = U_f = \text{Spec } A - (f)_0$.

Definición: El **radical** de A es el conjunto $\text{rad } A = \{a \in A : a^n = 0, \text{ para algún } n \geq 1\}$ de sus elementos nilpotentes. Un anillo es **reducido** si su radical es nulo.

Corolario: *Las funciones nilpotentes son las que se anulan en todos los puntos del espectro. (El radical de un anillo es la intersección de los ideales primos).*

Demostración: Si $f^n = 0$, entonces $(f)_0 = (f^n)_0 = \text{Spec } A$.

Si $(f)_0 = \text{Spec } A$, entonces $\text{Spec } A_f = \emptyset$; luego $A_f = 0$, y f es nilpotente. q.e.d.

Ha de entenderse que el funtor Spec valora en la categoría opuesta de anillos, $\text{Hom}(Y, X) = \text{Hom}(A, B)$ cuando $X = \text{Spec } A$, $Y = \text{Spec } B$, de modo que $X \times_{\text{Spec } k} Y = \text{Spec } (A \otimes_k B)$, y los puntos $A \rightarrow B$ de A con valores en B son los puntos $Y \rightarrow X$ de X parametrizados por Y .

Así, cada morfismo $\phi: Y \rightarrow X$ define una aplicación continua; pero no está determinado por ella, y vamos a calcular la fibra $\phi^{-1}(x)$ de un punto $x: \text{Spec } \kappa(x) \rightarrow \text{Spec } A$.

Fórmula de la Fibra: $\phi^{-1}(x) = \text{Spec } (B \otimes_A \kappa(x)) = Y \times_X x$.

Demostración: $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_x$. Como $\phi^{-1}(x) \subseteq \text{Spec } B_{\mathfrak{p}}$, coincide con la fibra de $\text{Spec } B_{\mathfrak{p}} \rightarrow \text{Spec } A_{\mathfrak{p}}$ sobre el único punto cerrado de $\text{Spec } A_{\mathfrak{p}}$, definido por el ideal maximal $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$.

Tal fibra es $(\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}})_0$, que es el espectro de $B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}} = B \otimes_A \kappa(x)$. q.e.d.

1. El espectro $\text{Spec } k$ de un cuerpo tiene un único punto.
2. $\text{Spec } \mathbb{Z}$ tiene un punto cerrado por cada número primo p , de cuerpo residual \mathbb{F}_p , y un punto genérico (el número primo genérico) de cuerpo residual \mathbb{Q} .
3. $\text{Spec } k[x]$ tiene un punto cerrado por cada polinomio irreducible mónico $P(x)$, de cuerpo residual $k[x]/(P)$, y un punto genérico de cuerpo residual $k(x)$.
4. La igualdad $(I)_0 = \text{Spec } (A/I)$ es un homeomorfismo, porque $(f)_0 \cap (I)_0 = (\bar{f})_0$.
Por tanto (la suma directa de espacios topológicos es la unión disjunta),

$$\text{Spec } (A_1 \oplus A_2) = (\text{Spec } A_1) \oplus (\text{Spec } A_2).$$

En efecto, $A = A_1 \oplus A_2 = I_1 + I_2$, y $I_1 \cap I_2 = 0$, donde $I_1 = 0 \oplus A_2$, y $I_2 = A_1 \oplus 0$.

Luego $\text{Spec } A = (I_1)_0 \cup (I_2)_0$, $(I_1)_0 \cap (I_2)_0 = \emptyset$, y $(I_i)_0 = \text{Spec } A/I_i = \text{Spec } A_i$.

5. $\text{Spec } \mathbb{C}[x, y] \rightarrow \text{Spec } \mathbb{C}[x]$. El espectro de $\mathbb{C}[x, y]/(x-a) \simeq \mathbb{C}[y]$ es la fibra del punto $x = a$, y sus puntos están definidos por el ideal $(x-a)$ y los maximales $(x-a, y-b)$. La fibra del punto genérico es $\text{Spec } \mathbb{C}(x)[y]$, y sus puntos están definidos por el ideal 0 y los ideales (P) , donde $P(x, y)$ es irreducible y de grado no nulo en y . El plano afín complejo $\text{Spec } \mathbb{C}[x, y]$ está formado por los puntos cerrados $x = a, y = b$, los puntos genéricos de las curvas irreducibles $P(x, y) = 0$, y el punto genérico del plano.
6. $\text{Spec } \mathbb{Z}[x] \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$. La fibra de un número primo p es $\text{Spec } \mathbb{F}_p[x]$, y sus puntos están definidos por el ideal (p) y los maximales (p, Q) , donde la reducción \bar{Q} módulo p es irreducible. La fibra del punto genérico es $\text{Spec } \mathbb{Q}[x]$, y sus puntos están definidos por el ideal 0 y los ideales (P) , donde P es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$.
7. $\mathbb{Z}[i] = \mathbb{Z}[x]/(x^2 + 1)$. La fibra de $\text{Spec } \mathbb{Z}[i] \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$ sobre un primo p es

$$\text{Spec } \mathbb{F}_p[x]/(x^2 + 1) = \begin{cases} \text{un punto, si } -1 \text{ no es resto cuadrático mód. } p \\ \text{el punto } x = 1, \text{ si } p = 2 \\ 2 \text{ puntos } x = \pm a, \text{ si } -1 \text{ es resto cuadrático mód. } p \neq 2 \end{cases}$$

Luego (p. 11) los ideales maximales de $\mathbb{Z}[i]$ son los ideales (p) , donde $p \equiv 3 \pmod{4}$, el ideal $(2, 1+i) = (1+i)$, y los ideales $(p, i \pm a)$, donde $a^2 \equiv -1 \pmod{p}$.

3.4.1. Propiedades Locales

M_x es la localización de M en el ideal primo de $x \in \text{Spec } A$, y pondremos $m_x = \frac{m}{1}$.

El **soporte** de $m \in M$ es $\text{sop}(m) = \{x \in \text{Spec } A : m_x \neq 0\}$, y el de M es

$$\text{sop}(M) = \{x \in \text{Spec } A : M_x \neq 0\} = \bigcup_{m \in M} \text{sop}(m).$$

Lema: $\text{sop}(m) = (\text{Ann}(m))_0$. Por tanto, $m = 0 \Leftrightarrow m_x = 0, \forall x \in \text{Spec } A$.

Demostración: La condición $m_x = 0$ afirma que $fm = 0$ para alguna función f que no se anula en x ; i.e., que x no está en los ceros del ideal $\text{Ann}(m) = \{f \in A : fm = 0\}$.

Ahora, si $m_x = 0$ en todo punto, $(\text{Ann}(m))_0 = \emptyset$; luego $\text{Ann}(m) = A$, y $m = 0$.

Corolario: $M = 0$ si y sólo si $M_x = 0$ en todo punto $x \in \text{Spec } A$.

Teorema: Una sucesión $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ es exacta si y sólo si lo es su localización $M'_x \xrightarrow{f_x} M_x \xrightarrow{g_x} M''_x$ en todo punto $x \in \text{Spec } A$.

Demostración: Si es exacta en todo punto, $(\text{Im } gf)_x = \text{Im } (gf)_x = \text{Im } (g_x f_x) = 0$.

Luego $\text{Im } gf = 0$, y $\text{Im } f \subseteq \text{Ker } g$. Localizando ahora $\text{Ker } g/\text{Im } f$ vemos que es nulo,

$$(\text{Ker } g/\text{Im } f)_x = (\text{Ker } g)_x/(\text{Im } f)_x = (\text{Ker } g_x)/(\text{Im } f_x) = 0.$$

Definición: Un anillo es **local** si tiene un único ideal maximal. Por ejemplo A_x .

Lema de Nakayama: Sea \mathcal{O} un anillo local y \mathfrak{m} su único ideal maximal. Si M es un \mathcal{O} -módulo finito y $\mathfrak{m}M = M$, entonces $M = 0$.

Demostración: Si $M \neq 0$, consideramos un sistema mínimo de generadores m_1, \dots, m_n .

$$M = \mathfrak{m}M = \mathfrak{m}(\mathcal{O}m_1 + \dots + \mathcal{O}m_n) = \mathfrak{m}m_1 + \dots + \mathfrak{m}m_n$$

y $m_1 = f_1 m_1 + f_2 m_2 + \dots + f_n m_n$ para ciertas funciones $f_1, \dots, f_n \in \mathfrak{m}$.

Luego $1 - f_1$ es invertible (no está en \mathfrak{m}) y

$$(1 - f_1)m_1 = f_2 m_2 + \dots + f_n m_n.$$

Vemos que $m_1 \in \mathcal{O}m_2 + \dots + \mathcal{O}m_n$, y m_2, \dots, m_n generan M . Absurdo.

Corolario: $M = \mathcal{O}m_1 + \dots + \mathcal{O}m_n \Leftrightarrow M/\mathfrak{m}M = k\bar{m}_1 + \dots + k\bar{m}_n$, ($k = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$).

Demostración: Pongamos $M' = M/(\mathcal{O}m_1 + \dots + \mathcal{O}m_n)$.

La sucesión exacta $\mathcal{O}^n \rightarrow M \rightarrow M' \rightarrow 0$ induce una sucesión exacta

$$k^n \rightarrow M \otimes_{\mathcal{O}} k \rightarrow M' \otimes_{\mathcal{O}} k \rightarrow 0$$

luego $\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_n$ generan $M \otimes_{\mathcal{O}} k = M/\mathfrak{m}$ si y sólo si $0 = M'/\mathfrak{m}M'$; i.e., $M' = 0$.

3.5. Cálculo Diferencial

Fijemos un anillo k , que en este curso será un cuerpo.

Una **k -derivación** de una k -álgebra A en un A -módulo M es un morfismo de grupos $D: A \rightarrow M$ que se anula en las constantes ($D\lambda = 0$ cuando $\lambda \in k$) y

$$D(ab) = (Da)b + a(Db), \quad a, b \in A.$$

Las k -derivaciones $A \rightarrow M$ son k -lineales y forman un A -módulo $\text{Der}_k(A, M)$ con las operaciones usuales

$$\begin{aligned} (D + D')a &= Da + D'a, \\ (bD)a &= b(Da). \end{aligned}$$

Cada morfismo de A -módulos $f: M \rightarrow M'$ induce un morfismo de A -módulos

$$f_*: \text{Der}_k(A, M) \rightarrow \text{Der}_k(A, M'), \quad f_*D = f \circ D,$$

y cada morfismo de k -álgebras $j: A \rightarrow B$ induce morfismos B -lineales (N un B -módulo)

$$j^*: \text{Der}_k(B, N) \rightarrow \text{Der}_k(A, N), \quad j^*D = D \circ j.$$

Ejemplo: Cada derivación $D: k[x_1, \dots, x_n] \rightarrow M$ está determinada por las derivadas Dx_i , así que $D = \sum_i (Dx_i) \frac{\partial}{\partial x_i}$, y $\text{Der}_k(k[x_1, \dots, x_n], M) = M \frac{\partial}{\partial x_1} \oplus \dots \oplus M \frac{\partial}{\partial x_n}$.

Primera Sucesión Exacta de Derivaciones: Si $A \rightarrow B$ es morfismo de k -álgebras, tenemos una sucesión exacta de B -módulos

$$0 \longrightarrow \text{Der}_A(B, N) \longrightarrow \text{Der}_k(B, N) \longrightarrow \text{Der}_k(A, N)$$

Segunda Sucesión Exacta de Derivaciones: Cuando $B = A/I$, es exacta la sucesión

$$0 \longrightarrow \text{Der}_k(B, N) \longrightarrow \text{Der}_k(A, N) \longrightarrow \text{Hom}_A(I, N) = \text{Hom}_A(I/I^2, N)$$

Demostración: La restricción a I de una derivación $D: A \rightarrow N$ es A -lineal, porque $f \in I$ anula a todo B -módulo: $D(af) = a(Df) + f(Da) = a(Df)$.

Por último, una derivación $D: A \rightarrow N$ factoriza a través de B si y sólo si se anula en I .

Ejemplo: Si $k = A/\mathfrak{m}$, entonces $\text{Der}_k(A, k) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, k)$. En efecto, es inyectiva por la segunda sucesión exacta, y para ver que es epiyectiva introducimos la **diferencial** en el punto p que \mathfrak{m} define, $d_p: A \rightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, $d_p f = [\Delta f] = [f - f(p)]$,

$$\begin{aligned} fg &= (f(p) + \Delta f)(g(p) + \Delta g), \\ \Delta(fg) &= f(p)(\Delta g) + g(p)(\Delta f) + (\Delta f)(\Delta g), \\ d_p(fg) &= f(p)d_p f + g(p)d_p f, \end{aligned}$$

y si $\omega: \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \rightarrow k$ es lineal, la derivación $Df = \omega(d_p f)$ coincide con ω en \mathfrak{m} .

Definición: La existencia de una derivación universal se sigue del teorema de representabilidad; pero vamos a dar una construcción directa. El **ideal de la diagonal** es el núcleo Δ del morfismo $\mu: A \otimes_k A \rightarrow A$, $\mu(a \otimes b) = ab$, y el **módulo de diferenciales** es $\Omega_{A/k} = \Delta/\Delta^2$ (la estructura de A -módulo es igual por ambos lados, pues está anulado por $a \otimes 1 - 1 \otimes a \in \Delta$).

La **diferencial** es la k -derivación $d: A \rightarrow \Omega_{A/k}$, $da = [a \otimes 1 - 1 \otimes a]$,

$$d(ab) = (b \otimes 1)[a \otimes 1 - 1 \otimes a] + (1 \otimes a)[b \otimes 1 - 1 \otimes b] = b(da) + a(db).$$

Lema: $\Omega_{A/k}$ está generado por la imagen de la diferencial $d: A \rightarrow \Omega_{A/k}$.

Demostración: Si $\sum_i a_i \otimes b_i \in \Delta$, entonces $\sum_i a_i b_i = 0$; luego $\sum_i 1 \otimes a_i b_i = 0$, y

$$\sum_i a_i \otimes b_i = \sum_i a_i \otimes b_i - \sum_i 1 \otimes a_i b_i = \sum_i b_i (a_i \otimes 1 - 1 \otimes a_i).$$

Propiedad Universal: Toda k -derivación $D: A \rightarrow M$ factoriza de modo único por un morfismo de A -módulos $f: \Omega_{A/k} \rightarrow M$, $f(da) = Da$,

$$\text{Der}_k(A, M) = \text{Hom}_A(\Omega_{A/k}, M).$$

Demostración: El morfismo A -lineal $\phi: A \otimes_k A \rightarrow M$, $\phi(a \otimes b) = b(Da)$, se anula en Δ^2 ,

$$\phi((a \otimes 1 - 1 \otimes a)(b \otimes 1 - 1 \otimes b)) = D(ab) - a(Db) - b(Da) + ab(D1) = 0,$$

e induce un morfismo A -lineal $f: \Delta/\Delta^2 \rightarrow M$, $f(da) = \phi(a \otimes 1 - 1 \otimes a) = Da$.

La unicidad se sigue del lema anterior.

Corolario: $\Omega_{A/k} = \text{Ad}x_1 \oplus \dots \oplus \text{Ad}x_n$, donde $A = k[x_1, \dots, x_n]$.

Demostración: $\text{Der}_k(k[x_1, \dots, x_n], M) = M \frac{\partial}{\partial x_1} \oplus \dots \oplus M \frac{\partial}{\partial x_n}$.

Teorema: $\Omega_{A_S/k} = (\Omega_{A/k})_S$.

Demostración: Si M es un A_S -módulo, $\text{Der}_k(A_S, M) = \text{Der}_k(A, M)$, porque cada derivación $D: A \rightarrow M$ sólo puede provenir de la derivación

$$\bar{D}: A_S \longrightarrow M, \quad \bar{D}\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{sDa - aDs}{s^2}$$

que está bien definida: si $\frac{a}{s} = \frac{b}{t}$, entonces $rat = rbs$, $r \in S$. Derivando y dividiendo por rst

$$\begin{aligned} \frac{Da}{s} + \frac{aDt}{st} &= \frac{Db}{t} + \frac{bDs}{st} \\ \frac{sDa - aDs}{s^2} &= \frac{tDb - bDt}{t^2} \end{aligned}$$

$$\text{Hom}_{A_S}(\Omega_{A_S/k}, M) = \text{Der}_k(A_S, M) = \text{Der}_k(A, M) = \text{Hom}_A(\Omega_{A/k}, M) = \text{Hom}_{A_S}((\Omega_{A/k})_S, M).$$

Corolario: $\Omega_{(A_1 \oplus A_2)/k} = \Omega_{A_1/k} \oplus \Omega_{A_2/k}$.

Demostración: Pongamos $A = A_1 \oplus A_2 = A_{f_1} \oplus A_{f_2}$, donde $f_1 = (1, 0)$ y $f_2 = (0, 1)$.

Todo A -módulo es $M = M_{f_1} \oplus M_{f_2}$. Ahora, $(\Omega_{A/k})_{f_i} = \Omega_{A_{f_i}/k} = \Omega_{A_i/k}$.

Teorema: $\Omega_{A_K/K} = \Omega_{A/k} \otimes_k K$, para todo cambio de base $k \rightarrow K$.

Demostración: Si M es un A_K -módulo, toda k -derivación $D: A \rightarrow M$ factoriza, de modo único, por una K -derivación $D \otimes 1: A_K \rightarrow M$, y

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{A_K}(\Omega_{A_K/K}, M) &= \text{Der}_K(A_K, M) = \text{Der}_k(A, M) = \text{Hom}_A(\Omega_{A/k}, M) \\ &= \text{Hom}_{A_K}(\Omega_{A/k} \otimes_A A_K, M) = \text{Hom}_{A_K}(\Omega_{A/k} \otimes_k K, M). \end{aligned}$$

Primera Sucesión Exacta de Diferenciales: Si $A \rightarrow B$ es un morfismo de k -álgebras tenemos una sucesión exacta de B -módulos

$$\Omega_{A/k} \otimes_A B \longrightarrow \Omega_{B/k} \longrightarrow \Omega_{B/A} \longrightarrow 0$$

Demostración: Para todo B -módulo N , es exacta la sucesión

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_B(\Omega_{B/A}, N) & \longrightarrow & \text{Hom}_B(\Omega_{B/k}, N) & \longrightarrow & \text{Hom}_B(\Omega_{A/k} \otimes_A B, N) \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ & & \text{Der}_A(B, N) & & \text{Der}_k(B, N) & & \text{Der}_k(A, N) \end{array}$$

Segunda Sucesión Exacta de Diferenciales: Cuando $B = A/I$, es exacta la sucesión

$$I/I^2 \xrightarrow{d \otimes 1} \Omega_{A/k} \otimes_A B \longrightarrow \Omega_{B/k} \longrightarrow 0$$

Demostración: Para todo B -módulo N es exacta la sucesión

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_B(\Omega_{B/k}, N) & \longrightarrow & \text{Hom}_B(\Omega_{A/k} \otimes_A B, N) & \longrightarrow & \text{Hom}_B(I/I^2, N) \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ & & \text{Der}_k(B, N) & & \text{Der}_k(A, N) & & \text{Hom}_A(I, N) \end{array}$$

Corolario: $\Omega_{A/k} = (k[x]/(P, P'))dx$, donde $A = k[x]/(P)$.

Ejemplo: Si $k = A/\mathfrak{m}$ es cuerpo, $d \otimes 1: \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \rightarrow \Omega_{A/k} \otimes_A k$ es un isomorfismo, porque lo es su traspuesta $\text{Der}_k(A, k) = \text{Hom}_A(\Omega_{A/k}, k) = \text{Hom}_k(\Omega_{A/k} \otimes_A k, k) \rightarrow \text{Hom}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, k)$.

3.6. Álgebras Finitas

Fijemos un cuerpo base k .

Lema: *Todo ideal primo de una k -álgebra finita A es maximal.*

Demostración: Si A es íntegra, la aplicación lineal $h_a: A \rightarrow A$, $h_a(x) = ax$, es inyectiva cuando $a \neq 0$; luego epiyectiva, y $1 = h_a(b) = ab$ para algún $b \in A$. A es cuerpo.

Lema: *El número de ideales maximales de una k -álgebra finita A es $\leq [A : k]$.*

Demostración: Si $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$ son maximales de A , y $x_i \in \text{Spec } A$ es el punto que define \mathfrak{m}_i ,

$$(\mathfrak{m}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_i)_0 = (\mathfrak{m}_1)_0 \cup \dots \cup (\mathfrak{m}_i)_0 = \{x_1, \dots, x_i\};$$

luego son estrictas las inclusiones

$$A \supset \mathfrak{m}_1 \supset \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \supset \dots \supset \mathfrak{m}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_n.$$

Teorema: *El espectro de una k -álgebra finita es finito y discreto, $\text{Spec } A = \{x_1, \dots, x_n\}$, y A descompone en suma directa de álgebras locales (extensiones finitas si A es reducida)*

$$A = A_{x_1} \oplus \dots \oplus A_{x_n}.$$

Demostración: $\text{Spec } A$ es un espacio finito y sus puntos son cerrados, luego discreto, y el morfismo $A \rightarrow A_{x_1} \oplus \dots \oplus A_{x_n}$ es isomorfismo al localizar en cada punto $y \in \text{Spec } A$,

$$(A_{x_1} \oplus \dots \oplus A_{x_n})_y = (A_{x_1})_y \oplus \dots \oplus (A_{x_n})_y = A_y$$

porque $(A_x)_y = 0$ cuando $x \neq y$, ya que los primos de $(A_x)_y$ se corresponden con los primos de A contenidos en \mathfrak{m}_x y \mathfrak{m}_y , que no existen.

Si A es reducida, A_{x_i} es un álgebra local reducida; luego es cuerpo.

Teorema: *Si A, B son k -álgebras finitas, todo morfismo inyectivo $A \rightarrow B$ induce una aplicación $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ epiyectiva.*

Demostración: Si $x \in \text{Spec } A$, la aplicación $A_x \rightarrow B_x$ es inyectiva.

Luego $B_x \neq 0$, y todos los puntos de $\text{Spec } B_x$ están en la fibra de $x = \text{Spec } A_x$.

Definición: Los **puntos** de una k -álgebra A con valores en una extensión K de k , ó K -puntos, son los morfismos de k -álgebras $A \rightarrow K$.

Cuando $A = k[x]/(P)$, los puntos son las raíces de P en K .

Cuando $A = K$ es una extensión finita, los puntos son los automorfismos de K .

Fórmula de los Puntos: $\text{Hom}_{k\text{-alg}}(A, K) = \left[\begin{array}{l} \text{Puntos de } \text{Spec } A_K \\ \text{de cuerpo residual } K \end{array} \right]$

Demostración: Cuando $K = k$, la fórmula se debe a que cada morfismo $A \rightarrow k$ es epiyectivo y está determinado por su núcleo, que define un punto racional de $\text{Spec } A$. En efecto, dos morfismos con igual núcleo han de diferir en un automorfismo de k , que necesariamente es la identidad.

El caso general se sigue de la fórmula de la gráfica

$$\text{Hom}_{k\text{-alg}}(A, K) = \text{Hom}_{K\text{-alg}}(A \otimes_k K, K).$$

Definición: Si A es una k -álgebra, un punto $x \in \text{Spec } A$ es **racional** cuando $k = \kappa(x)$. Una k -álgebra finita es **racional** si lo son todos los puntos de su espectro.

Ejemplos: Todo k -morfismo $\phi: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ conserva puntos racionales, porque $\kappa(y)$ es una extensión de $\kappa(x)$ cuando $x = \phi(y)$; luego las subálgebras de un álgebra racional también son racionales (por el teorema anterior). Además, es claro que cocientes, sumas directas y productos tensoriales de álgebras racionales son racionales.

Por el teorema chino del resto, $A = k[x]/(P) = \bigoplus_i k[x]/(P_i^{n_i})$ donde $P = P_1^{n_1} \dots P_s^{n_s}$ es la descomposición en factores irreducibles. $\text{Spec } A$ tiene un punto por cada factor irreducible P_i , y su cuerpo residual es $k[x]/(P_i)$. Los puntos racionales son las raíces de P en k , y A es racional cuando P tiene todas sus raíces en k .

Teorema: El concepto de álgebra local y racional es **geométrico** (estable por cambios de base, si A es local y racional, A_K también lo es).

Demostración: Sea \mathfrak{m} el único maximal de una k -álgebra finita local racional \mathcal{O} , de modo que todo elemento de \mathfrak{m} es nilpotente, y $k = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$. La sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathfrak{m} \otimes_k K \rightarrow \mathcal{O} \otimes_k K \rightarrow k \otimes_k K = K \rightarrow 0$$

muestra que \mathfrak{m}_K es un ideal maximal de \mathcal{O}_K , y $\mathcal{O}_K/\mathfrak{m}_K = K$.

Como $\mathfrak{m} \otimes_k K$ está generado por nilpotentes, \mathcal{O}_K es una K -álgebra local racional.

Teorema de Kronecker: Si A es una k -álgebra finita, existe una extensión finita $k \rightarrow L$ tal que A_L es una L -álgebra racional.

Demostración: Por inducción sobre $[A : k]$ y, cuando el grado es 1, $A = k$ ya es racional.

Cuando $[A : k] > 1$, si A tiene un punto racional, $A = A_1 \oplus B$, y por inducción, B es racional sobre una extensión finita L , y $A_L = (A_1)_L \oplus B_L$ es racional.

Si A carece de puntos racionales, consideramos un cuerpo residual $A \rightarrow K$ y, por la fórmula de los puntos, A_K ya tiene un punto racional.

Definición: Dadas extensiones

$$\begin{array}{ccc} k & \longrightarrow & K_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_2 & \longrightarrow & L \end{array}$$

el **compuesto** $K_1 K_2$ es el cuerpo de fracciones de la imagen del correspondiente morfismo $K_1 \otimes_k K_2 \rightarrow L$, y está formado por los elementos de L que se obtienen a partir de K_1 y K_2 con sumas, productos y cocientes.

Los compuestos de K_1 y K_2 son los cuerpos residuales de $\text{Spec}(K_1 \otimes_k K_2)$, en particular existen, y cuando la extensión $k \rightarrow K_1$ es finita, son cocientes de $K_1 \otimes_k K_2$.

La demostración del teorema de Kronecker prueba que toda k -álgebra finita A es racional sobre un cociente L de un producto tensorial iterado $A^{\otimes n}$. Con esta condición adicional L ya es única salvo isomorfismos (no canónicos) y es el **cuerpo de descomposición** de A .

En efecto, si A es racional sobre otro cociente L' de $A^{\otimes m}$, también lo son $A^{\otimes n}$ y su cociente L , y por la fórmula de los puntos existe un morfismo $L \rightarrow L'$. Luego $[L : k] \leq [L' : k]$, y por simetría también $[L' : k] \leq [L : k]$, y el morfismo $L \rightarrow L'$ es isomorfismo.

La condición de que $A = k[x]/(P)$ sea racional sobre L afirma que P tiene todas sus raíces $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ en L , y la de que sea cociente de $A^{\otimes n}$ afirma que L está generada por raíces de P , así que $L = k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es el cuerpo de descomposición de P .

Definición: Una extensión algebraica $k \rightarrow \bar{k}$ es un **cierre algebraico** si \bar{k} es algebraicamente cerrado. (Los números complejos algebraicos forman un cierre algebraico de \mathbb{Q}).

Teorema: *Todo cuerpo tiene un cierre algebraico, único salvo isomorfismos no canónicos.*

Demostración: Sea L_P un cuerpo de descomposición de $P \in k[x]$. Consideremos

$$A = \varinjlim L_{P_1} \otimes_k \dots \otimes_k L_{P_n}$$

y el cuerpo residual $\bar{k} = A/\mathfrak{m}$ de un maximal \mathfrak{m} de A , que es una extensión algebraica porque está generada por las imágenes de los morfismos $L_P \rightarrow A \rightarrow \bar{k}$.

Estos morfismos muestran además que todo polinomio $P \in k[x]$ tiene todas sus raíces en \bar{k} , y concluimos que \bar{k} es algebraicamente cerrado (p. 18).

Si $k \rightarrow k'$ es otro cierre algebraico, y tomamos un compuesto $k'\bar{k}$, tenemos que $\bar{k} \xrightarrow{\sim} k'\bar{k}$, porque k' es algebraica sobre k . Igualmente $k' \xrightarrow{\sim} k'\bar{k}$, y $\bar{k} \simeq k'$.

Definición: Una k -álgebra finita A es **trivial** cuando $A = k \oplus \dots \oplus k = \oplus_X k = \text{Hom}(X, k)$; es decir, cuando el número de puntos del espectro coincide con el grado.

Las álgebras triviales son las álgebras racionales reducidas; luego las subálgebras de un álgebra trivial son triviales. Además, por la fórmula de los puntos:

1. El número de puntos de una k -álgebra finita A con valores en una extensión L está acotado por $[A : k]$, y sólo se da la igualdad cuando A_L es trivial, $A \otimes_k L = \oplus L$.
2. El número de automorfismos de una extensión finita $k \rightarrow L$ está acotado por $[L : k]$, y sólo se da la igualdad cuando $L \otimes_k L = \oplus L$.

Teorema: *Los funtores Spec y $R(X) = \oplus_X k$ definen una equivalencia de categorías*

$$\left[\begin{array}{c} k\text{-álgebras} \\ \text{triviales} \end{array} \right]^{\text{op}} \xleftrightarrow{\quad} \left[\begin{array}{c} \text{conjuntos} \\ \text{finitos} \end{array} \right], \quad \begin{array}{l} \text{Spec } R(X) = X \\ R(\text{Spec } A) = A \end{array}$$

Demostración: El morfismo natural $A \rightarrow \text{Hom}(\text{Spec } A, k)$ es inyectivo porque $A = \oplus k$ es reducida; luego isomorfismo porque el grado de ambas es el cardinal de $\text{Spec } A$.

La aplicación natural $X \rightarrow \text{Spec}(\oplus_X k)$ es inyectiva; luego biyectiva porque el número de puntos del espectro está acotado por el grado.

3.6.1. Álgebras Separables

Teorema: *Una k -álgebra finita A es **separable** si verifica las condiciones equivalentes*

1. $\Omega_{A/k} = 0$.
2. A es **localmente**³ trivial: $A_L = \oplus L$ para alguna extensión finita L .
3. A es **geométricamente reducida**: A_K es reducida para toda extensión K .
4. $A \otimes_k A$ es reducida.

³Si $k \rightarrow K$ es una extensión finita, ha de entenderse que $\text{Spec } K \rightarrow \text{Spec } k$ es un recubrimiento abierto de $\text{Spec } k$ para una “topología” más fina que la de Zariski, que no es topología en el sentido usual.

Demostración: (1 \Rightarrow 2) Si $A_L = B \oplus \dots$ es racional, como $0 = (\Omega_{A/k})_L = \Omega_{A_L/L} = \Omega_{B/L} \oplus \dots$, tenemos que $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \Omega_{B/L} \otimes_B L = 0$; luego $B = L$ por Nakayama, y A_L es trivial.

(2 \Rightarrow 3) $0 \rightarrow A_K \rightarrow A_{KL} = (A_L)_{KL} = (\oplus L)_{KL} = \oplus KL$; luego A_K es reducida.

(3 \Rightarrow 4) A es reducida, $A = \oplus_i K_i$; luego $A \otimes_k A = \oplus_i (A \otimes_k K_i)$ es reducida.

(4 \Rightarrow 1) Si $A \otimes_k A = \oplus_i K_i$, todo ideal I de $A \otimes_k A$ es suma directa de algunas componentes; luego $I = I^2$, y $\Omega_{A/k} = \Delta/\Delta^2 = 0$.

Corolario: *La separabilidad es un concepto geométrico y local. Subálgebras, cocientes, sumas directas, y productos tensoriales de álgebras separables son separables, y*

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{k\text{-alg}}(A, K) &= \left[\begin{array}{l} \text{Componentes de} \\ A \otimes_k K \text{ iguales a } K \end{array} \right] && (A \text{ separable}) \\ \text{Aut}_{k\text{-alg}}(L) &= \left[\begin{array}{l} \text{Componentes de} \\ L \otimes_k L \text{ iguales a } L \end{array} \right] && (L \text{ separable}) \end{aligned}$$

Teorema del Elemento Primitivo: *Si k es infinito, toda k -álgebra finita separable está generada por un elemento, $A = k[a]$.*

Demostración: Tomemos una extensión trivializante $0 \rightarrow A \rightarrow A_L = L \oplus \dots \oplus L$, $n = [A : k]$.

Los elementos $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in A$ tales que $\lambda_i = \lambda_j$ forman un subespacio vectorial $V_{ij} \subset A$, porque A contiene una base de $A_L = L^n$.

Si k es infinito⁴, $\bigcup V_{ij} \neq A$; luego existe $a \in A$ tal que los n morfismos $k[a] \rightarrow A_L \rightarrow L$ son distintos. El grado de $k[a]$ es $\geq n$, y $A = k[a]$.

Definición: Un polinomio $P \in k[x]$ es separable cuando lo es la k -álgebra $k[x]/(P)$, lo que significa que todas las raíces de P son simples, $\text{m.c.d.}(P, P') = 1$.

Un elemento de una k -álgebra finita $a \in A$ es separable cuando lo es la subálgebra $k[a] \simeq k[x]/(P_a)$; es decir, cuando lo es su polinomio anulador $P_a(x)$.

Proposición: $A = k[a_1, \dots, a_n]$ es separable si y sólo si lo son a_1, \dots, a_n .

Demostración: Si $k[a_1], \dots, k[a_n]$ son álgebras separables, también lo es $k[a_1] \otimes_k \dots \otimes_k k[a_n]$.

Luego A es separable, porque tenemos un epimorfismo $k[a_1] \otimes_k \dots \otimes_k k[a_n] \rightarrow A$.

Recíprocamente, si A es separable, también lo son las subálgebras $k[a_i]$.

Definición: Un cuerpo k es **perfecto** si todas sus extensiones finitas son separables; es decir, si todos los polinomios irreducibles en $k[x]$ tienen todas sus raíces simples.

Los cuerpos de característica nula y los cuerpos \mathbb{F}_p son perfectos (pp. 25, 26) y el ejemplo de la p. 26 muestra que $\mathbb{F}_2(t)$ no es perfecto.

Proposición: *Un cuerpo k de característica positiva p es perfecto si y sólo si el morfismo $F: k \rightarrow k$, $F(a) = a^p$, es epiyectivo. Por tanto, los cuerpos finitos son perfectos.*

Demostración: Si k es perfecto, la extensión $k \rightarrow k(\sqrt[p]{a})$ es separable; luego $\sqrt[p]{a} \in k$.

⁴Metiendo los V_{ij} en hiperplanos, en el espacio proyectivo dual $\mathbb{P}(A^*)$ tenemos un número finito de puntos, y hay un hiperplano que no pasa por ellos: basta proyectar desde un punto exterior y proceder por inducción sobre la dimensión.

Si F es epiyectivo, y un polinomio $Q \in k[x]$ tiene una raíz múltiple, entonces $Q' = 0$ (p. 24) y Q no es irreducible,

$$Q = a_0 + a_p x^p + a_{2p} x^{2p} + \dots = b_0^p + b_p^p x + b_{2p}^p x^2 + \dots = (b_0 + b_p x + b_{2p} x^2 + \dots)^p.$$

Definición: La traza de $a \in A$ es la traza del endomorfismo $h_a: A \rightarrow A$, $h_a(x) = ax$.

Tenemos así una forma lineal $\text{tr}: A \rightarrow k$, $\text{tr}(a) = \text{tr } h_a$, y la **métrica de la traza**

$$T_2(a, b) = \text{tr}(ab).$$

La traza de un endomorfismo nilpotente T es nula, porque (p. 115) su polinomio característico es $c_T(x) = x^n$; luego $\text{rad } A \subseteq \text{rad } T_2$.

Teorema: La métrica de la traza es estable por cambios de base.

Demostración: La matriz de h_a en una base e_1, \dots, e_n de A es la matriz de $h_{a \otimes 1}$ en la base $e_1 \otimes 1, \dots, e_n \otimes 1$ de A_K . Luego $\text{tr}(a) = \text{tr}(a \otimes 1)$, y vemos que la métrica de la traza en A_K es $T_2 \otimes 1: A_K \otimes_K A_K = (A \otimes_k A) \otimes_k K \rightarrow K$.

Corolario: $\left[\begin{array}{c} \text{Radical de la métrica} \\ \text{de la traza en } A \end{array} \right] \otimes_k K = \left[\begin{array}{c} \text{Radical de la métrica} \\ \text{de la traza en } A_K \end{array} \right]$

Demostración: Consideremos la polaridad $\phi: A \rightarrow A^*$, $\phi(a) = i_a T_2$, y las sucesiones exactas

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \text{rad } T_2 \longrightarrow A \xrightarrow{\phi} \text{Hom}_k(A, k) \\ 0 &\longrightarrow (\text{rad } T_2)_K \longrightarrow A_K \xrightarrow{\phi \otimes 1} \text{Hom}_k(A, k) \otimes_k K = \text{Hom}_{A_K}(A_K, K) \end{aligned}$$

Como $\phi \otimes 1$ es la polaridad de la métrica de la traza en A_K , vemos que $(\text{rad } T_2)_K$ es el radical de la métrica de la traza en A_K .

Teorema: Una k -álgebra finita es separable si y sólo si su métrica de la traza es no singular.

Demostración: En un álgebra trivial la métrica de la traza es no singular, porque su matriz en la base obvia es la matriz unidad I .

Ahora, si A es localmente trivial, $A_L = \oplus L$, entonces $(\text{rad } T_2)_L = 0$, y $\text{rad } T_2 = 0$.

Si $\text{rad } T_2 = 0$, entonces $\text{rad } A_K \subseteq (\text{rad } T_2)_K = 0$, y A es geoméricamente reducida.

Corolario: Una extensión finita $k \rightarrow K$ es separable si y sólo si la traza $\text{tr}: K \rightarrow k$ no es nula (porque $\text{rad } T_2$ siempre es un ideal).

3.7. Teoría de Galois

Definición: Una extensión finita $k \rightarrow L$ es de **Galois** si el orden de su **grupo de Galois** $G = \text{Aut}_{k\text{-alg}}(L) = \text{Aut}(L/k)$ coincide con el grado,

$$L \otimes_k L = L \oplus \dots \oplus L = \oplus_G L.$$

El cuerpo de descomposición L de una k -álgebra separable A es un cociente de $A^{\otimes m}$. Al ser A_L trivial, $L \otimes_k L$ también, y L es la **envolvente de Galois** de A .

El cuerpo de descomposición $k(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ de un polinomio separable P es una extensión de Galois, y su grupo de Galois G puede verse como grupo de permutaciones de las raíces de P .

Si L es una extensión de Galois de k , también es una extensión de Galois de cualquier cuerpo intermedio $k \rightarrow K \rightarrow L$, porque tenemos un epimorfismo $\oplus L = L \otimes_k L \rightarrow L \otimes_K L$.

Si $k \rightarrow L$ es de Galois, todo compuesto de L con L es $\simeq L$. Dos morfismos $f_1, f_2: L \rightarrow E$ en otra extensión siempre tienen la misma imagen. En particular, si un cuerpo intermedio K también es una extensión de Galois de k , todo automorfismo $\tau: L \rightarrow L$ lo deja invariante, $\tau(K) = K$, y tenemos un morfismo de restricción $\text{Aut}(L/k) \rightarrow \text{Aut}(K/k)$.

Teorema: Si $A \neq 0$ es una k -álgebra, la sucesión $k \rightarrow A \rightrightarrows A \otimes_k A$ es exacta⁵.

Demostración: Tomemos un retracto lineal $\omega: A \rightarrow k$ (p. 41). Si $a \otimes 1 = 1 \otimes a$,

$$a = (1 \otimes \omega)(a \otimes 1) = (1 \otimes \omega)(1 \otimes a) = \omega(a) \in k. \quad \text{q.e.d.}$$

Si A es una k -álgebra finita trivial sobre L , sus puntos con valores en L ,

$$F(A) = \text{Hom}_{k\text{-alg}}(A, L) = \text{Spec } A_L,$$

forman un G -conjunto finito con la acción $\tau p = \tau \circ p$, donde $p: A \rightarrow L$ (o bien mediante su acción en $A \otimes_k L$ por el segundo factor). Vamos a construir un funtor inverso:

Las proyecciones $A_L = \oplus L \rightarrow L$ definen los puntos $p_i: A \rightarrow L$ del álgebra, así que⁶

$$A \otimes_k L = L \oplus \dots \oplus L, \quad a \otimes \lambda = (\lambda p_1(a), \dots, \lambda p_n(a)),$$

de modo que $A_L = \oplus_{F(A)} L = \text{Hom}_{\mathbf{Sets}}(F(A), L)$, donde G actúa permutando las componentes según su acción en $F(A)$, y transformando cada componente por su acción en L ; es decir, $\tau f = \tau \circ f \circ \tau^{-1}$, y el álgebra de invariantes es $\text{Hom}_G(F(A), L)$.

Por eso definimos el **recubrimiento asociado** a un G -conjunto finito X como⁷

$$R(X) = (\oplus_X L)^G = \text{Hom}_G(X, L),$$

y tenemos un morfismo natural $A \hookrightarrow R(F(A))$. También tenemos un morfismo natural $X \rightarrow F(R(X))$, porque $x \in X$ define un morfismo de k -álgebras $R(X) \hookrightarrow \oplus_X L \xrightarrow{x} L$.

Teorema de Galois: Los funtores F y R definen una equivalencia de categorías

$$\left[\begin{array}{c} \text{Álgebras finitas} \\ \text{triviales sobre } L \end{array} \right]^{\text{op}} \quad \longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{c} G\text{-conjuntos} \\ \text{finitos} \end{array} \right], \quad \begin{array}{l} R(F(A)) = A \\ F(R(X)) = X \end{array}$$

Demostración: $L = RF(L)$, y $G = FR(G)$, porque

$$\begin{aligned} F(L) &= \text{Hom}_{k\text{-alg}}(L, L) = G, \\ R(G) &= \text{Hom}_G(G, L) = L. \end{aligned}$$

Además, F y R conservan sumas directas y conúcleos. El funtor $R = \text{Hom}_G(-, L)$ porque es representable, y el funtor fibra F , porque si tenemos una sucesión exacta

$$A \longrightarrow B \rightrightarrows C$$

⁵Si $X = \text{Spec } A \rightarrow S = \text{Spec } k$ se ve como un recubrimiento abierto de S , la sucesión exacta $X \times_S X \rightrightarrows X \rightarrow S$ afirma que las funciones globales $f \in k$ son las funciones en el recubrimiento que coinciden en las intersecciones.

⁶Por ejemplo, la sucesión exacta $k \rightarrow L \rightrightarrows L \otimes_k L = \oplus_G L$ afirma que $k = L^G$. En esta situación, tomar invariantes por G es tomar funciones globales.

⁷En la categoría opuesta a la de k -álgebras, $P = \text{Spec } L \rightarrow S = \text{Spec } k$ es de Galois cuando $P \times_S P = P \oplus \dots \oplus P$ y, como las componentes son las gráficas de los automorfismos $\tau_i: P \rightarrow P$, el morfismo natural $G \times P \rightarrow P \times_S P$ es isomorfismo. Además, $R(X) = (P \times_S X)/G$.

también es exacta la sucesión de L -álgebras triviales

$$A_L \longrightarrow B_L \rightrightarrows C_L$$

y, como el funtor Spec establece una equivalencia de la categoría de L -álgebras triviales con la de conjuntos finitos (p. 81), es exacta la sucesión de conjuntos (y de G -conjuntos)

$$\text{Spec } C_L \rightrightarrows \text{Spec } B_L \longrightarrow \text{Spec } A_L.$$

Ahora, todo G -conjunto finito X admite una presentación $\oplus_i G \rightrightarrows \oplus_j G \rightarrow X$, porque hay presentaciones $G \times H = \oplus_H G \rightrightarrows G \rightarrow G/H$, donde $(g, h) \mapsto g$, y $(g, h) \mapsto gh$, y el siguiente diagrama conmutativo de filas exactas muestra que $X = FR(X)$,

$$\begin{array}{ccccc} \oplus_i G & \rightrightarrows & \oplus_j G & \rightarrow & X \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow \\ FR(\oplus_i G) & \rightrightarrows & FR(\oplus_j G) & \rightarrow & FR(X) \end{array}$$

Por otra parte, como la sucesión $k \rightarrow L \rightrightarrows L \otimes_k L$ es exacta, toda k -álgebra A trivial sobre L es un núcleo $A \rightarrow A \otimes_k L \rightrightarrows A \otimes_k L \otimes_k L$ de morfismos entre L -álgebras triviales, y el mismo razonamiento prueba que $A = RF(A)$.

Corolario: $\text{Hom}_{k\text{-alg}}(A, B) = \text{Hom}_G(F(B), F(A))$.

$$\text{Hom}_G(X, Y) = \text{Hom}_{k\text{-alg}}(R(Y), R(X)).$$

Corolario: $R(G/H) = L^H$, $F(L^H) = G/H$.

1. Tenemos un anti-isomorfismo de retículos

$$\left[\begin{array}{c} \text{Cuerpos intermedios} \\ \text{entre } k \text{ y } L \end{array} \right] \longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} \text{Subgrupos} \\ \text{de } G \end{array} \right], \quad \begin{array}{l} K \longmapsto \text{Aut}(L/K) \\ L^H \longleftarrow H \end{array}$$

2. $\text{Hom}_{k\text{-alg}}(L^H, L^{H'}) = \{\bar{\tau} \in G/H : H' \subseteq \tau H \tau^{-1}\}$.

3. $L^H \simeq L^{H'} \Leftrightarrow H' \text{ y } H \text{ son subgrupos conjugados}$.

4. $\text{Aut}(L^H/k) = N(H)/H$.

5. L^H es una extensión de Galois de k si y sólo si H es un subgrupo normal de G , en cuyo caso su grupo de Galois es G/H .

Demostración: $R(G/H) = \text{Hom}_G(G/H, L) = L^H$.

$$F(L^H) = FR(G/H) = G/H.$$

(1) Sea $i: L^H \rightarrow L$ la inclusión. La fibra H de $G = F(L) \rightarrow G/H = F(L^H)$ sobre $[\text{Id}] = i$ es $\text{Hom}_{L^H\text{-alg}}(L, L) = \text{Aut}(L/L^H)$; luego $H = \text{Aut}(L/L^H)$.

Además, $k = R(\text{pt}) = L^G$; luego $K = L^{\text{Aut}(L/K)}$, al ser L una extensión de Galois de K .

Las restantes afirmaciones se siguen de la igualdad

$$\text{Hom}_{k\text{-alg}}(L^H, L^{H'}) = \text{Hom}_G(G/H', G/H) = (G/H)^{H'} = \{\bar{g} \in G/H : H' \subseteq gHg^{-1}\}.$$

Teorema de los Irracionales Naturales: Sea $k \rightarrow L$ una extensión de Galois de grupo G . Todo compuesto LE es una extensión de Galois de E , y su grupo de Galois es el subgrupo $\text{Aut}(L/L \cap E) \subseteq G$.

Demostración: Tenemos un epimorfismo $L \otimes_k E \rightarrow LE$; luego $LE \otimes_E LE$ es un cociente de

$$L \otimes_k E \otimes_E LE = L \otimes_K LE = L \otimes_K L \otimes_L LE = (\oplus L) \otimes_L LE = \oplus LE.$$

Además $\text{Aut}(LE/E) \hookrightarrow \text{Aut}(L/k)$, y $L^{\text{Aut}(LE/E)} = L \cap (LE)^{\text{Aut}(LE/E)} = L \cap E$.

Corolario: Si G es el grupo de Galois de un polinomio separable P , las órbitas de la acción de G en las raíces de P son las raíces de sus factores irreducibles.

Demostración: Sea $P = P_1 \dots P_r$ la descomposición en factores irreducibles en $k[x]$, y L su cuerpo de descomposición sobre k . Ahora $A = k[x]/(P) = K_1 \oplus \dots \oplus K_r$, con $K_i = k[x]/(P_i)$, y $F(A) = F(K_1) \oplus \dots \oplus F(K_r)$, donde $F(K_i)$ es una órbita, formada por las raíces de P_i en L .

Teorema: Si G es un grupo finito de automorfismos de una k -álgebra A , el álgebra de invariantes es estable por cambios de base $k \rightarrow K$,

$$(A \otimes_k K)^G = A^G \otimes_k K.$$

Demostración: Sea $G = \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$. La sucesión exacta $A^G \rightarrow A \xrightarrow{f, \tau} A \oplus \dots \oplus A$, donde $f(a) = (a, \dots, a)$ y $\tau(a) = (\tau_1(a), \dots, \tau_n(a))$, induce una sucesión exacta

$$A^G \otimes_k K \longrightarrow A_K \xrightarrow{f \otimes 1, \tau \otimes 1} A_K \oplus \dots \oplus A_K.$$

Teorema de Artin: Sea H un grupo de automorfismos de una extensión finita $k \rightarrow L$. Si $k = L^H$, entonces L es una extensión de Galois de grupo H .

Demostración: Por la fórmula de los puntos, $L \otimes_k L$ tiene una componente racional A_i por cada elemento de $H = \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$; luego

$$\begin{aligned} L \otimes_k L &= (A_1 \oplus \dots \oplus A_n) \oplus (B_1 \oplus \dots) \\ L &= L^H \otimes_k L = (L \otimes_k L)^H = (A_1 \oplus \dots \oplus A_n)^H \oplus (B_1 \oplus \dots)^H. \end{aligned}$$

Como L es íntegro, vemos que $B_1 \oplus \dots = 0$.

Ahora $A_i = L$ porque un nilpotente no nulo $a \in A_1$ daría un nilpotente no nulo en L ,

$$(a, \dots, \tau_i(a), \dots) \in (A_1 \oplus \dots \oplus A_n)^H = L. \quad \text{q.e.d.}$$

No es necesario suponer que la extensión es finita, sólo que H lo es, pues si $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in L$, entonces $k(\dots, \tau_i \alpha_j, \dots)$ es una extensión de Galois de grado fijo $n = |H|$.

Ejercicio: ¿Dónde falla el siguiente razonamiento? Si $k \rightarrow K \rightarrow L$ son extensiones de Galois, entonces también lo es $k \rightarrow L$,

$$\begin{aligned} K \otimes_k L &= (K \otimes_k K) \otimes_K L = (\oplus K) \otimes_K L = \oplus (K \otimes_K L) = \oplus L, \\ L \otimes_k L &= L \otimes_K (K \otimes_k L) = L \otimes_K (\oplus L) = \oplus (L \otimes_K L) = \oplus L. \end{aligned}$$

3.7.1. El Automorfismo de Frobenius

Sea L un cuerpo finito de característica p . Como L es una extensión de \mathbb{F}_p , tenemos un isomorfismo \mathbb{F}_p -lineal $L \simeq \mathbb{F}_p^n$, con $n = [L : \mathbb{F}_p]$, y vemos que L tiene $q = p^n$ elementos.

Teorema: *Sea $q = p^n$ una potencia de un primo. Existe un único cuerpo con q elementos; a saber, el cuerpo de descomposición \mathbb{F}_q de $x^q - x$ sobre \mathbb{F}_p .*

Demostración: El automorfismo $F: \mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{F}_q$, $F(a) = a^q$, deja fijas las raíces de $x^q - x$; luego es la identidad y todos los elementos de \mathbb{F}_q son raíces de $Q = x^q - x$. Como Q es separable, porque $Q' = -1$, tiene q raíces distintas, y \mathbb{F}_q tiene q elementos.

Sea L es otro cuerpo con q elementos. Los elementos no nulos de L forman un grupo multiplicativo de orden $q - 1$, y son raíces de $x^{q-1} - 1$. Luego $x^q - x$ tiene todas sus raíces en L , y L es el cuerpo de descomposición de $x^q - x$ sobre \mathbb{F}_p .

Teorema: *La extensión $\mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{F}_q$ es de Galois y de grupo cíclico, generado por el automorfismo de Frobenius $F(\alpha) = \alpha^p$.*

Demostración: Sea $G = \langle F \rangle$. Como $\mathbb{F}_q^G = \mathbb{F}_p$, el teorema de Artin permite concluir.

Corolario: *Sea $Q \in \mathbb{F}_p[x]$ separable, producto de polinomios irreducibles de grados n_1, \dots, n_r . El grupo de Galois de Q está generado por una permutación de forma (n_1, \dots, n_r) .*

Lema: *Todo subgrupo finito H del grupo multiplicativo k^* de un cuerpo k es cíclico.*

Demostración: Si d es el anulador de H , los elementos de H son raíces de $x^d - 1$, y $d \geq |H|$.

La clasificación de grupos abelianos muestra que H es cíclico de orden d .

Corolario: *En $\mathbb{F}_p[x]$ hay polinomios irreducibles de grado arbitrario.*

Demostración: Sea $q = p^n$. Como el grupo \mathbb{F}_q^* es cíclico, se tiene que $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p(\theta)$.

El polinomio irreducible de θ sobre \mathbb{F}_p es de grado n .

Teorema de Reducción: *Sea G el grupo de Galois de $Q = x^n + c_1x^{n-1} + \dots + c_n \in \mathbb{Z}[x]$. Si \bar{G} es el grupo de Galois de la reducción $\bar{Q} \in \mathbb{F}_p[x]$, existe un subgrupo $H \subseteq G$ y un epimorfismo $\varphi: H \rightarrow \bar{G}$. Si \bar{Q} es separable, φ es isomorfismo y, como permutación de las raíces, $\tau \in H$ tiene igual forma que $\varphi(\tau)$.*

Demostración: Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son las raíces complejas de Q .

$A = \mathbb{Z}[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ es un \mathbb{Z} -módulo finito porque $\alpha_i^n = -c_1\alpha_i^{n-1} - \dots - c_n$.

1. $A^G = \mathbb{Z}$. Si $\frac{a}{b} \in A^G = A \cap \mathbb{Q}$, entonces $\mathbb{Z}[\frac{a}{b}] \subseteq A$ es un \mathbb{Z} -módulo finito (p. 111); luego sus elementos tienen denominador acotado, lo que es absurdo si $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Z}$.
2. A/pA es una \mathbb{F}_p -álgebra finita; luego de espectro finito, $\text{Spec}(A/pA) = \{x_1, \dots, x_d\}$. Sea \mathfrak{m}_i el maximal de A definido por x_i , y pongamos $K_i = A/\mathfrak{m}_i$. Como

$$(\mathfrak{m}_1 + (\mathfrak{m}_2 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_d))_0 = \{x_1\} \cap \{x_2, \dots, x_d\} = \emptyset,$$

por el teorema chino de los restos tenemos epimorfismos

$$A \longrightarrow A/(\mathfrak{m}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_d) = K_1 \oplus \dots \oplus K_d \longrightarrow K_1 = \mathbb{F}_p[\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n].$$

$Q(x) = \prod_i (x - \alpha_i)$ y $\bar{Q}(x) = \prod_i (x - \bar{\alpha}_i)$; luego K_1 es el cuerpo de descomposición de \bar{Q} y $\bar{G} = \text{Aut}(K_1/\mathbb{F}_p)$. Ahora $H = \{\tau \in G : \tau(\mathfrak{m}_1) = \mathfrak{m}_1\}$ actúa sobre $K_1 = A/\mathfrak{m}_1$ y tenemos un morfismo $\varphi: H \rightarrow \bar{G}$, $\varphi(\tau)(\bar{a}) = [\tau(a)]$.

3. φ es epiyectivo. Pongamos $K_1 = \mathbb{F}_p(\bar{\theta})$, y tomemos $\theta \in A$ que en x_1 vale $\bar{\theta}$ y se anula en x_2, \dots, x_d . Ahora $R(x) = \prod_{\tau \in G} (x - \tau\theta)$ tiene coeficientes en $A^G = \mathbb{Z}$, y para cada $\bar{\tau} \in \bar{G}$ tenemos que $\bar{\tau}(\bar{\theta})$ es una raíz de $\bar{R}(x)$. Luego $\bar{\tau}(\bar{\theta}) = [\tau\theta]$ para algún $\tau \in G$. Como $\tau(\theta)$ no se anula en x_1 , concluimos que $\tau \in H$, y $\varphi(\tau) = \bar{\tau}$.
4. Si \bar{Q} es separable, $\tau \in H$ define una permutación de las raíces α_i , y $\varphi(\tau)$ define la misma permutación de las raíces $\bar{\alpha}_i$. Luego φ es inyectivo.

Definición: Si \bar{Q} es separable, el **automorfismo de Frobënus** del polinomio $Q(x)$ en el primo p es el único elemento $F_p \in H$ tal que $\varphi(F_p)$ es el automorfismo de Frobënus de K_1 ,

$$F_p(a) \equiv a^p \pmod{\mathfrak{m}_1}, \quad a \in A.$$

F_p depende del maximal \mathfrak{m}_1 elegido; pero *está bien definido salvo conjugación* porque G actúa transitivamente en $\text{Spec}(A/pA)$, y si se elige $\mathfrak{m}_i = \sigma(\mathfrak{m}_1)$, el automorfismo es $\sigma F_p \sigma^{-1}$.

En efecto, si $\text{Spec}(A/pA)$ tuviera más de una órbita, elegimos $f \in A$ que sólo se anule en la órbita de x_1 ($A \rightarrow K_1 \oplus \dots \oplus K_d$ es epiyectivo). Luego $N(f) = \prod_{\tau \in G} \tau(f) \in A^G = \mathbb{Z}$ se anula en x_1 y en otros puntos no. Absurdo, $N(f) \in \mathfrak{m}_1 \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z} \subseteq \mathfrak{m}_i$.

1. *Existen polinomios de grado arbitrario n cuyo grupo de Galois sobre \mathbb{Q} es S_n .*

Sea $Q_2 \in \mathbb{F}_2[x]$ irreducible de grado n ; $Q_3 \in \mathbb{F}_3[x]$ con un factor irreducible de grado $n-1$ y una raíz en \mathbb{F}_3 ; y $Q_p \in \mathbb{F}_p[x]$ con un factor irreducible de grado 2 y $n-2$ raíces distintas en \mathbb{F}_p , $p \neq 2, 3$. Como $\mathbb{Z}/6p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_3 \oplus \mathbb{F}_p$, existe un polinomio con coeficientes enteros Q cuyas reducciones módulo 2, 3, p son Q_2, Q_3, Q_p . El grupo de Galois G de Q es un subgrupo transitivo de S_n que contiene un $(n-1)$ -ciclo y una trasposición: $(2, \dots, n), (ij) \in G$. Al ser G transitivo, contiene una trasposición $(1k)$. Conjugando $(1k)$ con $(2, \dots, n)^m$ vemos que $(12), (13), \dots, (1n) \in G$. Estas trasposiciones generan S_n , y $G = S_n$.

2. Si el grupo de Galois de Q no contiene ciclos de orden n , su reducción \bar{Q} nunca es irreducible. Una cuártica de grupo $\{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$, como $x^4 + 1$, es irreducible; pero su reducción nunca lo es.
3. Si todo automorfismo $\tau \in G$ deja fija alguna raíz de Q , entonces \bar{Q} tiene una raíz en \mathbb{F}_p (cuando \bar{Q} es separable). Así cada automorfismo de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ deja fijo $\sqrt{2}$, $i\sqrt{2}$ ó $1+i$; luego deja fija una raíz de $x^8 - 2^4$, que tiene raíz en \mathbb{F}_p , si $p \neq 2$. Como en $p=2$ también, 2^4 es potencia octava en todo primo.

3.7.2. Extensiones Ciclotómicas

Si $p = \text{car } k$ no divide a n , entonces el polinomio $x^n - 1$ es separable, y sus raíces en un cuerpo de descomposición L forman un grupo cíclico $\mu_n = \{\varepsilon_n, \varepsilon_n^2, \dots, \varepsilon_n^n = 1\}$, (p. 87).

Teorema: $k \rightarrow k(\varepsilon_n)$ es una extensión abeliana de grupo $G \subseteq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.

Demostración: $k(\varepsilon_n)$ es de Galois porque es el cuerpo de descomposición de un polinomio separable, y $\tau \in G$ induce un automorfismo de μ_n ; luego $\tau(\varepsilon_n) = \varepsilon_n^i$, $i \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.

El morfismo $G \rightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$, $\tau \mapsto i$, es inyectivo porque τ está determinado por $\tau(\varepsilon_n)$.

Teorema: El automorfismo de Frobënus de $x^n - 1$ en un primo p que no divida a n es

$$F_p = [p] \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*.$$

Demostración: Si la reducción de $x^n - 1$ es separable, tenemos que $\bar{\varepsilon}_n^i \neq \bar{\varepsilon}_n^j$, $i \neq j$; es decir, $\varepsilon_n^i \not\equiv \varepsilon_n^j \pmod{\mathfrak{m}_1}$. Como $F_p(\varepsilon_n) \equiv \varepsilon_n^p \pmod{\mathfrak{m}_1}$, vemos que $F_p(\varepsilon_n) = \varepsilon_n^p$.

Corolario: $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{n}})$ es una extensión abeliana de grupo $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$, y por tanto de grado $\phi(n)$, de modo que el polinomio ciclotómico $\Phi_n(x)$ es irreducible.

Demostración: G contiene los primos que no dividen a n , y éstos generan $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.

Lema: Si q es impar, el discriminante de $Q(x) = x^q - 1$ es $\Delta = (-1)^{\frac{q-1}{2}} q^q$.

Demostración: $\Delta = (-1)^{\frac{q-1}{2}} \prod_i Q'(\alpha_i) = (-1)^{\frac{q-1}{2}} q^q \prod_i \alpha_i^{q-1} = (-1)^{\frac{q-1}{2}} q^q$.

Ley de Reciprocidad Cuadrática: $\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} \left(\frac{q}{p}\right)$; p, q primos impares,

Demostración: $K = \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$ es la única extensión de grado 2 que contiene $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{q}})$, y el automorfismo de Frobenius $F_p = [p]$ de $x^q - 1$ es la identidad en K cuando está en el único subgrupo de índice 2 de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$, formado por los restos cuadráticos.

Como $\mathbb{Z}[\sqrt{\Delta}] \subset \mathbb{Z}[e^{\frac{2\pi i}{q}}]$, la restricción de F_p a K es el automorfismo de Frobenius de $x^2 - \Delta$ en p , que es la identidad cuando Δ es resto cuadrático módulo p . Luego (p. 11)

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{\Delta}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{q-1}{2}} \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} \left(\frac{q}{p}\right).$$

3.7.3. Irracionales Cuadráticos

Lema: Si $\text{car } k \neq 2$, toda extensión $k \rightarrow L$ de grado 2 es $L = k(\sqrt{a})$, con $a \in k$.

Demostración: Si $\beta \in L$ no está en k , es raíz de un polinomio $x^2 + bx + c \in k[x]$.

Luego $\beta = \frac{1}{2}(-b \pm \sqrt{b^2 - 4c})$, y $L = k(\beta) = k(\sqrt{b^2 - 4c})$.

Proposición: Las raíces complejas de un polinomio $P \in \mathbb{Q}[x]$ son irracionales cuadráticos si y sólo si su grupo de Galois G es un 2-grupo.

Demostración: Si las raíces de P son irracionales cuadráticos, su cuerpo de descomposición L está contenido en una extensión por radicales cuadráticos, y $|G| = [L : \mathbb{Q}] = 2^d$ (p. 18).

Recíprocamente, si G es un 2-grupo, admite (p. 58) una cadena de subgrupos

$$1 \subset H_1 \subset \dots \subset H_d = G, \quad |H_i| = 2^i.$$

Poniendo $K_i = L^{H_i}$ vemos que L es una extensión por radicales cuadráticos

$$\mathbb{Q} = K_d \xrightarrow{2} K_{d-1} \xrightarrow{2} \dots \xrightarrow{2} K_1 \xrightarrow{2} L.$$

Corolario: Un número algebraico $\alpha \in \mathbb{C}$ es irracional cuadrático si y sólo si el grupo de Galois G de su polinomio irreducible P_α es un 2-grupo.

Demostración: Si $|G| = 2^d$, las raíces de P_α (luego α) son irracionales cuadráticos.

Recíprocamente, si α es irracional cuadrático, basta ver que toda raíz compleja β de P_α también lo es, y por definición $\alpha \in \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, $\alpha_i^2 \in \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})$.

Sea $L \subset \mathbb{C}$ la envolvente de Galois de $\mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$. Como P_α es irreducible, $\tau(\alpha) = \beta$ para algún automorfismo $\tau: L \rightarrow L$; luego $\beta \in \mathbb{Q}(\tau\alpha_1, \dots, \tau\alpha_r)$, y $(\tau\alpha_i)^2 \in \mathbb{Q}(\tau\alpha_1, \dots, \tau\alpha_{i-1})$; es decir, β es un irracional cuadrático. q.e.d.

1. $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ es irracional cuadrático si y sólo si $\phi(n)$ es potencia de 2.

En efecto, $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{n}})$ es una extensión de Galois de grado $\phi(n)$.

2. Si $p = 2^k + 1$ es primo, entonces $e^{\frac{2\pi i}{p}}$ es irracional cuadrático. *Los polígonos regulares de 17, 257, y 65537 lados son constructibles con regla y compás.*
3. Veamos que toda extensión finita $\mathbb{C} \rightarrow L$ es trivial (lo que vuelve a probar el Teorema de D'Alembert). Podemos suponer que L es una extensión de Galois de \mathbb{R} . Sea G su grupo, y H un 2-subgrupo de Sylow de G , de modo que $[L^H : \mathbb{R}]$ es impar.

Si $\alpha \in L^H$, entonces $\text{gr } P_\alpha = [\mathbb{R}(\alpha) : \mathbb{R}]$ es impar, y tiene alguna raíz real por el Teorema de Bolzano. Luego $\alpha \in \mathbb{R}$, $L^H = \mathbb{R}$, $H = G$, y L se obtiene adjuntando a \mathbb{R} sucesivas raíces cuadradas. Luego $L = \mathbb{C}$.

3.7.4. Resolución de Ecuaciones

$k \rightarrow L$ es una **extensión por radicales** si $L = k(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, donde $\alpha_i^{n_i} \in k(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})$. Un polinomio $P \in k[x]$ es **resoluble por radicales** cuando sus raíces puedan expresarse con radicales; es decir, cuando su cuerpo de descomposición L sobre k admita una extensión finita $L \rightarrow E$ tal que E es una extensión de k por radicales.

Un grupo finito G es **resoluble** si admite subgrupos $1 = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \dots \triangleleft H_{n-1} \triangleleft H_n = G$, con cocientes sucesivos H_i/H_{i-1} abelianos.

Lema: Si G es resoluble, todo subgrupo H es resoluble.

Si $H \triangleleft G$, entonces G es resoluble si y sólo si H y G/H son resolubles.

Demostración: Si $1 = H_0 \triangleleft H_1 \dots \triangleleft H_n = G$ es una resolución, y $H'_i = H_i \cap H$, entonces $H'_{i-1} \triangleleft H'_i$, y $H'_i/H'_{i-1} \hookrightarrow H_i/H_{i-1}$; luego H'_i/H'_{i-1} es abeliano, y H es resoluble.

Si $H \triangleleft G$, y $\pi: G \rightarrow G/H$ es la proyección canónica, y ponemos $\bar{H}_i = \pi(H_i)$, entonces $\bar{H}_{i-1} \triangleleft \bar{H}_i$ y \bar{H}_i/\bar{H}_{i-1} es un cociente de H_i/H_{i-1} ; luego abeliano, y G/H es resoluble.

Recíprocamente, si tenemos resoluciones de H y G/H ,

$$\begin{aligned} 1 &= H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \dots \triangleleft H_{n-1} \triangleleft H_n = H, \\ 1 &= \bar{H}_0 \triangleleft \bar{H}_1 \triangleleft \dots \triangleleft \bar{H}_{d-1} \triangleleft \bar{H}_d = G/H, \end{aligned}$$

entonces $1 \triangleleft H_1 \dots \triangleleft H_n = \pi^{-1}(\bar{H}_0) \triangleleft \pi^{-1}(\bar{H}_1) \dots \triangleleft \pi^{-1}(\bar{H}_d) = G$ es una resolución de G .

Teorema de Independencia: Si A es una k -álgebra finita y L es una extensión de k , los puntos $p_i: A \rightarrow L$ son linealmente independientes sobre L .

Demostración: Cuando $L = k$, se sigue de la descomposición $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_r$ en álgebras locales, porque los puntos son ciertas proyecciones $A_i \rightarrow k$.

El caso general se reduce al anterior considerando los puntos racionales $p_i \otimes 1: A_L \rightarrow L$.

Teorema: Si k contiene las raíces n -ésimas de la unidad, y $\text{car } k$ no divide a n ,

1. Toda extensión $k(\alpha)$, $\alpha^n \in k$, es cíclica, de grado un divisor d de n , y $\alpha^d \in k$.
2. Toda extensión cíclica $k \rightarrow L$ de grado n es $L = k(\sqrt[n]{a})$, donde $a \in k$.

Demostración: (1) $k(\alpha)$ es de Galois porque es el cuerpo de descomposición del polinomio separable $x^n - a$, $a = \alpha^n$. Si $\tau \in G$, entonces $(\tau\alpha)^n = \tau(\alpha^n) = a$, y $\tau(\alpha) = u\alpha$, $u \in \mu_n$.

Obtenemos así un morfismo inyectivo $G \hookrightarrow \mu_n$. Al ser μ_n cíclico de orden n , vemos que G es cíclico de orden un divisor d de n . Si σ es un generador de G , entonces $\sigma(\alpha) = v\alpha$, donde $v^d = 1$. Luego $\alpha^d \in k$ porque $\sigma(\alpha^d) = (\sigma\alpha)^d = (v\alpha)^d = \alpha^d$.

(2) Sea $G = \langle \sigma \rangle$ el grupo de Galois. Como $\sigma^n = \text{Id}$, el polinomio anulador de σ es $x^n - 1$ por el teorema anterior; luego ε_n es un valor propio de σ y existe $0 \neq \alpha \in L$ tal que $\sigma(\alpha) = \varepsilon_n \alpha$.

Ahora $\alpha^n \in k$, porque $\sigma(\alpha^n) = (\varepsilon_n \alpha)^n = \alpha^n$, y $L = k(\alpha)$ porque $\sigma^i(\alpha) = \varepsilon_n^i \alpha \neq \alpha$, $i < n$.

Lema: Sea $k \rightarrow L$ una extensión de Galois de grupo G . Si $k \rightarrow E$ es una extensión de Galois abeliana, entonces $\text{Aut}(EL/E) = H \triangleleft G$, y G/H es abeliano.

Demostración: $E \cap L$ es una extensión abeliana de k , y define un subgrupo $H \triangleleft G$ tal que G/H es abeliano. El teorema de los irracionales naturales afirma que $H = \text{Aut}(EL/E)$.

Teorema: Un polinomio $P \in k[x]$ es resoluble por radicales si y sólo si su grupo de Galois sobre k es resoluble. (car $k = 0$).

Demostración: Sea L el cuerpo de descomposición de P , y $G = \text{Aut}(L/k)$.

Si $L \rightarrow k(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, donde $\alpha_i^{n_i} \in k(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})$, ponemos $E_i = k(\varepsilon_n, \alpha_1, \dots, \alpha_i)$, donde $n = \text{m.c.m.}(n_1, \dots, n_r)$. Ahora $E_0 = k(\varepsilon_n)$ es una extensión abeliana de k (p. 88), y E_i es una extensión cíclica de E_{i-1} . Si H_i es el grupo de Galois de $E_i L$ sobre E_i ,

$$\begin{array}{ccccccc} L & \longrightarrow & E_0 L & \longrightarrow & E_1 L & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & E_r L \\ \uparrow G & & \uparrow H_0 & & \uparrow H_1 & & & & \uparrow H_r \\ k & \longrightarrow & E_0 & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & E_r \end{array}$$

el lema anterior afirma que $H_r \triangleleft \dots \triangleleft H_0 \triangleleft G$ y los cocientes sucesivos son abelianos.

Como $H_r = 1$, porque $L \subset E_r$, vemos que G es resoluble.

Recíprocamente, si G es resoluble de orden n , por el teorema de los irracionales naturales el grupo de Galois de $L(\varepsilon_n)$ sobre $k(\varepsilon_n)$ es un subgrupo H de G ; luego resoluble, y admite subgrupos $1 = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \dots \triangleleft H_r = H$, donde H_i/H_{i-1} es cíclico, de orden un divisor de n .

Luego $L(\varepsilon_n)$ es una extensión de $k(\varepsilon_n)$ por radicales, y P es resoluble por radicales. q.e.d.

1. Los grupos S_2 y S_3 son resolubles, y una resolución de S_4 es $1 \triangleleft V \triangleleft A_4 \triangleleft S_4$, donde $V = \{\text{Id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. Por el contrario, S_n no es resoluble cuando $n \geq 5$, porque todo 3-ciclo es el conmutador de dos 3-ciclos,

$$(ijk) = \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}, \quad \sigma = (ijl), \quad \tau = (ikm),$$

y si existiera una resolución de S_n , al contener H_{i-1} el conmutador de los elementos de H_i , se llegaría al absurdo de que $H_0 = 1$ contiene todos los 3-ciclos. Las ecuaciones de grado ≤ 4 siempre son resolubles; pero las de grado 5 con grupo S_5 no (existen, p. 88).

2. Cuando el grupo de Galois es resoluble y de orden $p_1 p_2 \dots p_r$ (p_i primos), la demostración anterior prueba que la ecuación se resuelve con r radicales $\sqrt[p_1]{}, \dots, \sqrt[p_r]{}$ y con raíces de la unidad de órdenes p_1, \dots, p_r . Como $|S_3| = 2 \cdot 3$ y $|S_4| = 2^3 \cdot 3$, las cúbicas se resuelven con una raíz cuadrada y otra cúbica; y las cuárticas con tres raíces cuadradas y una cúbica.

3.7.5. Álgebras Inseparables

Los elementos separables de una k -álgebra finita A forman una subálgebra $\pi_0^k(A)$.

El **grado de separabilidad** de A sobre k es $[A : k]_s = [\pi_0^k(A) : k]$.

Teorema: *La subálgebra separable maximal es estable por cambio del cuerpo base:*

$$\pi_0^k(A) \otimes_k K = \pi_0^K(A \otimes_k K).$$

Demostración: El núcleo A_1 de la diferencial $d: A \rightarrow \Omega_{A/k}$ contiene a $\pi_0^k(A)$, así que $\pi_0^k(A) \subseteq \bigcap_n A_n$, donde $A_{n+1} = (A_n)_1$. Cuando se dé una igualdad $A_{n+1} = A_n$, el álgebra A_n es separable (p. 81) y $A_n \subseteq \pi_0^k(A)$; luego $\pi_0^k(A) = \bigcap_n A_n$. Ahora bien, la subálgebra $\bigcap_n A_n$ es estable por cambios de base al serlo el módulo de diferenciales (p. 78).

Corolario: $|\text{Hom}_{k\text{-alg}}(A, K)| \leq [A : k]_s$, y sólo es igual cuando A_K es racional.

$|\text{Aut}(L/k)| \leq [L : k]_s$, y sólo es igual cuando $L \otimes_k L$ es racional (L es **normal**).

Demostración: Por el teorema anterior podemos suponer que $k = K$.

Consideremos las componentes racionales $B = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$ de A . Como un álgebra separable es reducida, $\pi_0^k(B) \hookrightarrow B/\text{rad } B = k^n$, y como $k^n \subseteq \pi_0^k(B)$, vemos que $\pi_0^k(B) = k^n$.

El número de puntos racionales de A es $\leq [A : k]_s$, y sólo es igual cuando A es racional.

Ejemplo: El cuerpo de descomposición L de una k -álgebra finita A es un cociente de $A^{\otimes m}$ y, al ser A_L racional, también $L \otimes_k L$ es racional: L es una extensión normal de k .

Corolario: $[L : k]_s = [L : K]_s [K : k]_s$.

Demostración: L y K son racionales sobre una extensión E , de modo que

$$[L : k]_s = |\text{Hom}_{k\text{-alg}}(L, E)| \quad , \quad [K : k]_s = |\text{Hom}_{k\text{-alg}}(K, E)|.$$

Por la fórmula de los puntos la aplicación $\text{Hom}_{k\text{-alg}}(L, E) \rightarrow \text{Hom}_{k\text{-alg}}(K, E)$ es epiyectiva (p. 79), y la fibra de cualquier punto es $\text{Hom}_{K\text{-alg}}(L, E)$, cuyo cardinal es $[L : K]_s$ porque $L \otimes_K E$ es una E -álgebra racional (es un cociente de $L \otimes_k E$).

Corolario: *El funtor π_0^k conserva epimorfismos.*

Demostración: Cambiando de base podemos suponer que A es local y racional.

Corolario: *A es puramente inseparable si verifica las condiciones equivalentes*

1. A es geoméricamente local (A_K es local para toda extensión K).
2. Existe una extensión L tal que A_L es local y racional.
3. $\pi_0^k(A) = k$ (es decir, $[A : k]_s = 1$).

Demostración: $(1 \Rightarrow 2)$ A_L es racional para alguna extensión L ; luego local y racional.

$(2 \Rightarrow 3)$ Si A_L es local y racional, $\pi_0^k(A) \otimes_k L = \pi_0^L(A_L) = L$; luego $\pi_0^k(A) = k$.

$(3 \Rightarrow 1)$ Como $\pi_0^K(A_K) = \pi_0^k(A) \otimes_k K = K$, se concluye por el siguiente lema.

Lema: *A es local si y sólo si $\pi_0^k(A)$ es un cuerpo.*

Demostración: Si A es local, $\pi_0^k(A)$ también (p. 79); luego es cuerpo al ser reducida.

Si $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots$ no es local, $\pi_0^k(A) = \pi_0^k(A_1) \oplus \pi_0^k(A_2) \oplus \dots$ no es íntegra.

Corolario: Si G es el grupo de automorfismos de una extensión normal $k \rightarrow L$, entonces $k \rightarrow L^G$ es puramente inseparable (y $L^G \rightarrow L$ es de Galois por Artin).

Demostración: Como $[L : k]_s = |G| = [L : L^G]$, se sigue que $[L^G : k]_s = 1$.

Ejemplo: Un polinomio Q es puramente inseparable si lo es la k -álgebra $k[x]/(Q)$; es decir, si todas sus raíces son iguales. Así, $x^{p^n} - a$ es puramente inseparable cuando $\text{car } k = p$, pues si α es una raíz, $\alpha^{p^n} = a$, y $x^{p^n} - a = x^{p^n} - \alpha^{p^n} = (x - \alpha)^{p^n}$.

Corolario: $p = \text{car } k$. Si una extensión $k \rightarrow L$ es puramente inseparable, todo elemento $\alpha \in L$ es raíz de un polinomio $x^{p^n} - a \in k[x]$.

Demostración: Sea Q_α el polinomio irreducible de α sobre k , y sea $q = p^n$ la mayor potencia de p tal que $Q_\alpha(x) = Q(x^q)$ para algún polinomio $Q(x)$, que es separable al ser irreducible y $Q' \neq 0$. Ahora $a = \alpha^q \in \pi_0^k(L) = k$, y α es raíz de $x^q - a$. q.e.d.

De hecho $Q_\alpha = x^q - a$, porque $\text{gr } Q_\alpha(x) = \text{gr } Q(x^q) \geq q$.

Capítulo 4

Geometría II

4.1. El Espacio Proyectivo

El **espacio proyectivo** $\mathbb{P}(E)$ de un espacio vectorial E está formado por los subespacios vectoriales de dimensión 1. Tenemos una proyección (definida cuando $e \neq 0$)

$$\pi: E \longrightarrow \mathbb{P}(E), \quad \pi(e) = \langle e \rangle.$$

La **dimensión** de $\mathbb{P}(E)$ es $n = \dim E - 1$, y ponemos $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(E)$.

Las **subvariedades lineales** de $\mathbb{P}(E)$ son los subconjuntos $X = \pi(V) = \mathbb{P}(V)$, donde V es un subespacio vectorial.

La dimensión de X es $\dim X = \dim V - 1$, y su **codimensión** es

$$\text{codim } X = \dim \mathbb{P}(E) - \dim X = \dim E - \dim V.$$

Los **hiperplanos**, son las subvariedades lineales de codimensión 1, y la única subvariedad de dimensión -1 es el vacío $\emptyset = \pi(0)$.

Como $V = \bigcup_{e \in V} \langle e \rangle$, tenemos un isomorfismo de retículos

$$\left[\begin{array}{c} \text{Subespacios} \\ \text{vectoriales de } E \end{array} \right] \xrightarrow{\pi} \left[\begin{array}{c} \text{Subvariedades} \\ \text{lineales de } \mathbb{P}(E) \end{array} \right]$$

así que el supremo de $X = \pi(V)$, $Y = \pi(W)$ es $X + Y = \pi(V + W)$; luego (p. 38)

$$\dim(X + Y) = \dim X + \dim Y - \dim(X \cap Y).$$

Por ejemplo, en \mathbb{P}_2 dos rectas distintas siempre se cortan en un único punto. En general, como $\dim(X + Y) \leq \dim \mathbb{P}(E)$, tenemos que $\text{codim}(X \cap Y) \leq \text{codim } X + \text{codim } Y$.

Teorema: *Los puntos de $\mathbb{P}(E/V)$ se corresponden con las subvariedades lineales de dimensión $1 + \dim X$ que pasan por $X = \pi(V)$, y tenemos un isomorfismo de retículos*

$$\left[\begin{array}{c} \text{Subvariedades lineales} \\ \text{de } \mathbb{P}(E) \text{ que pasan por } X \end{array} \right] \xrightarrow{\sim} \left[\begin{array}{c} \text{Subvariedades} \\ \text{lineales de } \mathbb{P}(E/V) \end{array} \right].$$

Demostración: $\dim W/V = \dim W - \dim V$, y el isomorfismo de la p. 37.

Teorema: *Tenemos un anti-isomorfismo de retículos*

$$\left[\begin{array}{c} \text{Subvariedades} \\ \text{lineales de } \mathbb{P}(E) \end{array} \right] \xrightarrow{\sim} \left[\begin{array}{c} \text{Subvariedades} \\ \text{lineales de } \mathbb{P}(E^*) \end{array} \right], \quad \pi(V) \mapsto \pi(V^\circ),$$

que transforma subvariedades lineales de codimensión d en subvariedades lineales de dimensión $d - 1$. En particular, los puntos del espacio proyectivo **dual** $\mathbb{P}(E^*)$ se corresponden con los hiperplanos de $\mathbb{P}(E)$.

Demostración: $\dim V^\circ = \dim E - \dim V$, y el isomorfismo de la p. 42.

Principio de Dualidad: Todo conjunto ordenado (X, \leq) define un orden **dual** $X^* = (X, \leq^*)$, donde ponemos $x \leq^* y$ cuando $y \leq x$. Como $\dim \mathbb{P}(E^*) = \dim \mathbb{P}(E)$, el dual de un retículo proyectivo de dimensión n (i.e., isomorfo al retículo de subvariedades lineales de un espacio proyectivo de dimensión n) es a su vez un retículo proyectivo de igual dimensión. Así, todo enunciado sobre retículos proyectivos tiene un enunciado dual equivalente. El enunciado dual de “por dos puntos distintos de un plano proyectivo pasa una única recta”, es “en un plano proyectivo, dos rectas distintas se cortan en un único punto”, y la figura dual de un triángulo en un plano (tres puntos no alineados) vuelve a ser un triángulo (tres rectas no concurrentes).

Teorema de Desargues: Si dos triángulos ABC y $A'B'C'$ de un plano se corresponden de modo que la rectas que unen vértices homólogos concurren en un punto P , entonces los lados homólogos se cortan en tres puntos alineados L, M, N .

Demostración: Si p es un representante de P , existen representantes a, b, c, a', b', c' de los puntos A, B, C, A', B', C' tales que $p = a + a' = b + b' = c + c'$. Por tanto

$$\begin{aligned} l &= a - b = b' - a' \text{ es un representante de } L, \\ m &= a - c = c' - a' \text{ es un representante de } M, \\ n &= b - c = c' - b' \text{ es un representante de } N, \end{aligned}$$

de modo que $l - m + n = 0$, y los puntos L, M, N están alineados.

Lema: Dados $n + 2$ puntos $(P_0, \dots, P_n; U)$ en \mathbb{P}_n , si no hay $n + 1$ contenidos en un hiperplano, existe una base e_0, \dots, e_n de E , única salvo un factor común, tal que

$$P_0 = \pi(e_0), \dots, P_n = \pi(e_n), U = \pi(e_0 + \dots + e_n).$$

Demostración: En cuanto a la *existencia*, si ponemos $P_i = \pi(v_i)$, los vectores v_0, \dots, v_n generan E porque $P_0 + \dots + P_n = \mathbb{P}_n$. Ahora, si $U = \pi(\lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n)$, tenemos que $\lambda_i \neq 0$, porque $P_0 + \dots + \widehat{P}_i + \dots + U = \mathbb{P}_n$, y basta poner $e_i = \lambda_i v_i$.

En cuanto a la *unicidad*, si tenemos otra base e'_0, \dots, e'_n , y

$$e'_0 = \lambda_0 e_0, \dots, e'_n = \lambda_n e_n, e'_0 + \dots + e'_n = \mu(e_0 + \dots + e_n),$$

entonces $\lambda_0 = \mu, \dots, \lambda_n = \mu$, y el factor de proporcionalidad es común.

Definiciones: Un **sistema de referencia proyectivo** en \mathbb{P}_n es una sucesión de $n + 2$ puntos $(P_0, \dots, P_n; U)$ en los que no hay $n + 1$ contenidos en un hiperplano. Si $P = \pi(e)$, y en la base normalizada del lema $e = x_0 e_0 + \dots + x_n e_n$, las **coordenadas homogéneas** de P son (x_0, \dots, x_n) . Están bien definidas salvo un factor común, y no son todas nulas.

La **razón doble** de cuatro puntos (distintos) de una recta proyectiva es

$$(P_1, P_2; P_3, P_4) = \frac{x_0}{x_1} \in k,$$

donde $P_4 = (x_0, x_1)$ en el sistema de referencia $(P_1, P_2; P_3)$.

La razón doble define una biyección $\mathbb{P}_1 - \{P_1, P_2, P_3\} \leftrightarrow k - \{0, 1\}$, y el **parámetro proyectivo** de $P = (x_0, x_1)$ es $\theta = \frac{x_0}{x_1}$, lo que define una biyección $\theta: \mathbb{P}_1 \leftrightarrow k \cup \{\infty\}$.

Una aplicación $\tau: \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}(E')$ es una **proyectividad** si $\tau = \pi(T)$ para algún isomorfismo $T: E \rightarrow E'$, en el sentido de que es conmutativo el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & E' \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \mathbb{P}(E) & \xrightarrow{\tau} & \mathbb{P}(E') \end{array}$$

de modo que τ induce un isomorfismo del retículo de subvariedades lineales de $\mathbb{P}(E)$ con el de $\mathbb{P}(E')$, y los teoremas de la Geometría Proyectiva son invariantes por proyectividades (un enunciado y su transformado por una proyectividad son equivalentes).

Las proyectividades $\mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}(E)$ forman un grupo $PGL(E)$, y las **homografías** son las proyectividades $\mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$. Las ecuaciones de una proyectividad $\mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}_n$ son $X' = AX$, donde A es una matriz invertible de $n + 1$ filas y columnas, y las de una homografía son

$$\begin{cases} x'_0 = ax_0 + bx_1 \\ x'_1 = cx_0 + dx_1 \end{cases}, \quad \theta' = \frac{a\theta + b}{c\theta + d} \quad ; \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Lema: *El representante $T: E \rightarrow E'$ de una proyectividad $\tau: \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}(E')$ está bien definido, salvo un factor no nulo.*

Demostración: Si $\pi(T) = \pi(\bar{T})$, y ponemos $S = T^{-1}\bar{T}$, entonces $\pi(S): \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}(E)$ es la identidad, y el lema anterior afirma que $S = \lambda \text{Id}$, y $\bar{T} = \lambda T$.

Teorema: *Dados sistemas de referencia $(P_0, \dots, P_n; U)$ y $(P'_0, \dots, P'_n; U')$ en \mathbb{P}_n , existe una única proyectividad $\mathbb{P}_n \xrightarrow{\tau} \mathbb{P}_n$ tal que $P'_i = \tau P_i$, $U' = \tau U$.*

Demostración: Dadas dos bases de E , existe un único automorfismo $T: E \rightarrow E$ que transforma la primera en la segunda.

Corolario: *La razón doble clasifica proyectivamente las cuaternas de puntos alineados.*

Demostración: Si $(P_1, P_2; P_3, P_4) = (P'_1, P'_2; P'_3, P'_4)$, y tomamos una homografía τ que transforme P_1, P_2, P_3 en P'_1, P'_2, P'_3 , tenemos que $P'_4 = \tau P_4$ porque

$$(P'_1, P'_2; P'_3, P'_4) = (P_1, P_2; P_3, P_4) = (\tau P_1, \tau P_2; \tau P_3, \tau P_4) = (P'_1, P'_2; P'_3, \tau P_4).$$

Corolario: *Si θ_i denota el parámetro proyectivo de P_i , la razón doble es*

$$(P_1, P_2; P_3, P_4) = \frac{(\theta_1 - \theta_3)(\theta_2 - \theta_4)}{(\theta_1 - \theta_4)(\theta_2 - \theta_3)}.$$

Demostración: La homografía τ que transforma P_1, P_2, P_3 en $\infty, 0, 1$ es

$$\tau(\theta) = \frac{(\theta_1 - \theta_3)(\theta_2 - \theta)}{(\theta_1 - \theta)(\theta_2 - \theta_3)}.$$

Corolario: *La razón doble es invariante por el grupo de Klein,*

$$(P_1, P_2; P_3, P_4) = (P_2, P_1; P_4, P_3) = (P_3, P_4; P_1, P_2) = (P_4, P_3; P_2, P_1).$$

Una cuaterna alineada admite 24 ordenaciones; pero como la razón doble es invariante por $V = \{\text{Id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$, a lo más hay 6 razones dobles diferentes

$$\begin{aligned} (P_1, P_2; P_3, P_4) &= \lambda & , & & (P_1, P_3; P_2, P_4) &= 1 - \lambda & , & & (P_2, P_1; P_3, P_4) &= \frac{1}{\lambda} \\ (P_2, P_3; P_1, P_4) &= 1 - \frac{1}{\lambda} & , & & (P_3, P_1; P_2, P_4) &= \frac{1}{1-\lambda} & , & & (P_3, P_2; P_1, P_4) &= \frac{\lambda}{\lambda-1} \end{aligned}$$

y, cuando $(P_1, P_2; P_3, P_4) = -1$, decimos que P_4 es el **conjugado armónico** de P_3 respecto del par P_1, P_2 , en cuyo caso también $(P_2, P_1; P_3, P_4) = (P_1, P_2; P_4, P_3) = -1$.

4.2. El Espacio Afín

Un **espacio afín** de dimensión n es un conjunto \mathbb{A}_n (los **puntos**) donde actúa de modo fiel y transitivo un espacio vectorial V de dimensión n (los **vectores libres**): si p, q son puntos, entonces $q = p + e$ para un único vector e .

Una aplicación $\phi: \mathbb{A}_n \rightarrow \mathbb{A}'_m$ es **afín** cuando $\phi(p + e) = \phi(p) + \vec{\phi}(e)$ para alguna aplicación lineal $\vec{\phi}: V \rightarrow V'$. Las **afinidades** son las aplicaciones afines biyectivas ($\vec{\phi}$ es isomorfismo).

Lema: *Dados puntos $p \in \mathbb{A}_n$, $p' \in \mathbb{A}'_m$, y una aplicación lineal $h: V \rightarrow V'$, existe una única aplicación afín $\phi: \mathbb{A}_n \rightarrow \mathbb{A}'_m$ tal que $p' = \phi(p)$, $h = \vec{\phi}$.*

Demostración: La única aplicación posible, $\phi(p + e) = p' + h(e)$, es afín,

$$\phi(p + e + v) = p' + h(e + v) = p' + h(e) + h(v) = \phi(p + e) + h(v).$$

Definición: Las funciones afines $f: \mathbb{A}_n \rightarrow k$ forman un espacio vectorial F de dimensión $n + 1$.

Tenemos una aplicación lineal $V \hookrightarrow E = F^*$, $v(f) = \vec{f}(v)$, que permite identificar V con $\{\omega \in E: \omega(1) = 0\}$, y una aplicación afín $\mathbb{A}_n \hookrightarrow E$, $x(f) = f(x)$, que identifica \mathbb{A}_n con la subvariedad lineal $\{\omega \in E: \omega(1) = 1\}$, de dirección V .

Proyectivizando, tenemos una aplicación $\mathbb{A}_n \hookrightarrow \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(E)$ que identifica \mathbb{A}_n con el complementario en \mathbb{P}_n del **hiperplano del infinito**, o de puntos impropios, $H = \pi(V)$.

Cada afinidad $\phi: \mathbb{A}_n \rightarrow \mathbb{A}_n$ induce un isomorfismo lineal $\phi^*: F \rightarrow F$, y por tanto un isomorfismo $\phi: E \rightarrow E$, y $\phi(V) = V$. Luego induce una proyectividad $\tau: \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}_n$, que deja invariante el hiperplano del infinito, y coincide con ϕ en la parte afín.

Este representante normalizado ϕ de la proyectividad τ induce la identidad en E/V .

Teorema: *El grupo de las afinidades de \mathbb{A}_n es canónicamente isomorfo al grupo de las proyectividades de \mathbb{P}_n que dejan invariante el hiperplano del infinito.*

Demostración: Si una proyectividad $\tau: \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}_n$ deja invariante $H = \pi(V)$, admite un único representante lineal $T: E \rightarrow E$ tal que $T(\mathbb{A}_n) = \mathbb{A}_n$, y su restricción $\phi = T|_{\mathbb{A}_n}: \mathbb{A}_n \rightarrow \mathbb{A}_n$ es una afinidad, que induce la proyectividad τ porque ambas coinciden fuera de H , que contiene sistemas de referencia proyectivos. q.e.d.

Klein, en el *Programa de Erlangen*, entiende la Geometría como la acción de un grupo G en un conjunto. Los conceptos son los invariantes por la acción del grupo, los enunciados sus relaciones, y los teoremas los enunciados ciertos. La Geometría Proyectiva viene definida por la acción del grupo de las proyectividades, y la Geometría Afín por el grupo de las afinidades, y el teorema anterior muestra que *la Geometría Afín es la geometría de un espacio proyectivo con un hiperplano prefijado H , llamado del infinito*.

Un sistema de referencia proyectivo $(P_0, \dots, P_n; U)$ es **afín** cuando $P_1 + \dots + P_n$ es el hiperplano del infinito. El **origen** es P_0 , las rectas $P_0 + P_i$ son los **ejes**, y U es el **punto unidad**.

En coordenadas homogéneas la ecuación del infinito es $x_0 = 0$, y todo punto propio tiene unas **coordenadas afines** $y_1 = \frac{x_1}{x_0}, \dots, y_n = \frac{x_n}{x_0}$ bien definidas.

Las **subvariedades afines** son las partes afines de las subvariedades lineales y, salvo el vacío, se corresponden con las subvariedades lineales de \mathbb{P}_n no contenidas en H .

Dos subvariedades afines son **paralelas** si sus zonas del infinito son incidentes.

La **razón simple** (A, B, C) de tres puntos propios alineados es la razón doble $(A, B; C, P)$ con el punto impropio de la recta ABC , y C es el **punto medio** de A y B cuando $(A, B, C) = -1$.

Las afinidades que dejan fijos todos los puntos del infinito son las **homotecias** y **traslaciones**, según que dejen fijo un punto propio o no.

Definición: Una **transformación semilineal** de un k -espacio vectorial E en un k' -espacio vectorial E' es un isomorfismo de grupos $T: E \rightarrow E'$, junto con un isomorfismo¹ de anillos $\sigma: k \rightarrow k'$, tal que $T(\lambda e) = \sigma(\lambda)T(e)$. Una aplicación biyectiva $\tau: \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}(E')$ es una **colineación** si induce un isomorfismo entre los retículos de subvariedades lineales.

La proyectivización de una transformación semilineal siempre es una colineación, y el **Teorema Fundamental de la Geometría Projectiva** afirma que la estructura de los espacios proyectivos de dimensión ≥ 2 está definida por el retículo de subvariedades lineales² y que el grupo de sus automorfismos es el grupo de las colineaciones $\mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}(E)$:

Teorema: Toda colineación $\tau: \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}(E')$ entre espacios proyectivos de dimensión $n \geq 2$ viene inducida por una transformación semilineal $(\sigma, T): (k, E) \rightarrow (k', E')$.

Demostración: Pongamos $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(E)$, $\mathbb{P}'_n = \mathbb{P}(E')$.

Fijemos una referencia $(P_0, \dots, P_n; U)$ en \mathbb{P}_n , la referencia $(P'_0, \dots, P'_n; U')$ en \mathbb{P}'_n que se obtiene con τ , y sus respectivas bases normalizadas e_0, \dots, e_n , y e'_0, \dots, e'_n . Consideremos las estructuras afines definidas por los hiperplanos $H = P_1 + \dots + P_n$, $H' = P'_1 + \dots + P'_n$ (y sus sistemas de coordenadas afines), de modo que τ conserva el paralelismo.

1. Existe una biyección $\sigma: k \rightarrow k'$ tal que $\tau(y_1, \dots, y_n) = (\sigma(y_1), \dots, \sigma(y_n))$.

Como τ define una biyección del eje $L_i = P_0 + P_i$ con el eje $L'_i = P'_0 + P'_i$, y conserva el paralelismo, tenemos que $\tau(y_1, \dots, y_n) = (\sigma_1(y_1), \dots, \sigma_n(y_n))$ para ciertas biyecciones $\sigma_i: k \rightarrow k'$. Además, como τ transforma la diagonal del plano $\Pi_{ij} = L_i + L_j$ en la del plano $\Pi'_{ij} = L'_i + L'_j$, vemos que $\sigma_i = \sigma_j$.

2. $\sigma(0) = 0$, porque $\tau(P_0) = P'_0$; y $\sigma(1) = 1$, porque $\tau(U) = U'$.

3. σ conserva el producto: $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$.

Como la recta (x, ax) del plano Π_{12} pasa por el origen, la recta $(\sigma(x), \sigma(ax))$ también pasa por el origen; luego $\sigma(ax) = c\sigma(x)$ para una constante c que, para $x = 1$, vale $\sigma(a)$. Es decir, $\sigma(ax) = \sigma(a)\sigma(x)$.

4. σ conserva la suma: $\sigma(a + b) = \sigma(a) + \sigma(b)$.

Como la recta $(x, x+a)$ es paralela a la diagonal de Π_{12} , la recta $(\sigma(x), \sigma(x+a))$ es paralela a la diagonal de Π'_{12} ; luego $\sigma(x+a) = \sigma(x) + c$ para una constante c que, para $x = 0$, vale $\sigma(a)$. Es decir, $\sigma(x+a) = \sigma(x) + \sigma(a)$.

¹Cuando $k = k' = \mathbb{R}$, las transformaciones semilineales son lineales, porque el único automorfismo σ del cuerpo \mathbb{R} es la identidad. En efecto, $\sigma(\mathbb{R}_+) = \sigma(\mathbb{R}^{*2}) = \mathbb{R}^{*2} = \mathbb{R}_+$, luego σ conserva el orden y es continuo. Como σ es la identidad en \mathbb{Q} , tenemos que $\sigma = \text{Id}$.

²mientras que la aclaración de la estructura de la recta proyectiva real ha de posponerse hasta el curso de Geometría Algebraica I.

5. $T(\sum x_i e_i) = \sum \sigma(x_i) e'_i$, es semilineal y define una colineación $\tau_1: \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}'_n$ que coincide con τ fuera de H , y $\bar{\tau} = \tau_1^{-1} \tau$ es la identidad fuera de H . Si $P \in H$, tomamos dos rectas R_1, R_2 que corten a H en P . Como cada una tiene dos puntos fuera de H , queda invariante por $\bar{\tau}$, y vemos que $\bar{\tau}(P) = P$. Es decir, $\tau = \tau_1$.

4.3. Métricas

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo k , car $k \neq 2$.

Una **métrica** (simétrica) es un tensor covariante de orden 2 simétrico T_2 , y pondremos

$$e \cdot v = T_2(e, v) = \phi(e)(v),$$

donde $\phi: E \rightarrow E^*$ es la **polaridad** de T_2 , y diremos que (E, T_2) es un espacio vectorial **métrico**. Una aplicación lineal $f: (E, T_2) \rightarrow (\bar{E}, \bar{T}_2)$ es un **morfismo métrico** cuando $e \cdot v = f(e) \cdot f(v)$, y una **isometría** es un isomorfismo lineal métrico.

Dos vectores son **ortogonales** si $e \cdot v = 0$, y un vector no nulo es **isótropo** si $e \cdot e = 0$.

Los vectores ortogonales a un subespacio vectorial V forman un subespacio vectorial V^\perp , llamado **ortogonal** de V , y está claro que $V \subseteq V^{\perp\perp}$. El **radical** es el núcleo de la polaridad, $\text{rad } E = E^\perp$ (por ejemplo, $\text{rad } V = V^\perp \cap V$), y el **rango** es $\dim(E/\text{rad } E)$.

El espacio E es **no singular** cuando la polaridad es un isomorfismo, $\text{rad } E = 0$, y **totalmente isótropo** cuando la polaridad es nula, $\text{rad } E = E$.

Un espacio es **elíptico** si carece de vectores isótropos (en particular es no singular).

La **suma ortogonal** $E \perp E'$ es la suma directa $E \oplus E'$, con la métrica

$$(e_1 + e'_1) \cdot (e_2 + e'_2) = e_1 \cdot e_2 + e'_1 \cdot e'_2,$$

y es claro que $\text{rad}(E \perp E') = (\text{rad } E) \perp (\text{rad } E')$.

Una métrica T_2 es **proyectable** por un epimorfismo $p: E \rightarrow \bar{E}$ si existe una métrica \bar{T}_2 en \bar{E} , necesariamente única, tal que p es morfismo métrico.

Teorema: Una métrica es proyectable si y sólo si $\text{Ker } p \subseteq \text{rad } E$.

Demostración: Si es proyectable y $p(e) = 0$, entonces $e \cdot v = p(e) \cdot p(v) = 0$, y $e \in \text{rad } E$.

Recíprocamente, si $\text{Ker } p \subseteq \text{rad } E$, la métrica $p(e) \cdot p(v) = e \cdot v$ está bien definida, porque si $e' = e + u \in e + \text{rad } E$, entonces $e' \cdot v = e \cdot v + u \cdot v = e \cdot v$.

Corolario: Toda métrica proyecta en $E/\text{rad } E$, y la proyección es no singular.

Teorema: E descompone, de modo único salvo isometrías, en suma ortogonal de un espacio totalmente isótropo y un espacio no singular,

$$E = (\text{rad } E) \perp (E/\text{rad } E).$$

Demostración: Si $E = (\text{rad } E) \oplus V$, entonces $E = (\text{rad } E) \perp V$, y V es no singular.

Además, si $E = T \perp F$, donde T es totalmente isótropo y F es no singular, entonces $\text{rad } E = (\text{rad } T) \perp (\text{rad } F) = T$, y $\pi: F \rightarrow E/\text{rad } E = E/T$ es una isometría.

Lema: Si E es no singular, entonces $\dim V^\perp = \dim E - \dim V$, y $V = V^{\perp\perp}$.

Si además V es no singular, $E = V \perp V^\perp$.

Demostración: Componiendo la polaridad $E \xrightarrow{\sim} E^*$ con el epimorfismo $E^* \rightarrow V^*$, tenemos una sucesión exacta $0 \rightarrow V^\perp \rightarrow E \rightarrow V^* \rightarrow 0$ que lo aclara todo.

Corolario: Sea E no singular. Si V es un subespacio no singular, entonces existe una isometría $s_V: E \rightarrow E$, la **simetría** respecto de V , que en V es la identidad y en V^\perp es $-\text{Id}$.

Definición: Un plano es **hiperbólico** si es no singular y tiene un vector isótropo.

Un **espacio hiperbólico** es una suma ortogonal de planos hiperbólicos.

Dos vectores isótropos e, e' con $e \cdot e' = 1$ forman un **par hiperbólico**, de modo que el subespacio (e, e') que generan es un plano hiperbólico.

Lema: Sea E no singular. Toda base e_1, \dots, e_i de un subespacio totalmente isótropo T se puede ampliar hasta obtener i pares hiperbólicos mutuamente ortogonales, así que T está contenido en un espacio hiperbólico $(e_1, e'_1) \perp \dots \perp (e_i, e'_i)$ de dimensión doble.

Demostración: Por inducción sobre i . Por el lema anterior, existe un vector v ortogonal a e_2, \dots, e_i , y tal que $e_1 \cdot v = 1$, y poniendo $e'_1 = v - \frac{1}{2}(v^2)e_1$, forma además un par hiperbólico con e_1 . Por inducción, en $(e_1, e'_1)^\perp$ tenemos vectores e'_2, \dots, e'_i tales que los pares e_j, e'_j son hiperbólicos y mutuamente ortogonales.

Corolario: Todo plano hiperbólico tiene un par hiperbólico, y todos los espacios hiperbólicos de igual dimensión son isométricos.

Teorema de Witt: Sea E no singular. Toda isometría $\sigma: V \rightarrow V'$ entre subespacios vectoriales puede extenderse a una isometría de E .

Demostración: Pongamos $V = \text{rad } V \perp F$, y ampliemos una base de $\text{rad } V$ en F^\perp hasta obtener pares hiperbólicos mutuamente ortogonales, que generan un espacio hiperbólico $H \subseteq F^\perp$.

Ahora $V' = \text{rad } V' \perp F'$, con $F' = \sigma F$, y ampliando igualmente una base de $\text{rad } V'$ en F'^\perp hasta obtener un espacio hiperbólico $H' \subseteq F'^\perp$, vemos que podemos extender σ a una isometría $H \perp F \rightarrow H' \perp F'$; y podemos suponer que V es no singular.

El caso $V = V'$ se resuelve extendiendo por la identidad en V^\perp .

Si $V = \langle e \rangle$, entonces $V' = \langle e' \rangle$, donde $e' = \sigma(e)$. Como el plano $V + V'$ no es totalmente isótropo, y los vectores $e' + e, e' - e$ son no nulos y ortogonales, alguno es no isótropo.

Si lo es $e' - e$, la simetría respecto de $\langle e' - e \rangle^\perp$ transforma e en e' , y extiende a σ .

Si lo es $e' + e$, la simetría respecto de $\langle e' + e \rangle$ es la extensión requerida.

Cuando $\dim V > 1$, lo descomponemos en suma ortogonal de subespacios no singulares de dimensión menor, $V = F \perp G$, de modo que $V' = F' \perp G'$.

Por inducción, podemos extender la isometría $\sigma: F \rightarrow F'$ a una isometría σ_1 de E .

Pongamos $G_1 = \sigma_1(G)$. Como G_1 y G' están contenidos en F'^\perp , la isometría $\sigma\sigma_1^{-1}: G_1 \rightarrow G'$ se puede extender a una isometría de F'^\perp que, prolongada por la identidad en F' , da una isometría σ_2 de E tal que la isometría $\sigma_2\sigma_1: E \rightarrow E$ extiende a σ .

Corolario: Si E es no singular, todos los subespacios totalmente isótropos maximales tienen igual dimensión, llamada **índice** de la métrica.

Corolario: Sea E no singular. Si $E \perp F \simeq E \perp F'$, entonces $F \simeq F'$.

Demostración: Como $\text{rad } F = \text{rad } (E \perp F) \simeq \text{rad } (E \perp F') = \text{rad } F'$, tenemos que

$$E \perp (F/\text{rad } F) \simeq E \perp (F'/\text{rad } F')$$

y, por el teorema de Witt, $F/\text{rad } F \simeq F'/\text{rad } F'$; luego $F \simeq F'$.

Teorema: *E* descompone, de modo único salvo isometrías, en suma ortogonal de un espacio totalmente isótropo, un espacio hiperbólico y otro elíptico.

Demostración: Si *E* es no singular, y *T* es un subespacio totalmente isótropo maximal, está contenido en un espacio hiperbólico *H*, y tendremos $E = H \perp H^\perp$, donde H^\perp es elíptico por el carácter maximal de *T*. La unicidad se sigue del corolario anterior.

4.3.1. Clasificación de Métricas

Un cuerpo *k* es **algebraicamente cerrado** si todo polinomio no constante con coeficientes en *k* admite una raíz en *k* (toda extensión finita $k \rightarrow K$ es trivial).

Teorema: *Si k es algebraicamente cerrado, la dimensión y el rango clasifican las métricas.*

Demostración: La parte elíptica tiene dimensión 0 ó 1 (según que el rango sea par o impar) porque si tuviera dos vectores linealmente independientes *e, v* podemos fijar $\lambda \in k$ de modo que

$$(\lambda e + v)^2 = (e^2)\lambda^2 + 2(e \cdot v)\lambda + v^2 = 0.$$

Además, todos los espacios elípticos de dimensión 1 son isométricos porque tienen un vector de cuadrado $e^2 = 1$, pues basta dividirlo por $\sqrt{e \cdot e}$. q.e.d.

La matriz de la polaridad $\phi: E \rightarrow E^*$ en una base e_1, \dots, e_n de *E* es $A = (a_{ij})$, donde $a_{ij} = \phi(e_j)(e_i) = e_i \cdot e_j$. El rango de T_2 es el rango de *A*.

Lema: *Cuando $k = \mathbb{R}$, un espacio elíptico es definido-positivo o definido-negativo.*

Demostración: Si $e^2 > 0$ y $v^2 < 0$, entonces $(\lambda e + v)^2 = (e^2)\lambda^2 + 2(e \cdot v)\lambda + v^2 = 0$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, porque el discriminante del polinomio es $4(e \cdot v)^2 - 4(e^2)(v^2) > 0$.

Teorema: *Cuando $k = \mathbb{R}$, las métricas están clasificadas por la dimensión, el rango, el índice y el signo de la parte elíptica.*

Demostración: La existencia de bases ortonormales prueba que la dimensión clasifica los espacios elípticos de signo positivo; luego también los de signo negativo. q.e.d.

En el caso real, para hallar el rango, índice y signo de una métrica T_2 , se fija un producto escalar auxiliar en *E*, que denotamos $e \cdot v$, y ponemos $e * v = T_2(e, v)$.

El producto escalar define un isomorfismo $E \simeq E^*$, y la polaridad $T: E \rightarrow E^* = E$ de T_2 puede verse como un endomorfismo, $e * v = (Te) \cdot v$, que es **simétrico**:

$$(Te) \cdot v = e \cdot (Tv).$$

Teorema: *Todo endomorfismo simétrico diagonaliza en una base ortonormal.*

Demostración: Para ver que *T* es diagonalizable, basta probar que su anulador tiene todas sus raíces reales y simples (p. 47).

Todo factor irreducible tiene exponente uno porque, si $P(T)^2 e = 0$, también $P(T)e = 0$,

$$(Pe) \cdot (Pe) = e \cdot (P^2 e) = 0.$$

Los polinomios irreducibles de grado 2 son de la forma $x^2 + 2ax + b$, con $a^2 - b < 0$, y no anulan a ningún vector, pues si $(T^2 + 2aT + b)e = 0$,

$$(T + a)e \cdot (T + a)e = e \cdot (T^2 + 2aT + a^2)e = e \cdot (a^2 - b)e < 0.$$

Por último, T diagonaliza en una base ortonormal porque dos vectores propios e, v de valores propios $\alpha \neq \beta$ siempre son ortogonales,

$$\alpha e \cdot v = (Te) \cdot v = e \cdot (Tv) = \beta e \cdot v.$$

Corolario: *El polinomio característico de T tiene todas sus raíces reales. Si n es su grado, r_+ el número de raíces positivas contadas con su multiplicidad, r_- el de raíces negativas, y r_0 es la multiplicidad de la raíz nula, entonces el rango r , el índice i , y el signo s de la métrica T_2 son*

$$r = n - r_0, \quad i = \min(r_+, r_-), \quad s = \text{sgn}(r_+ - r_-).$$

Demostración: Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son las raíces del polinomio característico, hay una base ortonormal e_1, \dots, e_n en que $T(e_i) = \alpha_i e_i$. Luego $e_i * e_j = (Te_i) \cdot e_j = \alpha_i \delta_{ij}$ y, dividiendo los vectores e_i por $\sqrt{|\alpha_i|}$ cuando no es nulo, la matriz de T_2 en esta base es diagonal, con r_0 veces el 0, r_+ veces el 1, y r_- veces el -1 . q.e.d.

Si $A = (a_{ij})$ es la matriz de T_2 en una base e_1, \dots, e_n de E , y consideramos el producto escalar que admite e_1, \dots, e_n como base ortonormal, la matriz de T también es A , porque $(Te_j) \cdot e_i = e_j * e_i = a_{ij}$. Su polinomio característico $|xI - A|$ no es un invariante de T_2 ; pero los números r_+, r_-, r_0 sí lo son.

Definición: Si A es la matriz de una métrica no singular T_2 , la matriz en otra base es $B^t AB$, donde B es invertible. Como $|B^t AB| = |A| \cdot |B|^2$, el **discriminante** $\text{disc } T_2 = |A|$ está bien definido en el grupo k^*/k^{*2} .

En general, el discriminante de una métrica es el de su parte no singular.

En los espacios de dimensión 1, el discriminante clasifica las métricas no singulares.

Además, $\text{disc}(E \perp E') = (\text{disc } E)(\text{disc } E')$.

Lema: *Sea \mathbb{F}_q un cuerpo finito de característica $\neq 2$. Si $a, b \in \mathbb{F}_q$ no son nulos, la ecuación $ax^2 + by^2 = 1$ tiene alguna solución en \mathbb{F}_q .*

Demostración: Como \mathbb{F}_q^2 tiene $\frac{q+1}{2}$ elementos (p. 11), también $\frac{q+1}{2}$ es el cardinal de la imagen de la aplicación $f: \mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{F}_q, f(x) = b^{-1}(1 - ax^2)$. Luego se cortan, y terminamos.

Teorema: *En los cuerpos finitos, las métricas están clasificadas por la dimensión, el rango y el discriminante.*

Demostración: Por inducción sobre el rango r , y cuando $r = 1$, se debe a que el discriminante clasifica las métricas no singulares de dimensión 1.

Si $r \geq 2$, por el lema anterior $e \cdot e = 1$ para algún $e \in E$. Luego $E = \langle e \rangle \perp \langle e \rangle^\perp$, y se concluye aplicando la hipótesis de inducción a $\langle e \rangle^\perp$, porque $\text{disc } E = \text{disc } \langle e \rangle^\perp$.

Métricas Hemisimétricas: Una métrica **hemisimétrica** es una 2-forma $\Omega_2 \in \Lambda_2 E$.

Los razonamientos del caso simétrico siguen siendo válidos; pero, al ser isótropos todos los vectores, no hay espacios elípticos, y todo espacio no singular es hiperbólico.

Teorema: *El rango clasifica las métricas hemisimétricas, y siempre es par. Toda métrica hemisimétrica de rango $2r$, en alguna base $\omega_1, \dots, \omega_n$ de E^* , es*

$$\Omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2 + \dots + \omega_{2r-1} \wedge \omega_{2r}.$$

Métricas Hermíticas: Sea $\sigma: K \rightarrow K$ una involución ($\sigma^2 = \text{Id}$, $\sigma \neq \text{Id}$) de un cuerpo K .

La igualdad

$$\alpha = \frac{\alpha + \sigma\alpha}{2} + \frac{\alpha - \sigma\alpha}{2} \in K_+ \oplus K_-$$

muestra que K es una extensión de grado 2 de $k = K_+ = \{\alpha \in K : \sigma\alpha = \alpha\}$, y que $K = k \oplus kj$, donde $j \in K_-$. Pondremos $\bar{\alpha} = \sigma\alpha$, y $a = -j^2 \in k$.

Una métrica **hermítica** en un K -espacio vectorial E de dimensión finita es una aplicación $H_2: E \times E \rightarrow K$, lineal por la izquierda, semilineal (de automorfismo σ) por la derecha, y tal que $H_2(v, e) = \overline{H_2(e, v)}$.

El ortogonal de V es $V^\perp = \{e \in E : H_2(e, v) = 0, \forall v \in V\}$, y el radical es $\text{rad } H_2 = E^\perp$. Si ponemos

$$H_2(e, v) = T_2(e, v) + \Omega_2(e, v)j,$$

tenemos que T_2 es una métrica simétrica en el k -espacio vectorial E , que Ω_2 es una métrica hemisimétrica, y que $T_2(e, v) = \Omega_2(je, v)$; ó bien, $\Omega_2(e, v) = a^{-1}T_2(e, jv)$. Por tanto,

1. El ortogonal V^\perp de un K -subespacio vectorial $V \subseteq E$ es el mismo para H_2 y T_2 . En particular, $\text{rad } H_2 = \text{rad } T_2$, y $\text{rg } T_2 = 2 \text{rg } H_2$.
2. $H_2(e, e) = T_2(e, e)$, y los vectores isótropos de H_2 son los de T_2 .
3. Todo subespacio totalmente isótropo maximal T de H_2 también lo es de T_2 .

Si $T \oplus ke$ fuera totalmente isótropo para T_2 , entonces $e \in T^\perp$, y $H_2(e, e) = T_2(e, e) = 0$; y $T \oplus Ke$ sería totalmente isótropo para H_2 .

Teorema: *Dos métricas hermíticas H_2, H'_2 son equivalentes si, y sólo si sus métricas simétricas asociadas T_2, T'_2 son equivalentes.*

Demostración: Si $\tau: (E, H_2) \rightarrow (E', H'_2)$ es una isometría K -lineal, $\tau: (E, T_2) \rightarrow (E', T'_2)$ es también una isometría k -lineal,

$$T_2(e, e) = H_2(e, e) = H'_2(\tau e, \tau e) = T'_2(\tau e, \tau e).$$

Recíprocamente, si $\tau: (E, T_2) \rightarrow (E', T'_2)$ es una isometría k -lineal, tomamos $e \in E$ tal que $T_2(e, e) \neq 0$ y ponemos $e' = \tau(e)$, de modo que

$$H'_2(e', e') = T'_2(e', e') = T_2(e, e) = H_2(e, e).$$

Ahora $(Ke, H_2) \simeq (Ke', H'_2)$; luego $(Ke, T_2) \simeq (Ke', T'_2)$ y, al ser no singulares, por el teorema de Witt $((Ke)^\perp, T_2) \simeq ((Ke')^\perp, T'_2)$. Por inducción sobre la dimensión concluimos que $((Ke)^\perp, H_2) \simeq ((Ke')^\perp, H'_2)$, y $(E, H_2) \simeq (E', H'_2)$.

Corolario: *Cuando $K = \mathbb{C}$ y σ es la conjugación compleja, las métricas hermíticas definidopositivas ($H_2(e, e) > 0$ cuando $e \neq 0$) están clasificadas por la dimensión.*

4.3.2. Cuádricas

La **forma cuadrática** de una métrica T_2 es la aplicación $q: E \rightarrow k$, $q(e) = e^2$, que se anula en los vectores isótropos, y determina completamente la métrica:

$$e \cdot v = \frac{1}{2}(q(e+v) - q(e) - q(v)).$$

Si $(a_{ij}) = (e_i \cdot e_j)$ es la matriz de T_2 en una base, la forma cuadrática es

$$q(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = \sum_i a_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j} 2a_{ij} x_i x_j.$$

Una **cuádrlica** en $\mathbb{P}(E)$ es una métrica no nula salvo un factor $\mathcal{Q} = \langle T_2 \rangle$. Las cuádrlicas de $\mathbb{P}(E)$ son los puntos de $\mathbb{P}(S_2 E)$. Dos puntos son **conjugados** respecto de \mathcal{Q} si están representados por vectores ortogonales, y los puntos de \mathcal{Q} son los representados por vectores isótropos.

Los puntos **singulares** de \mathcal{Q} son los de su **vértice** $\pi(\text{rad } T_2)$.

Si una subvariedad lineal $X = \pi(V)$ no está contenida en el vértice, $\mathcal{Q} \cap X$ denota la cuádrlica que define la restricción de T_2 a V . La **directriz** es la cuádrlica no singular $\mathcal{Q} \cap X$, donde X es la subvariedad lineal definida por un suplementario de $\text{rad } E$ en E .

Si un punto P no es incidente con el vértice, los puntos conjugados de P forman el hiperplano **polar** de P . En general, la **variedad polar** de $X = \pi(V)$ es $X^\perp = \pi(V^\perp)$.

El hiperplano polar de un punto no singular de \mathcal{Q} es su hiperplano **tangente**.

Si \mathcal{Q} es no singular, la polaridad $\phi: E \rightarrow E^*$ es un isomorfismo, y permite definir la cuádrlica **dual** o **envolvente** $\langle T^2 \rangle$ en el dual $\mathbb{P}(E^*)$, donde $T^2(\phi e, \phi v) = T_2(e, v)$.

Los puntos de la cuádrlica dual son los hiperplanos tangentes a \mathcal{Q} .

Una recta R es **tangente** a \mathcal{Q} en un punto no singular P cuando $P \in R \subseteq P^\perp$.

Dos cuádrlicas $\langle T_2 \rangle, \langle T'_2 \rangle$ en $\mathbb{P}(E)$ y $\mathbb{P}(E')$ son **proyectivamente equivalentes** si alguna proyectividad $\pi(T): \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}(E')$ transforma una en la otra: $T'_2(Te, Tv) = \lambda T_2(e, v)$.

Cuando una métrica T_2 se multiplica por un factor no nulo λ , el rango y el índice no varían; pero, en el caso real, el signo cambia cuando λ es negativo. Por tanto,

Teorema: Cuando k es algebraicamente cerrado, la dimensión n y el rango r clasifican proyectivamente las cuádrlicas, y $1 \leq r \leq n + 1$.

Teorema: En el caso real, la dimensión n , el rango r y el índice i clasifican proyectivamente las cuádrlicas, y $0 \leq 2i \leq r \leq n + 1$.

Definiciones: Dos cuádrlicas en un espacio afín $(\mathbb{P}(E), H)$ son **afínmente equivalentes** si hay una afinidad (proyectividad que deja invariante H) que transforma una en la otra.

Un **centro** de una cuádrlica es un punto conjugado de todos los puntos del infinito.

Las cuádrlicas no singulares sin centro (tangentes al infinito) son los **paraboloides**.

Una recta que pase por un centro es un **diámetro** si no es tangente, y una **asíntota** si es tangente. Dos diámetros son **conjugados** cuando lo son sus direcciones.

Lema: Si (r, i) son el rango e índice de una cuádrlica \mathcal{Q} , y (r', i') son los de su corte con el infinito $H = \pi(V)$, sólo se pueden dar tres casos,

1. V no contiene a $\text{rad } E$. En este caso $\text{rad } V = V \cap \text{rad } E$, y $r' = r$, $i' = i$.
2. V contiene a $\text{rad } E$, y $\text{rad } V = \text{rad } E$. En este caso $r' = r - 1$, y $i' = i$, $i - 1$ (según que V contenga o no un subespacio totalmente isótropo maximal de E).
3. $\text{rad } E$ es un hiperplano de $\text{rad } V$. En este caso $r' = r - 2$, $i' = i - 1$.

Demostración: Si el hiperplano V no contiene a $\text{rad } E$, entonces $E = V \perp \langle e \rangle$, $e \in \text{rad } E$.

Luego $\text{rad } V = V \cap \text{rad } E$, porque todos los vectores de V son ortogonales a e , y tenemos una isometría $V/\text{rad } V = E/\text{rad } E$; así que $r' = r$, $i' = i$. Es el caso 1.

Si $\text{rad } V = \text{rad } E$, entonces $V/\text{rad } V$ es un hiperplano no singular de $E/\text{rad } E$.

Luego $r' = r - 1$, y $i' = i$ ó $i - 1$, según que $V/\text{rad } V$ contenga un subespacio totalmente isótropo maximal de $E/\text{rad } E$ o no. Es el caso 2.

Si la inclusión $\text{rad } E \subset \text{rad } V$ es estricta, pasando a $E/\text{rad } E$ podemos suponer que $\text{rad } E = 0$. Entonces $\dim V^\perp = 1$. Como $\text{rad } V = V^\perp \cap V \neq 0$, tenemos que $\dim \text{rad } V = 1$ (luego $r' = r - 2$), y $V = V^{\perp\perp}$ es el ortogonal de un vector isótropo: $i' = i - 1$.

Lema: Si los cortes $\mathcal{Q} \cap H_1$, $\mathcal{Q} \cap H_2$ de una cuádrica con dos hiperplanos son proyectivamente equivalentes, hay una proyectividad τ tal que $\tau(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}$, y $\tau(H_1) = H_2$.

Demostración: Pongamos $H_i = \pi(V_i)$, y distingamos los tres casos posibles.

1. Poniendo $\text{rad } E = \text{rad } V_i \perp T_i$, y $V_i = (\text{rad } V_i) \perp F_i$, tenemos

$$E = \text{rad } V_1 \perp T_1 \perp F_1 = \text{rad } V_2 \perp T_2 \perp F_2.$$

Por hipótesis tenemos una isometría $(V_1, \lambda T_2) \rightarrow (V_2, T_2)$ y, al ser T_i totalmente isótropo, se extiende a una isometría $T: (E, \lambda T_2) \rightarrow (E, T_2)$, y $T(V_1) = V_2$.

2. Fijamos un suplementario \bar{E} de $\text{rad } E$, y poniendo $F_i = V_i \cap \bar{E}$, y $\bar{E} = F_i \perp \langle e_i \rangle$, tenemos que $V_i = \text{rad } E \perp F_i$, y

$$E = \text{rad } E \perp F_1 \perp \langle e_1 \rangle = \text{rad } E \perp F_2 \perp \langle e_2 \rangle$$

donde $a_1 = e_1 \cdot e_1$, $a_2 = e_2 \cdot e_2$ no son nulos. Por hipótesis los espacios $(F_1, \lambda T_2)$ y (F_2, T_2) son isométricos; así que, si $m = \dim F_1$, en el grupo k^*/k^{*2} tenemos

$$a_1 \text{disc } F_1 = \text{disc } \bar{E} = a_2 \text{disc } F_2 = a_2 \lambda^m \text{disc } F_1$$

y $a_1 = \lambda^m a_2$ en k^*/k^{*2} . Si m es par, tenemos una isometría $\langle e_1 \rangle \simeq \langle e_2 \rangle$ que, por el teorema de Witt, puede extenderse a una isometría $\bar{T}: \bar{E} \rightarrow \bar{E}$, que transforma $\langle e_1 \rangle^\perp = F_1$ en $\langle e_2 \rangle^\perp = F_2$. Ahora la isometría $\text{Id} \oplus \bar{T}: \text{rad } E \perp \bar{E} \rightarrow \text{rad } E \perp \bar{E}$ transforma V_1 en V_2 .

Si m es impar, $a_2 = \lambda a_1$ en k^*/k^{*2} , y $(\langle e_1 \rangle, \lambda T_2) \simeq (\langle e_2 \rangle, T_2)$. Como también $(F_1, \lambda T_2) \simeq (F_2, T_2)$, tenemos una isometría $T: (E, \lambda T_2) \rightarrow (E, T_2)$, y $T(V_1) = V_2$.

3. Pongamos $\text{rad } V_i = \text{rad } E \perp \langle e_i \rangle$, y sea \bar{E}_i un suplementario de $\text{rad } E$ que contenga a $\langle e_i \rangle$. El ortogonal de $\langle e_i \rangle$ en \bar{E}_i es precisamente $V_i \cap \bar{E}_i$. Ahora, \bar{E}_1 y \bar{E}_2 son isométricos y no singulares, y por el teorema de Witt la isometría $\langle e_1 \rangle \simeq \langle e_2 \rangle$ se extiende a una isometría $\bar{E}_1 \rightarrow \bar{E}_2$, que transformará $V_1 \cap \bar{E}_1$ en $V_2 \cap \bar{E}_2$. Obtenemos una isometría $T: \text{rad } E \perp \bar{E}_1 \rightarrow \text{rad } E \perp \bar{E}_2$, y $T(V_1) = V_2$.

Teorema: La condición necesaria y suficiente para que dos cuádricas sean afínmente equivalentes es que sean proyectivamente equivalentes ellas, y sus cortes con el infinito.

Demostración: Si \mathcal{Q} y \mathcal{Q}' son proyectivamente equivalentes, $\mathcal{Q}' = \tau(\mathcal{Q})$ para alguna proyectividad τ , de modo que $\mathcal{Q} \cap H$ y $\mathcal{Q}' \cap \tau(H)$ son proyectivamente equivalentes. Si además $\mathcal{Q} \cap H$ y $\mathcal{Q}' \cap H$ son proyectivamente equivalentes, tendremos que $\mathcal{Q}' \cap \tau(H)$ y $\mathcal{Q}' \cap H$ también lo son.

Por el lema, $\sigma(\mathcal{Q}') = \mathcal{Q}'$, y $\sigma(\tau H) = H$ para alguna proyectividad σ .

Luego $\mathcal{Q}' = \sigma\tau\mathcal{Q}$, y $\sigma\tau(H) = H$.

4.3.3. Geometría Euclídea y Geometrías No Euclídeas

Dar una estructura euclídea en un espacio afín \mathbb{A}_n es dar un producto escalar Ω_2 en su espacio de vectores libres V , bien definido salvo un factor positivo. Es decir, es fijar una cuádriga $\langle \Omega_2 \rangle$ no singular y de índice 0 en el infinito $H = \pi(V)$, llamada cuádriga del **absoluto**, lo que reduce la Geometría Euclídea a la Geometría Proyectiva. Un sistema de referencia afín $(P_0, \dots, P_n; U)$ es **euclídeo** cuando alguna base normalizada e_0, \dots, e_n cumple que e_1, \dots, e_n es base ortonormal, de modo que la ecuación del absoluto es $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$.

Una afinidad $\tau: \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}_n$ es una **semejanza** si deja invariante al absoluto, $\tau\Omega_2 = \rho^2\Omega_2$ (donde τ denota la afinidad y su representante lineal normalizado, que induce la identidad en E/V) para cierto número real positivo ρ , la **razón de semejanza** de τ . Los **movimientos** son las semejanzas de razón 1 y, en la geometría euclídea, dos cuádrigas se consideran iguales si algún movimiento transforma una en la otra.

Lema: Sean Q_1, Q_2 los punto de corte de una recta $P_1 + P_2$ con una cuádriga $\mathcal{Q} = \langle T_2 \rangle$. Si ϕ es un número complejo³ tal que $\cos \phi = \frac{e_1 \cdot e_2}{\sqrt{e_1^2 \cdot e_2^2}}$, donde $P_i = \pi(e_i)$, entonces

$$(P_1, P_2; Q_1, Q_2) = e^{2\phi i}.$$

Demostración: $Q_i = \pi(\alpha_i e_1 + e_2)$, donde α_1, α_2 son las raíces de $e_1^2 t^2 + 2(e_1 \cdot e_2)t + e_2^2$. Luego

$$\begin{aligned} (P_1, P_2; Q_1, Q_2) &= \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{e_1 \cdot e_2 + \sqrt{(e_1 \cdot e_2)^2 - e_1^2 e_2^2}}{e_1 \cdot e_2 - \sqrt{(e_1 \cdot e_2)^2 - e_1^2 e_2^2}} = \frac{\frac{e_1 \cdot e_2}{\sqrt{e_1^2 \cdot e_2^2}} + \sqrt{\frac{(e_1 \cdot e_2)^2}{e_1^2 \cdot e_2^2} - 1}}{\frac{e_1 \cdot e_2}{\sqrt{e_1^2 \cdot e_2^2}} - \sqrt{\frac{(e_1 \cdot e_2)^2}{e_1^2 \cdot e_2^2} - 1}} \\ &= \frac{\cos \phi + \sqrt{\cos^2 \phi - 1}}{\cos \phi - \sqrt{\cos^2 \phi - 1}} = \frac{\cos \phi + i \sin \phi}{\cos \phi - i \sin \phi} = \frac{e^{\phi i}}{e^{-\phi i}} = e^{2\phi i}. \end{aligned}$$

Definición: Como el punto del infinito de una recta está representado por la dirección de la recta, el lema muestra que podemos definir el **ángulo** que forman dos rectas concurrentes r_1, r_2 como $\phi = |\frac{1}{2i} \ln(r_1, r_2; i, j)|$, donde i, j son las rectas autoconjugadas para el absoluto en el haz de rectas que determinan r_1 y r_2 .

Las rectas son **perpendiculares** cuando $(r_1, r_2; i, j) = -1$; es decir, $\phi = \pi/2$.

Sea \mathcal{Q} una cuádriga de rango r . Como todo endomorfismo simétrico diagonaliza en una base ortonormal (p. 102) hay referencias euclídeas en que el corte con el infinito $\mathcal{Q} \cap H$ es

$$a_1 x_1^2 + \dots + a_r x_r^2 = 0$$

y vamos a ver dónde situar el origen P_0 del sistema para que la ecuación de la cuádriga sea sencilla. Distingamos los tres casos posibles (p. 105), suponiendo que $\text{rad } E = 0$ (si $\text{rad } E \neq 0$, la ecuación es la misma, basta poner $E = \bar{E} \perp \text{rad } E$):

1. El vértice tiene un punto propio P_0 , y la cuádriga es: $a_1 y_1^2 + \dots + a_r y_r^2 = 0$.
2. El polo del infinito es un centro P_0 , y la cuádriga es: $a_1 y_1^2 + \dots + a_{r-1} y_{r-1}^2 = 1$.
3. La cuádriga es un paraboloides tangente al infinito en un punto, digamos P_1 (y por tanto $a_1 = 0$). La variedad polar de $P_2 + \dots + P_n$ es una recta que pasa por P_1 y corta a la cuádriga en un punto propio P_0 , y la cuádriga es: $a_2 y_2^2 + \dots + a_{r-1} y_{r-1}^2 = y_1$.

³Bien definido salvo el signo y múltiplos enteros de π , y ϕ es real cuando Q_1, Q_2 son puntos complejos conjugados, $(e_1 \cdot e_2)^2 < e_1^2 \cdot e_2^2$. Como $\cos di = \cosh d = \frac{1}{2}(e^d + e^{-d})$, puede elegirse imaginario puro $\phi = di$ cuando Q_1, Q_2 son puntos reales, $(e_1 \cdot e_2)^2 \geq e_1^2 \cdot e_2^2$, que no separan a P_1 y P_2 (i.e., e_1^2 y e_2^2 tienen igual signo).

En la Geometría Euclídea (o parabólica) el absoluto puede verse como una cuádrlica singular imaginaria $\langle \Omega^2 \rangle$ en el espacio dual \mathbb{P}_n^* , con vértice en el punto correspondiente al hiperplano del infinito. La perpendicularidad es la relación de conjugación que define esta cuádrlica, los puntos propios son los que definen en \mathbb{P}_n^* hiperplanos que no la cortan en puntos reales, y las rectas son las que pasan por algún punto propio. Las Geometrías no Euclídeas se obtienen tomando como absoluto una cuádrlica no singular en \mathbb{P}_n (no reglada, para que haya puntos propios).

Así, la Geometría Euclídea y las no Euclídeas se reducen a la Geometría Projectiva.

Geometría Hiperbólica: El absoluto $\langle \Omega^2 \rangle$ es una cuádrlica real de índice 1, que es la envolvente de una cuádrlica real $\mathcal{Q} = \langle \Omega_2 \rangle$ del espacio \mathbb{P}_n .

Los puntos propios de la geometría son los puntos interiores (sin tangentes reales) de \mathcal{Q} , y los puntos del infinito son los de \mathcal{Q} . Las rectas son las que cortan a \mathcal{Q} en dos puntos distintos, y el ángulo que forman dos rectas concurrentes r_1, r_2 es $\phi = \left| \frac{1}{2i} \ln (r_1, r_2; i, j) \right|$, donde i, j son las rectas autoconjugadas para el absoluto en el haz de rectas que determinan r_1 y r_2 (las tangentes a \mathcal{Q} , que son rectas imaginarias conjugadas). En esta geometría el concepto de distancia es absoluto (¡hay unidad de longitud canónica!),

$$d(P_1, P_2) = \left| \frac{1}{2} \ln (P_1, P_2; Q_1, Q_2) \right| = \text{arc cosh} \left(\frac{|e_1 \cdot e_2|}{\sqrt{e_1^2 \cdot e_2^2}} \right)$$

donde $P_i = \pi(e_i)$ y la recta $P_1 + P_2$ corta a \mathcal{Q} en los puntos Q_1, Q_2 (la razón doble es positiva porque Q_1, Q_2 no separan a P_1, P_2). Las rectas tienen longitud infinita, y no se cumple el quinto postulado: por un punto exterior a una recta pasan infinitas paralelas. *El quinto postulado de Euclides es independiente de los otros cuatro.*

Geometría Elíptica: El absoluto $\langle \Omega^2 \rangle$ es una cuádrlica imaginaria, que es la envolvente de una cuádrlica imaginaria $\mathcal{Q} = \langle \Omega_2 \rangle$ del espacio \mathbb{P}_n . Los puntos propios de la geometría son todos los puntos, así que tampoco cumple el quinto postulado, pues no hay paralelas. El ángulo formado por dos rectas se define como $\phi = \left| \frac{1}{2i} \ln (r_1, r_2; i, j) \right|$, y también tenemos una distancia absoluta $d(P_1, P_2) = \left| \frac{1}{2i} \ln (P_1, P_2; Q_1, Q_2) \right| = \text{arc cos} \left(\frac{|e_1 \cdot e_2|}{|e_1| \cdot |e_2|} \right)$, donde ahora Q_1, Q_2 son puntos imaginarios conjugados. Las rectas tienen longitud finita π , y no hay rectas paralelas.

CLASIFICACIÓN EUCLÍDEA, AFÍN Y PROYECTIVA DE LAS CÓNICAS					
(r, i)	(1,0)	(2,0)	(2,1)	(3,0)	(3,1)
(r', i')					
(0,0)	\emptyset		recta $y = 0$		
(1,0)	recta doble $y^2 = 0$	par de rectas imaginarias paralelas $y^2 = -a^2$ $a > 0$	par de rectas reales paralelas $y^2 = a^2$ $a > 0$		parábola $y = \frac{x^2}{a}$ $a > 0$
(2,0)		par de rectas imaginarias que se cortan $x^2 + a^2 y^2 = 0$ $1 \geq a > 0$		cónica imaginaria $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ $a \geq b > 0$	elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $a \geq b > 0$
(2,1)			par de rectas reales que se cortan $x^2 - a^2 y^2 = 0$ $1 \geq a > 0$		hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $a > 0, b > 0$

Las cónicas en la misma columna son proyectivamente equivalentes.

Las cónicas en la misma celda son afinmente equivalentes.

Cada valor de los parámetros en una celda determina una clase de equivalencia euclídea.

CLASIFICACIÓN EUCLÍDEA, AFÍN Y PROYECTIVA DE LAS CUÁDRICAS

	(1,0)	(2,0)	(2,1)	(3,0)	(3,1)	(4,0)	(4,1)	(4,2)
(r, i)	(1,0)	(2,0)	(2,1)	(3,0)	(3,1)	(4,0)	(4,1)	(4,2)
(r', i')	\emptyset	\emptyset	plano $z = 0$	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
(0,0)	\emptyset	\emptyset	plano $z = 0$	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
(1,0)	plano doble $z^2 = 0$	par de planos imaginarios paralelos $z^2 = -a^2$ $a > 0$	par de planos reales paralelos $z^2 = a^2$ $a > 0$	\emptyset	cilindro parabolico $y = \frac{x^2}{a}$ $a > 0$	\emptyset	\emptyset	\emptyset
(2,0)	\emptyset	par de planos imaginarios que se cortan $x^2 + a^2 y^2 = 0$ $1 \geq a > 0$	\emptyset	cilindro imaginario $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ $a \geq b > 0$	cilindro eliptico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $a \geq b > 0$	\emptyset	paraboloides no reglados $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ $a \geq b > 0$	\emptyset
(2,1)	\emptyset	\emptyset	par de planos reales que se cortan $x^2 - a^2 y^2 = 0$ $1 \geq a > 0$	\emptyset	cilindro hiperbólico $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $a > 0, b > 0$	\emptyset	\emptyset	paraboloides reglados $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ $a > 0, b > 0$
(3,0)	\emptyset	\emptyset	\emptyset	cono imaginario $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + z^2 = 0$ $1 \geq a \geq b > 0$	\emptyset	cuádrica imaginaria $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ $a \geq b \geq c > 0$	elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $a \geq b \geq c > 0$	\emptyset
(3,1)	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	cono real $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 = 0$ $a \geq b > 0$	\emptyset	hiperboloide no reglado $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ $a > 0, b \geq c > 0$	hiperboloide reglado $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ $a \geq b > 0, c > 0$

Las cuádricas en la misma columna son proyectivamente equivalentes.
 Las cuádricas en la misma celda son afinmente equivalentes.
 Cada valor de los parámetros en una celda determina una clase de equivalencia euclídea.

4.4. Módulos sobre Dominios de Ideales Principales

Sea A un dominio de ideales principales. Las demostraciones dadas en 1.5 prueban que $dA = aA + bA$, donde $d = \text{m.c.d.}(a, b)$, y se obtiene la identidad de Bézout

$$d = \alpha a + \beta b; \quad \alpha, \beta \in A,$$

y el lema de Euclides: los ideales primos no nulos de A son los ideales pA , donde p es irreducible. También es válida la demostración de la unicidad de la descomposición en factores irreducibles; pero, en cuanto a la existencia, se ha de modificar el razonamiento:

Si un elemento propio $a \in A$ no es producto de irreducibles, tendremos $a = bc$, donde $aA \subset bA$, $aA \subset cA$, y algún factor es propio y no es producto de irreducibles.

Obtenemos así una sucesión creciente infinita de ideales de A , lo que es contradictorio, pues

Lema: *Toda cadena de ideales $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ estabiliza, $I_n = I_{n+1} = \dots$*

Demostración: Si c genera el ideal $\cup_i I_i$, entonces $c \in I_n$ para algún n .

Las inclusiones $I_n \subseteq I_{n+j} \subseteq \cup_i I_i = cA \subseteq I_n$ prueban que $I_n = I_{n+j}$, $\forall j > 0$.

Definición: Sea A un anillo íntegro arbitrario, Σ su cuerpo de fracciones, M un A -módulo, y $M_\Sigma = M \otimes_A \Sigma$ su localización por $A - \{0\}$. El **rango** de M es $\text{rg } M = \dim_\Sigma M_\Sigma$.

Si $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ es exacta, $\text{rg } M = \text{rg } M' + \text{rg } M''$. Además $\text{rg } A^r = r$.

Lema: *Todo submódulo M de un módulo libre L de rango r es libre y de rango $\leq r$.*

Demostración: Por inducción sobre r . Si $r = 1$, entonces $M \simeq aA \simeq A$ ó 0 .

Si $r > 1$, descomponemos $L = L' \oplus L''$ en suma directa de dos módulos libres de rangos $r', r'' < r$, y tenemos un diagrama conmutativo de filas exactas

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & L & \xrightarrow{\pi} & L'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \cup & & \cup & & \cup & & \\ 0 & \longrightarrow & M' = M \cap L' & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\pi} & M'' = \pi(M) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Por inducción, M' y M'' son libres, de rangos acotados por r' y r'' . Al ser M'' libre, la segunda sucesión exacta rompe, y $M \simeq M' \oplus M''$ es libre, de rango $\leq r' + r'' = r$.

Corolario: *Todo submódulo de un módulo finito generado también es finito.*

Demostración: Todo módulo finito generado es cociente de algún A^r .

Definición: El núcleo del morfismo de localización $M \rightarrow M_\Sigma$ es el **submódulo de torsión** $T(M)$, y está formado por los elementos de anulador no nulo.

Un módulo M es de **torsión** si $M = T(M)$, y carece de torsión si $T(M) = 0$.

Lema: *Todo módulo finito generado y sin torsión M es libre.*

Demostración: Sea m_1, \dots, m_n es un sistema de generadores de M , donde m_1, \dots, m_r son linealmente independientes y $a_i m_i \in Am_1 + \dots + Am_r$, con $a_i \neq 0$. Sea $b = a_{r+1} \dots a_n \neq 0$.

Como bM es un submódulo del módulo libre $Am_1 + \dots + Am_r$, es libre.

Si M carece de torsión, $M \rightarrow bM$, $m \mapsto bm$, es un isomorfismo, y terminamos.

Teorema: *Todo módulo finito generado descompone, de modo único salvo isomorfismos, en suma directa de un módulo libre y otro de torsión*

$$M \simeq A^r \oplus T(M), \quad r = \text{rg } M.$$

Demostración: $M/T(M)$ carece de torsión; luego es libre y la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow T(M) \longrightarrow M \longrightarrow M/T(M) \longrightarrow 0$$

rompe, de modo que $M \simeq (M/T(M)) \oplus T(M)$.

En cuanto a la unicidad, si $M \simeq L \oplus T$, donde L es libre y T de torsión, localizando tenemos que $M_\Sigma \simeq L_\Sigma$, y L es libre de rango $r = \text{rg } M$. Además,

$$T(M) \simeq T(L) \oplus T(T) = 0 \oplus T = T.$$

Definición: Si M es un módulo sobre un anillo arbitrario A , el **ideal anulador** de M es $\text{Ann } M = \{b \in A : bM = 0\}$. Cuando A es un dominio de ideales principales, su generador a es el **anulador** de M , y está bien definido salvo un factor invertible.

En general pondremos $\text{Ker } b = \{m \in M : bm = 0\}$, de modo que $\text{Ker } a = M$.

Los módulos finito generados de torsión tienen anulador $a \neq 0$, y son de longitud finita, porque lo es A/aA . Por otra parte, $\text{Ann}(M_1 \oplus M_2) = \text{Ann}(M_1) \cap \text{Ann}(M_2)$.

Lema: *Si p y q son primos entre sí, $\text{Ker } pq = \text{Ker } p \oplus \text{Ker } q$.*

Demostración: (Ver p. 20). Por la Identidad de Bézout, $1 = \lambda p + \mu q$, para todo $m \in M$ se cumple

$$m = \lambda pm + \mu qm.$$

Si $m \in \text{Ker } pq$, entonces $\lambda pm \in \text{Ker } q$, y $\mu qm \in \text{Ker } p$; luego $\text{Ker } pq = \text{Ker } p + \text{Ker } q$.

Además, si $m \in \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$, entonces $m = \lambda pm + \mu qm = 0 + 0 = 0$.

Primer Teorema de Descomposición: *Si $a = p_1^{n_1} \dots p_s^{n_s}$ es la descomposición en factores irreducibles del anulador de un módulo finito generado de torsión M , entonces M descompone de modo único en suma directa de submódulos anulados por $p_i^{n_i}$,*

$$M = \text{Ker } p_1^{n_1} \oplus \dots \oplus \text{Ker } p_s^{n_s}.$$

Demostración: Como $M = \text{Ker } a$, la existencia se sigue del lema anterior.

En cuanto a la unicidad, si $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_s$, donde $p_i^{n_i} M_i = 0$, entonces $M_i \subseteq \text{Ker } p_i^{n_i}$, y si alguna inclusión fuera estricta, también lo sería $M = \bigoplus_i M_i \subset \bigoplus_i \text{Ker } p_i^{n_i} = M$. Absurdo.

Definición: Un módulo finito generado es **primario** si está anulado por una potencia de un irreducible $p \in A$. Los módulos $A/p^n A$ son los monógenos primarios.

Segundo Teorema de Descomposición: *Todo módulo primario M descompone, de modo único salvo isomorfismos, en suma directa de monógenos primarios*

$$M \simeq (A/p^{n_1} A) \oplus \dots \oplus (A/p^{n_s} A), \quad n_1 \geq \dots \geq n_s.$$

Demostración: Consideremos un sistema mínimo de generadores m_1, \dots, m_s de M , y procedamos por inducción sobre s , pues el teorema es obvio cuando M es monógeno.

Si el anulador de M es p^n , algún generador, digamos m_1 , no está anulado por p^{n-1} .

Tenemos una sucesión exacta de módulos sobre el anillo $B = A/p^n A$,

$$0 \longrightarrow B = Am_1 \longrightarrow M \longrightarrow \bar{M} \longrightarrow 0$$

que rompe, porque B es un B -módulo inyectivo (pág. 62). Luego $M \simeq A/p^n A \oplus \bar{M}$, donde \bar{M} está generado por $\bar{m}_2, \dots, \bar{m}_s$, y por inducción se obtiene la existencia.

Para la unicidad ponemos $k = A/pA$.

Si ν_j es el número de sumandos $A/p^j A$ que hay en una descomposición de M , al ser $(p^i A/p^j A) \otimes_A k \simeq k$ cuando $0 \leq i < j$, vemos que ν_j no depende de la descomposición:

$$\begin{aligned} \dim_k(M \otimes k) &= \nu_1 + \dots + \nu_n \\ \dim_k((pM) \otimes_A k) &= \nu_2 + \dots + \nu_n \\ &\dots\dots\dots \\ \dim_k((p^{n-1}M) \otimes_A k) &= \nu_n \end{aligned}$$

4.4.1. Clasificación de Módulos

Todo módulo finito generado M descompone de modo único en la forma

$$M \simeq (A \oplus \dots \oplus A) \oplus \left(\bigoplus_{i,j} A/p_i^{n_{ij}} A \right)$$

donde r es el rango de M y los elementos p_i son irreducibles. Las potencias $p_i^{n_{ij}}$, bien definidas salvo factores invertibles, son los **divisores elementales** de M .

Teorema de Clasificación : *Dos módulos finito generados son isomorfos si y sólo si tienen el mismo rango y los mismos divisores elementales.*

Definición: El **álgebra tensorial** de un módulo M sobre un anillo arbitrario A es

$$T^\bullet M = \bigoplus_n M^{\otimes n} = A \oplus M \oplus (M \otimes_A M) \oplus \dots$$

y es un álgebra (no conmutativa) con un morfismo canónico $M \rightarrow T^\bullet M$ tal que todo morfismo de A -módulos $M \rightarrow B$ en una A -álgebra (no conmutativa) B factoriza de modo único a través de un morfismo de A -álgebras $T^\bullet M \rightarrow B$.

El **álgebra exterior** de M es el cociente de $T^\bullet M$ por el ideal bilátero I generado por los elementos de la forma $m \otimes m$:

$$(T^\bullet M)/I = \Lambda^\bullet M = \bigoplus_n \Lambda^n M$$

y $\Lambda^0 M = A$ y $\Lambda^1 M = M$ porque I no tiene elementos de grado 0 ni 1.

Como el producto tensorial conmuta con cambios de base $A \rightarrow B$, el álgebra exterior también, $(\Lambda^\bullet M) \otimes_A B = \Lambda^\bullet(M_B)$, y por tanto conmuta con localizaciones.

El álgebra exterior es un álgebra **anticonmutativa**:

$$a_n b_m = (-1)^{nm} b_m a_n; \quad a_n \in \Lambda^n M, \quad b_m \in \Lambda^m M.$$

Proposición: $\Lambda^\bullet(M \oplus N) = (\Lambda^\bullet M) \otimes_A (\Lambda^\bullet N)$, donde $(\Lambda^\bullet M) \otimes_A (\Lambda^\bullet N)$ es álgebra con el producto $(a_n \otimes b_m)(a_r \otimes b_s) = (-1)^{mr} a_n a_r \otimes b_m b_s$.

Demostración: El morfismo natural $M \oplus N \rightarrow (\Lambda^\bullet M) \otimes (\Lambda^\bullet N)$ induce un morfismo de álgebras $T^\bullet(M \oplus N) \rightarrow (\Lambda^\bullet M) \otimes (\Lambda^\bullet N)$ que factoriza a través de $\Lambda^\bullet(M \oplus N)$.

Los morfismos naturales $\Lambda^\bullet M \rightarrow \Lambda^\bullet(M \oplus N)$, $\Lambda^\bullet N \rightarrow \Lambda^\bullet(M \oplus N)$ inducen un morfismo $(\Lambda^\bullet M) \otimes (\Lambda^\bullet N) \rightarrow \Lambda^\bullet(M \oplus N)$ que es el inverso del anterior.

Corolario: Si L es un módulo libre de rango n , $\Lambda^p L$ es un módulo libre de rango $\binom{n}{p}$. Por tanto, si M es monógeno, $\Lambda^p M = 0$ para todo $p > 1$.

Definición: El **factor invariante** ϕ_j de M es el anulador de $\Lambda^j M$, donde $j \geq 1$.

Teorema: Los factores invariantes clasifican los módulos finitos. Si r es el rango de M , y $p_i^{n_{ij}}$ sus divisores elementales ($n_{i1} \geq n_{i2} \geq \dots$), entonces

$$\phi_1 = \dots = \phi_r = 0, \quad \phi_{r+j} = p_1^{n_{1j}} p_2^{n_{2j}} \dots$$

$$M \simeq A/\phi_1 A \oplus \dots \oplus A/\phi_d A.$$

Demostración: Tenemos que

$$\Lambda^\bullet(N_1 \oplus N_2) = (\Lambda^\bullet N_1) \otimes_A (\Lambda^\bullet N_2),$$

$$\Lambda^\bullet N = A \oplus N, \text{ cuando } N \text{ es monógeno,}$$

$$A/I \otimes_A A/J = A/(I + J);$$

luego el anulador $\phi_j A$ de $\Lambda^j M$ es la intersección de todas las sumas de j ideales de la familia

$$0, \dots, 0, (p_i^{n_{ij}}).$$

Ahora está claro que $\phi_1 = \dots = \phi_r = 0$, y que $\phi_{r+j} A = \prod_i p_i^{n_{ij}} A$.

Del teorema chino del resto se sigue que

$$M \simeq A/\phi_1 A \oplus \dots \oplus A/\phi_d A.$$

Definición: Consideremos una presentación $L'_n \xrightarrow{f} L'_m \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0$, donde L'_n y L'_m son módulos libres de rangos n y m . El i -ésimo **ideal de Fitting** de M es la imagen $F_i(M) = c_i A$ del morfismo

$$\Lambda^{m-i} L' \otimes (\Lambda^{m-i} L)^* \xrightarrow{\Lambda f \otimes 1} \Lambda^{m-i} L \otimes (\Lambda^{m-i} L)^* \rightarrow A$$

y está generado por los menores de orden $m - i$ de la matriz de f .

Por convenio, $F_i = 0$ cuando $m - i > n$, y $F_i = A$ cuando $m - i < 1$.

Proposición: $c_i = \phi_{i+1} \cdots \phi_d$; es decir, $\phi_i = \frac{c_{i-1}}{c_i}$.

Demostración: Localizando en un punto de $\text{Spec } A$ podemos suponer que A es un anillo local, de cuerpo residual $k = A/pA$.

Una descomposición

$$M = A/\phi_1 A \oplus \dots \oplus A/\phi_d A = A \oplus \dots \oplus A \oplus A/\phi_{r+1} \oplus \dots \oplus A/\phi_d A,$$

define d generadores m_1, \dots, m_d de M , y consideramos la sucesión exacta

$$L'_n \otimes_A k \xrightarrow{f} L'_m \otimes_A k \xrightarrow{\pi} M \otimes_A k = k^d \rightarrow 0$$

Por Nakayama, hay una base e_1, \dots, e_m de L tal que $\pi(e_i) = m_i$.

Si $\pi(e_j) = \sum_i a_{ij} m_i$, sustituyendo e_j por $e_j - \sum_i a_{ij} e_i$ tenemos que $\pi(e_j) = 0$, $j > d$, de modo que $\phi_{r+1} e_{r+1}, \dots, \phi_d e_d, e_{d+1}, \dots, e_m$ es base de $\text{Ker } \pi$.

Procediendo igualmente con L' , obtenemos bases en que la matriz de f tiene todos los coeficientes nulos, salvo algunos de la diagonal, que son $\phi_{r+1}, \dots, \phi_d, 1, \dots, 1$.

Ahora el teorema es evidente.

Clasificación de Grupos Abelianos

1. Los factores invariantes clasifican los grupos abelianos finito generados.
2. Todo grupo abeliano finito generado descompone en suma directa de grupos cíclicos infinitos y de grupos cíclicos de órdenes potencias p^n de números primos.
3. Todo grupo abeliano de orden n tiene subgrupos de orden cualquier divisor de n .

En efecto, $p^{n-i}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ es un subgrupo de $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ de orden p^i .

Corolario: *Un sistema de ecuaciones diofánticas lineales $AX = B$ admite solución entera si y sólo si las matrices A y $(A|B)$ tienen igual rango r , y $c_r(A) = c_r(A|B)$.*

Demostración: Consideremos el morfismo $f: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^m$, $f(X) = AX$. El rango de $M = \mathbb{Z}^m/\text{Im } f$ es $\text{rg}(M) = m - \text{rg}(A)$, y el orden del subgrupo de torsión de M es $c_r(A)$.

Si el sistema tiene solución, $M = M/\mathbb{Z}B$, y $c_i(A) = c_i(A|B)$ para todo índice i .

Si carece de solución entera, entonces $B \neq 0$ en M .

Si B no es de torsión, $\text{rg}(M/\mathbb{Z}B) = \text{rg}(M) - 1$, y $\text{rg}(A|B) = \text{rg}(A) + 1$.

Si B es de torsión, entonces la torsión de $M/\mathbb{Z}B$ es menor que la de M , y $c_r(A) \neq c_r(A|B)$.

Clasificación de Endomorfismos

Sea T un endomorfismo de un k -espacio vectorial E de dimensión finita n . Pondremos

$$p(x) \cdot e = p(T)(e); \quad p(x) \in k[x], \quad e \in E.$$

Este $k[x]$ -módulo se denota E_T , es finito generado y de torsión, porque $\dim_k E < \infty$, y sus submódulos son los subespacios vectoriales invariantes, $T(V) \subseteq V$.

Dos endomorfismos T, T' de E son **equivalentes** si los correspondientes módulos son isomorfos, $E_T \simeq E_{T'}$; es decir, si existe un automorfismo lineal τ de E tal que

$$T' = \tau \circ T \circ \tau^{-1}.$$

Los factores invariantes, etc. de T son los del $k[x]$ -módulo E_T , y vamos a calcularlos a partir de la matriz A de T en una base e_1, \dots, e_n de E . Consideremos la sucesión exacta

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow k[x, y] \xrightarrow{(x-y)\cdot} k[x, y] \longrightarrow k[x] \longrightarrow 0, \\ 0 &\longrightarrow k[x] \otimes_k k[x] \xrightarrow{x \otimes 1 - 1 \otimes x} k[x] \otimes_k k[x] \longrightarrow k[x] \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

que rompe porque el último término es libre. Aplicando $(-)\otimes_{k[x]} E_T$ obtenemos

$$0 \longrightarrow k[x] \otimes_k E \xrightarrow{x \otimes 1 - 1 \otimes T} k[x] \otimes_k E \longrightarrow E_T \longrightarrow 0,$$

donde $1 \otimes e_1, \dots, 1 \otimes e_n$ es base de $k[x] \otimes_k E$, y la matriz de $x \otimes 1 - 1 \otimes T$ es $xI - A$.

Teorema: *Si c_i es el máximo común divisor de los menores de orden $n - i$ de la matriz $xI - A$, los factores invariantes de T son $\phi_i = \frac{c_{i-1}}{c_i}$.*

Nota: $c_0 = |xI - A|$ es el polinomio característico de T , y es el producto de todos los factores invariantes, $c_0 = \phi_1 \dots \phi_d$. *El polinomio característico es múltiplo del polinomio anulador, y ambos tienen los mismos factores irreducibles.*

Lema: $1, x - \alpha, \dots, (x - \alpha)^{n-1}$ forman una base de $k[x]/((x - \alpha)^n)$.

Demostración: $1, y, \dots, y^{n-1}$ es una base de $k[y]/(y^n)$, donde $y = x - \alpha$. q.e.d.

Cuando $E_T \simeq k[x]/((x - \alpha)^n)$, la matriz de T en la base $e_j = (x - \alpha)^{j-1}$ del lema es

$$T(e_j) = x \cdot (x - \alpha)^{j-1} = (x - \alpha)(x - \alpha)^{j-1} + \alpha(x - \alpha)^{j-1} = e_{j+1} + \alpha e_j,$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & & & \\ 1 & \alpha & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \alpha \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

y si los divisores elementales de T son $(x - \alpha_i)^{n_{ij}}$, en una base la matriz de T es una **matriz de Jordan** (donde B_{ij} es una matriz $n_{ij} \times n_{ij}$ de la forma 4.1, con α_i en la diagonal):

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & B_{ij} & & \\ & & \ddots & \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

lo que da las ecuaciones reducidas de los endomorfismos cuando k es algebraicamente cerrado.

En el caso del cuerpo $k = \mathbb{R}$, si consideremos un número imaginario $\alpha = a + bi$, $b \neq 0$, tenemos que $(x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$ es irreducible en $\mathbb{R}[x]$, y

Lema: $\mathbb{R}[x]/((x - \alpha)^n(x - \bar{\alpha})^n) = \mathbb{C}[x]/((x - \alpha)^n)$, isomorfismo de $\mathbb{R}[x]$ -módulos.

Demostración: El anulador de $\mathbb{C}[x]/((x - \alpha)^n)$ es múltiplo de $(x - \alpha)^n(x - \bar{\alpha})^n$, porque tiene coeficientes reales. Se concluye porque $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}[x]/((x - \alpha)^n) = 2n$. q.e.d.

La matriz de T en la base $\{e_j = (x - \alpha)^{j-1}, e'_j = i(x - \alpha)^{j-1}\}$ es

$$\begin{aligned} T(e_j) &= x \cdot (x - \alpha)^{j-1} = (x - \alpha)^j + \alpha(x - \alpha)^{j-1} \\ &= (x - \alpha)^j + a(x - \alpha)^{j-1} + bi(x - \alpha)^{j-1} = e_{j+1} + ae_j + be'_j \\ T(e'_j) &= x \cdot i(x - \alpha)^{j-1} = i(x - \alpha)^j + i\alpha(x - \alpha)^{j-1} \\ &= i(x - \alpha)^j + ai(x - \alpha)^{j-1} - b(x - \alpha)^{j-1} = e'_{j+1} + ae'_j - be_j \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} A & & & \\ I & A & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & I & A \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

En general, en una base de E la matriz de T es una matriz de Jordan 4.2, donde las matrices B_{ij} son de la forma 4.1 ó 4.3.

Clasificación de Proyectividades

Dos proyectividades $\tau, \tau': \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}(E)$ son **equivalentes** si $\tau' = \sigma\tau\sigma^{-1}$ para alguna proyectividad σ (si T y T' son representantes lineales de τ y τ' , esto significa que los endomorfismos T' y λT son equivalentes para cierta constante no nula $\lambda \in k$).

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(E) & \xrightarrow{\tau} & \mathbb{P}(E) \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma \\ \mathbb{P}(E) & \xrightarrow{\tau'} & \mathbb{P}(E) \end{array}$$

Lema: Si $\phi_i(x)$ son los factores invariantes de un endomorfismo T , los factores invariantes de λT (con $\lambda \neq 0$) son los polinomios $\phi_i(x/\lambda)$.

Demostración. $E = k[x]/(\phi_1(x)) \oplus \dots \oplus k[x]/(\phi_n(x))$. Poniendo $y = \lambda x$,

$$E \simeq k[y]/(\phi_1(\frac{y}{\lambda})) \oplus \dots \oplus k[y]/(\phi_n(\frac{y}{\lambda}))$$

donde la estructura de $k[y]$ -módulo de E es la que define el endomorfismo λT .

Este isomorfismo nos dice que los factores invariantes de λT son los polinomios $\phi_i(\frac{y}{\lambda})$.

Teorema: Dos proyectividades son equivalentes si y sólo si los factores invariantes de sus representantes tienen raíces proporcionales (y no nulas), $\phi'_i(x) = \phi_i(\lambda x)$.

HOMOGRAFÍAS DE $\mathbb{P}_{1,\mathbb{C}}$

$\phi_1 = (t-1)(t-a)$	$\theta' = a\theta$	2 puntos fijos
$\phi_1 = (t-1)^2$	$\theta' = \theta + 1$	un único punto fijo
$\phi_1 = \phi_2 = t-1$	$\theta' = \theta$	la identidad

PROYECTIVIDADES DE $\mathbb{P}_{2,\mathbb{C}}$

$\phi_1 = (t-1)(t-a)(t-b)$	$x' = ax, y' = by$	3 puntos fijos
$\phi_1 = (t-1)^2(t-a)$	$x' = x+1, y' = ay$	2 puntos fijos
$\phi_1 = (t-1)^3$	$x' = x+1, y' = x+y$	un único punto fijo
$\phi_1 = (t-1)(t-a), \phi_2 = t-1$	$x' = x, y' = ay$	1 recta y 1 aislado
$\phi_1 = (t-1)^2, \phi_2 = t-1$	$x' = x+1, y' = y$	1 recta de puntos fijos
$\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = t-1$	$x' = x, y' = y$	la identidad

PROYECTIVIDADES DE $\mathbb{P}_{3,\mathbb{C}}$

$\phi_1 = (t-1)(t-a)(t-b)(t-c)$	$x' = ax, y' = by, z' = cz$	4 puntos fijos
$\phi_1 = (t-1)^2(t-a)(t-b)$	$x' = x+1, y' = ay, z' = bz$	3 puntos fijos
$\phi_1 = (x-1)^2(t-a)^2$	$x' = x+1, y' = ay, z' = y+az$	2 puntos fijos
$\phi_1 = (t-1)^3(t-a)$	$x' = x+1, y' = x+y, z' = az$	2 puntos fijos
$\phi_1 = (t-1)^4$	$x' = x+1, y' = x+y, z' = y+z$	1 punto fijo
$\phi_1 = (t-1)(t-a)(t-b), \phi_2 = t-1$	$x' = x, y' = ay, z' = bz$	1 recta y 2 aislados
$\phi_1 = (t-1)^2(t-a), \phi_2 = t-1$	$x' = x+1, y' = y, z' = az$	1 recta y 1 aislado
$\phi_1 = (t-1)^2(t-a), \phi_2 = t-a$	$x' = x+1, y' = ay, z' = az$	1 recta y 1 aislado
$\phi_1 = (t-1)^3, \phi_2 = t-1$	$x' = x+1, y' = x+y, z' = z$	1 recta
$\phi_1 = \phi_2 = (t-1)(t-a)$	$x' = x, y' = ay, z' = az$	2 rectas
$\phi_1 = (t-1)(t-a), \phi_2 = \phi_3 = t-1$	$x' = x, y' = y, z' = az$	1 plano y 1 aislado
$\phi_1 = (t-1)^2, \phi_2 = \phi_3 = t-1$	$x' = x+1, y' = y, z' = z$	1 plano
$\phi_1 = \phi_2 = (t-1)^2$	$x' = x+1, y' = y, z' = y+z$	1 recta
$\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = t-1$	$x' = x, y' = y, z' = z$	la identidad

4.4.2. El Grupo K de Grothendieck

Dar una función **aditiva** sobre la categoría \mathcal{C} de A -módulos finitos generados es asignar a cada A -módulo finito generado M un elemento $\chi(M)$ de un grupo abeliano dado, de modo que $\chi(M) = \chi(M') + \chi(M'')$ para toda sucesión exacta

$$(*) \quad 0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

Una función aditiva $\xi : \mathcal{C} \rightarrow K$ es universal si cualquier otra función aditiva $\chi : \mathcal{C} \rightarrow G$ factoriza de modo único a través de ξ : existe un único morfismo de grupos $f : K \rightarrow G$ tal que $\chi = f \circ \xi$. Si $\xi_1 : \mathcal{C} \rightarrow K_1$, $\xi_2 : \mathcal{C} \rightarrow K_2$ son dos funciones aditivas universales, existe un único isomorfismo de grupos $f : K_1 \rightarrow K_2$ tal que $\xi_2 = f \circ \xi_1$.

La existencia de una función aditiva universal se sigue del teorema de representabilidad; pero es sencillo construirla directamente. Consideremos el grupo abeliano libre generado por las clases de isomorfismo de módulos finitos, y su cociente $K(A)$ por el subgrupo generado por los elementos $M - M' - M''$, uno para cada sucesión exacta $(*)$, de modo que, si $[M]$ denota la clase de M , en $K(A)$ tenemos que $[M] = [M'] + [M'']$ y, para cada función aditiva χ tenemos un único morfismo de grupos $f : K(A) \rightarrow G$ tal que $\chi(M) = f([M])$.

Nótese que $[M \oplus N] = [M] + [N]$, de modo que todo elemento de $K(A)$ es de la forma $[M_1] - [M_2]$, aunque no de modo único.

Igualmente tendremos un grupo K de los A -módulos de longitud finita, $K_{lf}(A)$, de los A -módulos proyectivos finitos generados, etc.

Ejemplo: Si A es un dominio de ideales principales, los teoremas de descomposición muestran que en $K(A)$ tenemos que $[M] = r[A] + \sum_{ij} [A/p_i^{n_{ij}}]$. Además, la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} A \longrightarrow A/fA \longrightarrow 0$$

muestra que $[A/fA] = [A] - [A] = 0$ cuando $f \neq 0$. Luego $[M] = r[A]$, y $\text{rg} : K(A) \rightarrow \mathbb{Z}$ es un isomorfismo. En este caso el rango es la función aditiva universal.

Definición: Si A es un dominio de ideales principales, los **divisores** de $X = \text{Spec } A$ son las combinaciones formales finitas con coeficientes enteros $n_1x_1 + \dots + n_sx_s$ de puntos cerrados, y forman un grupo abeliano $\text{Div}(X)$. El divisor de una función $f = p_1^{n_1} \dots p_s^{n_s} \in A$ es

$$D(f) = n_1x_1 + \dots + n_sx_s, \mathfrak{m}_{x_i} = p_iA.$$

Ejemplos: $D : \mathbb{Q}_+^* \rightarrow \text{Div}(\text{Spec } \mathbb{Z})$ es un isomorfismo de grupos.

$\text{Div}(\text{Spec } k[x])$ es isomorfo al grupo multiplicativo de las funciones racionales $\frac{x^n + \dots}{x^m + \dots}$, donde cada función racional f/g se corresponde con $D(f) - D(g)$.

Teorema: El producto de los divisores elementales, $c_0 = \prod_{i,j} p_i^{n_{ij}} = \prod_i \phi_i$, define la función aditiva universal sobre los A -módulos de longitud finita:

$$K_{lf}(A) = \text{Div}(X), [M] \mapsto D(c_0(M)) = \sum_{i,j} n_{ij}x_i.$$

Demostración: Sabemos que $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_s$, $M_i \simeq \bigoplus_j A/p_i^{n_{ij}} A$. Como $l(A/p_i^n A) = n$,

$$D(c_0(M)) = \sum_i (\sum_j n_{ij})x_i = l(M_1)x_1 + \dots + l(M_s)x_s,$$

y ésta es una función aditiva porque lo es la longitud.

Luego define un morfismo de grupos $K_{lf}(A) \rightarrow \text{Div}(X)$, $[A/\mathfrak{m}_x] \mapsto x$, y es isomorfismo porque los elementos $[A/\mathfrak{m}_x]$ generan $K_{lf}(A)$, pues $[A/p^n A] = n[A/pA]$, como muestran las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow A/pA \xrightarrow{p^n} A/p^{n+1}A \longrightarrow A/p^nA \longrightarrow 0$$

Corolario: En los grupos abelianos finitos, el orden es la función aditiva universal.

En los endomorfismos, el polinomio característico es la función aditiva universal.

4.5. Pares de Métricas

T_2, T'_2 métricas simétricas en un espacio vectorial E de dimensión finita sobre un cuerpo k de característica $\neq 2$, y T_2 no singular.

$$\begin{aligned} e \cdot v &= T_2(e, v) , \quad e * v = T'_2(e, v) \\ (Te) \cdot v &= e * v = e \cdot (Tv) \end{aligned}$$

Este endomorfismo T induce una estructura de $k[x]$ -módulo en E .

1. La polaridad $\phi : E \rightarrow E^*$ asociada a T_2 es un isomorfismo de $k[x]$ -módulos.
2. El ortogonal (para T_2) de un submódulo también es un submódulo.
3. Si dos submódulos son ortogonales para T_2 , también lo son para T'_2 .
4. El radical (para T_2) de un submódulo está contenido en su radical para T'_2 .
5. Si $\bar{T} : \bar{E} \rightarrow \bar{E}$ es el endomorfismo asociado a otro par de métricas (\bar{T}_2, \bar{T}'_2) , un isomorfismo k -lineal $E_T \xrightarrow{\sim} \bar{E}_{\bar{T}}$ transforma el par (T_2, T'_2) en (\bar{T}_2, \bar{T}'_2) si y sólo si es un isomorfismo de $k[x]$ -módulos que transforma T_2 en \bar{T}_2 .

Primer Teorema de Descomposición: Sea $p = p_1^{n_1} \dots p_s^{n_s}$ la descomposición en factores irreducibles del polinomio anulador de T . La descomposición en suma directa de submódulos anulados por $p_i^{n_i}$ es ortogonal para ambas métricas:

$$E = E_1 \perp \dots \perp E_s \quad , \quad E_i = \text{Ker } p_i^{n_i} .$$

Demostración: $\phi : E \rightarrow E^* = E_1^* \oplus \dots \oplus E_s^*$ es un isomorfismo de módulos, y $p_i^{n_i}$ anula a $E_i^* = \{\omega \in E^* : \omega(E_j) = 0, j \neq i\}$. Luego $\phi(E_i) = E_i^*$, y $E_i \cdot E_j = 0$ cuando $j \neq i$.

Definición: Un $k[x]$ -módulo es **homogéneo** si es suma directa de módulos monógenos de igual anulador p^n , con p irreducible: $M \simeq A/p^n \oplus \dots \oplus A/p^n$.

Segundo Teorema de Descomposición: E es suma ortogonal de módulos homogéneos.

Demostración: Podemos suponer que $E = H_n \oplus \dots \oplus H_1$, donde H_i es homogéneo, de anulador p^i . El punto radica en que H_n es no singular, pues su radical es un submódulo y, si no fuera nulo, tendría un elemento $p^{n-1}e \neq 0$, que estaría en el radical de E :

$$p^{n-1}e \cdot H_i = e \cdot p^{n-1}H_i = 0 \quad , \quad i \leq n-1 .$$

Ahora $E = H_n \perp H_n^\perp$, y se termina por inducción.

q.e.d.

Nos queda el caso en que E es homogéneo, de anulador p^n . Tenemos la filtración

$$E = E_n \supset E_{n-1} \supset \dots \supset E_1 \supset E_0 = 0 \quad , \quad E_i = p^{n-i}E .$$

1. $\dim E_i = i \dim E_1$, porque $p : E_i \rightarrow E_{i-1}$ es un epimorfismo de núcleo E_1 .
2. $E_i \cdot E_j = 0$, cuando $i + j \leq n$, porque $p^{n-i}E \cdot p^{n-j}E = E \cdot p^{2n-i-j}E = 0$.
3. $E_1 = E_{n-1}^\perp = \text{rad } E_{n-1}$, porque $E_1 \subset E_{n-1}^\perp$, y ambos tienen igual dimensión.

Tercer Teorema de Descomposición: *Existen subespacios $F_i \subset E_i$ tales que*

1. $E = F_n \oplus F_{n-1} \oplus \dots \oplus F_1$.
2. p define un isomorfismo $p : F_i \rightarrow F_{i-1}$, $i \geq 2$.
3. $F_i \cdot F_j = 0$, cuando $i + j \neq n + 1$.

Demostración: Cuando $n = 1$, tomamos $F_1 = E_1$. Si $n = 2$, $F_1 = E_1$ es totalmente isótropo, así que existe otro subespacio totalmente isótropo F_2 tal que $E = F_2 \oplus F_1$, y terminamos.

Sea $n \geq 3$, y sean $\bar{T}_2, \bar{T}'_2, \bar{T}$ las proyecciones de T_2, T'_2 y T por $\pi : E \rightarrow \bar{E} = E_{n-1}/E_1$. \bar{T}_2 es no singular, \bar{T} es el endomorfismo asociado a la pareja (\bar{T}_2, \bar{T}'_2) , y su anulador es p^{n-2} . Por inducción existen subespacios $\bar{F}_i \subset \bar{E}_i$ tales que

1. $\bar{E} = \bar{F}_{n-2} \oplus \dots \oplus F_1$.
2. p define un isomorfismo $p : \bar{F}_i \rightarrow \bar{F}_{i-1}$, $i \geq 2$.
3. $\bar{F}_i \cdot \bar{F}_j = 0$, cuando $i + j \neq n - 2 + 1 = n - 1$.

Elegimos un subespacio $F_{n-1} \subset E_{n-1}$ tal que π define un isomorfismo $F_{n-1} \rightarrow \bar{F}_{n-2}$ (lo que nos da mucha libertad para fijarlo), y ponemos $F_1 = E_1$, $F_i = p^{n-i-1}F_{n-1}$.

Todos los morfismos del siguiente diagrama conmutativo son isomorfismos

$$\begin{array}{ccccccc} F_{n-1} & \xrightarrow{p} & F_{n-2} & \xrightarrow{p} & \dots & \xrightarrow{p} & F_2 & \xrightarrow{p} & F_1 \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi & & & & \downarrow \pi & & \\ \bar{F}_{n-2} & \xrightarrow{p} & \bar{F}_{n-3} & \xrightarrow{p} & \dots & \xrightarrow{p} & \bar{F}_1 & & \end{array}$$

y los subespacios F_{n-1}, \dots, F_1 verifican las condiciones de ortogonalidad exigidas: F_1 es ortogonal a todos, incluido él mismo, y $\pi : F_{n-2} \oplus \dots \oplus F_2 \rightarrow \bar{E}$ es una isometría; luego $F_i \cdot F_j = 0$ cuando $i - 1 + j - 1 \neq n - 1$; es decir, $i + j \neq n + 1$.

Hay que hallar un subespacio totalmente isótropo F_n tal que $F_n \xrightarrow{p} pF_n$, y $pF_n \xrightarrow{\pi} \bar{F}_{n-2}$ sean isomorfismos (pondríamos $F_{n-1} = pF_n$), y $F_n \cdot F_i = 0$ cuando $i \neq 1$. Elegimos un subespacio U_n tal que $p : U_n \xrightarrow{\sim} F_{n-1}$, y en $U_n \oplus F_2$ consideramos la siguiente métrica

$$e \circ v = e \cdot pv ,$$

que es no singular. Si R es su radical, tendremos

$$\begin{aligned} 0 &= R \circ F_2 = R \cdot pF_2 = R \cdot F_1 , \\ 0 &= R \circ U_n = R \cdot pU_n = R \cdot F_{n-1} . \end{aligned}$$

La primera igualdad prueba que $R \subseteq E_{n-1}$, y por tanto $R \subseteq F_2$. Ahora la segunda afirma que $\pi(R) \subseteq \text{rad } \bar{E} = 0$. Luego $R = 0$ porque $\pi : F_2 \rightarrow \bar{F}_1$ es isomorfismo.

Para esta métrica F_2 es totalmente isótropo

$$F_2 \circ F_2 = F_2 \cdot pF_2 = F_2 \cdot F_1 = 0 \quad , \quad \text{porque } n \geq 3 ,$$

y existe un subespacio $V_n \subset U_n \oplus F_2$ totalmente isótropo para \circ (es decir, $V_n \cdot pV_n = 0$) tal que $U_n \oplus F_2 = V_n \oplus F_2$. Además $\pi(pV_n) = \pi(pU_n) = \bar{F}_{n-2}$, así que podemos tomar $F_{n-1} = pV_n$, de modo que $p : V_n \xrightarrow{\sim} F_{n-1}$, y $V_n \cdot F_{n-1} = 0$; pero no es isótropo.

Ahora $V_n \oplus F_1$ es no singular para T_2 y F_1 es totalmente isótropo; luego existe F_n totalmente isótropo con $F_n \oplus F_1 = V_n \oplus F_1$, y es el subespacio buscado: es claro que $E = F_n \oplus E_{n-1}$ y $p : F_n \xrightarrow{\sim} F_{n-1}$, es isótropo, $F_n \cdot F_{n-1} = (V_n \oplus F_1) \cdot F_{n-1} = 0$, y

$$F_n \cdot F_i = F_n \cdot pF_{i+1} = pF_n \cdot F_{i+1} = F_{n-1} \cdot F_{i+1} = 0 \quad , \quad n+i \neq n+1 .$$

Corolario: Si k es algebraicamente cerrado, E es suma ortogonal de monógenos.

Demostración: El radical de la métrica $p^{n-1}e \cdot v$ es $\text{Ker } p^{n-1} = E_{n-1}$, así que existe $e \in F_n$ tal que $p^{n-1}e \cdot e \neq 0$. El subespacio $V = \langle e, pe, \dots, p^{n-1}e \rangle$ es no singular, y es un submódulo porque el grado de p es 1. Ahora $E = V \perp V^\perp$, y se termina por inducción.

Teorema: Si k es algebraicamente cerrado, las parejas de métricas simétricas (la primera no singular) están clasificadas por los divisores elementales de T .

Demostración: Cuando el espacio es un monógeno de anulador $p^n = (x - \alpha)^n$, por el tercer teorema existe una base e_n, \dots, e_1 , donde $e_i = p^{n-i}e_n$, y

$$e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1 & \text{cuando } i+j = n+1 \\ 0 & \text{cuando } i+j \neq n+1 \end{cases}$$

$$e_i * e_j = (Te_i) \cdot e_j = (\alpha e_i + e_{i-1}) \cdot e_j = \begin{cases} \alpha & \text{cuando } i+j = n+1 \\ 1 & \text{cuando } i+j = n+2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \quad , \quad T'_2 = \begin{pmatrix} & & 1 & \alpha \\ & \ddots & \ddots & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ \alpha & & & \end{pmatrix}$$

Definiciones: Los haces de cuádricas $\lambda T_2 + \mu T'_2$ en $\mathbb{P}(E)$ son las rectas del espacio de cuádricas $\mathbb{P}(S_2E)$. Por cada punto de $\mathbb{P}(E)$ pasa una única cuádrica del haz, o todas, en cuyo caso diremos que es un punto base del haz. Los puntos fundamentales son los puntos de los vértices de las cuádricas singulares del haz. Sólo consideraremos haces con alguna cuádrica no singular. Los endomorfismos asociados a dos parejas de cuádricas de un haz difieren en una homografía, así que, aunque los factores invariantes del endomorfismo asociado no son invariantes del haz, sí lo son sus grados y las multiplicidades de sus raíces (y razones dobles si hubiera 4 ó más raíces).

Haces de Cónicas en $\mathbb{P}_{2,\mathbb{C}}$

1. Anulador con 3 raíces simples. Es el haz definido por 2 cónicas que se cortan en 4 puntos. El haz tiene 3 pares de rectas.

$$\lambda(x_0^2 + x_2^2 + x_2^2) + (x_0^2 - x_1^2) = 0 .$$

2. Anulador con una raíz doble y otra simple. Es el haz definido por 2 cónicas que se cortan en 3 puntos, con tangente común en uno de ellos. Tiene 2 puntos fundamentales, uno de los cuales es base, y todas las cónicas del haz son tangentes en él a la recta que pasa por los puntos fundamentales.

$$\lambda(2x_0x_1 + x_2^2) + (x_0^2 + x_2^2) = 0 .$$

3. Anulador con una raíz triple. Es el haz definido por 2 cónicas que se cortan en 2 puntos, con tangente común en uno de ellos. El haz tiene un único punto fundamental.

$$\lambda(2x_0x_1 + x_2^2) + x_0x_1 = 0 .$$

4. ϕ_1 con 2 raíces simples, una raíz de ϕ_2 . Es el haz definido por 2 cónicas que se cortan en 2 puntos, con tangente común en ambos. El haz tiene una recta de puntos fundamentales, y otro punto fundamental exterior.

$$\lambda(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2) + x_0^2 = 0 .$$

5. ϕ_1 con una raíz doble, que es raíz de ϕ_2 . Es el haz definido por 2 cónicas que se cortan en un único punto, con tangente común. El haz tiene una recta de puntos fundamentales.

$$\lambda(2x_0x_1 + x_2^2) + x_0^2 = 0 .$$

Haces de Cuádricas en $\mathbb{P}_{3,\mathbb{C}}$

1. Anulador con 4 raíces simples. En el haz hay 4 conos, y sus vértices no son coplanarios. La cuártica base es irreducible (no contiene rectas ni cónicas) y alabeada (no está contenida en un plano). Este caso es el único que recoge infinitas clases de equivalencia, según la razón doble de las 4 raíces.

$$\lambda(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + (ax_0^2 + x_1^2 - x_2^2) = 0 \quad , \quad a \neq 0, 1, -1 .$$

2. Anulador con 2 raíces simples y una doble. En el haz hay 3 conos, con vértices no alineados. El vértice de un cono yace en los otros dos conos.

$$\lambda(2x_0x_1 + x_2^2 + x_3^2) + (x_0^2 - x_2^2 + x_3^2) = 0 .$$

Cuártica base irreducible y alabeada. Se parametriza con el haz de planos $x_0 = x_2 - tx_3$ de base la recta que pasa por el punto fundamental de la cuártica y otro punto de ella.

3. Anulador con 2 raíces dobles. En el haz hay 2 conos, y la recta que une sus vértices es una generatriz común.

$$\lambda(x_0x_1 + x_2x_3) + (x_0^2 + 2x_0x_1 + x_2^2) = 0 .$$

La cuártica base está formada por la generatriz común, y una cúbica alabeada que se parametriza cortando con el haz de planos $x_0 = tx_2$ de base dicha recta.

4. Anulador con una raíz simple y otra triple. En el haz hay 2 conos, y el vértice de uno incide en el otro.

$$\lambda(x_1^2 + 2x_0x_2 + x_3^2) + (2x_0x_1 + x_3^2) = 0 .$$

Cuártica base irreducible y alabeada. Se parametriza con el haz de planos $x_1 = tx_2$.

5. Anulador con una raíz de multiplicidad 4. El haz tiene un único cono.

$$\lambda(x_0x_3 + x_1x_2) + (2x_0x_2 + x_1^2) = 0 .$$

La cuártica base está formada por una cúbica y su “tangente” en un punto, que es el único punto fundamental del haz. La cúbica se parametriza con el haz de planos $x_1 = tx_0$ de base la tangente.

6. ϕ_1 con 3 raíces simples, una de ellas raíz de ϕ_2 . Hay 2 conos, y un par de planos que no pasan por sus vértices. La cuártica base son 2 cónicas no coplanarias que se cortan en 2 puntos.

$$\lambda(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + (x_2^2 - x_3^2) = 0 .$$

7. ϕ_1 con una raíz doble y otra simple, que es raíz de ϕ_2 . En el haz hay un par de planos, y un cono con vértice incidente con uno de los dos planos. La cuártica base está formada por una cónica y un par de rectas concurrentes que no son coplanarias con la cónica, y la cortan en puntos distintos.

$$\lambda(2x_0x_1 + x_2^2 + x_3^2) + (2x_0x_1 + x_0^2) = 0 .$$

8. ϕ_1 con una raíz simple y otra doble, que es raíz de ϕ_2 . En el haz hay un par de planos, y un cono, con vértice no incidente con el par de planos, que es tangente al vértice del par de planos. La cuártica base está formada por 2 cónicas no coplanarias, que se cortan en un único punto con tangente común.

$$\lambda(2x_0x_1 + x_2^2 + x_3^2) + (x_0^2 + x_3^2) = 0 .$$

9. ϕ_1 con una raíz triple, que es raíz de ϕ_2 . En el haz hay un par de planos, uno de ellos es tangente a todas las cuádricas del haz. La cuártica base está formada por una cónica y dos rectas, situadas en otro plano, que la cortan en un único punto.

$$\lambda(2x_0x_2 + x_1^2 + x_3^2) + x_0x_1 = 0 .$$

10. $\phi_1 = \phi_2$, con 2 raíces simples. En el haz hay 2 pares de planos, cuyos vértices son rectas que se cruzan. La cuártica base es un cuadrilátero alabeado.

$$\lambda(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + (x_0^2 + x_1^2) = 0 .$$

11. ϕ_1 con 2 raíces simples, una de ellas raíz de ϕ_2 y ϕ_3 . En el haz hay un cono, y un plano doble no incidente con su vértice. La cuártica base es una cónica doble.

$$\lambda(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + x_0^2 = 0 .$$

12. $\phi_1 = \phi_2$, con una raíz doble. En el haz hay un único par de planos.

$$\lambda(x_0x_1 + x_2x_3) + (x_0^2 + x_2^2) = 0 .$$

El espacio E es suma ortogonal de dos monógenos de anulador x^2 , y xE es el representante de la recta R de puntos fundamentales. Por el tercer teorema xE es totalmente isótropo para todas las métricas del haz, y la cuártica base está formada por la recta R (contada dos veces) y otras dos rectas que la cortan y se cruzan entre sí.

13. ϕ_1 con una raíz doble, que es raíz simple de ϕ_2 y ϕ_3 . En el haz hay un plano doble.

$$\lambda(2x_0x_1 + x_2^2 + x_3^2) + x_0^2 = 0 .$$

En este caso $E = E_2 \perp E'_2$, donde E_2 es monógeno de anulador x^2 , y E'_2 es suma ortogonal de dos monógenos de anulador x . El representante del plano doble es $xE_2 \perp E'_2$ y, por el tercer teorema, xE_2 es isótropo para todas las métricas del haz; luego xE'_2 está en el radical de la restricción de cualquier métrica del haz al plano doble. Todas las cuádricas no singulares del haz cortan al plano doble en un par de rectas.

4.5.1. Métricas Simétrica y Hemisimétrica

Ahora supondremos que T_2 es simétrica no singular, y T'_2 es hemisimétrica.

$$(Te) \cdot v = e * v = e \cdot (-Tv)$$

$$qe \cdot v = e \cdot \bar{q}v, \text{ donde } \bar{q}(x) = q(-x)$$

Luego T y $-T$ tienen igual anulador $p(x)$, de modo que $p(-x) = \pm p(x)$. Si $p = p_1^{n_1} \dots p_s^{n_s}$ es la descomposición en factores irreducibles, para cada factor p_i tendremos $(\bar{p}_i) = (p_i)$, ó $(\bar{p}_i) = (p_j)$ con algún $j \neq i$, en cuyo caso también $(\bar{p}_j) = (p_i)$.

Primer Teorema de Descomposición: *En la descomposición $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_s$ en suma directa de submódulos primarios, cada sumando E_i es*

1. *no singular (para T_2) y ortogonal a los restantes sumandos, cuando $(\bar{p}_i) = (p_i)$,*
2. *o totalmente isótropo, en cuyo caso existe otro sumando E_j totalmente isótropo tal que $E_i \oplus E_j$ es no singular y ortogonal a los restantes sumandos, cuando $(\bar{p}_i) = (p_j)$.*

Demostración: La polaridad $\phi : E \rightarrow E^*$ de T_2 es un isomorfismo semilineal, $\phi(qe) = \bar{q}\phi(e)$, así que transforma E_i en la componente \bar{p}_i -primaria de $E^* = E_1^* \oplus \dots \oplus E_s^*$.

1. Si $(\bar{p}_i) = (p_i)$, entonces $\phi(E_i) = E_i^*$, y E_i es no singular y ortogonal a los demás.
2. Si $(\bar{p}_i) = (p_j)$, y por tanto $(\bar{p}_j) = (p_i)$, entonces $\phi(E_i) = E_j^*$, y $\phi(E_j) = E_i^*$, así que E_i y E_j son totalmente isótropos, y $E_i \oplus E_j$ es no singular y ortogonal a los restantes sumandos, porque $\phi(E_i \oplus E_j) = E_i^* \oplus E_j^* = (E_i \oplus E_j)^*$. q.e.d.

En el primer caso, los teoremas segundo y tercero de descomposición son válidos, con sus demostraciones, porque $p^n e \cdot v = e \cdot \bar{p}^n v = \pm e \cdot p^n v$. El segundo caso es mucho más sencillo, y la estructura de módulo clasifica el par de métricas, sea cual sea el cuerpo k :

Teorema: *En el caso 2, en $E_i \oplus E_j$ el par de métricas es único, salvo un automorfismo.*

Demostración: Si S_2, S'_2 es otro par de métricas que definen la misma estructura de módulo, $S_2(Te, v) = S'_2(e, v)$, y $\varphi : E \xrightarrow{\sim} E^*$, $\varphi(e) = i_e S_2$ es la polaridad asociada, tenemos que $\tau = \phi^{-1}\varphi : E_i \rightarrow E_i$ es un isomorfismo de módulos tal que

$$S_2(e_i, e_j) = \tau e_i \cdot e_j ;$$

luego $\tau \oplus 1 : E_i \oplus E_j \rightarrow E_i \oplus E_j$ transforma T_2 en S_2 , y por tanto también T'_2 en S'_2 .

Teorema: *Si k es algebraicamente cerrado, las parejas de métricas simétrica y hemisimétrica (la primera no singular) están clasificadas por los divisores elementales de T , que no son arbitrarios. Si $\alpha \neq 0$, hay tantos divisores elementales $(x - \alpha)^n$ como $(x + \alpha)^n$, y el número de divisores elementales iguales a x^{2n} es par.*

Demostración: Si $p = x - \alpha$, entonces $\bar{p} = -(x + \alpha)$, y estamos en caso 2, en que los divisores elementales clasifican, y hay tantos divisores elementales $(x - \alpha)^n$ como $(x + \alpha)^n$.

En este caso, para dar ecuaciones reducidas del par de métricas, basta considerar la suma directa $V \oplus \bar{V}$ de dos monógenos de anuladores $(x - \alpha)^n$ y $(x + \alpha)^n$. Fijada una base $e, pe, \dots, p^{n-1}e$

de V , su imagen por la polaridad es una base de \bar{V}^* que, considerada en orden inverso, es dual de cierta base $\bar{e}, \bar{p}\bar{e}, \dots, \bar{p}^{n-1}\bar{e}$ de \bar{V} , y

$$p^i e \cdot \bar{p}^j \bar{e} = e \cdot \bar{p}^{i+j} \bar{e} = \begin{cases} 1 & \text{cuando } i+j = n-1 \\ 0 & \text{cuando } i+j \neq n-1 \end{cases}$$

$$p^i e * \bar{p}^j \bar{e} = T p^i e \cdot \bar{p}^j \bar{e} = (\alpha p^i e + p^{i+1} e) \cdot \bar{p}^j \bar{e} = \begin{cases} \alpha & \text{cuando } i+j = n-1 \\ 1 & \text{cuando } i+j = n-2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}, \quad T'_2 = \begin{pmatrix} 0 & A \\ -A & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} & & 1 & \alpha \\ & \ddots & \ddots & \\ 1 & \ddots & & \\ \alpha & & & \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Cuando $p = x$, y $\bar{p} = -x$, por el segundo teorema de descomposición podemos reducirnos al caso de un módulo homogéneo de anulador x^n . Si n es par, la métrica $p^{n-1}e \cdot v$ es hemisimétrica, y $p^{n-1}e \cdot e = 0$ para todo $e \in F_n$; pero $p^{n-1}e \cdot \bar{e} = 1$ para algún $\bar{e} \in F_n$, y los submódulos monógenos $V = \langle e, pe, \dots, p^{n-1}e \rangle$, y $\bar{V} = \langle \bar{e}, \bar{p}\bar{e}, \dots, \bar{p}^{n-1}\bar{e} \rangle$ son totalmente isótropos, su intersección es nula, y $V \oplus \bar{V}$ es no singular. El cálculo anterior prueba que las matrices de las métricas son 4.4, con $\alpha = 0$. Como $E = (V \oplus \bar{V}) \perp (V \oplus \bar{V})^\perp$, por inducción E es suma ortogonal de parejas isomorfas a $V \oplus \bar{V}$.

Si n es impar, la métrica $p^{n-1}e \cdot v$ es simétrica, y el argumento dado en la página 121 prueba que el espacio es suma ortogonal de monógenos, en los que el par de métricas está ya determinado, pues por el tercer teorema existe una base $e, Te, \dots, T^{n-1}e$ tal que $T^{n-1}e \cdot e \neq 0$, y al ser k algebraicamente cerrado, podemos suponer que $T^{n-1}e \cdot e = 1$,

$$T^i e \cdot T^j e = (-1)^j T^{i+j} e \cdot e = \begin{cases} (-1)^j & \text{cuando } i+j = n-1 \\ 0 & \text{cuando } i+j \neq n-1 \end{cases}$$

$$T^i e * T^j e = T^{i+1} e \cdot T^j e = \begin{cases} (-1)^j & \text{cuando } i+j = n-2 \\ 0 & \text{cuando } i+j \neq n-2 \end{cases}$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & -1 & \\ & \ddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}, \quad T'_2 = \begin{pmatrix} & -1 & 0 \\ & 1 & 0 \\ \ddots & \ddots & \\ 0 & & \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Ejemplo: En el espacio-tiempo de Minkowski, si $F(v)$ es la fuerza que actúa sobre una partícula de carga unidad, medida por un observador inercial de velocidad v , como ha de ser un vector espacial, tenemos que $F(v) \cdot v = 0$. Es decir, $\Omega_2(e, e') = g(F(e), e')$ es un tensor hemisimétrico, y F es el endomorfismo asociado al par de métricas (g, Ω_2) . En un sistema de referencia inercial, la 2-forma Ω_2 será

$$\Omega_2 = (E_1 \omega_1 + e_2 \omega_2 + E_3 \omega_3) \wedge \omega_0 + B_1 \omega_2 \wedge \omega_3 + B_2 \omega_3 \wedge \omega_1 + B_3 \omega_1 \wedge \omega_2$$

y, aunque las intensidades de fuerza eléctrica \vec{E} y magnética \vec{B} dependen del observador inercial, no así los coeficientes del polinomio característico del endomorfismo asociado F ,

$$x^4 + (\vec{B}^2 - \vec{E}^2)x^2 - (\vec{E} \cdot \vec{B})^2 = (x^2 - \alpha^2)(x^2 + \beta^2),$$

$$\vec{B}^2 - \vec{E}^2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 - E_1^2 - E_2^2 - E_3^2 = \beta^2 - \alpha^2,$$

$$(\vec{E} \cdot \vec{B})^2 = (E_1 B_1 + E_2 B_2 + E_3 B_3)^2 = \alpha^2 \beta^2.$$

Si $\beta \neq 0$, hay un monógeno E_β de anulador $x^2 + \beta^2$, que es un plano no singular, y ha de tener un vector de cuadrado $e \cdot e = -1$, lo que ya determina el par de métricas:

$$xe \cdot e = e * e = 0, \quad xe \cdot xe = -e \cdot x^2 e = \beta^2, \quad e * xe = xe \cdot xe = \beta^2.$$

Si $\Omega_2 \neq 0$, el polinomio característico de F clasifica el par (g, Ω_2) :

1. Si $\beta \neq 0$, hay otros dos divisores elementales $x - \alpha$, $x + \alpha$; pues un único divisor x^2 es imposible. Es el caso en que para un observador inercial los vectores \vec{E} y \vec{B} son paralelos y de módulos α y β respectivamente (eventualmente $\alpha = 0$).
2. Si $\beta = 0$, $\alpha \neq 0$, hay dos divisores elementales iguales a x , y en la componente primaria E_β tenemos $\Omega_2 = 0$. Para un observador inercial $\vec{B} = 0$, y $|\vec{E}| = \alpha$.
3. Si $\beta = \alpha = 0$, los divisores elementales no son x^2 , x^2 , porque en tal caso 4.4 muestra que el índice de g sería 2. Los divisores elementales son x^3 , x . En el monógeno de anulador x^3 tendremos una base e, Te, T^2e con $T^2e \cdot e = \pm 1$, y $T^2e \cdot e = 1$, porque en otro caso la matriz de g sería la opuesta de 4.5, y sería definido-positiva en un plano. Para un observador inercial los vectores \vec{E} y \vec{B} son ortogonales y de módulo 1.

Nota: Si T_2 es simétrico y no singular, cualquiera que sea el tensor T'_2 , tenemos que

$$Te \cdot v = T'_2(e, v) = e \cdot \bar{T}v$$

para ciertos endomorfismos $T, \bar{T} : E \rightarrow E$. Hemos estudiado los casos $\bar{T} = T$ y $\bar{T} = -T$; pero el análisis se extiende a cualquier involución que relacione \bar{T} con T . Así, en el caso de una isometría T , tenemos que $Te \cdot v = e \cdot T^{-1}v$, de modo que E es un $k[x, x^{-1}]$ -módulo y la polaridad $\phi : E \rightarrow E^*$ es semilineal, de automorfismo $p(x) \mapsto \bar{p}(x) = p(x^{-1})$.

Los teoremas de descomposición y sus demostraciones son válidos cuando T_2 es hemisimétrico y no singular; pero $\bar{T} = T$ cuando T'_2 es hemisimétrico, y $\bar{T} = -T$ cuando T'_2 es simétrico.

Todo tensor T_2 descompone, y de modo único, en suma de un tensor simétrico y otro hemisimétrico, $T_2 = S_2 + H_2$, de modo que, cuando k es algebraicamente cerrado, los teoremas anteriores permiten clasificar los tensores covariantes de orden 2 (al menos cuando S_2 ó H_2 es no singular), y por tanto las correlaciones (proyectividades $\mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}_n^*$).

Parte III
Tercer Curso

Capítulo 5

Álgebra Conmutativa

Un espacio topológico no vacío X es **irreducible** si no es unión de dos cerrados más pequeños, y una **componente irreducible** de X es un subespacio irreducible maximal.

Por el lema de Zorn, todo punto está en alguna componente irreducible, y éstas son cerradas porque el cierre de un subespacio irreducible también es irreducible..

El cierre de un punto siempre es irreducible, y cuando X es el espectro de un anillo A , todo cerrado irreducible C es el cierre de un punto, el que define el ideal primo formado por las funciones $f \in A$ que se anulan en C . Así, las componentes irreducibles de X se corresponden con los ideales primos minimales de A , y todo ideal primo contiene un primo minimal.

Pondremos $x \leq y$ cuando $x \in \bar{y}$, es decir $\mathfrak{p}_y \subseteq \mathfrak{p}_x$, y decimos que x es una **especialización** de y . La **dimensión de Krull** de A es la mayor longitud de las cadenas de ideales primos $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \dots \subset \mathfrak{p}_n$ (o de cerrados irreducibles de X , o de especializaciones $x_0 > x_1 \dots > x_n$).

El **radical** de un ideal $\text{rad } I = \{a \in A : a^n \in I, \text{ para algún } n \geq 1\}$ es la intersección de los primos que lo contienen (p. 74), y es el mayor ideal con los mismos ceros.

Teorema: Si $A \rightarrow B$ es inyectivo, $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ tiene imagen densa.

Demostración: Si $x \in \text{Spec } A$ es el punto que define un primo minimal, $A_x \rightarrow B_x$ es inyectivo.

Luego $B_x \neq 0$, y $x = \text{Spec } A_x$ está en la imagen, que por tanto es densa.

5.1. El Haz Estructural del Espectro de un Anillo

Sea M un A -módulo y U un abierto de $X = \text{Spec } A$. La localización de M por el sistema multiplicativo de las funciones que no tienen ceros en U se denota $M_U = M \otimes_A A_U$. Si $U = U_f = \text{Spec } A_f$ es básico, las funciones sin ceros en U son invertibles en A_f ; luego $A_U = A_f$ (de modo que $M_U = M_f$), y $U = \text{Spec } A_U$. Consideremos la aplicación

$$\pi: \widetilde{M} = \coprod_{x \in X} M_x \longrightarrow X, \quad \pi(m_x) = x.$$

Cuando $x \in U$, tenemos un morfismo $M_U \rightarrow M_x$, así que cada elemento $m \in M_U$ define una sección $m: U \rightarrow \widetilde{M}$ de π .

Si dos secciones coinciden en un punto, $m_x = n_x$, entonces $fn = fm$, donde $f(x) \neq 0$, y ambas secciones coinciden en el entorno $U_f \cap U$.

Las imágenes de estas secciones son base de una topología en \widetilde{M} con la que π es homeomorfismo local, y las secciones anteriores son continuas.

Además, cada sección continua de π coincide localmente con una de tales secciones, y M_x es el conjunto de gérmenes en x de secciones continuas.

Las secciones continuas en U forman un A_U -módulo $\text{Hom}_X(U, \widetilde{M})$, y tenemos un morfismo

$$M_U \longrightarrow \text{Hom}_X(U, \widetilde{M}).$$

Teorema: $M_U = \text{Hom}_X(U, \widetilde{M})$, cuando el abierto $U = U_f$ es básico.

Demostración: Como $U = \text{Spec } A_U$, basta verlo cuando $U = X$.

Sabemos que el morfismo es inyectivo (p. 75). Veamos que es epiyectivo.

Si $s: X \rightarrow \widetilde{M}$ es una sección continua, existen abiertos básicos U_i que recubren X y secciones $m_i \in M_{U_i}$ tales que $s|_{U_i} = m_i$. Como X es compacto, el recubrimiento puede tomarse finito.

Las secciones m_i y m_j coinciden en el abierto básico $U_i \cap U_j$ y, como el morfismo es inyectivo, $m_i = m_j$ en $M_{U_i \cap U_j}$; luego basta ver la exactitud de la siguiente sucesión (donde $B = \bigoplus_i A_{U_i}$, y los morfismos son $m \otimes b \mapsto m \otimes b \otimes 1$, $m \otimes b \mapsto m \otimes 1 \otimes b$)

$$(*) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & \bigoplus_i M_{U_i} & \rightrightarrows & \bigoplus_{i,j} M_{U_i \cap U_j} \\ & & & & \parallel & & \parallel \\ & & & & M \otimes_A B & & M \otimes_A B \otimes_A B \end{array}$$

Cuando $M = A$ (el caso general se prueba igual; pero es más engorroso de notación) hemos de ver que $A \rightarrow B \rightrightarrows B \otimes_A B$ es exacta. Si el morfismo de anillos $A \rightarrow B$ admite un retractor $r: B \rightarrow A$, la exactitud es inmediata: si $b \otimes 1 = 1 \otimes b$, aplicando $1 \otimes r$ vemos que $b = r(b) \in A$.

En general $A \rightarrow B = \bigoplus_i A_{U_i}$ no admite retractor; pero los abiertos U_i recubren X , y basta probar la exactitud después de aplicar el funtor $\otimes_A B$ (p. 75),

$$B \longrightarrow B \otimes_A B \rightrightarrows (B \otimes_A B) \otimes_B (B \otimes_A B),$$

y obtenemos la correspondiente sucesión para el morfismo $B \rightarrow B \otimes_A B$, que admite el retractor obvio $\mu: B \otimes_A B \rightarrow B$, $\mu(b' \otimes b) = b'b$.

Demostración directa: Pongamos $U_i = X - (f_i)_0$. Dados elementos $s_i \in M_{f_i}$ tales que $s_i = s_j$ en $M_{f_i f_j}$, hemos de ver la existencia de $m \in M$ tal que $s_i = \frac{m}{f_i^n}$ en M_{f_i} .

Pongamos $s_i = \frac{m_i}{f_i^n}$, con n común a todos. Como $\frac{m_i}{f_i^n} = \frac{m_j}{f_j^n}$ en $M_{f_i f_j}$, existe r tal que

$$f_i^r f_j^r f_j^n m_i = f_i^r f_j^r f_i^n m_j.$$

Al ser $\frac{m_i}{f_i^n} = \frac{f_i^r m_i}{f_i^n f_i^r}$, si $n \gg 0$, podemos suponer que $f_j^n m_i = f_i^n m_j$.

Tenemos que $X = \bigcup_j U_j$; luego $A = (f_j^n)$, y $1 = \sum_j \phi_j f_j^n$ donde $\phi_j \in A$.

Tomemos $m = \sum_j \phi_j m_j$, y veamos que $m = \frac{m_i}{f_i^n}$ en M_{f_i} :

$$f_i^n m = \sum_j \phi_j f_i^n m_j = \sum_j \phi_j f_j^n m_i = (\sum_j \phi_j f_j^n) m_i = m_i. \quad \text{q.e.d.}$$

1. Si el espectro desconecta, $X = U \oplus V$, el anillo descompone, $A = A_U \oplus A_V$.

Los abiertos U y V son básicos: la sección que vale 0 en uno y 1 en el otro es continua.

2. Si M está soportado en un número finito de puntos cerrados x_1, \dots, x_n , en el sentido de que $M_x = 0$ cuando $x \neq x_i$, tenemos que

$$M = M_{x_1} \oplus \dots \oplus M_{x_n}.$$

3. Si M está anulado por una potencia de un maximal \mathfrak{m} , entonces $M = M_{\mathfrak{m}}$.

5.2. Descomposición Primaria

Definición: Un módulo es **noetheriano** si todos sus submódulos son finitamente generados (lo que equivale a que toda sucesión estrictamente creciente de submódulos es finita).

Un anillo es **noetheriano** si todos sus ideales son finitamente generados.

Lema: Sea $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ exacta. M es noetheriano $\Leftrightarrow M'$ y M'' lo son.

Demostración: Basta ver que M es finitamente generado cuando M' y M'' lo son, porque todo submódulo de M tiene una sucesión exacta análoga.

Tomamos epimorfismos $L' = A^n \rightarrow M' \rightarrow 0$, $L'' = A^m \rightarrow M'' \rightarrow 0$, y levantamos el segundo $L'' \rightarrow M$. Terminamos porque p es epimorfismo,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & L' \oplus L'' & \longrightarrow & L'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow p & \swarrow & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

Teorema: Todo módulo finitamente generado sobre un anillo noetheriano es noetheriano.

Demostración: Si A es noetheriano, por el lema A^n y sus cocientes también.

Teorema: Si A es noetheriano, $A[x]$ también lo es.

Demostración: Sea I un ideal de $A[x]$.

Los coeficientes de mayor grado de los polinomios de I forman un ideal $a_1A + \dots + a_rA$.

Tomemos $P_i = a_i x^n + \dots \in I$, todos de igual grado n .

Si $Q = ax^m + \dots \in I$, $m \geq n$, tendremos $a = \sum_i b_i a_i$, y $\text{gr}(Q - \sum_i b_i x^{m-n} P_i) < m$,

$$I = (P_1, \dots, P_r) + (I \cap L),$$

donde $L = A \oplus Ax \oplus \dots \oplus Ax^{n-1}$ es un A -módulo noetheriano.

Luego $I \cap L$ es un A -módulo finitamente generado, y el ideal I es finitamente generado.

Corolario: Si A es noetheriano, toda A -álgebra finitamente generada es noetheriana.

Demostración: Los anillos $A[x_1, \dots, x_n]$ son noetherianos, y sus cocientes también.

Definiciones: Un ideal $\mathfrak{q} \neq A$ es **irreducible** si no es intersección de dos ideales mayores.

Un ideal $\mathfrak{q} \neq A$ es **primario** si en A/\mathfrak{q} toda homotecia es inyectiva o nilpotente,

$$ab \in \mathfrak{q}, a \notin \mathfrak{q} \Rightarrow b^n \in \mathfrak{q}.$$

En tal caso $\mathfrak{p} = \text{rad } \mathfrak{q}$ es un ideal primo, y decimos que \mathfrak{q} es \mathfrak{p} -primario.

Lema: Si A es noetheriano, todo ideal irreducible es primario.

Demostración: Sea $b: A/\mathfrak{q} \rightarrow A/\mathfrak{q}$ una homotecia. $\text{Ker } b \subseteq \text{Ker } b^2 \dots \subseteq \text{Ker } b^n \dots$, y como A es noetheriano, $\text{Ker } b^n = \text{Ker } b^{n+1}$ para algún exponente n ,

$$\text{Ker } b \cap \text{Im } b^n = 0.$$

Como \mathfrak{q} es irreducible, tendremos que $\text{Ker } b = 0$ ó $\text{Im } b^n = 0$.

Si $\text{Ker } b = 0$, b es inyectiva. Si $\text{Im } b^n = 0$, b es nilpotente.

Teorema: Si A es noetheriano, todo ideal es intersección finita de ideales primarios.

Demostración: Si un ideal I no es irreducible, es intersección de ideales mayores, $I = I_1 \cap I_2$, que a su vez pueden ser irreducibles o no, ... El proceso termina porque A es noetheriano, e I es intersección finita de ideales irreducibles (luego primarios). q.e.d.

Como la intersección de ideales \mathfrak{p} -primarios es \mathfrak{p} -primaria, agrupando ideales y eliminando redundancias, todo ideal tiene una descomposición primaria **reducida**, $I = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_n$, donde $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_j$, e $I \neq \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \widehat{\mathfrak{q}_i} \dots \cap \mathfrak{q}_n$ (ponemos $\mathfrak{p}_i = \text{rad } \mathfrak{q}_i$).

Corolario: El número de primos minimales de un anillo noetheriano es finito.

Demostración: Sea $0 = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_n$ una descomposición primaria. Los primos minimales están entre $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$, porque $\text{Spec } A = (\mathfrak{q}_1)_0 \cup \dots \cup (\mathfrak{q}_n)_0 = (\mathfrak{p}_1)_0 \cup \dots \cup (\mathfrak{p}_n)_0$.

Ejemplos: Si $\mathfrak{m} = \text{rad } I$ es maximal, A/I tiene un único ideal primo, y todo elemento es invertible o nilpotente; luego I es \mathfrak{m} -primario. Las potencias \mathfrak{m}^n son \mathfrak{m} -primarias.

Sean $A = k[x, y]$, $\mathfrak{p} = (x)$, $\mathfrak{m} = (x, y)$. El ideal $I = \mathfrak{m}^2 \cap \mathfrak{p}$ no es primario ($xy \in I$, $x \notin I$, $y \notin \text{rad } I = \mathfrak{p}$), y admite otra descomposición primaria reducida, $I = (x^2, y) \cap \mathfrak{p}$.

Lema: Todo ideal \mathfrak{p} -primario \mathfrak{q} está definido por condiciones infinitesimales en el punto \mathfrak{p} ,

$$\mathfrak{q} = A \cap \mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}.$$

Demostración: Si $f \in A \cap \mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}$, entonces $sf \in \mathfrak{q}$, donde $s \notin \mathfrak{p} = \text{rad } \mathfrak{q}$; luego $f \in \mathfrak{q}$.

Teorema: Sea $I = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_n$ una descomposición primaria reducida de un ideal de un anillo noetheriano A . La componente \mathfrak{q}_i no depende de la descomposición cuando $(\mathfrak{p}_i)_0$ es una componente irreducible de $(I)_0$.

Demostración: Cuando $j \neq i$, tenemos que $\mathfrak{q}_j A_{\mathfrak{p}_i} = A_{\mathfrak{p}_i}$ porque $\mathfrak{p}_j = \text{rad } \mathfrak{q}_j$ corta a $A - \mathfrak{p}_i$.

$$I_{\mathfrak{p}_i} = \mathfrak{q}_1 A_{\mathfrak{p}_i} \cap \dots \cap \mathfrak{q}_n A_{\mathfrak{p}_i} = \mathfrak{q}_i A_{\mathfrak{p}_i},$$

y vemos que $\mathfrak{q}_i = A \cap \mathfrak{q}_i A_{\mathfrak{p}_i} = A \cap I_{\mathfrak{p}_i}$ sólo depende de I y de \mathfrak{p}_i . q.e.d.

$(I : a) = \{b \in A : ba \in I\}$ denota el anulador de $\bar{a} \in A/I$. Previa la observación de que $(\mathfrak{q} : a)$ es un ideal \mathfrak{p} -primario que contiene a \mathfrak{q} cuando $a \notin \mathfrak{q}$, y es A si $a \in \mathfrak{q}$, se tiene

Teorema: Sea $I = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_n$ una descomposición primaria reducida de un ideal de un anillo noetheriano A . Los primos asociados $\mathfrak{p}_i = \text{rad } \mathfrak{q}_i$ son los ideales primos que coinciden con el anulador de un elemento de A/I (y no dependen de la descomposición).

Demostración: Si $a \in \mathfrak{q}_2 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_n$, $a \notin \mathfrak{q}_1$, entonces $(I : a) = (\mathfrak{q}_1 : a)$ es \mathfrak{p}_1 -primario.

Si $\mathfrak{p}_1^r \subseteq (\mathfrak{q}_1 : a)$, y $b \in \mathfrak{p}_1^{r-1}$, $b \notin (\mathfrak{q}_1 : a)$, entonces $(I : ab) = (\mathfrak{q}_1 : ab) = \mathfrak{p}_1$.

Recíprocamente, si $\mathfrak{p} = (I : a) = \bigcap_i (\mathfrak{q}_i : a)$ es primo, tomando radicales vemos que \mathfrak{p} es intersección de algunos ideales \mathfrak{p}_i ; luego coincide con algún \mathfrak{p}_i .

Corolario: La unión de los primos asociados al 0 está formada por los divisores de cero.

Demostración: Si a es divisor de cero, $ab = 0$ y $b \notin \mathfrak{q}_i$, entonces $a \in \mathfrak{p}_i$.

Corolario: Si A es noetheriano, todo A -módulo finito M admite una cadena de submódulos $0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n = M$ tal que $M_i/M_{i-1} \simeq A/\mathfrak{p}_i$, con \mathfrak{p}_i primo.

Demostración: Por el teorema, cualquier submódulo monógeno tiene un elemento m de anulador primo \mathfrak{p} . Ponemos $M_1 = Am \simeq A/\mathfrak{p}$, y se termina por noetherianidad.

5.3. Completación

Sea I un ideal propio de un anillo A (\mathfrak{m} y \mathcal{O} si es local), y M un A -módulo.

$$\|m\| = \begin{cases} e^{-n} & \text{si } m \in I^n M, m \notin I^{n+1} M \\ 0 & \text{si } m \in \bigcap I^n M \end{cases}$$

La pseudo-métrica $d(m, m') = \|m' - m\|$ define la **topología I -ádica** de M , y los submódulos $I^n M$ forman una base de entornos abiertos (y cerrados) de 0.

Lema de Artin-Rees: *Sea A un anillo noetheriano. Si M' es un submódulo de un A -módulo finito generado M , existe un exponente h tal que*

$$I^{n-h}(M' \cap I^h M) = M' \cap I^n M, \quad n \geq h.$$

Demostración: $A_D = A \oplus I \oplus \dots \oplus I^n \oplus \dots$

$$M_D = M \oplus IM \oplus \dots \oplus I^n M \oplus \dots$$

M_D es un A_D -módulo, con el producto $I^n \times I^m M \rightarrow I^{n+m} M$.

A_D es noetheriano, pues $A_D = A[\xi_1 t, \dots, \xi_s t] \subset A[t]$ cuando $I = (\xi_1, \dots, \xi_s)$.

M_D es un A_D -módulo finito generado, y formamos el siguiente submódulo de M_D :

$$N = M' \oplus M'_1 \oplus \dots \oplus M'_n \dots, \quad M'_n = M' \cap I^n M,$$

que será finito, generado por e_1, \dots, e_r , que podemos suponer homogéneos de grado $\leq h$.

Ahora todo elemento homogéneo de N de grado $\geq h$ es

$$\sum_{i=1}^r a_i e_i = \sum_{i=1}^r \sum_j b_{ij} a_{ij} e_i, \quad \text{gr}(a_{ij} e_i) = h,$$

y vemos que $A_D M'_h = \bigoplus_{n \geq h} M'_n$; es decir, $I^{n-h} M'_{n-h} = M'_n$.

Corolario: *La topología I -ádica de M induce en M' su topología I -ádica.*

Demostración: $I^n M' \subseteq M'_n$, y $M'_{n+h} = I^n M'_h \subseteq I^n M'$.

Corolario: *M es separado, $\bigcap_n I^n M = 0$.*

Demostración: Localizando en cada punto de $\text{Spec } A$ podemos suponer que A es local.

Como la topología inducida en $N = \bigcap_n I^n M$ es trivial, $N = IN$, y $N = 0$ por Nakayama.

Definición: \widehat{M} denota el **completado** de M , formado por las clases de sucesiones de Cauchy. Tenemos un morfismo canónico $M \rightarrow \widehat{M}$, y un morfismo de A -módulos $f: M \rightarrow N$ induce un morfismo de \widehat{A} -módulos $\widehat{f}: \widehat{M} \rightarrow \widehat{N}$, $\widehat{f}(m_n) = (f(m_n))$.

$$\widehat{M} = \varprojlim M/I^n M.$$

Si (m_n) es una sucesión de Cauchy, admite una subsucesión tal que $\|m_i - m_j\| \leq e^{-n}$ cuando $i, j \geq n$, y $(\bar{m}_n) \in \varprojlim M/I^n M$ porque $m_i - m_n \in I^n M$ cuando $i \geq n$.

Si $(\bar{m}_n) \in \varprojlim M/I^n M$, $\|m_i - m_j\| \leq e^{-n}$ cuando $i, j \geq n$, y (m_n) es de Cauchy.

Estas aplicaciones están bien definidas y son inversas. Además, $s_n = m_{n+1} - m_n \in I^n M$, y toda sucesión de Cauchy es equivalente a una serie $\sum_n s_n$, $s_n \in I^n M$.

Ejemplos: Sea \mathcal{O} el anillo local en el origen de $\text{Spec } k[x_1, \dots, x_n]$, $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$.

$\mathcal{O}/\mathfrak{m}^{d+1} = \{\text{Polinomios de grado } \leq d\}$, el completado \mathfrak{m} -ádico es $\widehat{\mathcal{O}} = k[[x_1, \dots, x_n]]$, y el morfismo $\mathcal{O} \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}$ asigna a cada germen su desarrollo de Taylor en el origen.

Sea \mathcal{O} el anillo local en el origen de una curva plana $0 = y + \text{términos de grado } \geq 2$.

Por Nakayama $\mathfrak{m} = (x)$; luego $\mathfrak{m}^n = (x^n)$, $k[x]/(x^n) = \mathcal{O}/\mathfrak{m}^n$, y $\widehat{\mathcal{O}} = k[[x]]$.

$\widehat{\mathbb{Z}}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ es el anillo de los números p -ádicos.

Si \mathcal{O} es el anillo de gérmenes en el origen de funciones C^∞ sobre la recta, $e^{-1/x^2} \in \bigcap \mathfrak{m}^n$ porque su desarrollo de Taylor es nulo. Luego el anillo \mathcal{O} no es noetheriano.

Teorema: Sea A un anillo noetheriano. Si $0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \rightarrow 0$ es exacta, y los módulos son finito generados, también es exacta la sucesión

$$0 \longrightarrow \widehat{M}' \xrightarrow{\widehat{i}} \widehat{M} \xrightarrow{\widehat{p}} \widehat{M}'' \longrightarrow 0$$

Demostración: Pongamos $M'_n = M' \cap I^n M$. Tenemos sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow M'/M'_n \longrightarrow M/I^n M \longrightarrow M''/I^n M'' \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \varprojlim M'/M'_n \xrightarrow{\widehat{i}} \widehat{M} \xrightarrow{\widehat{p}} \widehat{M}''$$

donde $\varprojlim M'/M'_n = \widehat{M}'$ porque $\{M'_n\}$ define la topología I -ádica de M' (Artin-Rees).

\widehat{p} es epiyectivo: $I^n M \rightarrow I^n M''$ es epiyectivo, y toda serie $\sum_n s''_n$, con $s''_n \in I^n M''$, es

$$\sum_n s''_n = \sum_n p(s_n) = \widehat{p}(\sum_n s_n), \text{ con } s_n \in I^n M.$$

Teorema: $M \otimes_A \widehat{A} = \widehat{M}$, cuando A es noetheriano y M es finito generado.

Demostración: Si L es libre, entonces $L = A^n$, y $\widehat{L} = \widehat{A}^n = L \otimes_A \widehat{A}$. En general, tomamos una presentación $L' \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$, y el siguiente diagrama permite concluir,

$$\begin{array}{ccccccc} L' \otimes_A \widehat{A} & \longrightarrow & L \otimes_A \widehat{A} & \longrightarrow & M \otimes_A \widehat{A} & \longrightarrow & 0 \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow & & \\ \widehat{L}' & \longrightarrow & \widehat{L} & \longrightarrow & \widehat{M} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Corolario: Si A es un anillo noetheriano, \widehat{A} es una A -álgebra plana.

Demostración: $0 \rightarrow M' \rightarrow M$. Pongamos M como límite inductivo de submódulos finitos M_i .

Los submódulos $M'_i = M' \cap M_i$ son finitos y $M' = \varinjlim M'_i$. Ahora

$$0 \longrightarrow M'_i \otimes_A \widehat{A} \longrightarrow M_i \otimes_A \widehat{A},$$

y como el límite inductivo es exacto, $0 \rightarrow M' \otimes_A \widehat{A} \rightarrow M \otimes_A \widehat{A}$.

Corolario: $I^n \widehat{A} = \widehat{I}^n$, $A/I^n = \widehat{A}/\widehat{I}^n$, $I^n/I^{n+1} = \widehat{I}^n/\widehat{I}^{n+1}$.

Demostración: $0 \rightarrow I \rightarrow A$ y como \widehat{A} es A -plano,

$$0 \longrightarrow I \otimes_A \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A}; \quad \text{luego } I\widehat{A} = I \otimes_A \widehat{A} = \widehat{I}, \text{ y } I^n \widehat{A} = (\widehat{I})^n.$$

$$0 \longrightarrow I^n \longrightarrow A \longrightarrow A/I^n \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow I^n \otimes_A \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A} \longrightarrow A/I^n \longrightarrow 0$$

porque A/I^n es completo (como todo módulo anulado por I^n).

Esta sucesión exacta muestra que $A/I^n = \widehat{A}/I^n \widehat{A} = \widehat{A}/\widehat{I}^n$, y por tanto $I^n/I^{n+1} = \widehat{I}^n/\widehat{I}^{n+1}$.

Corolario: Si A es noetheriano, \widehat{A} es completo y separado para la topología \widehat{I} -ádica.

Si \mathcal{O} es un anillo local noetheriano, $\widehat{\mathcal{O}}$ es un anillo local completo, de ideal maximal $\widehat{\mathfrak{m}}$.

Demostración: $\varprojlim \widehat{A}/\widehat{I}^n = \varprojlim A/I^n = \widehat{A}$.

Para probar que $\widehat{\mathcal{O}}$ es local, de ideal maximal $\widehat{\mathfrak{m}}$, veamos que $1 + f$ es invertible para todo $f \in \widehat{\mathfrak{m}}$. Como $\widehat{\mathcal{O}}$ es completo, converge la serie $(1 + f)^{-1} = 1 - f + f^2 - f^3 + \dots$

Definición: Una I -filtración de M es una cadena de submódulos $M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \dots$ tal que $IM_n \subseteq M_{n+1}$. El **graduado** asociado

$$GM = M/M_1 \oplus M_1/M_2 \oplus \dots \oplus M_n/M_{n+1} \dots$$

es un módulo sobre el anillo graduado $G_I A = A/I \oplus I/I^2 \oplus \dots \oplus I^n/I^{n+1} \dots$, y el completado $\widehat{M} = \varprojlim M/M_n$ es un \widehat{A} -módulo. Un morfismo $f: M \rightarrow N$ es compatible con las filtraciones cuando $f(M_n) \subseteq N_n$, de modo que induce un morfismo de $G_I A$ -módulos $f': GM \rightarrow GN$, y un morfismo de \widehat{A} -módulos $\widehat{f}: \widehat{M} \rightarrow \widehat{N}$.

Ejemplo: Sea $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n) \subset k[x_1, \dots, x_n]$, y $A = k[x_1, \dots, x_n]/I$ el anillo de funciones de una subvariedad algebraica $X = \text{Spec } A$ que pasa por el origen, $\widehat{\mathfrak{m}} = (x_1, \dots, x_n) \subset A$.

Las sucesiones exactas $\mathfrak{m}^r \cap I \rightarrow \mathfrak{m}^r \rightarrow \widehat{\mathfrak{m}}^r \rightarrow 0$ inducen sucesiones exactas

$$\mathfrak{m}^r \cap I \longrightarrow \mathfrak{m}^r/\mathfrak{m}^{r+1} \longrightarrow \widehat{\mathfrak{m}}^r/\widehat{\mathfrak{m}}^{r+1} \longrightarrow 0,$$

y $G_{\widehat{\mathfrak{m}}} A = k[x_1, \dots, x_n]/I_{\text{in}}$, donde I_{in} es el ideal del **cono tangente** a X en el origen; es decir, $I_{\text{in}} = (f_r)_{f \in I}$, $f = f_r +$ términos de mayor grado.

En Álgebra, se tiene una versión débil del Teorema de la Función Inversa:

Lema: Si $f': GM \rightarrow GN$ es epiyectivo (inyectivo), también lo es $\widehat{f}: \widehat{M} \rightarrow \widehat{N}$.

Demostración: Si los morfismos $M_i/M_{i+1} \rightarrow N_i/N_{i+1}$ son epiyectivos, y $n \in \widehat{N}$,

$$n = f(m_0) \text{ en } N/N_1, \text{ donde } m_0 \in M,$$

$$n = f(m_0) + f(m_1) \text{ en } N/N_2, \text{ donde } m_1 \in M_1, \text{ etc.}$$

de modo que $m = \sum_i m_i \in \widehat{M}$, y $\widehat{f}(m) = \sum_i f(m_i) = n$.

Si f' es inyectivo, y $(m_i) \in \varprojlim M/M_i$ no es nulo, tomamos el primer índice i tal que $m_i \in M/M_i$ no es nulo, de modo que $m_i \in M_{i-1}/M_i \hookrightarrow N_{i-1}/N_i$, y $(f(m_i)) \neq 0$.

Lema: Sea A un anillo completo y separado con la topología I -ádica. Si $G_I A$ es noetheriano, entonces A es noetheriano.

Demostración: Sea \mathfrak{q} un ideal de A , que filtramos con $\mathfrak{q} \cap I^n$. El ideal $G\mathfrak{q}$ de $G_I A$ está generado por un número finito de elementos homogéneos, y cada generador de grado d define un morfismo $A \rightarrow \mathfrak{q}$, compatible con las filtraciones si ponemos $A_0 = \dots = A_d = A$, $A_{d+n} = I^n$.

Obtenemos así un morfismo $L = A^r \rightarrow \mathfrak{q}$ tal que $GL \rightarrow G\mathfrak{q}$ es epiyectivo, y por el lema $\widehat{L} \rightarrow \widehat{\mathfrak{q}}$ es epiyectivo; luego $L \rightarrow \mathfrak{q}$ es epiyectivo,

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\sim} & \widehat{L} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{q} & \hookrightarrow & \widehat{\mathfrak{q}} \end{array} \quad \text{porque } \mathfrak{q} \text{ es separado (al serlo } A)$$

Teorema: Si A es un anillo noetheriano, \widehat{A} también es noetheriano.

Demostración: \widehat{A} es completo y separado, y $G_{\widehat{A}}\widehat{A} = G_I A$ es noetheriano.

5.4. Teoría de la Dimensión

Sea $A = A_0 \oplus A_1 \oplus \dots \oplus A_n \oplus \dots$ un anillo graduado, $A_m \cdot A_n \subseteq A_{m+n}$.

Sea $M = \bigoplus_n M_n$ un A -módulo graduado, $A_m \cdot M_n \subseteq M_{m+n}$.

Si $A = A_0[\xi_1, \dots, \xi_d]$, donde A_0 es un anillo de longitud finita (luego noetheriano) y $\text{gr } \xi_i = 1$, y M es un A -módulo finito, entonces los A_0 -módulos M_n son de longitud finita. La **función de Hilbert** de M es $H(n) = l(M_n)$, y la **función de Samuel** de M es $S(n) = l(M_0) + \dots + l(M_{n-1})$, de modo que $\Delta S(n) = S(n+1) - S(n) = H(n)$.

Teorema: Para n suficientemente grande, $H(n)$ es un polinomio de grado $< d$.

Demostración: Por inducción sobre d . Si $A = A_0$, $M = A_0 m_1 + \dots + A_0 m_s$, y $M_n = 0$ cuando n es mayor que el grado de los generadores. El polinomio de Hilbert es $H = 0$.

Si $d \geq 1$, consideramos las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow \text{Ker } n \longrightarrow M_n \xrightarrow{\xi_d} M_{n+1} \longrightarrow \text{Coker }_{n+1} \longrightarrow 0$$

$$\Delta H(n) = H(n+1) - H(n) = l(\text{Coker }_{n+1}) - l(\text{Ker } n)$$

ξ_d anula a $\text{Ker } = \bigoplus_n \text{Ker } n$ y $\text{Coker } = \bigoplus_n \text{Coker } n$.

Luego son $A_0[\xi_1, \dots, \xi_{d-1}]$ -módulos finitos, porque A es noetheriano.

Por inducción, $l(\text{Coker }_{n+1})$ y $l(\text{Ker } n)$, y por tanto su diferencia $\Delta H(n)$, son funciones polinómicas de grado $< d-1$ para $n \gg 0$, y $H(n)$ es una función polinómica de grado $< d$.

Ejemplo: La función de Samuel de $k[x_1, \dots, x_d]$ es $S(n) = \binom{n+d-1}{d} = \frac{n^d}{d!} + \dots$

En efecto, $\text{Ker} = 0$, $\text{Coker} = k[x_1, \dots, x_{d-1}]$, y $\Delta S(n) = l(\text{Coker }_{n+1}) = \binom{n+d-1}{d-1}$ por inducción sobre d . Luego $S(n) = \binom{n+d-1}{d} + \text{cte}$. Como $S(1) = 1$, la constante es nula.

Teorema: Un anillo local noetheriano \mathcal{O} es de longitud finita $\Leftrightarrow \dim \mathcal{O} = 0$.

Demostración: Si $l(\mathcal{O}) < \infty$, para algún exponente $\mathfrak{m}^m = \mathfrak{m}^{m+1}$, y $\mathfrak{m}^n = 0$ por Nakayama.

El único ideal primo de \mathcal{O} es \mathfrak{m} , y $\dim \mathcal{O} = 0$.

Si $\dim \mathcal{O} = 0$, el único ideal primo de \mathcal{O} es \mathfrak{m} , y una potencia de $\mathfrak{m} = \text{rad } \mathcal{O}$ es nula, $\mathcal{O} = \mathcal{O}/\mathfrak{m}^n$. Los \mathcal{O}/\mathfrak{m} -espacios vectoriales $\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$ son de dimensión finita, y

$$l(\mathcal{O}) = l(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n) = l(\mathcal{O}/\mathfrak{m}) + l(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) + \dots + l(\mathfrak{m}^{n-1}/\mathfrak{m}^n) < \infty.$$

Definición: Sea \mathcal{O} un anillo local noetheriano, y \mathfrak{m} su ideal maximal.

Si $\mathfrak{q} = (f_1, \dots, f_d)$ es un ideal de radical \mathfrak{m} , entonces $l(\mathcal{O}/\mathfrak{q}) < \infty$, y $G_{\mathfrak{q}}\mathcal{O} = (\mathcal{O}/\mathfrak{q})[\xi_1, \dots, \xi_d]$, donde $\xi_i = \bar{f}_i \in \mathfrak{q}/\mathfrak{q}^2$ es de grado 1. Una \mathfrak{q} -filtración $M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots$ es **estable** si existe un índice h tal que $\mathfrak{q}^n M_h = M_{n+h}$ (Artin-Rees). En tal caso, si M es finito, $G_{\mathfrak{q}}M$ es un $G_{\mathfrak{q}}\mathcal{O}$ -módulo finito, que tiene un **polinomio de Samuel** $S(n)$ de grado $\leq d$,

$$S(n) = l(M/M_1) + \dots + l(M_{n-1}/M_n) = l(M/M_n), \quad n \gg 0.$$

Lema: El grado y primer coeficiente de $S(n)$ no dependen de la \mathfrak{q} -filtración estable.

Demostración: Consideremos la filtración \mathfrak{q} -ádica, $S'(n) = l(M/\mathfrak{q}^n M)$, $n \gg 0$.

En una \mathfrak{q} -filtración tenemos $\mathfrak{q}^n M \subseteq M_n$, y $M_{n+h} \subseteq \mathfrak{q}^n M$ si es estable. Luego el grado y el primer coeficiente de $S(n)$ coinciden con los de $S'(n)$,

$$S'(n) \geq S(n), \quad S(n+h) \geq S'(n), \quad n \gg 0.$$

Lema: El grado del polinomio de Samuel no depende del ideal \mathfrak{m} -primario \mathfrak{q} .

Demostración: $S(n) = l(M/\mathfrak{q}^n M)$, $S'(n) = l(M/\mathfrak{m}^n M)$ para $n \gg 0$.

Como $\mathfrak{m}^k \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{m}$, el grado de $S(n)$ coincide con el de $S'(n)$,

$$S'(kn) \geq S(n) \geq S'(n), \quad n \gg 0.$$

Definición: El **polinomio de Samuel** de \mathcal{O} es el de su filtración \mathfrak{m} -ádica,

$$S_{\mathcal{O}}(n) = l(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n \mathcal{O}), \quad n \gg 0.$$

Ejemplo: Si \mathcal{O} es el anillo local en el origen de $0 = P_m(x_1, \dots, x_d) + \text{términos de grado } > m$, entonces $G_{\mathfrak{m}}\mathcal{O} = k[x_1, \dots, x_d]/(P_m)$, y el polinomio de Samuel es

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow k[x_1, \dots, x_d] \xrightarrow{P_m} k[x_1, \dots, x_d] \longrightarrow k[x_1, \dots, x_d]/(P_m) \longrightarrow 0 \\ S_{\mathcal{O}}(n) &= \binom{n+d-1}{d} - \binom{n+d-m-1}{d} = \frac{m}{(d-1)!} n^{d-1} + \dots \end{aligned}$$

Teorema: $\text{gr } S_{\mathcal{O}/f\mathcal{O}} < \text{gr } S_{\mathcal{O}}$, cuando $f \in \mathfrak{m}$ no es divisor de cero.

Demostración: $0 \longrightarrow f\mathcal{O}/(f\mathcal{O} \cap \mathfrak{m}^n) \longrightarrow \mathcal{O}/\mathfrak{m}^n \longrightarrow \bar{\mathcal{O}}/\bar{\mathfrak{m}}^n \longrightarrow 0$, donde $\bar{\mathcal{O}} = \mathcal{O}/f\mathcal{O}$.

$$S_{\bar{\mathcal{O}}}(n) = S_{\mathcal{O}}(n) - l(f\mathcal{O}/(f\mathcal{O} \cap \mathfrak{m}^n)), \quad n \gg 0.$$

y $\mathfrak{m}^n \cap f\mathcal{O}$ es una \mathfrak{m} -filtración estable de $f\mathcal{O}$ (Artin-Res), y $f\mathcal{O} \simeq \mathcal{O}$ porque f no divide a cero.

Luego, cuando $n \gg 0$, $l(f\mathcal{O}/(f\mathcal{O} \cap \mathfrak{m}^n))$ es un polinomio de igual grado y primer coeficiente que $S_{\mathcal{O}}(n)$, y su diferencia es de grado menor.

Definición: $f_1, \dots, f_d \in \mathcal{O}$ forman un **sistema de parámetros** si generan un ideal de radical \mathfrak{m} ; es decir, si $\dim \mathcal{O}/(f_1, \dots, f_d) = 0$.

Teorema: La dimensión de un anillo local noetheriano \mathcal{O} coincide con el mínimo número de parámetros, y con el grado del polinomio de Samuel $S_{\mathcal{O}}$.

1. $\dim \mathcal{O} \geq$ mínimo número de parámetros.

Si x_1, \dots, x_s son los puntos genéricos de las componentes irreducibles de $\text{Spec } \mathcal{O}$, como las funciones separan puntos de cerrados, existe $f_i \in \mathcal{O}$ que se anula en todos, salvo en x_i . Ahora $f = f_1 + \dots + f_s$ no se anula en ninguno, y $\dim \mathcal{O}/f\mathcal{O} < \dim \mathcal{O}$. Se concluye por inducción sobre la dimensión de \mathcal{O} .

2. Mínimo número de parámetros $\geq \text{gr } S_{\mathcal{O}}$.

Si el radical de $\mathfrak{q} = (f_1, \dots, f_d)$ es \mathfrak{m} , el grado del polinomio de Samuel de cualquier filtración \mathfrak{q} -estable es $\leq d$ y, por el lema anterior, el grado de $S_{\mathcal{O}}$ también.

3. $\text{gr } S_{\mathcal{O}} \geq \dim \mathcal{O}$.

Por inducción sobre el grado de $S_{\mathcal{O}}$. Si es 0, entonces $l(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)$ es constante cuando $n \gg 0$, y $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n+1}$. Luego $\mathfrak{m}^n = 0$ por Nakayama, y $\dim \mathcal{O} = 0$.

Si $\text{gr } S_{\mathcal{O}} \geq 1$, y $\mathfrak{p}_0 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_d$ es una cadena de ideales primos de \mathcal{O} , tomamos $f \in \mathfrak{p}_1$ que no esté en \mathfrak{p}_0 . Si $\bar{\mathcal{O}} = \mathcal{O}/(\mathfrak{p}_0 + f\mathcal{O})$, por el teorema anterior

$$\text{gr } S_{\mathcal{O}} \geq \text{gr } S_{\mathcal{O}/\mathfrak{p}_0} > \text{gr } S_{\bar{\mathcal{O}}},$$

y por hipótesis de inducción $\text{gr } S_{\bar{\mathcal{O}}} \geq d - 1$, porque $\bar{\mathfrak{p}}_1 \subset \dots \subset \bar{\mathfrak{p}}_d$ es una cadena de ideales primos de $\bar{\mathcal{O}}$. Luego $\text{gr } S_{\mathcal{O}} \geq d$, y $\text{gr } S_{\mathcal{O}} \geq \dim \mathcal{O}$.

Corolario: 1. *La dimensión de \mathcal{O} es finita.*

2. $\dim (f)_0 \geq \dim \mathcal{O} - 1$, cuando $f \in \mathfrak{m}$. (**Teorema de Krull**)

3. $\dim \mathcal{O} = \dim \hat{\mathcal{O}}$.

4. $\dim \mathcal{O} \leq \dim_K(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$, donde $K = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$.

Demostración: (1) El mínimo número de parámetros (y el grado de $S_{\mathcal{O}}$) es finito.

(2) Si $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_r$ es un sistema de parámetros de $\mathcal{O}/f\mathcal{O}$, entonces f_1, \dots, f_r, f es un sistema de parámetros de \mathcal{O} ; luego $\dim \mathcal{O} \leq 1 + \dim \mathcal{O}/f\mathcal{O}$.

(3) \mathcal{O} y $\hat{\mathcal{O}}$ tienen igual función de Samuel porque $\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n = \hat{\mathcal{O}}/\hat{\mathfrak{m}}^n$.

(4) Por Nakayama, una base de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ define un sistema de generadores de \mathfrak{m} .

Definición: Sea \mathcal{O} un anillo local noetheriano, de cuerpo residual $K = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$.

El **cono tangente** es $\text{Spec } G_{\mathfrak{m}}\mathcal{O}$, y el **espacio cotangente** es $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. El anillo \mathcal{O} es **regular** si \mathfrak{m} está generado por un sistema de parámetros minimal: $\dim \mathcal{O} = \dim_K(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$.

Proposición: *\mathcal{O} es regular si y sólo si su cono tangente es un espacio afín,*

$$G_{\mathfrak{m}}\mathcal{O} = K[x_1, \dots, x_d] \quad (\text{isomorfismo de anillos graduados})$$

Demostración: Si $G_{\mathfrak{m}}\mathcal{O} = K[x_1, \dots, x_d]$, entonces $\dim_K(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = d = \text{gr } S_{\mathcal{O}} = \dim \mathcal{O}$.

Recíprocamente, si \mathcal{O} es regular de dimensión d , tenemos un epimorfismo

$$K[x_1, \dots, x_d] \longrightarrow G_{\mathfrak{m}}\mathcal{O} \longrightarrow 0$$

y en el origen los polinomios de Samuel de ambos anillos son de grado d .

Como el anillo local de $K[x_1, \dots, x_n]$ es íntegro, y al hacer cociente por un no divisor de cero el grado del polinomio de Samuel baja, es un isomorfismo.

Corolario: *\mathcal{O} es regular $\Leftrightarrow \hat{\mathcal{O}}$ es regular.*

Demostración: $G_{\mathfrak{m}}\mathcal{O} = G_{\hat{\mathfrak{m}}}\hat{\mathcal{O}}$.

Corolario: *Los anillos locales regulares son íntegros.*

Demostración: Sean $a, b \in \mathcal{O}$ no nulos. $0 = \bigcap_n \mathfrak{m}^n$; luego $\bar{a} \in \mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$, $\bar{b} \in \mathfrak{m}^j/\mathfrak{m}^{j+1}$ no son nulos y, al ser $G_{\mathfrak{m}}\mathcal{O}$ íntegro, $0 \neq \bar{a} \cdot \bar{b} = [ab] \in \mathfrak{m}^{i+j}/\mathfrak{m}^{i+j+1}$. Luego $ab \neq 0$.

Teorema: *Sea \mathcal{O} una k -álgebra local regular. Si $k = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$, entonces $\hat{\mathcal{O}} = k[[x_1, \dots, x_d]]$.*

Demostración: Sea $\mathfrak{m} = (f_1, \dots, f_d)$, $d = \dim \mathcal{O}$. El morfismo $k[x_1, \dots, x_d] \rightarrow \mathcal{O}$, $x_i \mapsto f_i$, induce un isomorfismo al completar, porque (p. 135) lo induce entre los conos tangentes

$$k[x_1, \dots, x_d] \xrightarrow{\sim} G_{\mathfrak{m}}\mathcal{O} = (\mathcal{O}/\mathfrak{m})[\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_d].$$

Proposición: Sea \mathcal{O} una k -álgebra local noetheriana. Si \mathcal{O}/\mathfrak{m} es una extensión finita y separable de k , entonces el morfismo $\widehat{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ admite sección, y $\widehat{\mathcal{O}} = (\mathcal{O}/\mathfrak{m})[[x_1, \dots, x_d]]$ si \mathcal{O} es regular.

Demostración: Los epimorfismos $\pi_0^k(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n) \rightarrow \pi_0^k(\mathcal{O}/\mathfrak{m})$ son isomorfismos, porque $\pi_0^k(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)$ es cuerpo (p. 92), y definen una sección $\pi_0^k(\mathcal{O}/\mathfrak{m}) = \varprojlim \pi_0^k(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n) \rightarrow \varprojlim \mathcal{O}/\mathfrak{m}^n = \widehat{\mathcal{O}}$.

Ejemplo: Si $p_2 \in \mathbb{R}[x]$ es de grado 2 e irreducible, $\mathbb{R}[x]/(p_2^m) \simeq \mathbb{C}[t]/(t^m)$ por lo anterior.

En la base $1, i, t, it, \dots, t^{m-1}, it^{m-1}$ vemos que en esta \mathbb{R} -álgebra la métrica de la traza (p. 83) es de rango 2 e índice 1. Como en $\mathbb{R}[x]/(x-a)^m$ es de rango 1 y signo +, del teorema chino del resto se sigue que en $\mathbb{R}[x]/(p(x))$ el rango de la métrica de la traza T_2 es el número de raíces distintas y el índice es la mitad del de raíces imaginarias.

En particular, todas las raíces de $p(x)$ son reales si y sólo si T_2 es no-negativa, $T_2(a, a) \geq 0$.

En la base $1, x, \dots, x^{n-1}$ de $\mathbb{R}[x]/(p(x))$, $n = \text{gr } p(x)$, la matriz de T_2 es (las sumas σ_r de potencias de raíces vienen dadas por las fórmulas de Newton y Girard)

$$T_2 = \begin{pmatrix} n & \sigma_1 & \dots & \sigma_{n-1} \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n-1} & \sigma_n & \dots & \sigma_{2n-2} \end{pmatrix}$$

5.5. Morfismos Finitos

Un morfismo de anillos $A \rightarrow B$ es **finito** si B es un A -módulo finito, $B = Ab_1 + \dots + Ab_n$.

Los morfismos finitos son estables por cambios de base $A \rightarrow C$,

$$C \longrightarrow B \otimes_A C = C(b_1 \otimes 1) + \dots + C(b_n \otimes 1),$$

y por composición, pues si $B = Ab_1 + \dots + Ab_n$, y $C = Bc_1 + \dots + Bc_m$, entonces

$$C = (Ab_1 + \dots + Ab_n)c_1 + \dots + (Ab_1 + \dots + Ab_n)c_m = Ab_1c_1 + \dots + Ab_nc_m.$$

Teorema: Sea $A \rightarrow B$ un morfismo de anillos, y $b \in B$. El morfismo $A \rightarrow A[b]$ es finito $\Leftrightarrow b$ verifica una relación de **dependencia entera** $b^n + a_1b^{n-1} + \dots + a_n = 0$, $a_i \in A$.

De hecho, para que b sea entero, basta que b esté en una subálgebra finita de B .

Demostración: Si $b^n + a_1b^{n-1} + \dots + a_n = 0$, entonces $A[b] = A + Ab + \dots + Ab^{n-1}$.

Recíprocamente, si $C = Ac_1 + \dots + Ac_n$ es una subálgebra finita, y $b \in C$, entonces

$$bc_i = \sum_j a_{ij}c_j, \quad \begin{pmatrix} b - a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & \dots & b - a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

y multiplicando por la matriz adjunta vemos que el determinante $b^n + a_1b^{n-1} + \dots + a_n$ anula a C ; luego es nulo, porque $1 \in C$.

Corolario: Los elementos enteros de B forman un anillo (el **cierre entero** de A en B).

Demostración: Si $b_1, b_2 \in B$ son enteros, los morfismos $A \rightarrow A[b_1] \rightarrow A[b_1, b_2]$ son finitos; luego todo elemento de $A[b_1, b_2]$ (en particular $b_1 + b_2$ y $b_1 b_2$) es entero.

Ejemplo: El morfismo $A = k[x] \rightarrow k[x, y]/(P)$ es finito si y sólo si la curva $P(x, y) = 0$ carece de asíntotas verticales (si la curva proyectiva $P(x_0, x_1, x_2) = 0$ pasa por el punto $(0, 0, 1)$, su cono tangente en él es la recta del infinito con cierta multiplicidad).

En efecto, y es entero sobre A cuando algún múltiplo de P es de la forma

$$y^n + p_1(x)y^{n-1} + \dots + p_n(x),$$

lo que equivale a que P lo sea. Homogeneizando, y deshomogeneizando con x_2 para que el punto $(0, 0, 1)$ sea el nuevo origen, esta condición significa que si la curva pasa por el origen, su cono tangente en el origen es $x_0^{d-n} = 0$,

$$0 = x_0^{d-n} + (\text{términos de grado } > d - n), \quad (\text{donde } d = \text{gr } P);$$

Teorema: Las fibras de todo morfismo finito $\pi: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ son finitas y discretas, y π es epiyectivo cuando el morfismo $A \rightarrow B$ es inyectivo.

Demostración: $\pi^{-1}(x) = \text{Spec}(B \otimes_A \kappa(x))$, y $B \otimes_A \kappa(x)$ es una $\kappa(x)$ -álgebra finita (p. 79).

Además, si $0 \rightarrow A \rightarrow B$, entonces $0 \rightarrow A_x \rightarrow B_x$, y $B_x \neq 0$.

Luego $B_x/\mathfrak{p}_x B_x \neq 0$ por Nakayama, y la fibra $\pi^{-1}(x) = \text{Spec}(B_x/\mathfrak{p}_x B_x)$ no es vacía.

Corolario: Si $\pi: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ es finito, $\dim B \leq \dim A$.

Demostración: En ninguna cadena de especializaciones $y_0 > \dots > y_n$ en $\text{Spec } B$ se dan coincidencias $\pi(y_{i-1}) = \pi(y_i)$, porque la fibra de $\pi(y_i)$ es discreta.

Teorema del Ascenso: Los morfismos finitos son cerrados.

Demostración: Si J es un ideal de B , el morfismo $A/I \rightarrow B/J$ es finito e inyectivo, donde $I = A \cap J$, y el siguiente cuadrado conmutativo muestra que $\pi(J)_0 = (I)_0$,

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } B & \xrightarrow{\pi} & \text{Spec } A \\ \cup & & \cup \\ \text{Spec } B/J & \longrightarrow & \text{Spec } A/I \end{array}$$

Corolario: Si $x' < x = \pi(y)$, existe $y' < y$ tal que $\pi(y') = x'$.

Demostración: El cierre de $x = \pi(y)$ está contenido en $\pi(\bar{y})$ porque π es cerrada.

Corolario: Si $A \rightarrow B$ es finito e inyectivo, $\dim A = \dim B$.

Demostración: Sea $x_0 > \dots > x_n$ una cadena de especializaciones en $\text{Spec } A$, y $x_0 = \pi(y_0)$. Existen especializaciones $y_0 > \dots > y_n$ tales que $\pi(y_i) = x_i$; luego $\dim B \geq \dim A$.

Definición: Un anillo íntegro es **normal** si es su cierre entero en su cuerpo de fracciones.

Los dominios de factorización única son normales (el argumento de la p. 13 es válido).

Lema: Sea A un anillo normal, L una extensión normal de su cuerpo de fracciones Σ , y $B \subset L$ una subálgebra finita sobre A . Si B es estable por el grupo $G = \text{Aut}(L/\Sigma)$, entonces G actúa transitivamente en las fibras de la proyección $\pi: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$.

Demostración: Sea $G = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$, y consideremos dos puntos y, y' de una fibra $\pi^{-1}(x)$.

Como la fibra es finita y discreta, si $y' \notin Gy$, existe $f \in B$ que se anula en y' y no se anula en Gy (p. 137).

Las raíces del polinomio irreducible $t^d + c_1 t^{d-1} + \dots + c_d$ de f sobre Σ son $\sigma_i(f) \in B$, con ciertas multiplicidades. Como A es normal, $B \cap \Sigma = A$, y

$$c_d = \prod_i \sigma_i(f)^{m_i} \in B \cap \Sigma = A.$$

Ahora $c_d(x) = c_d(y') = 0$, porque $f(y') = 0$, y $c_d(x) = c_d(y) \neq 0$, porque $(\sigma_i f)(y) \neq 0$. Absurdo.

Teorema del Descenso: *Sea $A \rightarrow B$ un morfismo finito e inyectivo entre anillos íntegros. Si A es normal, la proyección $\pi: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ es abierta.*

Demostración: Sea L la envolvente normal sobre Σ del cuerpo de fracciones de B , y sea $G = \text{Aut}(L/\Sigma)$. Si $B = A[b_1, \dots, b_n]$, ponemos $B' = A[\sigma_i(b_j)]$, $\sigma_i \in G$.

Como la aplicación $\rho: \text{Spec } B' \rightarrow \text{Spec } B$ es epiyectiva, $U = \rho(\rho^{-1}(U))$, y podemos suponer que B es estable por la acción de G . Por el lema anterior

$$\text{Spec } A - \pi(U) = \pi(\text{Spec } B - \bigcup_{\sigma \in G} \sigma(U)),$$

y al ser π es cerrada, vemos que $\pi(U)$ es un abierto cuando U lo es.

Corolario: *Si $x' > x = \pi(y)$, existe $y' > y$ tal que $\pi(y') = x'$.*

Demostración: La fibra de x' es finita; luego basta ver que y está en su cierre F .

Como x' no está en el abierto $\pi(\text{Spec } B - F)$, tampoco está su especialización $x = \pi(y)$.

Corolario: $\dim B_y = \dim A_x$, cuando $x = \pi(y)$.

5.5.1. Teorema de los Ceros

Si $A = k[\xi_1, \dots, \xi_n]$ es una k -álgebra finito generada, diremos que $X = \text{Spec } A$ es una **variedad algebraica afín** sobre el cuerpo k , y que los morfismos de k -álgebras $A \rightarrow B$ son los k -morfismos $Y = \text{Spec } B \rightarrow X$; es decir, $\text{Hom}_k(Y, X) = \text{Hom}_{k\text{-alg}}(A, B)$.

Lema de Normalización: *Existe un morfismo finito e inyectivo $k[x_1, \dots, x_d] \rightarrow A$.*

Demostración: Si ξ_1, \dots, ξ_n no son algebraicamente independientes, verifican alguna relación, que escribimos en orden lexicográfico decreciente:

$$a \xi_1^{r_1} \xi_2^{r_2} \dots \xi_n^{r_n} + \dots = 0.$$

Pongamos $\xi'_i = \xi_i - \xi_n^{d_i}$, donde $d_1 \gg d_2 \gg \dots \gg d_{n-1}$. Ahora $A = k[\xi'_1, \dots, \xi'_{n-1}, \xi_n]$, donde $\xi'_1, \dots, \xi'_{n-1}, \xi_n$ satisfacen una relación en que el término de mayor grado en ξ_n es

$$a \xi_n^{d_1 r_1 + \dots + d_{n-1} r_{n-1} + r_n},$$

de modo que el morfismo $k[\xi'_1, \dots, \xi'_{n-1}] \hookrightarrow A$ es finito. Por inducción sobre n , existe un morfismo finito $k[x_1, \dots, x_d] \hookrightarrow k[\xi'_1, \dots, \xi'_{n-1}]$, y terminamos. q.e.d.

Cuando k es infinito, la demostración se simplifica tomando $\xi'_i = \xi_i - \lambda_i \xi_n$, donde $\lambda_i \in k$. Es decir, una proyección lineal genérica $X \rightarrow \mathbb{A}^d$ es finita.

Corolario: $\dim k[x_1, \dots, x_n] = n$.

Demostración: Por inducción sobre n .

Si $0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_m$ es una cadena de ideales primos en $k[x_1, \dots, x_n]$, tomamos $P \in \mathfrak{p}_1$ no nulo, de modo que $A = k[x_1, \dots, x_n]/(P)$ tiene dimensión $\geq m - 1$.

La demostración del lema anterior prueba la existencia de un morfismo finito e inyectivo $k[y_1, \dots, y_d] \rightarrow k[\xi_1, \dots, \xi_n]$, $d < n$.

Por inducción $\dim A = d$; luego $m \leq n$ y $\dim k[x_1, \dots, x_n] \leq n$.

Terminamos porque claramente $\dim k[x_1, \dots, x_n] \geq n$.

Corolario: Si $\dim X = d$, existe una proyección finita $X \rightarrow \mathbb{A}_d$.

Demostración: Si $k[x_1, \dots, x_d] \hookrightarrow A$ es finito, $d = \dim k[x_1, \dots, x_d] = \dim A$.

Teorema de los Ceros: Si $\dim A = 0$, entonces A es una k -álgebra finita. Por tanto, los cuerpos A/\mathfrak{m} son extensiones finitas de k .

Demostración: Si $\dim A = 0$, existe un morfismo finito $k \rightarrow A$.

Corolario: Todo morfismo $\phi: Y \rightarrow X$ entre variedades algebraicas afines transforma puntos cerrados en puntos cerrados.

Demostración: Si $\phi(y) = x$, tenemos que $\kappa(x) \hookrightarrow \kappa(y)$. Ahora, si y es cerrado, $\kappa(y)$ es una extensión finita de k ; luego $\kappa(x)$ también, y $A/\mathfrak{p}_x \subseteq \kappa(x)$ es cuerpo.

Teorema: El radical de A es la intersección de los ideales maximales.

Demostración: Si $f \in A$ se anula en los puntos cerrados de X , entonces la variedad algebraica $U_f = X - (f)_0$ carece de puntos cerrados; luego es vacía, y f se anula en X .

5.6. Anillos de Valoración y Dominios de Dedekind

Definiciones: Un morfismo inyectivo $A \rightarrow B$ entre anillos íntegros es **birracional** si induce un isomorfismo entre los cuerpos de fracciones, $\Sigma_A \xrightarrow{\sim} \Sigma_B$.

Si \mathcal{O} es un anillo local, de ideal maximal \mathfrak{m} , un morfismo inyectivo $\mathcal{O} \rightarrow B$ es **dominante** si $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}' \cap \mathcal{O}$ para algún maximal \mathfrak{m}' de B ; es decir, si $\mathfrak{m}B \neq B$.

Un anillo íntegro \mathcal{V} , de cuerpo de fracciones Σ , es un anillo de **valoración** de Σ cuando $f \in \mathcal{V}$ ó $f^{-1} \in \mathcal{V}$, $\forall f \in \Sigma$. El anillo $\mathcal{V} = \Sigma$ es la valoración **trivial**.

Los ideales de un anillo de valoración \mathcal{V} están totalmente ordenados (en particular \mathcal{V} es local), pues si hubiera un par incomparable I, J ,

$$\left. \begin{array}{l} f \in I, f \notin J \\ h \notin I, h \in J \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{f}{h} \notin \mathcal{V}, \frac{h}{f} \notin \mathcal{V}.$$

Proposición: Los anillos locales regulares de dimensión 1 son dominios de ideales principales, y anillos de valoración (son los anillos de **valoración discreta**).

Demostración: Si \mathcal{O} es de dimensión 1 y regular, $\mathfrak{m} = t\mathcal{O}$, y los espacios vectoriales $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ tienen dimensión 1. Por tanto, si \mathfrak{m}^{n+1} es la primera potencia que no contiene a un ideal $I \neq 0$, tenemos que I genera $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ y, por Nakayama, $I = \mathfrak{m}^n = t^n\mathcal{O}$.

Ahora toda función $0 \neq f \in \Sigma$ es $f = ut^n$, donde $u \in \mathcal{O}^*$, $n \in \mathbb{Z}$; luego $f \in \mathcal{O}$ ó $f^{-1} \in \mathcal{O}$, y diremos que $n = v_x(f)$ es la **valoración** de f en el punto $x \in \text{Spec } \mathcal{O}$ definido por \mathfrak{m} . q.e.d.

1. Sea A un dominio de ideales principales y p un elemento irreducible. El anillo local A_p es un anillo de valoración discreta, y $v_p(a) = n$ cuando p^n es la mayor potencia de p que divide a a . Es la llamada valoración p -ádica.
2. Un punto de una variedad algebraica es **simple** o **no singular** cuando su anillo local es regular. El anillo local de una curva en un punto no singular x es un anillo de valoración discreta, y $v_x(f)$ es el número de ceros o polos de f en x .
3. La valoración discreta de $k(t)$ en el punto $t = \infty$ es $v_\infty(p/q) = \text{gr } q - \text{gr } p$.

Teorema: *Un anillo local noetheriano \mathcal{O} de dimensión 1 es regular \Leftrightarrow es normal.*

Demostración: Si \mathcal{O} es regular, es un dominio de ideales principales; luego normal.

Si \mathcal{O} es normal, tomamos $f \in \mathfrak{m}$ no nulo, y la primera potencia $\mathfrak{m}^n \subseteq f\mathcal{O}$ (existe porque $\mathfrak{m} = \text{rad } f\mathcal{O}$, al ser $\dim \mathcal{O} = 1$). Sea $h \in \mathfrak{m}^{n-1}$, $h \notin f\mathcal{O}$, y pongamos $x = h/f$,

$$x\mathfrak{m} \subseteq \mathcal{O}, \quad x \notin \mathcal{O}.$$

Para concluir que \mathfrak{m} es un ideal principal basta ver que $x\mathfrak{m} = \mathcal{O}$.

En caso contrario $x\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}$, y x define un endomorfismo de \mathfrak{m} , que satisface el correspondiente polinomio característico. Luego x es entero sobre \mathcal{O} , en contra de que \mathcal{O} es normal.

Lema: *Un anillo local íntegro \mathcal{V} es de valoración si y sólo si todo morfismo birracional dominante $\mathcal{V} \rightarrow B$ es isomorfismo.*

Demostración: Sea \mathcal{V} de valoración, $\mathcal{V} \rightarrow B$ un morfismo birracional dominante, y $b \in B$.

Si $b \notin \mathcal{V}$, entonces $b^{-1} \in \mathcal{V}$ no es invertible; luego $b^{-1} \in \mathfrak{m}_{\mathcal{V}}$, y $\mathfrak{m}_{\mathcal{V}}B = B$, en contra de que el morfismo es dominante. Luego $b \in \mathcal{V}$, y $\mathcal{V} = B$.

Recíprocamente, sea $f \in \Sigma$, $f \notin \mathcal{V}$. Como $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}[f]$ no es dominante, $\mathfrak{m}_{\mathcal{V}}\mathcal{V}[f] = \mathcal{V}[f]$,

$$a_0 + a_1f + \dots + a_nf^n = 1, \quad (a_0 - 1)f^{-n} + a_1f^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

donde $a_i \in \mathfrak{m}_{\mathcal{V}}$. Como $a_0 - 1$ es invertible en \mathcal{V} , el morfismo $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}[f^{-1}]$ es finito.

Luego es dominante, y $f^{-1} \in \mathcal{V}$.

Teorema: *Sea A íntegro, de cuerpo de fracciones Σ . El cierre entero B de A en una extensión finita L de Σ es la intersección de los anillos de valoración de L que lo contienen,*

$$B = \bigcap \mathcal{V}_i.$$

Demostración: Los anillos de valoración son normales, porque todo morfismo finito birracional es dominante (p. 140); luego $B \subseteq \bigcap \mathcal{V}_i$.

Por otra parte, la condición de que $f^{-1} \in L$ sea invertible en $A[f^{-1}]$,

$$1 = f^{-1}(a_0 + a_1f^{-1} + \dots + a_nf^{-n}), \quad f^n = a_0f^{n-1} + a_1f^{n-2} + \dots + a_n,$$

significa que f es entero sobre A . Si $f \notin B$, entonces f^{-1} no es invertible en $A[f^{-1}]$.

Localizando $A[f^{-1}]$ en un primo que contenga a f^{-1} , y tomando un anillo maximal para la dominación (Zorn), obtenemos un anillo de valoración \mathcal{V}_i que no contiene a f .

Lema: *Sea $A \rightarrow B$ un morfismo, y C el cierre entero de A en B . Si S es un sistema multiplicativo de A , entonces C_S es el cierre entero de A_S en B_S . Por tanto, un anillo íntegro A es normal $\Leftrightarrow A_x$ es normal en todo punto $x \in \text{Spec } A$.*

Demostración: $C_S = C \otimes_A A_S$ es entero sobre A_S . Además, si $\frac{b}{s} \in B_S$ es entero sobre A_S , $(\frac{b}{s})^n + \frac{a_1}{s_1}(\frac{b}{s})^{n-1} + \dots + \frac{a_n}{s_n} = 0$, y ponemos $t = s_1 \cdots s_n$, multiplicando por $s^n t^n$ obtenemos una relación de dependencia entera de bt sobre A ; luego $bt \in C$, y $\frac{b}{s} = \frac{bt}{st} \in C_S$.

Por último, A es normal si y sólo si $\bar{A}/A = 0$, y terminamos (p. 75).

Teorema de Finitud: *Sea A un anillo normal noetheriano y Σ su cuerpo de fracciones. El cierre entero B de A en una extensión finita separable L de Σ es un A -módulo finito.*

Demostración: La métrica de la traza $T_2(\alpha, \beta) = \text{tr}(\alpha\beta)$ es no singular (p. 83), y $\text{tr}(\beta) = \sigma_1(\beta) + \dots + \sigma_d(\beta)$, donde $\sigma_1, \dots, \sigma_d: L \rightarrow L'$ son los puntos de L con valores en una extensión L' que la trivialice. Luego $\text{tr}(B)$ es entero sobre A , y $\text{tr}(B) \subseteq B \cap \Sigma = A$.

Por el lema, podemos tomar una base b_1, \dots, b_n de L formada por elementos de B .

Sea b_1^*, \dots, b_n^* su base dual, $\text{tr}(b_i \cdot b_j^*) = \delta_{ij}$. Si $b \in B$,

$$b = \text{tr}(b_1 b) b_1^* + \dots + \text{tr}(b_n b) b_n^* \in Ab_1^* + \dots + Ab_n^*.$$

Luego $B \subseteq Ab_1^* + \dots + Ab_n^*$ y, al ser A noetheriano, B es un A -módulo finito.

Teorema: *Sea A una k -álgebra de tipo finito íntegra y Σ su cuerpo de fracciones. El cierre entero de A en cualquier extensión finita L de Σ es un A -módulo finito.*

Demostración: Fijemos un morfismo inyectivo y finito $k[x_1, \dots, x_n] \rightarrow A$.

El cierre entero de A en L es el cierre entero de $k[x_1, \dots, x_n]$ en L , así que podemos suponer que $A = k[x_1, \dots, x_n]$. Si $\text{car } k = 0$, se sigue del teorema de finitud.

Si $\text{car } k = p$, metiendo L en una extensión normal de Σ (p. 92), podemos suponer que la extensión $\Sigma \rightarrow L$ es normal. Si $G = \text{Aut}(L/\Sigma)$, entonces L es una extensión separable de L^G por el teorema de Artin, y L^G es una extensión puramente inseparable de Σ (p. 93).

Si demostramos que el cierre entero B de A en L^G es A -módulo finito, entonces B es un anillo normal noetheriano, y el teorema anterior permite concluir que el cierre entero de B en L es un B -módulo finito, y por tanto un A -módulo finito.

En resumen, basta probar el teorema cuando $A = k[x_1, \dots, x_n]$ y L es una extensión puramente inseparable de $\Sigma = k(x_1, \dots, x_n)$.

En este caso (p. 93) existe una potencia $q = p^r$ tal que $L = \Sigma(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, y $\alpha_i^q \in \Sigma$.

Si $\alpha_i^q = P_i/Q_i$, entonces $(Q_i \alpha_i)^q = P_i Q_i^{q-1}$, así que podemos suponer que $\alpha_i^q \in A$:

$$\alpha_i^q = \sum_{j_1 \dots j_n} \lambda_{i,j_1 \dots j_n} x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}$$

$$\alpha_i = \sum_{j_1 \dots j_n} \sqrt[q]{\lambda_{i,j_1 \dots j_n}} y_1^{j_1} \dots y_n^{j_n}, \quad y_j = \sqrt[q]{x_j}$$

Ahora $L = k(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_r) \rightarrow K(y_1, \dots, y_n)$, donde $K = k(\sqrt[q]{\lambda_{i,j_1 \dots j_n}})$.

Como $K[y_1, \dots, y_n]$ es normal, y es finito sobre $k[x_1, \dots, x_n] = k[y_1^q, \dots, y_n^q]$, es el cierre entero de $A = k[x_1, \dots, x_n]$ en $K(y_1, \dots, y_n)$, y es un A -módulo finito generado.

Definición: Un anillo noetheriano íntegro A de dimensión 1 es un **dominio de Dedekind** si los anillos locales A_x son regulares, lo que equivale a que sea normal.

En tal caso, los anillos de valoración \mathcal{V} de su cuerpo de fracciones Σ que lo contienen son los anillos de valoración discreta A_x : si $\mathfrak{m}_{\mathcal{V}} \cap A = \mathfrak{p}_x$, entonces \mathcal{V} domina a A_x , y por tanto $\mathcal{V} = A_x$. Es decir,

$$A = \{f \in \Sigma: v_x(f) \geq 0, \forall x \in \text{Spec } A\}.$$

Una curva íntegra $\text{Spec } A$ carece de puntos singulares cuando A es de Dedekind.

Por el Teorema de Finitud, el cierre entero A de \mathbb{Z} en una extensión finita L de \mathbb{Q} es un anillo noetheriano, y por tanto es un dominio de Dedekind.

Teorema: *Todo ideal no nulo de un dominio de Dedekind descompone, de modo único, en producto de potencias de ideales primos, $I = \mathfrak{p}_1^{n_1} \dots \mathfrak{p}_r^{n_r}$.*

Demostración: En cada punto de $(I)_0 = \{x_1, \dots, x_r\}$ tenemos que I_{x_i} coincide con una potencia $\mathfrak{p}_i^{n_i}$, porque A_{x_i} no tiene otros ideales no nulos. Ahora $I = \mathfrak{p}_1^{n_1} \dots \mathfrak{p}_r^{n_r}$ porque ambos coinciden al localizar en los puntos de $\text{Spec } A$. La unicidad es evidente.

5.6.1. Módulos sobre Dominios de Dedekind

Sea A de Dedekind. Si un A -módulo finito T es de torsión, su soporte está formado por un número finito de puntos cerrados; luego T descompone en suma directa de sus localizaciones en tales puntos y, al ser dominios de ideales principales los anillos locales A_x , tenemos que T descompone, de modo único, en suma directa de monógenos primarios (p. 113):

$$T = \bigoplus_{ij} A/\mathfrak{p}_i^{n_{ij}}.$$

Si T es la torsión de un A -módulo finito generado M , entonces $L = M/T$ es localmente libre porque carece de torsión (p. 111); luego proyectivo (lo veremos en la p. 151), y $M = T \oplus L$ porque escinde la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

Si $\text{rg } L = 1$, localizando en el punto genérico vemos que L es un submódulo del cuerpo de fracciones Σ ; luego $fL \subseteq A$, y L es isomorfo a un ideal no nulo.

Un isomorfismo $I \simeq I'$ entre dos ideales no nulos induce en el punto genérico un isomorfismo $\Sigma \simeq \Sigma$, que es una homotecia; luego $I \simeq I' \Leftrightarrow I' = fI$ para algún $f \in \Sigma$.

Los ideales $I = \mathfrak{p}_1^{n_1} \dots \mathfrak{p}_r^{n_r}$ se corresponden con los divisores $D = n_1x_1 + \dots + n_rx_r$ **efectivos** ($n_i \geq 0$), y si introducimos el divisor de una función racional $0 \neq f \in \Sigma$,

$$D(f) = \sum_{x \in \text{Spec } A} v_x(f) x,$$

$I' \simeq I$ si y sólo si sus divisores son **linealmente equivalentes**:

$$D' = D(f) + D \text{ para algún } f \in \Sigma.$$

El **grupo de Picard** $\text{Pic}(A) = \text{Div}(A)/\{D(f)\}$ está formado por las clases de isomorfismo de ideales no nulos, porque todo divisor es equivalente a uno efectivo.

En efecto, el teorema chino del resto

$$A/\mathfrak{p}_1^{n_1} \dots \mathfrak{p}_r^{n_r} = (A/\mathfrak{p}_1^{n_1}) \oplus \dots \oplus (A/\mathfrak{p}_r^{n_r})$$

muestra que, dados puntos cerrados x_1, \dots, x_r y números naturales m_1, \dots, m_r , existe una función $f \in A$ tal que $v_{x_i}(f) = m_i$.

En general, cuando $\text{rg } L = r > 1$, tomamos $m \in L$ no nulo, y ponemos

$$L' = \{m' \in L : am' \in Am \text{ para algún } a \in A\}.$$

Ahora L/L' carece de torsión y es de rango $r - 1$.

Por inducción sobre el rango, vemos que L es suma directa de ideales (no de modo único),

$$L = I_1 \oplus \dots \oplus I_r.$$

Lema: *Dados puntos cerrados $x_1, \dots, x_r \in \text{Spec } A$, y números naturales m_1, \dots, m_r , existe $f \in \Sigma$ tal que $v_{x_i}(f) = -m_i$, y $v_x(f) \geq 0$ en los otros puntos $x \in \text{Spec } A$.*

Demostración: Sea $a \in A$ tal que $v_{x_i}(a) = m_i$. Si a^{-1} tuviera otros polos, tomamos $b \in A$ que se anule en ellos con igual orden, y $v_{x_i}(b) = 0$. Ahora $f = b/a$ sirve. q.e.d.

Dados ideales I, J sin ceros comunes, $I + J = A$, la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow I \cap J \longrightarrow I \oplus J \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

muestra que $I \oplus J \simeq A \oplus I'$. Cuando J tiene ceros comunes con I , por el lema anterior existe $f \in \Sigma$ tal que fJ es un ideal sin ceros comunes con I ; luego también $I \oplus J \simeq A \oplus I'$, y vemos que $I_1 \oplus \dots \oplus I_r \simeq I \oplus A^{r-1}$ para cierto ideal I .

Teorema: *Todo A -módulo finito generado M descompone, de modo único salvo isomorfismos,*

$$M = I \oplus A^{r-1} \oplus (\oplus_{ij} A/\mathfrak{p}_i^{n_{ij}}).$$

Demostración: Ya hemos visto la existencia.

La unicidad se sigue de que si $L = I \oplus A^{r-1}$, entonces $I = \Lambda^r L$.

Corolario: *El grupo K de los A -módulos finitos localmente libres es*

$$K(A) = \mathbb{Z} \oplus \text{Pic}(A).$$

Demostración: El morfismo inverso de $K(A) \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \text{Pic}(A)$, $[L] \mapsto (\text{rg } L, \Lambda^r L)$ es el morfismo $\mathbb{Z} \oplus \text{Pic}(A) \rightarrow K(A)$, $(r, [I]) \mapsto I \oplus A^{r-1}$.

5.7. Morfismos Finitos Birracionales

Sea $C = \text{Spec } A$ una curva íntegra sobre k , y sea Σ su cuerpo de funciones racionales.

El cierre entero \bar{A} de A en Σ es un A -módulo finito (p. 144); luego una k -álgebra finito generada, y $\bar{C} = \text{Spec } \bar{A}$ es una curva no singular (llamada desingularización de C) con un morfismo finito birracional $\bar{C} \rightarrow C$. El A -módulo finito $\mathfrak{C} = \bar{A}/A$ es el **conductor**, y se anula en un punto x justamente cuando $A_x = \bar{A}_x$; es decir, cuando x es simple.

Teorema: *El número de puntos singulares de una curva íntegra es finito.*

Demostración: Localizando en el punto genérico p_g la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow \bar{A} \longrightarrow \mathfrak{C} \longrightarrow 0,$$

$\mathfrak{C}_{p_g} = \Sigma/\Sigma = 0$; luego \mathfrak{C} es un módulo finito de torsión, y su soporte es finito. q.e.d.

El morfismo $\bar{C} \rightarrow C$ es isomorfismo en el abierto de puntos simples, y vamos a estudiarlo en un punto singular x . Sea $\mathcal{O} = A_x$ el anillo local de C en x , y \mathfrak{m} su ideal maximal.

Teorema: *$\hat{\mathcal{O}}$ es reducido, y sus primos minimales se corresponden con los maximales de $\bar{\mathcal{O}}$.*

Demostración: $\mathfrak{C} = \bar{\mathcal{O}}/\mathcal{O}$ es completo, porque está anulado por una potencia de \mathfrak{m} .

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \bar{\mathcal{O}} \longrightarrow \mathfrak{C} \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow \hat{\mathcal{O}} \longrightarrow \hat{\bar{\mathcal{O}}} \longrightarrow \mathfrak{C} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

$\bar{\mathcal{O}}$ es un dominio de Dedekind; luego $\mathfrak{m}\bar{\mathcal{O}} = \mathfrak{m}_1^{n_1} \dots \mathfrak{m}_r^{n_r}$, donde $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_r$ son los maximales de $\bar{\mathcal{O}}$. Por el teorema chino,

$$\hat{\bar{\mathcal{O}}} = \varprojlim \bar{\mathcal{O}}/\mathfrak{m}^n \bar{\mathcal{O}} = \varprojlim (\bar{\mathcal{O}}/\mathfrak{m}_1^{n_1 n} \oplus \dots \oplus \bar{\mathcal{O}}/\mathfrak{m}_r^{n_r n}) = \hat{\mathcal{O}}_{x_1} \oplus \dots \oplus \hat{\mathcal{O}}_{x_r},$$

donde \mathcal{O}_{x_i} , la localización de $\bar{\mathcal{O}}$ en \mathfrak{m}_i , es regular; luego $\hat{\mathcal{O}}_{x_i}$ es regular, e íntegro.

Vemos así que $\hat{\bar{\mathcal{O}}}$ es reducido (y el subanillo $\hat{\mathcal{O}}$ también) y que sus primos minimales se corresponden con sus maximales (que se corresponden con los maximales de $\bar{\mathcal{O}}$).

Ahora, en todo primo minimal \mathfrak{p} de $\hat{\mathcal{O}}$ tenemos que $\mathfrak{C}_{\mathfrak{p}} = 0$, porque \mathfrak{C} está anulado por una potencia de $\mathfrak{m}\hat{\mathcal{O}}$; luego $\hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}} = \hat{\bar{\mathcal{O}}}_{\mathfrak{p}}$, y $\text{Spec } \hat{\mathcal{O}}$ tiene un único punto sobre \mathfrak{p} . Los primos minimales de $\hat{\mathcal{O}}$ se corresponden con los de $\hat{\bar{\mathcal{O}}}$.

Definiciones: Los primos minimales de $\hat{\mathcal{O}}$ son las **ramas analíticas** de la curva C en x , y se corresponden con los puntos x_i de la fibra de \bar{C} sobre x .

La **multiplicidad de intersección** en x de la curva C con la hipersuperficie H de ecuación $f = 0$ es $(C \cap H)_x = l(\mathcal{O}/f\mathcal{O})$.

Lema: $l_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/f\mathcal{O}) = l_{\bar{\mathcal{O}}}(\bar{\mathcal{O}}/f\bar{\mathcal{O}})$.

Demostración: $l(\bar{\mathcal{O}}/\mathcal{O}) = l(f\bar{\mathcal{O}}/f\mathcal{O})$ porque $\bar{\mathcal{O}}/\mathcal{O} \xrightarrow{f} f\bar{\mathcal{O}}/f\mathcal{O}$ es un isomorfismo.

El carácter aditivo de la longitud, y el siguiente cuadrado conmutativo, permiten concluir,

$$\begin{array}{ccc} f\mathcal{O} & \longrightarrow & f\bar{\mathcal{O}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O} & \longrightarrow & \bar{\mathcal{O}} \end{array}$$

Teorema: $(C \cap H)_x = \sum_{x_i \rightarrow x} v_{x_i}(f) \cdot [\kappa(x_i) : \kappa(x)]$.

Demostración: Si f es invertible en \mathcal{O} , es obvio. Si f se anula en x , el anillo $\bar{\mathcal{O}}/f\bar{\mathcal{O}}$ tiene dimensión 0, y descompone en suma directa de sus localizaciones,

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{O}}/f\bar{\mathcal{O}} &= \mathcal{O}_{x_1}/f\mathcal{O}_{x_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{x_n}/f\mathcal{O}_{x_n} \\ (C \cap H)_x &= l_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_{x_1}/f\mathcal{O}_{x_1}) + \dots + l_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_{x_n}/f\mathcal{O}_{x_n}) \end{aligned}$$

La longitud del \mathcal{O} -módulo $\mathcal{O}_{x_i}/f\mathcal{O}_{x_i}$ es el producto de su longitud como \mathcal{O}_{x_i} -módulo, que es $v_{x_i}(f)$, por la longitud del único \mathcal{O}_{x_i} -módulo simple $\kappa(x_i)$, que es $[\kappa(x_i) : \kappa(x)]$.

5.7.1. Transformaciones Cuadráticas

Ahora supondremos que el cuerpo k es infinito, de modo que un espacio vectorial no es unión finita de subespacios vectoriales propios (p. 82). Si m_i es el valor mínimo en \mathfrak{m} de la valoración v_{x_i} , $x_i \in \text{Spec } \bar{\mathcal{O}}$, tenemos que $\{a \in \mathfrak{m} : v_{x_i}(a) > m_i\}$ es un subespacio vectorial propio de \mathfrak{m} ; luego existe $f \in \mathfrak{m}$ donde todas las valoraciones v_{x_i} toman valor mínimo.

Ahora, si $\mathfrak{m} = (f_1, \dots, f_d)$, tenemos que $v_{x_i}\left(\frac{f_j}{f}\right) \geq 0$; luego $\frac{f_j}{f} \in \bar{\mathcal{O}}$,

$$\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}_1 = \mathcal{O}\left[\frac{f_1}{f}, \dots, \frac{f_d}{f}\right] \longrightarrow \bar{\mathcal{O}}.$$

El morfismo finito birracional $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_1$ es la **transformación cuadrática** o **explosión** de \mathcal{O} en el punto x . El anillo \mathcal{O}_1 es **semilocal** (tiene un número finito de ideales maximales), y el ideal $\mathfrak{m}\mathcal{O}_1 = f\mathcal{O}_1$ es principal, porque $f_j = f\frac{f_j}{f} \in f\mathcal{O}_1$.

Esta construcción es válida aunque sólo se suponga que \mathcal{O} es un subanillo semilocal de $\bar{\mathcal{O}}$, de modo que podemos volver a explotar \mathcal{O}_1 en un punto, y así sucesivamente.

Lema: \mathcal{O}_1 no depende de la función $f \in \mathfrak{m}$ de valoración mínima elegida.

Demostración: Si $f' \in \mathfrak{m}$, y $v_{x_i}(f') = v_i(f)$, entonces $\frac{f'}{f} \in \mathcal{O}_1$ no se anula en ningún punto de $\text{Spec } \bar{\mathcal{O}}$, y no se anula en ningún punto de $\text{Spec } \mathcal{O}_1$, porque el morfismo $\mathcal{O}_1 \hookrightarrow \bar{\mathcal{O}}$ es finito.

Luego $\frac{f'}{f}$ es invertible en \mathcal{O}_1 , y $\frac{f_j}{f'} = \frac{f_j}{f} \frac{f}{f'} \in \mathcal{O}_1$,

$$\mathcal{O}\left[\frac{f_1}{f'}, \dots, \frac{f_d}{f'}\right] \subseteq \mathcal{O}_1 = \mathcal{O}\left[\frac{f_1}{f}, \dots, \frac{f_d}{f}\right].$$

Por simetría, también se tiene la inclusión contraria.

Teorema: C se desingulariza con un número finito de transformaciones cuadráticas.

Demostración: Si $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_1$ es isomorfismo, el punto x es simple: $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}\mathcal{O}_1 = f\mathcal{O}_1 = f\mathcal{O}$.

Como la longitud de $\bar{\mathcal{O}}/\mathcal{O}$ es finita, después de un número finito de explosiones

$$\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{O}_r$$

obtendremos un anillo $\mathcal{O}_r \subseteq \bar{\mathcal{O}}$ sin puntos singulares; luego es normal, y $\mathcal{O}_r = \bar{\mathcal{O}}$.

Lema de Estabilidad: $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^n\mathcal{O}_1$, cuando $n \gg 0$.

Demostración: El \mathcal{O} -módulo \mathcal{O}_1 está generado por los elementos $\frac{f_1^{n_1} \dots f_d^{n_d}}{f^{n_1 + \dots + n_d}}$.

Como \mathcal{O}_1 es un \mathcal{O} -módulo finito, cuando $n \gg 0$, podemos tomar un sistema de generadores de la forma $\frac{a}{f^n}$, con $a \in \mathfrak{m}^n$. Ahora $\mathfrak{m}^n\mathcal{O}_1 = f^n\mathcal{O}_1 \subseteq \mathfrak{m}^n$, y terminamos.

Definición: La **multiplicidad** de un anillo local noetheriano \mathcal{O} de dimensión d es el coeficiente del término de mayor grado de su polinomio de Samuel, afectado del factor $d!$

En el caso de una hipersuperficie, $0 = P_m(x_1, \dots, x_d) + \text{términos de grado } > m$, su multiplicidad en el origen es m (p. 137).

Teorema: $S_{\mathcal{O}}(n) = mn - c$, donde $m = l(\mathcal{O}/f\mathcal{O})$, $c = l(\mathcal{O}_1/\mathcal{O})$.

Demostración: Cuando $n \gg 0$, tenemos que $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^n\mathcal{O}_1 = f^n\mathcal{O}_1$. Luego

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}/\mathfrak{m}^n \longrightarrow \mathcal{O}_1/f^n\mathcal{O}_1 \longrightarrow \mathcal{O}_1/\mathcal{O} \longrightarrow 0$$

$$S_{\mathcal{O}}(n) = l(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n) = l(\mathcal{O}_1/f^n\mathcal{O}_1) - l(\mathcal{O}_1/\mathcal{O}) = l(\mathcal{O}/f^n\mathcal{O}) - l(\mathcal{O}_1/\mathcal{O}) = nl(\mathcal{O}/f\mathcal{O}) - l(\mathcal{O}_1/\mathcal{O}).$$

Corolario: La multiplicidad m es el número de intersección de la curva explotada con la fibra excepcional $f = 0$, contando cada punto y con el grado $[\kappa(y) : \kappa(x)]$,

$$m = (C_1 \cap E).$$

Demostración: $m = l_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/f\mathcal{O}) = l_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_1/f\mathcal{O}_1)$.

Corolario: *La multiplicidad es 1 si y sólo si el punto es simple.*

Demostración: Si $1 = m = l(\mathcal{O}/f\mathcal{O})$, entonces $\mathfrak{m} = f\mathcal{O}$ es principal. q.e.d.

Al desingularizar una curva con transformaciones cuadráticas, sobre cada punto singular x van apareciendo unos puntos y , que dibujamos en forma de árbol (al final hay tantos como ramas analíticas en x) poniendo a su lado la multiplicidad m_y .

Corolario: *Si k es algebraicamente cerrado, y la curva es plana,*

$$\dim_k(\bar{\mathcal{O}}/\mathcal{O}) = \sum_y \binom{m_y}{2}.$$

Demostración: $l_{\mathcal{O}}(M) = \dim_k M$ cuando $k = \kappa(x)$, y en un punto de multiplicidad m de una curva plana (p. 137) el polinomio de Samuel es $\binom{n+1}{2} - \binom{n+1-m}{2} = mn - \binom{m}{2}$.

Nota: Si se desea desingularizar la curva $C = \text{Spec } A$, se ha elegir $f \in \mathfrak{m} = (f_1, \dots, f_d)$ que tome valor mínimo en todas las valoraciones discretas centradas en x , y que no se anule en los demás puntos singulares de C . No podemos asegurar que las funciones $\frac{f_j}{f}$ sean enteras sobre A , porque f puede tener otros ceros z_1, \dots, z_r en C .

Se toma $g \in A$ que no se anule en los puntos singulares de C , y que se anule en z_1, \dots, z_r con igual multiplicidad que f . Ahora las funciones $\frac{f_j g}{f}$ son enteras sobre A ,

$$A \longrightarrow A_1 = A \left[\frac{f_1 g}{f}, \dots, \frac{f_d g}{f} \right] \subseteq \bar{A}$$

y el morfismo $C_1 = \text{Spec } A_1 \rightarrow C$ es finito y birracional. Además, si $A = A_1$, entonces $f_j g \in fA$, luego $\mathfrak{m}_{A_x} = fA_x$ porque g es invertible en A_x , y el punto x no es singular.

Ejemplo: Sea k algebraicamente cerrado, de modo que, con un cambio de ejes, puede suponerse que cualquier punto cerrado es el origen de coordenadas.

Si C es una curva plana, y $x = 0$ no es tangente a C en el origen,

$$0 = P(x, y) = a_0 y^m + a_1 x y^{m-1} + \dots + a_m x^m + \sum_{i+j>m} a_{ij} x^i y^j, \quad a_0 \neq 0,$$

dividiendo por x^m obtenemos una relación de dependencia entera de $\frac{y}{x}$ sobre el anillo local \mathcal{O} de C en el origen. Luego $v_i(x) \leq v_i(y)$ para toda valoración discreta v_i centrada en el origen, y $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O} \left[\frac{y}{x} \right]$. Poniendo $z = \frac{y}{x}$, tenemos que

$$0 = P(x, xz) = x^m P_1(x, z) = x^m \left(a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m + \sum_{i+j>m} a_{ij} x^{i+j-m} z^j \right),$$

y vemos que \mathcal{O}_1 es el anillo semilocal de la curva $P_1(x, z) = 0$ en los puntos de corte con la fibra excepcional $x = 0$, que son los puntos $x = 0, z = \lambda$, donde $y = \lambda x$ es una recta del cono tangente $a_0 y^m + a_1 x y^{m-1} + \dots + a_m x^m = 0$.

Por ejemplo, sea C la curva plana compleja (íntegra por el criterio de Eisenstein)

$$P(x, y) = y^7 - x^9 y - x^{10} y + x^{11} + x^{12} = 0.$$

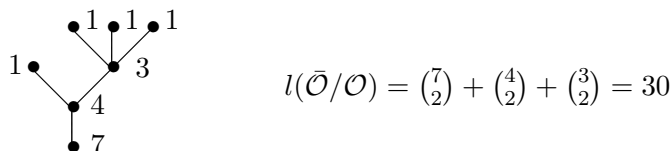
El cono tangente es $y^7 = 0$, y al explotar poniendo $z = \frac{y}{x}$, aparece el punto $x = z = 0$,

$$\begin{aligned} 0 &= P(x, xz) = x^7 (z^7 - x^3 z - x^4 z + x^4 + x^5), \\ 0 &= P_1(x, z) = x^4 - x^3 z + x^5 - x^4 z + z^7. \end{aligned}$$

El cono tangente en él es $x^3(x - z) = 0$, y al explotar poniendo $s = \frac{x}{z}$,

$$0 = P_2(z, s) = z^3 - s^3 + s^4 - zs^4 + zs^5,$$

aparece el punto simple $z = 0, s = 1$ ($\frac{\partial P_2}{\partial s}$ no se anula en él), y el punto $z = s = 0$, de multiplicidad 3. Explotando éste aparecen 3 puntos, simples porque la curva explotada corta a la fibra excepcional con multiplicidad 1. El árbol de explosiones es



Teorema: La multiplicidad de intersección de C con una hipersuperficie H de multiplicidad r es el producto de las multiplicidades más las multiplicidades de intersección de sus dilataciones en los puntos comunes de la fibra excepcional,

$$(C \cap H)_x = mr + (C_1 \cap H_1).$$

Demostración: Si la ecuación de H es $P(x_1, \dots, x_n) = 0$, y $f = x_1$ es de valoración mínima, la transformación birracional es $z_j = \frac{x_j}{x_1}$, y tenemos

$$P(x_1, \dots, x_n) = x_1^r P_1(x_1, z_2, \dots, z_n),$$

donde $P_1 = 0$ es la ecuación de la hipersuperficie H_1 .

$$(C \cap H)_x = l(\mathcal{O}/P) = l(\mathcal{O}_1/P) = l(\mathcal{O}_1/f^r P_1) = rl(\mathcal{O}_1/f) + l(\mathcal{O}_1/P_1) = mr + (C_1 \cap H_1),$$

donde $(C_1 \cap H_1) = l(\mathcal{O}_1/P_1)$ es la suma de las multiplicidades de intersección de C_1 y H_1 en sus puntos comunes sobre x . q.e.d.

Esta fórmula permite calcular $(C \cap H)_x$ explotando hasta que C y H se separen.

5.8. Morfismos Fielmente Planos

Teorema: En los módulos finitos sobre un anillo local \mathcal{O} , las condiciones de ser libre, proyectivo y plano son equivalentes.

Demostración: Como libre \Rightarrow proyectivo \Rightarrow plano, sólo hay que ver plano \Rightarrow libre.

Sea $\{m_1, \dots, m_n\}$ un sistema mínimo de generadores de un \mathcal{O} -módulo finito y plano M .

Si $f_1 m_1 + \dots + f_n m_n = 0$, ponemos $I = (f_1, \dots, f_n)$. Por platitude $I \otimes_{\mathcal{O}} M \rightarrow M$ es inyectivo, y $f_1 \otimes m_1 + \dots + f_n \otimes m_n = 0$. Cambiando de base al cuerpo residual $k = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$, obtenemos que $\bar{f}_1 \otimes \bar{m}_1 + \dots + \bar{f}_n \otimes \bar{m}_n = 0$ en el k -espacio vectorial

$$(I/\mathfrak{m}I) \otimes_k (M/\mathfrak{m}M) = (I/\mathfrak{m}I) \otimes_k (k\bar{m}_1 \oplus \dots \oplus k\bar{m}_n).$$

Luego $\bar{f}_1 = \dots = \bar{f}_n = 0$, y $I/\mathfrak{m}I = 0$. Por Nakayama $I = 0$, y m_1, \dots, m_n es base de M .

Lema: Si M es un A -módulo de **presentación finita**, $A^m \rightarrow A^n \rightarrow M \rightarrow 0$, en todo punto $x \in \text{Spec } A$ tenemos que $\text{Hom}_A(M, N)_x = \text{Hom}_{A_x}(M_x, N_x)$.

Demostración: Basta considerar el diagrama conmutativo de filas exactas

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Hom}_A(A^m, N)_x & \longleftarrow & \text{Hom}_A(A^n, N)_x & \longleftarrow & \text{Hom}_A(M, N)_x & \longleftarrow & 0 \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow & & \\ \text{Hom}_{A_x}(A_x^m, N_x) & \longleftarrow & \text{Hom}_{A_x}(A_x^n, N_x) & \longleftarrow & \text{Hom}_{A_x}(M_x, N_x) & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

Teorema: *En los módulos de presentación finita, las condiciones de ser localmente libre, proyectivo y plano son equivalentes.*

Demostración: Como los módulos planos son localmente libres por el teorema anterior, sólo hay que ver que si P es localmente libre, entonces es proyectivo. Ahora, si \mathbf{E} es una sucesión exacta de A -módulos, las sucesiones $\text{Hom}_A(P, \mathbf{E})_x = \text{Hom}_{A_x}(P_x, \mathbf{E}_x)$ son exactas, porque los A_x -módulos P_x son libres; luego $\text{Hom}_A(P, \mathbf{E})$ es exacta (p. 75).

Teorema: *Si P es un A -módulo proyectivo finito, cada punto $x \in \text{Spec } A$ tiene un entorno básico U tal que P_U es un A_U -módulo libre.*

Demostración: Como P_x es libre, tenemos un diagrama conmutativo de filas exactas

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ker} & \longrightarrow & L & \longrightarrow & P & \longrightarrow & \text{Coker} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & (\text{Ker})_x & \longrightarrow & L_x & \xrightarrow{\sim} & P_x & \longrightarrow & (\text{Coker})_x & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

donde L es libre. Como Coker es finito y $\text{Coker}_x = 0$, en un entorno $\text{Coker}_U = 0$ (el soporte de un elemento es cerrado, p. 75).

Al ser P_U proyectivo, $L_U = \text{Ker}_U \oplus P_U$, y Ker_U es finito generado.

Como $\text{Ker}_x = 0$, podemos tomar U de modo que $\text{Ker}_U = 0$, y $P_U = L_U$ es libre.

Teorema: *Si P es un A -módulo plano, las siguientes condiciones son equivalentes,*

1. P es **fielmente plano**: una sucesión \mathbf{E} es exacta $\Leftrightarrow \mathbf{E} \otimes_A P$ es exacta.
2. $P/\mathfrak{m}P \neq 0$ para todo ideal maximal \mathfrak{m} de A .
3. $M \otimes_A P = 0 \Leftrightarrow M = 0$.

Demostración: (1 \Rightarrow 2) $0 \rightarrow A/\mathfrak{m} \rightarrow 0$ no es exacta; luego $0 \rightarrow P/\mathfrak{m}P \rightarrow 0$ tampoco.

(2 \Rightarrow 3) Si $m \in M$ no es nulo, y tomamos un epimorfismo $Am \rightarrow A/\mathfrak{m} \rightarrow 0$, el epimorfismo $(Am) \otimes_A P \rightarrow (A/\mathfrak{m}) \otimes_A P \rightarrow 0$ muestra que $(Am) \otimes_A P \neq 0$.

Al ser P plano, $(Am) \otimes_A P$ es un submódulo de $M \otimes_A P$; luego $M \otimes_A P \neq 0$.

(3 \Rightarrow 1) $M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M''$, $M' \otimes_A P \xrightarrow{i \otimes 1} M \otimes_A P \xrightarrow{p \otimes 1} M'' \otimes_A P$.

Como P es plano, $(\text{Im } i) \otimes_A P = \text{Im } (i \otimes 1)$, $(\text{Ker } p) \otimes_A P = \text{Ker } (p \otimes 1)$, y

$$\begin{aligned} \frac{\text{Im } i + \text{Ker } p}{\text{Im } i} \otimes_A P &= \frac{\text{Im } i \otimes 1 + \text{Ker } p \otimes 1}{\text{Im } i \otimes 1} \\ \frac{\text{Im } i + \text{Ker } p}{\text{Ker } p} \otimes_A P &= \frac{\text{Im } i \otimes 1 + \text{Ker } p \otimes 1}{\text{Ker } p \otimes 1} \end{aligned}$$

luego $\text{Im } i = \text{Ker } p \Leftrightarrow \text{Im } (i \otimes 1) = \text{Ker } (p \otimes 1)$.

Corolario: *Sea $A \rightarrow B$ un morfismo fielmente plano. Un A -módulo M es finito generado (plano) si y sólo si M_B es finito generado (plano).*

Demostración: Si M_B es finito, está generado por elementos de M que definen un morfismo $A^n \rightarrow M$ tal que $B^n \rightarrow M_B$ es epiyectivo; luego $A^n \rightarrow M$ también, y M es finito.

Si \mathbf{E} es una sucesión exacta de A -módulos, \mathbf{E}_B es exacta; y si M_B es un B -módulo plano, $\mathbf{E}_B \otimes_B M_B = (\mathbf{E} \otimes_A M)_B$ es exacta. Luego $\mathbf{E} \otimes_A M$ es exacta, y M es plano.

Ejemplos: Si $\text{Spec } A = \bigcup_i U_i$ es un recubrimiento finito por abiertos básicos, el morfismo $A \rightarrow \bigoplus_i A_{U_i}$ es fielmente plano.

Todo morfismo finito y plano $A \hookrightarrow B$ es fielmente plano (p. 140). Por tanto, si A es de Dedekind y B es íntegro, todo morfismo finito inyectivo $A \rightarrow B$ es fielmente plano.

Si \mathcal{O} es un anillo local noetheriano, el morfismo $\mathcal{O} \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}$ es fielmente plano.

5.8.1. Teoría de Galois de Revestimientos

Todos los anillos se suponen noetherianos, y pondremos $S = \text{Spec } A$.

Definiciones: Un morfismo $X = \text{Spec } B \rightarrow S$ es un **revestimiento** cuando es finito, plano y no ramifica (B es un A -módulo finito, plano, y $\Omega_{B/A} = 0$).

En tal caso el grado de la $\kappa(x)$ -álgebra $B \otimes_A \kappa(x)$ es localmente constante; luego constante si S es conexo, y es el **grado** del revestimiento.

$S \oplus \dots \oplus S \rightarrow S$ es el revestimiento **trivial** de grado n .

Todo revestimiento de grado 1 es un isomorfismo.

Teorema: El concepto de revestimiento es estable por cambios de base (si $A \rightarrow B$ es un revestimiento, $A_C \rightarrow B_C$ también), y es local respecto de los morfismos fielmente planos (si $A \rightarrow C$ es fielmente plano, $A \rightarrow B$ es revestimiento $\Leftrightarrow A_C \rightarrow B_C$ lo es).

Demostración: La finitud, planitud y diferenciales son estables por cambios de base.

Lema: Toda componente conexa de un revestimiento es un revestimiento.

Demostración: Si $X = X' \oplus X''$, entonces $B = B' \oplus B''$ (p. 130).

Como B es finito y plano, B' también, y no ramifica porque $0 = \Omega_{B/A} = \Omega_{B'/A} \oplus \Omega_{B''/A}$.

En adelante supondremos que $S = \text{Spec } A$ es conexo.

Lema: Toda sección de un revestimiento conexo $X \rightarrow S$ es un isomorfismo.

Demostración: La sección $0 \rightarrow I \rightarrow B \xrightarrow{\sigma} A \rightarrow 0$ define una derivación

$$D: B \rightarrow I/I^2, \quad D(b) = b - \sigma(b) \quad (\text{módulo } I^2).$$

Como $\Omega_{B/A} = 0$, tenemos que $I = I^2$, y $I_x = 0$ ó $I_x = B_x$ ($(B/I)_x = 0$) en todo punto $x \in X$. Luego I se anula en un abierto cerrado de X . Al ser X conexo, $I = 0$. q.e.d.

Cuando X es conexo, se sigue que los morfismos en otro revestimiento $Y \rightarrow S$ vienen dados por la **Fórmula de los Puntos**:

$$\text{Hom}_S(X, Y) = \text{Hom}_X(X, X \times_S Y) = \left[\begin{array}{l} \text{Componentes conexas de} \\ X \times_S Y \text{ isomorfas a } X \end{array} \right]$$

El grado de Y acota al número de morfismos, y es igual si y sólo si $X \times_S Y = \bigoplus X$.

Además todo morfismo es un revestimiento, porque es $X \rightarrow X \times_S Y \rightarrow Y$, donde el primero es un isomorfismo con una componente conexa, y el segundo es un revestimiento.

En particular, todo morfismo $X \rightarrow X$ es un automorfismo, porque su grado es 1, y

$$\text{Aut}(X/S) = \left[\begin{array}{l} \text{Componentes conexas de} \\ X \times_S X \text{ isomorfas a } X \end{array} \right]$$

Definición: Un revestimiento conexo $P = \text{Spec } C \rightarrow S$ es de **Galois** si el orden del grupo $G = \text{Aut}(P/S)$ coincide con el grado,

$$P \times_S P = P \oplus \dots \oplus P = G \times P.$$

Si H es un subgrupo de G , pondremos $P/H = \text{Spec } C^H$.

Teorema: $(P/H) \times_S X = (P \times_S X)/H$, es decir $(C^H) \otimes_A B = (C \otimes_A B)^H$.

Demostración: El argumento de la p. 86 es válido cuando el morfismo $A \rightarrow B$ es plano.

Corolario: $P/H \rightarrow S$ es un revestimiento trivial sobre P , de grado $[G : H]$; luego $P/G = S$.

Demostración: $(P/H) \times_S P = (P \times_S P)/H = (G \times P)/H = (G/H) \times P$ es un revestimiento trivial de P de grado $[G : H]$, y el cambio de base $P \rightarrow S$ es fielmente plano.

Teorema de Artin: Si un revestimiento conexo $P \rightarrow S$ admite un grupo de automorfismos G tal que $P/G = S$, es un revestimiento de Galois y $G = \text{Aut}(P/S)$.

Demostración: $P \times_S P$ tiene una componente conexa $\simeq P$ por cada elemento de G , y

$$\begin{aligned} P &= (P/G) \times_S P = (P \times_S P)/G = (P \oplus \dots \oplus P \oplus X_1 \oplus \dots \oplus X_r)/G = \\ &= (P \oplus \dots \oplus P)/G \oplus (X_1 \oplus \dots \oplus X_r)/G \end{aligned}$$

es conexo. Las componentes X_i no existen, y $P \times_S P = P \oplus \dots \oplus P$. q.e.d.

Si $X \rightarrow S$ es trivial sobre P , es decir $X \times_S P = P \oplus \dots \oplus P$, el grupo G actúa en

$$F(X) = \{\text{componentes conexas de } X \times_S P\} = \text{Hom}_S(P, X),$$

y cada G -conjunto finito Δ tiene un **revestimiento asociado** de grado $|\Delta|$,

$$R(\Delta) = (P \oplus \dots \oplus P)/G = (\Delta \times P)/G,$$

que es trivial sobre P , porque $R(G/H) = ((G/H) \times P)/G = P/H$.

Teorema: Si $A \rightarrow C$ es fielmente plano, $A \rightarrow C \rightrightarrows C \otimes_A C$ es exacta.

Demostración: El argumento de la p. 130 es válido.

Teorema de -Galois: Los funtores F y R definen una equivalencia de categorías

$$\left[\begin{array}{c} \text{Revestimientos de } S \\ \text{triviales sobre } P \end{array} \right] \rightleftarrows \left[\begin{array}{c} G\text{-conjuntos} \\ \text{finitos} \end{array} \right], \quad \begin{array}{l} R \circ F = \text{Id} \\ F \circ R = \text{Id} \end{array}$$

Demostración: El argumento dado en la p. 84 para las k -álgebras finitas separables (que son los revestimientos de $\text{Spec } k$) sigue siendo válido, porque

1. $F(P) = \text{Hom}_S(P, P) = G$, y $R(G) = (G \times P)/G = P$; luego $P = RF(P)$, $G = FR(G)$.
2. Todo G -conjunto finito Δ admite una presentación $\bigoplus_i G \rightrightarrows \bigoplus_j G \rightarrow \Delta$, y todo revestimiento $X = \text{Spec } B$ trivial sobre P admite una presentación $\bigoplus_i P \rightrightarrows \bigoplus_j P \rightarrow X$, porque la sucesión $A \rightarrow C \rightrightarrows C \otimes_A C = \bigoplus C$ es exacta y B es plano.

3. Los funtores R y F son exactos por la derecha. R porque $R(\Delta)$ es el revestimiento definido por el álgebra $\text{Hom}(\Delta, C)^G = \text{Hom}_G(\Delta, C)$, y F porque $(-)\times_S P$ lo es, y el funtor “componentes conexas” establece una equivalencia de la categoría de revestimientos triviales de P con la de conjuntos finitos (P es conexo).

Teorema: *Todo revestimiento $X \rightarrow S$ es trivial sobre algún revestimiento de Galois de S .*

Demostración: Si Y es conexo y $X \times_S Y = Y \oplus \dots \oplus Y \oplus Y' \oplus \dots$ no es trivial,

$$X \times_S Y' = (X \times_S Y) \times_Y Y' = Y' \oplus \dots \oplus Y' \oplus (Y' \times_Y Y') \oplus \dots$$

y por la Fórmula de los Puntos $Y' \times_Y Y' = Y' \oplus \dots$; luego $X \times_S Y'$ tiene más componentes triviales que $X \times_S Y$. Comenzando con $Y = S$, obtenemos una componente conexa P de un producto $X \times_S \dots \times_S X$ tal que $X \times_S P = \oplus P$ ya es trivial.

Ahora, como $P \times_S P$ es un abierto cerrado de $(X \times_S \dots \times_S X) \times_S P = \oplus P$, concluimos que P es un revestimiento de Galois de S .

5.8.2. El Grupo Fundamental

Sea $S = \text{Spec } A$ conexo, y $s: \text{Spec } \bar{k} \rightarrow S$ un **punto geométrico**, donde \bar{k} es un cuerpo algebraicamente cerrado, por ejemplo un cierre algebraico de un cuerpo residual.

La **fibra geométrica** de un revestimiento $X \rightarrow S$ sobre s es

$$\text{Hom}_S(\text{Spec } \bar{k}, X) = \text{Hom}_{\text{Spec } \bar{k}}(\text{Spec } \bar{k}, X \times_S \text{Spec } \bar{k}) = \text{Spec}(B \otimes_A \bar{k}),$$

porque $B \otimes_A \bar{k}$ es una \bar{k} -álgebra trivial (al ser separable), y tiene tantos puntos como el grado de X . Cuando X es conexo, si dos morfismos $X \rightrightarrows Y$ coinciden en un punto de la fibra geométrica, son iguales, porque dos componentes conexas de $X \times_S Y$ no pueden tener un punto común.

Los pares P_p , donde P es un revestimiento de Galois de S y $p: \text{Spec } \bar{k} \rightarrow P$ es un punto geométrico sobre s , forman un sistema proyectivo filtrante con los morfismos

$$\phi_i^j: (P_j)_{p_j} \rightarrow (P_i)_{p_i}, \quad \phi_i^j(p_j) = p_i,$$

porque si P_p y $\bar{P}_{\bar{p}}$ son revestimientos de Galois, y tomamos la componente conexa P' de $P \times_S \bar{P}$ que pasa por el punto geométrico $p' = (p, \bar{p})$, tenemos morfismos $P'_{p'} \rightarrow P_p$, $P'_{p'} \rightarrow \bar{P}_{\bar{p}}$, y P' es un revestimiento de Galois. En efecto, P y \bar{P} son triviales sobre P' ; luego $P \times_S \bar{P}$, y su componente conexa P' , también: $P' \times_S P' = \oplus P'$.

Pongamos $G_i = \text{Aut}(P_i/S)$. Cada morfismo $\phi_i^j: (P_j)_{p_j} \rightarrow (P_i)_{p_i}$ induce un epimorfismo $G_j \rightarrow G_i$, y el **grupo fundamental** de S en el punto geométrico s es

$$\pi_1(S, s) = \varprojlim G_i.$$

Cada revestimiento $X \rightarrow S$ es trivial sobre algún revestimiento de Galois $(P_i)_{p_i}$, y el punto p_i define una biyección canónica de la fibra $F(X) = \text{Hom}_S(\text{Spec } \bar{k}, X)$ de s con el G_i -conjunto finito, y por tanto $\pi_1(S, s)$ -conjunto finito, $\text{Hom}_S(P_i, X)$ que clasifica el revestimiento X .

Pero así sólo se obtienen aquellos $\pi_1(S, s)$ -conjuntos finitos en que la acción factorice a través de un cociente $\pi_1(S, s) \rightarrow G_i$. Para caracterizar estas acciones consideramos $\pi_1(S, s)$ como límite proyectivo de grupos discretos. Todo subgrupo abierto $U \subset \pi_1(S, s)$ contiene al núcleo K_i de una proyección $\pi_1(S, s) \rightarrow G_i$, de modo que toda acción continua $\pi_1(S, s) \times \Delta \rightarrow \Delta$ en un espacio finito discreto viene inducida por una acción $G_i \times \Delta \rightarrow \Delta$.

En efecto, al ser abiertos los subgrupos de isotropía I_p , también lo es $\bigcap_p I_p \supseteq K_i$, y la acción factoriza por G_i . Del teorema de Galois se sigue que

Teorema: El funtor fibra $F(X) = \text{Hom}_S(\text{Spec } \bar{k}, X)$ define una equivalencia de la categoría de revestimientos de S con la de $\pi_1(S, s)$ -conjuntos finitos (con acción continua).

Definición: Sea G un grupo finito. Un revestimiento **principal** de grupo G es un revestimiento $P \rightarrow S$ (no necesariamente conexo) con una acción de G que defina un isomorfismo $\oplus_G P = G \times P \xrightarrow{\sim} P \times_S P$, de modo que cuando P es conexo es un revestimiento de Galois de grupo G .

Los isomorfismos son los S -isomorfismos que conmutan con la acción de G .

Si fijamos un punto geométrico de la fibra de s , decimos que está punteado.

Ahora, para todo grupo finito (y discreto) G , el argumento de la p. 223 da

Corolario: $\text{Hom}_{\text{gr.top.}}(\pi_1(S, s), G) = \left[\begin{array}{l} \text{Revestimientos principales} \\ \text{de } S \text{ de grupo } G \text{ punteados} \end{array} \right]$

Para terminar, veamos que el grupo fundamental es un funtor.

Sea $\phi: S' \rightarrow S$ un morfismo (donde $S' = \text{Spec } A'$ es conexo), $s': \text{Spec } \bar{k} \rightarrow S'$ un punto geométrico, y $s = \phi(s'): \text{Spec } \bar{k} \rightarrow S$.

Dado un revestimiento de Galois $(P_i)_{p_i}$ de S , tenemos que $P_i \times_S S'$ es un revestimiento G_i -principal de S' , punteado con el punto geométrico $p' = (p_i, s')$. Luego define un morfismo de grupos continuo $\pi_1(S', s') \rightarrow G_i$, y obtenemos un morfismo de grupos continuo y functorial

$$\phi_*: \pi_1(S', s') \longrightarrow \varprojlim G_i = \pi_1(S, s).$$

Ejemplo: En el caso de un cuerpo, los revestimientos son las k -álgebras finitas separables, los revestimientos de Galois son las extensiones de Galois, y fijar una extensión algebraicamente cerrada $k \rightarrow \bar{k}$ es fijar un punto geométrico $s: \text{Spec } \bar{k} \rightarrow \text{Spec } k$.

Toda extensión de Galois L admite una inmersión $L \rightarrow \bar{k}$, así que el **cierre separable**

$$\bar{k}^{\text{sep}} = \{\alpha \in \bar{k} : \alpha \text{ es algebraico y separable sobre } k\}$$

es $\bar{k}^{\text{sep}} = \bigcup_i L_i$, donde L_i recorre las extensiones de Galois de k .

Como todo automorfismo de \bar{k}^{sep} deja invariante las extensiones de Galois, el grupo fundamental de $\text{Spec } k$ coincide con el grupo de Galois **absoluto**

$$\pi_1(\text{Spec } k, s) = \varprojlim \text{Aut}(L_i/k)^{\text{op}} = \text{Aut}(\bar{k}^{\text{sep}}/k)^{\text{op}}.$$

Por ejemplo, el grupo fundamental del cuerpo finito \mathbb{F}_q de q elementos es (p. 87)

$$\pi_1(\text{Spec } \mathbb{F}_q) = \varprojlim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \prod_p \widehat{\mathbb{Z}}_p,$$

y el automorfismo de Frobenius $F(\alpha) = \alpha^q$ genera un subgrupo denso.

Ahora, todo punto $p \in S$ de cuerpo residual finito define un morfismo $p: \text{Spec } \mathbb{F}_q \rightarrow S$; luego un morfismo $\pi_1(\text{Spec } \mathbb{F}_q, s) \rightarrow \pi_1(U, s)$, donde U es cualquier entorno abierto, y la imagen de F es el **automorfismo de Frobenius** F_p en el punto p , generalizando así la definición de la p. 88.

Capítulo 6

Análisis III

6.1. Anillos de Funciones \mathcal{C}^∞

Sea X un espacio topológico. Dos funciones reales continuas, definidas en sendos entornos de $x \in X$, tienen igual **germen** en x si coinciden en algún entorno de x .

El germen en x de una función continua f se denota f_x , y

$$\mathcal{O}_x = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ x \in U}} \mathcal{C}(U),$$

es el anillo de gérmenes de funciones continuas, donde U recorre los entornos abiertos de x .

El **soporte** de $f \in \mathcal{C}(X)$ es el complementario del mayor abierto en que f es nula,

$$\text{sop } f = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}} = \{x \in X : f_x \neq 0\}.$$

Una **partición de la unidad** subordinada a un recubrimiento abierto $X = \bigcup_i U_i$ es una familia de funciones reales continuas $\phi_i \in \mathcal{C}(X)$ tales que

1. $\text{sop } \phi_i \subseteq U_i$, y $\phi_i \geq 0$.
2. La familia $\{\text{sop } \phi_i\}$ es localmente finita (finita en algún entorno de cada punto).
3. $1 = \sum_i \phi_i$, (la suma tiene sentido por la condición 2).

Lema: Sea K un compacto Hausdorff. Si V es un entorno de $p \in K$, existe $f \in \mathcal{C}(K)$ no negativa, con soporte contenido en V , tal que $f(p) = 1$.

Demostración: Si $Q \subseteq V$ es un entorno compacto de p , por el lema de Urysohn (se verá en Topología, p. 211) existe $f \in \mathcal{C}(K)$ que se anula fuera de Q , y $f(p) = 1$.

Lema: Todo espacio σ -compacto (localmente compacto, separado y de base numerable) X admite un recubrimiento numerable, $X = \bigcup_n K_n$, por compactos tales que $K_n \subseteq \overset{\circ}{K}_{n+1}$.

Demostración: X admite un recubrimiento numerable $X = \bigcup_n U_n$ por abiertos de cierre compacto, y tomamos $K_1 = \overline{U}_1$. Definido K_{n-1} , por compacidad admite un recubrimiento finito, $K_{n-1} = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r}$, y ponemos $K_n = \overline{U}_{i_1} \cup \dots \cup \overline{U}_{i_r} \cup \overline{U}_n$.

Teorema: Todo recubrimiento abierto $X = \bigcup_i U_i$ de un espacio σ -compacto admite una partición de la unidad subordinada.

Demostración: Sea $X = \bigcup_n K_n$, con $K_n \subseteq \overset{\circ}{K}_{n+1}$, y pongamos $Q_n = K_n - \overset{\circ}{K}_{n-1}$.

Si $p \in Q_n$, existe una función continua $f \geq 0$ con soporte en $U_i \cap (\overset{\circ}{K}_{n+1} - K_{n-2})$ que no se anula en p , y elegimos un número finito de estas funciones que no se anulen simultáneamente en ningún punto de Q_n . Al variar n obtenemos unas funciones f_j tales que la familia $\{\text{sop } f_j\}$ es localmente finita y $h = \sum_j f_j$ no se anula en ningún punto de $\bigcup_n Q_n = X$.

Sustituyendo f_j por f_j/h , podemos suponer que $1 = \sum_j f_j$.

Para cada índice j fijamos $\sigma(j)$ tal que $\text{sop } f_j \subseteq U_{\sigma(j)}$, y la partición buscada es

$$\phi_i = \sum_{\sigma(j)=i} f_j.$$

Lema: Si V es un entorno del origen en \mathbb{R}^n , existe $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ no negativa, de soporte compacto contenido en V , tal que $f(0) > 0$.

Demostración: El entorno de radio ε es el soporte de $f(x_1, \dots, x_n) = e(x_1^2 + \dots + x_n^2 - \varepsilon^2)$, donde $e(t)$ es la función de clase C^∞ ,

$$e(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{t}} & \text{si } t \leq 0 \\ 0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$


Teorema: Todo recubrimiento abierto de una variedad diferenciable X admite una partición de la unidad subordinada de clase C^∞ .

Demostración: Se repite la demostración del caso continuo.

Corolario: Si Y_1, Y_2 son cerrados disjuntos de una variedad X , existe una función diferenciable global $0 \leq f \leq 1$ tal que $f(Y_1) = 0$, $f(Y_2) = 1$.

Demostración: Sea ϕ_1, ϕ_2 una partición de la unidad subordinada al recubrimiento abierto $X = U_1 \cup U_2$, donde $U_i = X - Y_i$. La función $f = \phi_1$ sirve.

Corolario: Si U es un entorno de $x \in X$, existe una **función meseta** $\phi \in C^\infty(X)$, que vale 1 en un entorno de x , tiene soporte compacto contenido en U , y $0 \leq \phi \leq 1$.

Demostración: En \mathbb{R}^n , hay una función diferenciable $0 \leq \phi \leq 1$ que vale 1 en el entorno Y_1 de radio ε , y se anula en el complementario Y_2 del entorno de radio 2ε .

Corolario: Si $f \in C^\infty(U)$ y $x \in U$, existe $F \in C^\infty(X)$ con igual germen, $f_x = F_x$.

Demostración: Si ϕ es una función meseta, y ϕf se extiende por 0 fuera de U , se obtiene una función diferenciable global con igual germen que f en x .

Corolario: Existe una función diferenciable $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ de fibras compactas.

Demostración: Sea $X = \bigcup_n K_n$, con $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$.

Tomemos una función diferenciable h_n no negativa tal que $h_n(K_{n-1}) = 0$, $h_n(X - \overset{\circ}{K}_{n+1}) = 1$. La función $f = \sum_n h_n$ sirve.

6.1.1. Reconstrucción de X a partir de $C^\infty(X)$

El **espectro maximal** de un anillo A es el subespacio $\text{Spec}_m A \subseteq \text{Spec } A$ formado por los ideales maximales. El **espectro real** de una \mathbb{R} -álgebra A es el subespacio $\text{Spec}_{\mathbb{R}} A \subseteq \text{Spec}_m A$ formado por los maximales de cuerpo residual \mathbb{R} .

Cuando A es una subálgebra de $\mathcal{C}(X)$, cada punto $x \in X$ define un morfismo epiyectivo $A \rightarrow \mathbb{R}$, $f \mapsto f(x)$; luego su núcleo \mathfrak{m}_x es un maximal de cuerpo residual \mathbb{R} .

Esta aplicación $X \rightarrow \text{Spec}_{\mathbb{R}} A$ es continua, porque los ceros de las funciones continuas

$$z(f) = (f)_0 \cap X = \{x \in X : f(x) = 0\}$$

siempre son cerrados. Es inyectiva cuando las funciones separan puntos (si $x \neq y$, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$), y es un homeomorfismo con la imagen cuando además todo cerrado de X es intersección de ceros; es decir, cuando las funciones separan puntos de cerrados (si $x \notin \bar{Y}$, existe $f \in A$ tal que $f(Y) = 0$, $f(x) \neq 0$).

Teorema: $K = \text{Spec}_m \mathcal{C}(K)$, cuando K es un compacto Hausdorff.

Demostración: Sea \mathfrak{m} un ideal maximal de $\mathcal{C}(K)$. Las intersecciones finitas de ceros de funciones de \mathfrak{m} nunca son vacías, porque $z(f_1) \cap \dots \cap z(f_n) = z(f_1^2 + \dots + f_n^2)$, y $f_1^2 + \dots + f_n^2 \in \mathfrak{m}$ no puede ser invertible. Luego hay un punto $p \in K$ en que se anulan todas las funciones de \mathfrak{m} , y $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_p$ porque \mathfrak{m} es maximal.

Teorema: $X = \text{Spec}_{\mathbb{R}} C^\infty(X)$, cuando X es una variedad diferenciable.

Demostración: Sea $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable de fibras compactas.

Si $C^\infty(X)/\mathfrak{m} = \mathbb{R}$, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f - a \in \mathfrak{m}$.

Como las intersecciones finitas de ceros de funciones de \mathfrak{m} nunca son vacías, y $z(f - a)$ es compacto, hay un punto $x \in z(f - a)$ en que se anulan todas las funciones de \mathfrak{m} , y $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$.

El álgebra $C^\infty(X)$ permite reconstruir X como espacio topológico; pero también determina el haz de funciones diferenciables, porque claramente determina las funciones diferenciables globales, y las funciones diferenciables en un abierto $U \subset X$ son las funciones continuas que localmente coinciden con funciones diferenciables globales.

Teorema: $\text{Hom}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathbb{R}\text{-alg}}(C^\infty(Y), C^\infty(X))$.

Demostración: Una aplicación diferenciable $\phi: X \rightarrow Y$ induce un morfismo de \mathbb{R} -álgebras $\phi^*: C^\infty(Y) \rightarrow C^\infty(X)$, $\phi^*(f) = f\phi$; y cada morfismo $C^\infty(Y) \rightarrow C^\infty(X)$ induce una aplicación continua $\phi: X = \text{Spec}_{\mathbb{R}} C^\infty(X) \rightarrow \text{Spec}_{\mathbb{R}} C^\infty(Y) = Y$, que es diferenciable.

En efecto, ϕ transforma funciones diferenciables en Y en funciones diferenciables en X , y si f es una función diferenciable en un abierto $V \subset Y$, y $x \in \phi^{-1}(V)$, entonces f coincide en un entorno de $\phi(x)$ con una función diferenciable $F \in C^\infty(Y)$; luego $\phi^*(f)$ coincide con la función diferenciable $\phi^*(F)$ en un entorno de x , y $\phi^*(f) \in C^\infty(\phi^{-1}V)$.

Definición: Sea K un compacto de un espacio topológico X . Si $f \in \mathcal{C}(X)$, ponemos

$$\|f\|_K = \sup_{p \in K} |f(p)|$$

lo que define una **seminorma** ($\|f\|_K$ puede ser nulo sin serlo f) en $\mathcal{C}(X)$,

$$\begin{aligned} \|f + h\|_K &\leq \|f\|_K + \|h\|_K \\ \|\lambda f\|_K &= |\lambda| \cdot \|f\|_K \end{aligned}$$

Si X es σ -compacto, $X = \bigcup_n K_n$, con $K_n \subseteq \overset{\circ}{K}_{n+1}$, las seminormas $p_n = \| \cdot \|_{K_n}$ definen en $\mathcal{C}(X)$ una topología, y $\mathcal{C}(X)$ es completo: toda sucesión de Cauchy converge a una función que es continua en los compactos K_n , y es continua porque sus interiores recubren X .

Además, $p_1 \leq p_2 \leq \dots p_n \leq \dots$

Teorema: Sea U un abierto de un espacio σ -compacto X . Toda función $f \in \mathcal{C}(U)$ es cociente de dos funciones continuas globales, $f = g/h$, donde $z(h) = X - U$. Luego $\mathcal{C}(U) = \mathcal{C}(X)_S$, donde S es el sistema multiplicativo de las funciones sin ceros en U .

Demostración: Pongamos $U = \bigcup_n Q_n$, con $Q_n \subseteq \overset{\circ}{Q}_{n+1}$.

Sea $0 \leq \phi_n \in \mathcal{C}(X)$ tal que $\phi_n(X - \overset{\circ}{Q}_{n+1}) = 0$, $\phi_n(Q_n) = 1$.

Como $\text{sop } \phi_n f \subseteq Q_{n+1}$, la función $\phi_n f$ es continua si se prolonga por 0 fuera de U , y basta considerar las series convergentes (donde h se anula exactamente en $X - U$)

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(1+p_n(\phi_n))} \cdot \frac{\phi_n f}{1+p_n(\phi_n f)}$$

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(1+p_n(\phi_n f))} \cdot \frac{\phi_n}{1+p_n(\phi_n)}$$

El epimorfismo $\mathcal{C}(X)_S \rightarrow \mathcal{C}(U)$ es inyectivo: si $\frac{a}{s} = 0$ en $\mathcal{C}(U)$, $ha = 0$, y $\frac{a}{s} = 0$ en $\mathcal{C}(X)_S$.

Definición: Sea X una variedad diferenciable. Si K es un compacto contenido en un abierto coordinado $(U; x_1, \dots, x_d)$, en $\mathcal{C}^m(X)$, $1 \leq m \leq \infty$, tenemos las seminormas

$$\|f\|_{K,r} = \sup_{\alpha_1 + \dots + \alpha_d \leq r} \|D_\alpha f\|_K, \quad D_\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}; \quad r \leq m, \quad r < \infty,$$

de modo que $\lim f_n = f$ con la seminorma $\| \cdot \|_{K,r}$ si las funciones f_n , y sus derivadas parciales hasta el orden r , convergen uniformemente en K a f y sus derivadas parciales.

Las seminormas correspondientes a una familia numerable de compactos contenidos en abiertos coordinados, cuyos interiores recubran X , definen una topología en $\mathcal{C}^m(X)$ que no depende del recubrimiento por compactos elegido. Podemos suponer, sumando a cada una las anteriores, que las seminormas están ordenadas, $p_1 \leq p_2 \leq \dots p_n \leq \dots$

Teorema: $\mathcal{C}^m(X)$ es completo.

Demostración: Si (f_n) es una sucesión de Cauchy, las funciones f_n convergen uniformemente a una función continua g , y cada punto de X tiene un entorno coordinado en que las derivadas parciales $D_\alpha f$, $|\alpha| \leq m$, convergen uniformemente a ciertas funciones continuas g_α .

Hemos de ver que $g_\alpha = D_\alpha g$, de modo que $g \in \mathcal{C}^m(X)$. Si $p = (a_1, \dots, a_d)$,

$$f_n(x_1, a_2, \dots, a_d) = f_n(a_1, \dots, a_d) + \int_{a_1}^{x_1} \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(t_1, a_2, \dots, a_d) dt_1$$

$$g(x_1, a_2, \dots, a_d) = g(a_1, \dots, a_d) + \int_{a_1}^{x_1} g_1(t_1, a_2, \dots, a_d) dt_1$$

y vemos que $g_1(p) = \frac{\partial g}{\partial x_1}(p)$. Igual para las demás derivadas.

Ahora, repitiendo la demostración del caso continuo, obtenemos el siguiente resultado:

Teorema: Sea U un abierto de X . Toda función $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ es cociente de dos funciones diferenciables globales, $f = g/h$, donde $z(h) = X - U$. Luego $\mathcal{C}^\infty(U) = \mathcal{C}^\infty(X)_S$, donde S es el sistema multiplicativo de las funciones sin ceros en U .

6.2. Ecuaciones Diferenciales

Si D es un campo tangente continuo en una variedad X , una curva $\sigma: I \rightarrow X$ derivable es una **curva integral** si en cada instante el vector tangente $T_t \in T_{\sigma(t)}X$ coincide con $D_{\sigma(t)}$.

En un abierto coordenado tendremos $D = \sum_i f_i(x_1, \dots, x_n)\partial_i$, donde las funciones f_i son continuas, y $\sigma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ es una curva integral si las funciones $x_i(t)$ son derivables y definen una solución de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots \\ x'_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

es decir, $\sigma'(t) = f(\sigma(t))$, donde $f = (f_1, \dots, f_n)$. En particular σ' es continua, y si f es de clase C^m , también lo es σ' , y las soluciones son de clase C^{m+1} .

Si se impone una condición inicial $\sigma(t_0) = x$, la igualdad $\sigma' = f(\sigma)$ equivale a que

$$\sigma(t) = x + \int_{t_0}^t f(\sigma(t))dt.$$

Lema: Sea E un espacio métrico completo. Toda aplicación contractiva $T: E \rightarrow E$; es decir, $d(T\varphi, T\sigma) \leq kd(\varphi, \sigma)$ para alguna constante $k < 1$, tiene un único punto fijo.

Demostración: Si $\sigma_0 \in E$, la sucesión $\sigma_n = T^n(\sigma_0)$ es de Cauchy,

$$\begin{aligned} d(\sigma_n, \sigma_{n+1}) &\leq kd(\sigma_{n-1}, \sigma_n) \leq \dots \leq k^n d(\sigma_0, \sigma_1) = k^n c, \\ d(\sigma_n, \sigma_{n+m}) &\leq c(k^n + \dots + k^{n+m-1}) \leq c \frac{k^n}{1-k} < \varepsilon \quad \text{cuando } n \text{ es grande,} \end{aligned}$$

y $\sigma = \lim \sigma_n$ es un punto fijo, $T(\sigma) = \lim T(\sigma_n) = \lim \sigma_{n+1} = \sigma$.

No puede haber otro punto fijo φ porque $d(\sigma, T\varphi) < d(\sigma, \varphi)$.

Teorema: Si D es de clase C^1 , por cada punto x pasa una curva integral tal que $\sigma(t_0) = x$, y es única (dos coinciden siempre en el intervalo común de definición).

Demostración: Si $X = \mathbb{R}^n$, y $\text{sop } D$ es compacto, como las funciones $\partial f_i / \partial x_j$ son continuas y de soporte compacto, por el teorema del valor medio existe una constante k tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Sea $I = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ y consideremos en $E = \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ la norma del módulo máximo.

Las soluciones son los puntos fijos del operador

$$\begin{aligned} T(\sigma(t)) &= x + \int_{t_0}^t f(\sigma(t))dt, \\ \|T(\varphi) - T(\sigma)\| &= \sup_{t \in I} \left| \int_{t_0}^t [f(\varphi) - f(\sigma)] dt \right| \leq \varepsilon k \sup_{t \in I} |\varphi(t) - \sigma(t)| \leq k\varepsilon \|\varphi - \sigma\|, \end{aligned}$$

que es contractivo cuando $k\varepsilon < 1$. Esto prueba la existencia de curvas integrales, y que si dos coinciden en un instante, coinciden en un entorno.

Como este enunciado es local, lo mismo es cierto en una variedad X , y como el lugar de coincidencia siempre es cerrado, coinciden en el intervalo común de definición. q.e.d.

Por cada punto x pasa una curva integral máxima $\sigma_x: I_x \rightarrow X$, $\sigma_x(0) = x$.

Estos intervalos I_x forman un subespacio $W = \{(t, x) : t \in I_x\} \subseteq \mathbb{R} \times X$ donde está definido el **flujo** asociado al campo

$$\tau: W \longrightarrow X, \quad \tau(t, x) = \tau_t(x) = \sigma_x(t).$$

Tenemos que $\tau_0(x) = x$, y $\tau_{t+s}(x)$ es una curva integral que en $t = 0$ pasa por $y = \tau_s(x)$, de modo que $I_x \subseteq I_y + s$. Como $x = \tau_{-s}(y)$, también $I_y \subseteq I_x - s$; luego $I_y + s = I_x$, y

$$\tau_t(\tau_s x) = \tau_{t+s}(x).$$

Lema: Si D es de clase \mathcal{C}^1 , su flujo está definido y es continuo en un entorno de $0 \times X$.

Demostración: Como el problema es local, podemos suponer que el soporte del campo D es compacto y que $X = \mathbb{R}^n$.

Fijado un compacto $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ (un cubo, una bola,...) ponemos $I = [-\varepsilon, \varepsilon]$, consideramos en $E = \mathcal{C}(I \times \Lambda, \mathbb{R}^n)$ la norma del módulo máximo, y repetimos el argumento del teorema anterior con la condición inicial $\sigma(0, x) = x$,

$$T(\sigma(t, x)) = x + \int_0^t f(\sigma(t, x)) dt,$$

$$\|T\varphi - T\sigma\| = \sup_{(t,x) \in I \times \Lambda} \left| \int_0^t [f(\varphi) - f(\sigma)] dt \right| \leq k\varepsilon \|\varphi - \sigma\|.$$

Cuando $k\varepsilon < 1$, la aplicación T es contractiva, y el punto fijo proporciona una familia continua de soluciones $\tau: (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $\tau(0, x) = x$.

Teorema: Si D es de clase \mathcal{C}^1 , entonces W es un abierto de $\mathbb{R} \times X$, y τ es continuo.

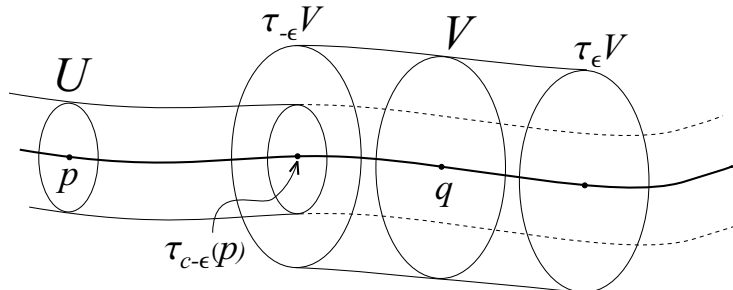
Demostración: Veamos que τ está definida y es continua en un entorno de cada punto de W .

Si no, tomamos un punto $p \in X$ y el primer instante $c \in I_p$ positivo (igual si es negativo) en que no sea cierto, y ponemos $q = \tau_c(p)$.

Por el lema anterior, τ es continua en un entorno $(-2\varepsilon, 2\varepsilon) \times V$ de $(0, q)$.

En un entorno U de p , la aplicación $\tau_{c-\varepsilon}: U \rightarrow X$ es continua, así que podemos suponer que $\tau_{c-\varepsilon}(U) \subseteq \tau_{-\varepsilon}(V)$; luego $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \times U \subset W$, y τ es continua en este abierto (en contra de la elección de c) porque $\tau_c = \tau_\varepsilon \tau_{c-\varepsilon}: U \rightarrow V$ es continua, y

$$\tau(t, x) = \tau(t - c, \tau_c(x)).$$



Nota: Dado un espacio topológico Λ , y aplicaciones continuas $t_0: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$, $a: \Lambda \rightarrow X$, es obvio que $\varphi_\lambda(t) = \tau(t - t_0(\lambda), a(\lambda))$, $\lambda \in \Lambda$, es una familia continua de soluciones tal que $\varphi_\lambda(t_0(\lambda)) = a(\lambda)$ y, si Λ es una variedad, es de clase \mathcal{C}^m cuando τ , $a(\lambda)$ y $t_0(\lambda)$ lo son.

Lema: Si D es de clase \mathcal{C}^{m+1} , $m < \infty$, el flujo es de clase \mathcal{C}^m en un entorno de $0 \times X$.

Demostración: Como el problema es local, podemos suponer que el soporte del campo D es compacto y que $X = \mathbb{R}^n$.

Sea Λ una bola abierta de radio r muy grande, $I = [-\varepsilon, \varepsilon]$, y E el espacio métrico completo de las aplicaciones $\sigma: I \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase \mathcal{C}^m tales que

$$\|\sigma\| = \sup_{(t,x) \in I \times \Lambda} |D_\alpha \sigma| \leq 2r,$$

donde D_α recorre las derivadas parciales iteradas de orden $0 \leq |\alpha| \leq m$.

Veamos primero el caso $m = 1$. Poniendo $x_0 = t$, para $i = 0, \dots, n$ tenemos que

$$D_i(f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\sigma) \cdot \frac{\partial \sigma_j}{\partial x_i},$$

y como $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ son de clase \mathcal{C}^1 y soporte compacto, existe una constante k tal que

1. $\|f(\sigma)\| \leq 2kr$; cuando $\|\sigma\| \leq 2r$.
2. $\|f(\varphi) - f(\sigma)\| \leq k\|\varphi - \sigma\|$; cuando $\|\varphi\|, \|\sigma\| \leq 2r$.

Ahora se repite el argumento de la aplicación contractiva, tomando $\varepsilon = \frac{1}{2k}$,

$$\begin{aligned} \|T(\sigma)\| &\leq r + \left\| \int_0^t f(\sigma) dt \right\| \leq r + \int_0^t \|f(\sigma)\| dt \leq r + 2rk\varepsilon = 2r, \\ \|T\varphi - T\sigma\| &= \left\| \int_0^t [f(\varphi) - f(\sigma)] dt \right\| \leq \int_0^t \|f(\varphi) - f(\sigma)\| dt \leq k\varepsilon\|\varphi - \sigma\| = \frac{1}{2}\|\varphi - \sigma\|. \end{aligned}$$

En general, cuando $m > 1$, tenemos que $D_\alpha(f(\sigma))$ es un polinomio en las derivadas de σ de orden $\leq m$ con coeficientes derivadas de f de orden $\leq m$ (que son de clase \mathcal{C}^1 y soporte compacto), y también existe una constante k con las propiedades 1 y 2.

Teorema: Si D es de clase \mathcal{C}^{m+1} , el flujo es \mathcal{C}^m . Por tanto, si D es \mathcal{C}^∞ , el flujo es \mathcal{C}^∞ .

Demostración: Se repite el argumento del caso continuo.

Corolario: Los campos tangentes con soporte compacto son **completos**, $W = \mathbb{R} \times X$.

Demostración: Si $D_x = 0$, la aplicación constante $x: \mathbb{R} \rightarrow X$ es una curva integral; luego $I_x = \mathbb{R}$.

Por tanto, si D se anula fuera de un compacto, al ser W abierto, existe un pequeño ε tal que $(-\varepsilon, \varepsilon) \times X \subset W$, y toda curva integral puede prolongarse siempre durante un tiempo ε , así que $I_x = \mathbb{R}$ en todo punto x .

6.2.1. Grupos Uniparamétricos y Derivada de Lie

Un **grupo uniparamétrico** en una variedad X es una acción \mathcal{C}^∞ del grupo \mathbb{R} en X ; es decir, una aplicación diferenciable $\tau: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$, $(t, x) \mapsto \tau_t(x)$, tal que

1. $\tau_0(x) = x$.
2. $\tau_t(\tau_s x) = \tau_{t+s}(x)$.

y si sólo está definida en un entorno abierto de $0 \times X$ (que corte a cada recta $\mathbb{R} \times x$ en un intervalo) y verifica que $\tau_t(\tau_s x) = \tau_{t+s}(x)$ siempre que ambos miembros estén definidos, decimos que es un grupo uniparamétrico **local**.

El **generador infinitesimal** de un grupo uniparamétrico local es el campo tangente a X definido por la derivación

$$Df = \left. \frac{\partial(f \circ \tau)}{\partial t} \right|_{t=0},$$

de modo que D_p es el vector tangente a la curva $\tau_t(p)$ en el instante $t = 0$,

$$D_p f = (Df)(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\tau_t p) - f(p)}{t}.$$

Por tanto, el flujo de cualquier campo tangente D es un grupo uniparamétrico local, y D es su generador infinitesimal. Igualmente, todo grupo uniparamétrico local es (un abierto de) el flujo de su generador infinitesimal D , porque la curva $\sigma(t) = \tau_t(p)$ es una curva integral del campo D que pasa por p en el instante $t = 0$. En efecto, como $\sigma(t + \varepsilon) = \tau_\varepsilon(\sigma(t))$, el vector tangente a σ en un instante t es $D_{\sigma(t)}$. *Los campos tangentes se corresponden con los grupos uniparamétricos locales (maximales) y, en las variedades compactas, con los grupos uniparamétricos.*

Ejemplos: El generador infinitesimal de $\tau_t(x_1, \dots, x_n) = (f_1(t, x), \dots, f_n(t, x))$ es

$$D = \left([\partial_t f_1]_{t=0} \right) \partial_{x_1} + \dots + \left([\partial_t f_n]_{t=0} \right) \partial_{x_n}.$$

traslaciones	$\tau_t(x, y) = (x + at, y + bt)$	$D = a\partial_x + b\partial_y$
giros	$\tau_t(x, y) = \begin{pmatrix} \cos \alpha t & -\operatorname{sen} \alpha t \\ \operatorname{sen} \alpha t & \cos \alpha t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$D = \alpha(-y\partial_x + x\partial_y)$
homotecias	$\tau_t(x, y) = (e^{at}x, e^{at}y)$	$D = a(x\partial_x + y\partial_y)$
isomorfismos lineales	$\tau_t X = e^{At} X$	$D = \sum_i (\sum_j a_{ij} x_j) \partial_i$

Clasificación Local de Campos: Si $D_p \neq 0$, entonces $D = \frac{\partial}{\partial u_1}$ en algún sistema de coordenadas locales (u_1, \dots, u_n) en p .

Demostración: Como el problema es local, podemos suponer que p es el origen de \mathbb{R}^n , que el soporte del campo D es compacto y que el vector D_p no es tangente al hiperplano H de ecuación $x_1 = 0$. La aplicación diferenciable

$$\mathbb{R} \times H \longrightarrow \mathbb{R}^n, (t, x) \mapsto \tau_t(x),$$

transforma las curvas integrales de $\frac{\partial}{\partial t}$ en curvas integrales del campo D ; luego transforma $\frac{\partial}{\partial t}$ en D . Concluimos porque esta aplicación es un difeomorfismo local en p , pues la aplicación tangente en p lleva $(\frac{\partial}{\partial t})_p$ en D_p , y es la identidad en $T_p H$.

Nota: Si K es un compacto contenido en un abierto coordinado, en el módulo de los campos tangentes a X tenemos las seminormas $\| \sum_i f_i \partial_i \|_{K,r} = \sum_i \| f_i \|_{K,r}$. Tomando una familia numerable de estos compactos, cuyos interiores recubran X , la demostración de la p. 160 prueba que todo campo tangente D en un abierto $U \subset X$ es $D = \frac{D^*}{h}$, donde D^* es un campo en X (que se anula fuera de U) y $h \geq 0$ no se anula en U .

Cuando X es compacta, D^* es completo, y las curvas integrales de los puntos de U no salen fuera de U . *Si D es un campo tangente en una variedad sumergible en una variedad compacta, existe una función positiva h tal que hD es completo.*

Definiciones: El **paréntesis de Lie** de dos campos tangentes D, D' a una variedad X es el campo tangente definido por la derivación (es directo comprobar que lo es)

$$[D, D'] = D \circ D' - D' \circ D.$$

$$[\sum_i f_i \partial_i, \sum_i h_i \partial_i] = \sum_{ij} (f_j \partial_j h_i - h_j \partial_j f_i) \partial_i$$

1. $[D, D'] = -[D', D]$, y por tanto $[D, D] = 0$.
2. $[D, fD'] = (Df)D' + f[D, D']$.
3. $[[D_1, D_2], D_3] + [[D_2, D_3], D_1] + [[D_3, D_1], D_2] = 0$ (**Identidad de Jacobi**)

La **derivada de Lie** de un campo tensorial T en la dirección de un campo tangente D de grupo uniparamétrico local $\{\tau_t\}$ es el campo tensorial

$$(D^L T)_x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\tau_t^* T)_x - T_x}{t}$$

y se comprueba en coordenadas que es de clase C^∞ , porque el flujo $\tau(t, x)$ lo es.

Teorema: Si $D^L T = 0$, entonces T es invariante, $\tau_t^* T = T$.

Si $D^L T = fT$, entonces $\tau_t^* T$ y T son proporcionales, $\langle \tau_t^* T \rangle = \langle T \rangle$.

Demostración: En el espacio vectorial $T_x X$ tenemos la curva $\sigma(t) = (\tau_t^* T)_x$. Su vector tangente en $t = 0$ es $(D^L T)_x$, y su vector tangente en un instante t es $\tau_t^* [(D^L T)_{\tau_t x}]$ porque

$$\sigma(t + \varepsilon) = (\tau_{t+\varepsilon}^* T)_x = \tau_t^* [(\tau_\varepsilon^* T)_{\tau_t x}].$$

Si $D^L T = 0$, entonces $\sigma'(t) = 0$, y la curva es constante, $\tau_t^* T = T$.

Si $D^L T = fT$, entonces $\sigma'(t) = h(t)\sigma(t)$, con $h(t) = f(\tau_t x)$. Luego

$$\sigma(t) = e^{H(t)} \sigma(0), \quad \text{donde } H(t) = \int_0^t h(t) dt,$$

y vemos que $\tau_t^* T$ es proporcional a T .

q.e.d.

1. $D^L f = Df$.
2. $D^L(T + T') = D^L T + D^L T'$.
3. $D^L(T \otimes T') = (D^L T) \otimes T' + T \otimes (D^L T')$.

$$D^L(T \otimes T') = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau_t^* T \otimes \tau_t^* T' - T \otimes T'}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau_t^* T \otimes \tau_t^* T' - T \otimes \tau_t^* T' + T \otimes \tau_t^* T' - T \otimes T'}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau_t^* T - T}{t} \otimes \tau_t^* T' + \lim_{t \rightarrow 0} T \otimes \frac{\tau_t^* T' - T'}{t} = (D^L T) \otimes T' + T \otimes (D^L T').$$
4. $D^L(\omega_p \wedge \omega_q) = (D^L \omega_p) \wedge \omega_q + \omega_p \wedge (D^L \omega_q)$.
5. $D^L(C_i^j T) = C_i^j (D^L T)$.
6. $(D^L T)(D_1, \dots, \omega_q) = D(T(D_1, \dots, \omega_q)) - T(D^L D_1, \dots, \omega_q) - \dots - T(D_1, \dots, D^L \omega_q)$.
 Basta derivar en $T(D_1, \dots, \omega_q) = C_1^1 \dots C_1^1 (D_1 \otimes \dots \otimes D_p \otimes T_p^q \otimes \omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_q)$.
7. $D^L \omega = D \circ \omega - \omega \circ D^L$; es decir, $(D^L \omega)(D') = D(\omega(D')) - \omega(D^L D')$.

$$8. D^L(df) = d(Df).$$

$$D^L(df) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau_t^* df - df}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d\tau_t^* f - df}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} d\left(\frac{\tau_t^* f - f}{t}\right) = d\left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau_t^* f - f}{t}\right) = d(Df).$$

$$9. D^L D' = [D, D'].$$

$$\begin{aligned} (D^L D')f &= (df)(D^L D') = D((df)(D')) - (D^L(df))(D') \\ &= D(D'f) - (d(Df))(D') = D(D'f) - D'(Df) = [D, D']f. \end{aligned}$$

$$10. (D_1 + D_2)^L T = D_1^L T + D_2^L T.$$

$$11. \text{ Identidad de Jacobi: } D^L[D_1, D_2] = [D^L D_1, D_2] + [D_1, D^L D_2].$$

$$12. (D_1 + D_2)^L T = D_1^L T + D_2^L T.$$

$$(D_1 + D_2)^L D = [D_1 + D_2, D] = [D_1, D] + [D_2, D].$$

$$(D_1 + D_2)^L \omega = (D_1 + D_2) \circ \omega - \omega \circ (D_1 + D_2)^L = (D_1 + D_2) \circ \omega - \omega \circ (D_1^L + D_2^L) = D_1^L \omega + D_2^L \omega.$$

Se concluye porque tanto $(D_1 + D_2)^L$ como $D_1^L + D_2^L$ derivan el producto tensorial.

$$13. [D_1, D_2]^L = [D_1^L, D_2^L] \text{ sobre los campos tensoriales: } [D_1, D_2]^L T = D_1^L(D_2^L T) - D_2^L(D_1^L T).$$

Cuando T es un campo de vectores, es la identidad de Jacobi. Ahora, cuando T es una 1-forma, se sigue de la propiedad 7, y se concluye porque tanto $[D_1, D_2]^L$ como $[D_1^L, D_2^L]$ derivan el producto tensorial.

Corolario: $[D, \bar{D}] = 0$ si y sólo si $\tau_t \bar{\tau}_s = \bar{\tau}_s \tau_t$. (donde D y \bar{D} son campos completos).

Demostración: Si $D^L \bar{D} = [D, \bar{D}] = 0$, entonces $\tau_t \bar{D} = \bar{D}$, y τ_t transforma curvas integrales de \bar{D} en curvas integrales de \bar{D} . El recíproco es obvio.

6.3. Sistemas de Pfaff

Sea \mathcal{O} el anillo de gérmenes en un punto x de funciones \mathcal{C}^∞ en una variedad X , \mathcal{T} el módulo de gérmenes de campos tangentes, y Ω el de gérmenes de 1-formas.

Una **distribución** de rango r es un submódulo libre $\mathcal{D} = \langle D_1, \dots, D_r \rangle \subseteq \mathcal{T}$, generado por r campos linealmente independientes en x .

Fijados representantes de los gérmenes D_i , en un pequeño entorno de x serán linealmente independientes, y definen en cada punto y un subespacio vectorial de dimensión r

$$\Delta_y = \{\lambda_1 D_{1,y} + \dots + \lambda_r D_{r,y}\} \subseteq T_y X$$

y la distribución puede verse como el germen en x de una familia diferenciable de r -planos.

Diremos que es **integrable** si en algún sistema de coordenadas locales $\mathcal{D} = \langle \partial_1, \dots, \partial_r \rangle$.

Un **sistema de Pfaff** de rango r es un submódulo libre $\mathcal{P} = \langle \omega_1, \dots, \omega_r \rangle \subseteq \Omega$, generado por r formas linealmente independientes en x , y es el germen en x de una familia diferenciable de subespacios vectoriales de dimensión r

$$P_y = \{\lambda_1 \omega_{1,y} + \dots + \lambda_r \omega_{r,y}\} \subseteq T_y^* X.$$

Diremos que \mathcal{P} es **integrable** si en algún sistema de coordenadas locales $\mathcal{P} = \langle dx_1, \dots, dx_r \rangle$, y que es **proyectable** a un subanillo $B \subset \mathcal{O}$ si lo generan 1-formas $\sum_i f_i dh_i$, con $f_i, h_i \in B$.

Lema: Si $D^L \mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}$, en un entorno de x tenemos que $\tau_t(P_y) = P_{\tau_t(y)}$.

Demostración: Sea $\mathcal{P} = \langle \omega_1, \dots, \omega_r \rangle$. Si $D^L \mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}$, entonces $D^L(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r) = f\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r$ y el flujo $\{\tau_t\}$ del campo D deja invariante $\Lambda^r \mathcal{P}$ (p. 165); luego deja invariante \mathcal{P} .

Definición: El **sistema característico** de \mathcal{P} está formado por los campos incidentes D tales que $D^L \mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}$ (es decir, $i_D \omega = 0$, $i_D d\omega \in \mathcal{P}$, para toda $\omega \in \mathcal{P}$).

Teorema de la Proyección: Si $D_x \neq 0$, un sistema de Pfaff \mathcal{P} es proyectable al anillo de integrales primeras del campo D si y sólo si D está en el sistema característico de \mathcal{P} .

Demostración: Si $D_x \neq 0$, por la clasificación local de campos en un pequeño entorno U de x tenemos una proyección $\pi: U \rightarrow V$, que admite una sección $\sigma: V \rightarrow U$ pasando por x , y las integrales primeras del campo D son las funciones diferenciables en V . Si \mathcal{P} se anula en D y $D^L \mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}$, vamos a ver que $\mathcal{P} = \langle \omega_1, \dots, \omega_r \rangle$ coincide con $\langle \pi^* \sigma^* \omega_1, \dots, \pi^* \sigma^* \omega_r \rangle$.

Ambos sistemas de Pfaff coinciden en los puntos de la sección, porque coinciden en el hiperplano tangente a la sección y se anulan en el suplementario que define D .

Ambos son invariantes por el flujo del campo D ; luego coinciden en un entorno de x .

Recíprocamente, si \mathcal{P} es proyectable, el campo D está en su sistema característico porque $(\sum_i f_i dh_i)(D) = 0$, y $D^L(\sum_i f_i dh_i) = 0$ cuando $Df_i = Dh_i = 0$.

Definición: Una distribución \mathcal{D} es **involutiva** cuando $D_1, D_2 \in \mathcal{D} \Rightarrow [D_1, D_2] \in \mathcal{D}$.

Si $\mathcal{P} = \mathcal{D}^\circ$ es el sistema de Pfaff incidente, como $(D_1^L \omega)(D_2) = D_1(\omega(D_2)) - \omega([D_1, D_2])$, esta condición equivale a que el sistema característico de \mathcal{P} sea \mathcal{P}° .

Teorema: Si \mathcal{P} es un sistema de Pfaff, las siguientes condiciones son equivalentes,

1. \mathcal{P} es integrable.
2. El ideal que genera \mathcal{P} en el álgebra de las formas diferenciales es estable por la diferencial exterior, $d\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P} \wedge \Omega$.
3. El incidente \mathcal{P}° es una distribución involutiva.

Demostración: (1 \Rightarrow 2) Si $\mathcal{P} = \langle dx_1, \dots, dx_r \rangle$, entonces $d(\sum_i f_i dx_i) = \sum_i df_i \wedge dx_i \in \mathcal{P} \wedge \Omega$.

(2 \Rightarrow 3) Sea $\mathcal{P} = \langle \omega_1, \dots, \omega_r \rangle$. Si $D \in \mathcal{P}^\circ$, y $\omega \in \mathcal{P}$, entonces $D^L \omega \in \mathcal{P}$:

$$D^L \omega = i_D d\omega + di_D \omega = i_D(\sum_i \theta_i \wedge \omega_i) = \sum_i (i_D \theta_i) \omega_i - (i_D \omega_i) \theta_i = \sum_i (i_D \theta_i) \omega_i.$$

(3 \Rightarrow 1) Por inducción sobre $n = \dim X$.

Si \mathcal{P}° es involutivo, es el sistema característico de \mathcal{P} , y por el teorema anterior existe una proyección $\pi: U \rightarrow V$ y un sistema de Pfaff $\mathcal{P}' = \langle \omega'_1, \dots, \omega'_r \rangle$ en V tal que $\mathcal{P} = \langle \pi^* \omega'_1, \dots, \pi^* \omega'_r \rangle$.

Además, todo campo D' en V es proyección de algún campo D en U .

Ahora, si $D'_1, D'_2 \in \mathcal{P}'^\circ$, entonces son proyección de ciertos campos $D_1, D_2 \in \mathcal{P}^\circ$.

Luego $[D'_1, D'_2]$ es la proyección de $[D_1, D_2] \in \mathcal{P}^\circ$, y $[D'_1, D'_2] \in \mathcal{P}'^\circ$.

Por inducción \mathcal{P}' es integrable; luego \mathcal{P} también.

Teorema de Frobenius: Las distribuciones involutivas son integrables.

Demostración: Si $\mathcal{D} = (\mathcal{D}^\circ)^\circ$ es involutiva, entonces $\mathcal{D}^\circ = \langle dx_{r+1}, \dots, dx_n \rangle$, y $\mathcal{D} = \langle \partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_r} \rangle$.

Corolario: $\omega = f dh \Leftrightarrow \omega \wedge d\omega = 0$, (donde $\omega \in \Omega$ y $\omega_x \neq 0$).

Definición: Un germen $\omega \in \Omega$ es **regular** de clase m si no se anula en el punto considerado y el módulo de campos incidentes que lo conservan

$$\mathcal{D}_\omega = \{D \in \mathcal{T} : i_D\omega = 0, D^L\omega = 0\} = \{D \in \mathcal{T} : i_D\omega = 0, i_D d\omega = 0\}$$

es una distribución de codimensión m , necesariamente es integrable: Si $D, \bar{D} \in \mathcal{D}_\omega$,

$$\begin{aligned}\omega([D, \bar{D}]) &= D(\omega(\bar{D})) - (D^L\omega)(\bar{D}) = 0, \\ [D, \bar{D}]^L\omega &= D^L\bar{D}^L\omega - \bar{D}^LD^L\omega = 0.\end{aligned}$$

Por el teorema de Frobenius $\mathcal{D}_\omega = \langle \partial_{m+1}, \dots, \partial_n \rangle$ en un sistema de coordenadas locales, y ω es proyectable a un germen ω' en dimensión m tal que $\mathcal{D}_{\omega'} = 0$.

Teorema de Darboux: Sea $\omega \in \Omega$ un germen regular de clase m .

Si $m = 2k + 1$ es impar, en algún sistema de coordenadas locales $(z, x_1, \dots, x_k, p_1, \dots, p_k, \dots)$

$$\omega = dz - p_1 dx_1 - \dots - p_k dx_k.$$

Si $m = 2k$ es par, en algún sistema de coordenadas locales $(x_1, \dots, x_k, p_1, \dots, p_k, \dots)$

$$\omega = p_1 dx_1 + \dots + p_k dx_k.$$

Demostración: Podemos suponer que estamos en dimensión m y que $\mathcal{D}_\omega = 0$.

Procedemos por inducción sobre m , y el caso $m = 1$ es trivial.

Si m es impar, $d\omega$ tiene radical no nulo, y su radical define una distribución $\langle Z \rangle$ de rango 1 transversal a $\omega = 0$. Dividiendo Z por $\omega(Z)$, podemos suponer que $\omega(Z) = 1$.

Tomamos un sistema de coordenadas locales en que $Z = \partial_z$, y sumando a z una integral primera de Z podemos suponer que $\theta = dz - \omega$ no se anula en el punto x considerado.

Ahora $i_Z\theta = 0$, $i_Z d\theta = i_Z d\omega = 0$, así que θ se proyecta en una 1-forma θ' en dimensión $m - 1$, y $\mathcal{D}_{\theta'} = 0$, porque el radical de $d\theta = d\omega$ está generado por Z .

Por inducción $\theta' = p_1 dx_1 + \dots + p_k dx_k$ y terminamos.

Si m es par, $d\omega$ no tiene radical (sería al menos de dimensión 2, y $\mathcal{D}_\omega \neq 0$), y los vectores tales que $i_D d\omega = \lambda\omega$ (lo que implica que $i_D\omega = 0$) definen una distribución de rango 1, que es el sistema característico de $\langle \omega \rangle$. Luego $\langle \omega \rangle$ es proyectable a dimensión $m - 1$, $\omega = p_1(\pi^*\omega')$, donde p_1 no se anula en x y ω' no se anula en $\pi(x)$.

Además, si $i_{D'}\omega' = 0$, $i_{D'}d\omega' = 0$, tomando un campo D que se proyecte en D' tendremos que $i_D\omega = 0$, $i_D d\omega \in \langle \omega \rangle$; luego D está en el sistema característico de $\langle \omega \rangle$, y $D' = 0$.

Por inducción $\omega' = dx_1 + \bar{p}_2 dx_2 + \dots + \bar{p}_k dx_k$, y poniendo $p_i = p_1 \bar{p}_i$,

$$\omega = p_1 dx_1 + \dots + p_k dx_k.$$

Como $d\omega = dp_1 \wedge dx_1 + \dots + dp_k \wedge dx_k$ no tiene radical, $dp_1, dx_1, \dots, dp_k, dx_k$ son linealmente independientes en x .

Ecuaciones en Derivadas Parciales de Primer Orden

Dada una función diferenciable $F(x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n)$ en $2n + 1$ variables, una solución clásica de la ecuación en derivadas parciales $F = 0$ es una función diferenciable $z(x_1, \dots, x_n)$ tal que $F(x_1, \dots, x_n, z, \partial_1 z, \dots, \partial_n z) = 0$.

Trataremos el problema en germen, en un punto de \mathbb{R}^{2n+1} . Pondremos

$$\omega = dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n$$

y llamaremos solución a todo germen de subvariedad de dimensión n en que F y ω se especialicen en 0. Si en ese germen x_1, \dots, x_n definen un sistema de coordenadas locales, tendremos una solución clásica. Cuando una subvariedad pasa por el punto considerado, para que se anule F basta imponer que se anule dF , por lo que supondremos que dF y ω son linealmente independientes, y consideramos el sistema de Pfaff

$$\mathcal{P} = \langle \omega, dF \rangle.$$

Un cálculo directo muestra que su sistema característico está generado por el campo

$$D_F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n \left(p_i \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial p_i} + \left(\sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial F}{\partial p_i} \right) \frac{\partial}{\partial z},$$

así que \mathcal{P} es proyectable al subanillo B de integrales primeras del campo D_F .

Si estamos en el origen, y la hipersuperficie $x_n = 0$ no es tangente al campo característico, $\frac{\partial F}{\partial p_n}(0) \neq 0$, tomamos $X_1, \dots, X_{n-1}, Z, P_1, \dots, P_n \in B$ que se especializan a $x_n = 0$ en las coordenadas. Como $F \in B$, la demostración del teorema de la proyección prueba que

$$\langle \omega, dF \rangle = \langle dZ - P_1 dX_1 - \dots - P_n dX_n, dF \rangle.$$

Para hallar una solución que en $x_n = 0$ coincida con una función $f(x_1, \dots, x_{n-1})$ dada, imponemos las siguientes $n+1$ ecuaciones en $2n+1$ variables (en general definirán una subvariedad de dimensión n)

$$\begin{cases} F = 0 \\ Z = f(X_1, \dots, X_{n-1}) \\ P_i = (\partial_i f)(X_1, \dots, X_{n-1}) \quad i = 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

Otras soluciones claras viene definidas por las ecuaciones ($\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} F = 0 \\ Z = \lambda_n \\ X_1 = \lambda_1, \dots, X_{n-1} = \lambda_{n-1} \end{cases}$$

y cuando estas $n+1$ ecuaciones permitan eliminar p_1, \dots, p_n , se obtiene una integral completa $z = \varphi(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de la ecuación en derivadas parciales.

Método de Lagrange-Charpit: Cuando $n = 2$, para hallar una integral completa basta conocer una integral primera G del campo característico D_F , suponiendo que

$$\mathcal{Q} = \langle \omega, dF, dG \rangle$$

es un sistema de Pfaff de rango 3.

Como $D_F G = -D_G F$ siempre (basta mirar la expresión de D_F), en tal caso también $D_G F = 0$, de modo que los campos D_F y D_G están en el sistema característico de \mathcal{Q} .

Además D_F y D_G son linealmente independientes, pues lo son ω, dF, dG y tenemos que $i_{D_F} d\omega = dF - (\partial_z F)\omega$, $i_{D_G} d\omega = dG - (\partial_z G)\omega$.

Luego $\mathcal{Q}^0 = \langle D_F, D_G \rangle$, y \mathcal{Q} es integrable, $\mathcal{Q} = \langle dF, dG, dH \rangle$,

$$\omega = u dH + v dF + w dG$$

y las variedades $F = 0, G = \lambda_1, H = \lambda_2$, son soluciones de la ecuación.

Método de Jacobi: En el caso de una ecuación $F(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = 0$ en que no aparezca la incógnita z , cada solución clásica $z(x_1, \dots, x_n)$ define una subvariedad $p_i = (\partial_i z)(x_1, \dots, x_n)$ de \mathbb{R}^{2n} de dimensión n , en la que $\omega = \sum_i p_i dx_i$ se especializa en dz , y por tanto $d\omega$ se especializa en 0 . A su vez, si $d\omega$ se anula en una subvariedad de dimensión n , como veremos (p. 174) en ella localmente $\omega = dz$, y si (x_1, \dots, x_n) forman un sistema de coordenadas locales, $z(x_1, \dots, x_n)$ define una solución clásica.

Como $\omega_2 = d\omega$ no tiene radical, para cada función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ tenemos un campo D_f tal que $df = i_{D_f}d\omega$, y el **paréntesis de Poisson** de dos funciones $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ es

$$\{f, g\} = \omega_2(D_f, D_g) = D_f g = -D_g f.$$

Como $D_f^2 \omega_2 = di_{D_f} \omega_2 + i_{D_f} d\omega_2 = d(df) + 0 = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} [D_f, D_g] &= D_{\{f, g\}}. \\ (i_{[D_f, D_g]} \omega_2)(D) &= \omega_2([D_f, D_g], D) = D_f(\omega_2(D_g, D)) - \omega_2(D_g, [D_f, D]) \\ &= D_f(Dg) - [D_f, D]g = D(D_f g) = D\{f, g\} = (d\{f, g\})(D). \end{aligned}$$

Sea $F_1 = F$. Si dF no se anula en el punto considerado, y F_2 es una integral primera del campo D_{F_1} , con dF_1, dF_2 linealmente independientes, tendremos $\{F_1, F_2\} = D_{F_1} F_2 = 0$, de modo que la distribución $\langle D_{F_1}, D_{F_2} \rangle$ es involutiva; luego integrable y podemos tomar una integral primera común F_3 con dF_1, dF_2, dF_3 linealmente independientes.

Procediendo así obtenemos gérmenes F_1, \dots, F_n , con diferenciales linealmente independientes, tales que $0 = D_{F_i} F_j = \omega_2(D_{F_i}, D_{F_j})$. Esto significa que D_{F_1}, \dots, D_{F_n} definen una distribución totalmente isótropa para ω_2 , y que su incidente está generado por dF_1, \dots, dF_n ; luego ω_2 se anula en las variedades $F = 0, F_2 = \lambda_2, \dots, F_n = \lambda_n$.

6.4. Integración de Formas

Las **formas de volumen** en una variedad diferenciable X de dimensión n son las n -formas que no se anulan en ningún punto, y X es **orientable** si admite alguna forma de volumen.

Dos formas de volumen, ω, ω' definen la misma **orientación** de X si $\omega' = f\omega$ para alguna función diferenciable $f > 0$, y las orientaciones de X son las clases de equivalencia.

Proposición: Sea $\{U_i, [\omega_i]\}$ un recubrimiento de X por abiertos orientados. Si en las intersecciones $U_i \cap U_j$ coinciden las orientaciones, $[\omega_i|_{U_i \cap U_j}] = [\omega_j|_{U_i \cap U_j}]$, entonces existe una única orientación $[\omega]$ de X tal que $[\omega_i] = [\omega|_{U_i}]$ en cada abierto U_i .

Demostración: $\omega = \sum_i \phi_i \omega_i$, para una partición de la unidad $\{\phi_i\}$ subordinada a $\{U_i\}$.

Definición: Un cerrado $\Omega \subseteq X$ es una **variedad con borde** cuando

1. $\partial \overset{\circ}{\Omega} = \partial \Omega$.
2. $\partial \Omega$ es vacío o es una subvariedad diferenciable de dimensión $n - 1$.

Lema: Si $p \in \partial \Omega$, en un entorno coordenado $(U; u_1, \dots, u_n)$ tenemos que

$$U \cap \Omega = \{x \in U : u_1(x) \leq 0\}.$$

Demostración: Tomemos un entorno coordenado U en que la ecuación de $U \cap \partial \Omega$ sea $u_1 = 0$, y $U - (U \cap \partial \Omega)$ tenga dos componentes conexas,

$$U - (U \cap \partial\Omega) = U_+ \cup U_-$$

de ecuaciones $u_1 > 0$, y $u_1 < 0$. Como $X - \partial\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \cup \Omega^c$, cortando con U

$$U_+ \cup U_- = U - (U \cap \partial\Omega) = (U \cap \overset{\circ}{\Omega}) \cup (U \cap \Omega^c).$$

Luego $U_- = U \cap \overset{\circ}{\Omega}$, y en ese caso $U \cap \Omega$ es $u_1 \leq 0$, ó $U_+ = U \cap \overset{\circ}{\Omega}$, y en tal caso $U \cap \Omega$ es $u_1 \geq 0$, y basta cambiar u_1 de signo.

Definiciones: Un vector $D_p \in T_p X$, $p \in \partial\Omega$, apunta hacia **fuera** de la variedad con borde Ω si en el sistema de coordenadas del lema anterior es

$$D_p = \lambda_1 \partial_1 + \dots + \lambda_n \partial_n, \quad \lambda_1 > 0,$$

lo que significa que para toda curva $\sigma: I \rightarrow X$, tangente a D_p en $t = 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\sigma(-\varepsilon, 0) \subseteq \Omega$, $\sigma(0, \varepsilon) \subseteq X - \Omega$.

Cada orientación $[\omega]$ de X induce una orientación en el borde $\partial\Omega$, considerando en $T_p(\partial\Omega)$ la orientación que define $i_{D_p} \omega_p = \omega_p(D_p, \dots)$, donde el vector D_p apunta hacia fuera de Ω .

En el sistema de coordenadas locales del lema, si $[\omega] = [du_1 \wedge \dots \wedge du_n]$, entonces la orientación inducida en el borde es $[\omega] = [du_2 \wedge \dots \wedge du_n]$, lo que muestra que no depende del vector D_p elegido, y que en un entorno de cada punto las orientaciones están definidas por una forma diferencial sobre $\partial\Omega$, así que obtenemos una orientación de $\partial\Omega$.

Sea ω una n -forma de soporte compacto en una variedad orientada X de dimensión n . Tomaremos siempre los sistemas de coordenadas locales (u_1, \dots, u_n) de modo que la orientación sea $[du_1 \wedge \dots \wedge du_n]$. Si el soporte de ω está contenido en un abierto coordinado $(U; u_1, \dots, u_n)$ tendremos que $\omega = f(u_1, \dots, u_n) du_1 \wedge \dots \wedge du_n$, donde f es una función diferenciable con soporte compacto en un abierto de \mathbb{R}^n , y ponemos

$$\int_X \omega = \int_{\mathbb{R}^n} f du_1 \dots du_n.$$

Esta definición no depende de las coordenadas elegidas (luego tampoco de U) porque, si (x_1, \dots, x_n) es otro sistema de coordenadas y $u_i = h_i(x_1, \dots, x_n) = h_i(x)$, tendremos

$$\omega = f(u_1, \dots, u_n) du_1 \wedge \dots \wedge du_n = f(h_1(x), \dots, h_n(x)) J dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

donde $J = \left| \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right|$ es positivo porque $du_1 \wedge \dots \wedge du_n$ y $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ definen la misma orientación, y la fórmula de cambio de variable en las integrales afirma que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f du_1 \dots du_n = \int_{\mathbb{R}^n} f(h_1(x), \dots, h_n(x)) J dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

En general tomamos una partición de la unidad $\{\phi_i\}$ subordinada a un recubrimiento $X = \bigcup_i U_i$ por abiertos coordinados y ponemos

$$\int_X \omega = \sum_i \int_X \phi_i \omega,$$

donde la suma es finita porque el soporte de ω es compacto y la familia $\{\text{sop } \phi_i\}$ es localmente finita. Esta definición no depende del recubrimiento ni la partición de la unidad.

En efecto, si $\{\varphi_j\}$ es una partición de la unidad subordinada a otro recubrimiento por abiertos coordinados, $X = \bigcup_j V_j$, tenemos que

$$\sum_i \int_X \phi_i \omega = \sum_i \int_X \sum_j \phi_i \varphi_j \omega = \sum_{i,j} \int_X \phi_i \varphi_j \omega = \sum_j \int_X \sum_i \varphi_j \phi_i \omega = \sum_j \int_X \varphi_j \omega.$$

Aunque hemos supuesto que ω es de clase \mathcal{C}^∞ , estas definiciones tienen sentido siempre que en su expresión local $\omega = f(u_1, \dots, u_n) du_1 \wedge \dots \wedge du_n$ la función f sea integrable, y podemos definir la integral de ω en una variedad con borde Ω sin más que poner (I_Ω es la función que vale 1 en Ω y se anula fuera)

$$\int_\Omega \omega = \int_X I_\Omega \omega.$$

Teorema de Stokes: $\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega$, para toda $(n-1)$ -forma con soporte compacto ω .

Demostración: Usando particiones de la unidad, basta ver que cada punto $p \in X$ tiene un entorno U en que el teorema es válido para las $(n-1)$ -formas de soporte compacto contenido en U . Distingamos 3 casos.

1. Si $p \in \Omega^c$, tomamos $U = X - \Omega$, y $\int_\Omega d\omega = 0 = \int_{\partial\Omega} \omega$ cuando $\text{sop } \omega \subseteq U$.
2. Si $p \in \overset{\circ}{\Omega}$, podemos suponer que $\mathbb{R}^n = X = \Omega = U$. En este caso $\int_{\partial\Omega} \omega = \int_\emptyset \omega = 0$, y podemos suponer que $\omega = f dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$, donde $\text{sop } f$ es compacto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} d\omega &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 \dots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (f(b, x_2, \dots, x_n) - f(-a, x_2, \dots, x_n)) dx_2 \dots dx_n = 0. \end{aligned}$$

3. Si $p \in \partial\Omega$, podemos suponer que $\mathbb{R}^n = X = U$, y que Ω es el cerrado $x_1 \leq 0$, de modo que $\partial\Omega$ es el hiperplano $x_1 = 0$. Si $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_i \wedge \dots \wedge dx_n$, el argumento del caso anterior prueba que $\int_\Omega d\omega = 0$, y $\int_{\partial\Omega} \omega = 0$, porque dx_1 se anula en $\partial\Omega$. Cuando $\omega = f dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$,

$$\begin{aligned} \int_\Omega d\omega &= \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 \dots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(0, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n = \int_{\partial\Omega} \omega. \end{aligned}$$

Fórmula de Gauss-Green: Si C es la frontera de una variedad con borde plana Ω , para toda 1-forma $f dx + g dy$ de soporte compacto

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \int_C (f dx + g dy).$$

Definición: La **forma de volumen** de una variedad riemanniana orientada X es la única forma de volumen ω_X tal que $\omega_X(D_1, \dots, D_n) = 1$ en toda base ortonormal directa (p. 54), y el volumen de una variedad con borde compacta Ω es $\int_\Omega \omega_X$.

La integral en Ω de una función f es $\int_\Omega f \omega_X$.

La **divergencia** de un campo D se define por la igualdad $D^L \omega_X = (\text{div } D) \omega_X$.

Teorema de la Divergencia: La integral de la divergencia de un campo D en una variedad con borde compacta Ω es el flujo del campo a través del borde $S = \partial\Omega$; es decir, si N_p es el único vector unitario y ortogonal a $T_p S$ que apunta hacia fuera de Ω ,

$$\int_\Omega \text{div } D = \int_S (D \cdot N) \omega_S.$$

$$\text{Demostración: } \int_{\Omega} \operatorname{div} D = \int_{\Omega} D^L \omega_X = \int_{\Omega} (di_D \omega_X + i_D d\omega_X) = \int_{\Omega} di_D \omega_X = \int_S i_D \omega_X$$

y para concluir hemos de probar que la restricción de $i_D \omega_X$ a S coincide con $(D \cdot N) \omega_S$.

Si (D_2, \dots, D_n) es una base ortonormal y orientada de $T_p S$, entonces (N, D_2, \dots, D_n) es una base ortonormal y orientada de $T_p X$, y

$$\begin{aligned} (i_D \omega_X)(D_2, \dots, D_n) &= \omega_X(D, D_2, \dots, D_n) = \omega_X((D \cdot N)N + \dots, D_2, \dots, D_n) \\ &= (D \cdot N) \omega_X(N, D_2, \dots, D_n) = D \cdot N = (D \cdot N) \omega_S(D_2, \dots, D_n). \end{aligned}$$

6.4.1. Cohomología de De Rham

Una p -forma ω es **cerrada** si $d\omega = 0$, y **exacta** si $\omega = d\omega'$ para alguna $(p-1)$ -forma ω' .

Toda forma exacta es cerrada porque $dd\omega' = 0$, y los grupos de **cohomología de De Rham** de una variedad diferenciable X son los espacios vectoriales

$$H_{DR}^p(X) = \frac{\{p\text{-formas cerradas}\}}{\{p\text{-formas exactas}\}}.$$

El anillo de cohomología de X es la \mathbb{R} -álgebra graduada anticonmutativa

$$H_{DR}^{\bullet}(X) = \bigoplus_p H_{DR}^p(X), \quad [\omega_p] \cdot [\omega_q] = [\omega_p \wedge \omega_q],$$

y cada aplicación diferenciable $f: X \rightarrow Y$ induce un morfismo de \mathbb{R} -álgebras

$$f^*: H_{DR}^{\bullet}(Y) \longrightarrow H_{DR}^{\bullet}(X), \quad f^*[\omega] = [f^*\omega].$$

Ejemplo: En una variedad compacta y orientada X de dimensión n , las n -formas exactas tienen integral nula, $\int_X d\omega' = \int_{\partial X} \omega' = \int_{\emptyset} \omega' = 0$, y si $[\omega]$ es la orientación, $\int_X \omega > 0$. Vemos así que $H_{DR}^n(X) \neq 0$, y que la integración de formas define una aplicación lineal epyectiva

$$\int_X : H_{DR}^n(X) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Definiciones: Dos aplicaciones diferenciables $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ son **homótopas**, $f_0 \sim f_1$, si existe un intervalo $I = (-\varepsilon, 1 + \varepsilon)$ y una aplicación diferenciable $H: X \times I \rightarrow Y$ tal que

$$\begin{aligned} f_0(x) &= H(x, 0) \\ f_1(x) &= H(x, 1) \end{aligned}$$

Una aplicación diferenciable $f: X \rightarrow Y$ es una **equivalencia homotópica** si existe una aplicación diferenciable $g: Y \rightarrow X$ tal que $fg \sim \operatorname{Id}_Y$, $gf \sim \operatorname{Id}_X$.

X es **contráctil** a un punto p si la inclusión $p \rightarrow X$ es una equivalencia homotópica.

Si ω es una p -forma en $X \times I$, definimos una p -forma $I(\omega)$ en X , poniendo en coordenadas locales (donde $dx_{\alpha} = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$)

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{\alpha} f_{\alpha}(x, t) dx_{\alpha} + \text{términos con } dt, \\ I(\omega) &= \sum_{\alpha} \left(\int_0^1 f_{\alpha}(x, t) dt \right) dx_{\alpha}. \end{aligned}$$

Por cálculo directo, se comprueba que $I(d\omega) = d(I(\omega))$.

Lema: $I(\partial_t^L \omega) = j_1^* \omega - j_0^* \omega$; donde $j_t: X \rightarrow X \times I$, $j_t(x) = (x, t)$.

Demostración: La regla de Barrow y la igualdad $\partial_t^L \omega = \sum_\alpha (\partial_t f_\alpha)(x, t) dx_\alpha + \text{términos con } dt$.

Teorema: Si $f_0 \sim f_1$, los morfismos $f_0^*, f_1^*: H_{DR}^\bullet(Y) \rightrightarrows H_{DR}^\bullet(X)$ coinciden.

Demostración: Si ω es una p -forma cerrada en Y , entonces $\bar{\omega} = H^*\omega$ también es cerrada, y $f_1^*\omega$ y $f_0^*\omega$ difieren en una diferencial exacta

$$f_1^*\omega - f_0^*\omega = j_1^*H^*\omega - j_0^*H^*\omega = j_1^*\bar{\omega} - j_0^*\bar{\omega} = I(\partial_t^L \bar{\omega}) = I(\text{di}_{\partial_t} \bar{\omega} - i_{\partial_t} d\bar{\omega}) = I(\text{di}_{\partial_t} \bar{\omega}) = dI(i_{\partial_t} \bar{\omega}).$$

Corolario: Si $f: X \rightarrow Y$ es equivalencia homotópica, $f^*: H_{DR}^\bullet(Y) \rightarrow H_{DR}^\bullet(X)$ es isomorfismo.

Lema de Poincaré: $H_{DR}^p(\mathbb{R}^n) = 0, p \geq 1$.

Demostración: \mathbb{R}^n es contráctil. La homotopía requerida es $H(x, t) = tx$. q.e.d.

1. Toda forma cerrada es localmente exacta.
2. Sea (D_1, \dots, D_n) una base de campos tangentes en una variedad X . Si $[D_i, D_j] = 0$, cada punto tiene un entorno coordenado en que $D_1 = \partial_1, \dots, D_n = \partial_n$.

Demostración: Si $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ es la base dual, por la fórmula de Cartan

$$d\omega_k(D_i, D_j) = D_i(\omega_k(D_j)) - D_j(\omega_k(D_i)) - \omega_k([D_i, D_j]) = 0 - 0 - 0$$

y por el lema de Poincaré, en un entorno de cada punto x las 1-formas ω_i son exactas, $\omega_i = du_i$, y las funciones u_1, \dots, u_n forman un sistema de coordenadas locales en x porque sus diferenciales definen una base de T_x^*X . Ahora $D_i = \partial_{u_i}$.

3. Si n es par, todo campo tangente a la esfera S_n se anula en algún punto.

Si un campo tangente no se anula, podemos suponer que es de módulo 1, y define una aplicación diferenciable $\phi: S_n \rightarrow S_n$ tal que $\phi(x)$ es ortogonal a x . Ahora

$$H(x, t) = \cos(\pi t)x + \text{sen}(\pi t)\phi(x)$$

define una homotopía entre la identidad de S_n y $\tau: S_n \rightarrow S_n, \tau(x) = -x$; así que $\tau^*: H_{DR}^n(S_n) \rightarrow H_{DR}^n(S_n)$ es la identidad. Absurdo, τ invierte la orientación si n es par.

Si n es impar, $\phi(x_0, x_1, \dots, x_n) = (-x_1, x_0, \dots, -x_n, x_{n-1})$ define un campo tangente a S_n que no se anula en ningún punto.

4. Sea $B_{n,1+\varepsilon} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n: \sum_i x_i^2 < 1 + \varepsilon\}$. La inclusión $i: S_{n-1} \rightarrow B_{n,1+\varepsilon}$ no admite retracts diferenciables, ni siquiera salvo homotopías (diferenciables).

Si existiera una aplicación diferenciable $r: B_{n,1+\varepsilon} \rightarrow S_{n-1}$ tal que ri es homotopa a la identidad, la composición

$$H_{DR}^{n-1}(S_{n-1}) \xrightarrow{r^*} H_{DR}^{n-1}(B_{n,1+\varepsilon}) \xrightarrow{i^*} H_{DR}^{n-1}(S_{n-1})$$

sería la identidad. Absurdo porque $H_{DR}^{n-1}(B_{n,1+\varepsilon}) = 0$, y $H_{DR}^{n-1}(S_{n-1}) \neq 0$.

5. Si un campo tangente D no se anula en ningún punto de la bola B_n , entonces apunta hacia fuera en algún punto de su borde S_{n-1} .

Si D no se anula en $B_{n,1+\varepsilon}$, y no apunta hacia fuera en S_{n-1} , la aplicación diferenciable $r: B_{n,1+\varepsilon} \rightarrow S_{n-1}, r(x) = -D_x/|D_x|$, verifica que $r(x) \neq -x$ para todo $x \in S_n$, y, salvo una homotopía, sería un retracts de la inclusión $i: S_{n-1} \rightarrow B_{n,1+\varepsilon}$. Una homotopía entre ri y la identidad sería

$$H(x, t) = \frac{t \cdot r(x) + (1 - t)x}{|t \cdot r(x) + (1 - t)x|}.$$

Proposición: $H_{DR}^1(X) = 0$, cuando X es una variedad simplemente conexa.

Demostración: Sea ω una 1-forma cerrada en X , y P_x el conjunto, no vacío por el lema de Poincaré, de gérmenes en x de primitivas de ω (funciones tales que $df = \omega$), de modo que tales gérmenes difieren siempre en una constante. Pongamos (como en la p. 129)

$$\pi: \tilde{P} \coprod_x P_x \longrightarrow X, \quad \pi(f_x) = x.$$

Cada primitiva $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ define una sección local $U \rightarrow \tilde{P}$ de π , y si dos secciones coinciden en un punto, $f_x = h_x$, coinciden en un entorno. Las imágenes de estas secciones son base de una topología en \tilde{P} con la que π es un revestimiento (de fibras no numerables), y las secciones continuas de π coinciden con las primitivas de ω .

Si X es simplemente conexa, π admite sección continua global, y ω es exacta.

6.5. Funciones de Variable Compleja

Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un abierto. Una función $f = u + iv: U \rightarrow \mathbb{C}$ es de clase \mathcal{C}^m si u y v lo son,

$$\mathcal{C}^m(U)_{\mathbb{C}} = \mathcal{C}^m(U) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathcal{C}^m(U) \oplus i\mathcal{C}^m(U).$$

Las p -formas complejas en $z_0 \in U$ son las aplicaciones multilineales $T_{z_0}U \rightarrow \mathbb{C}$ alternadas, $\omega_p = \omega'_p + i\omega''_p$ donde ω'_p y ω''_p son p -formas ordinarias. Pondremos

$$\begin{aligned} d\omega_p &= d\omega'_p + id\omega''_p, \\ \int_{\Omega} \omega_p &= \int_{\Omega} \omega'_p + i \int_{\Omega} \omega''_p, \end{aligned}$$

de modo que el teorema de Stokes es válido. Además,

$$(T_{z_0}^*U)_{\mathbb{C}} = (T_{z_0}^*U) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C}dx + \mathbb{C}dy = \mathbb{C}dz + \mathbb{C}d\bar{z},$$

donde $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$; y definimos $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ por la igualdad

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}.$$

Tenemos así derivaciones $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$, $\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y): \mathcal{C}^\infty(U)_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}$, y

$$\mathbb{R}\partial_x + \mathbb{R}\partial_y = T_{z_0}U \hookrightarrow \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}^\infty(U)_{\mathbb{C}}, \mathbb{C}) = (T_{z_0}U)_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\partial_x + \mathbb{C}\partial_y = \mathbb{C}\partial_z + \mathbb{C}\partial_{\bar{z}}.$$

Teorema: Si $f = u + iv$ es de clase \mathcal{C}^1 en U , las siguientes condiciones son equivalentes (y si las cumple, decimos que f es **analítica** en U),

1. En todo punto $z_0 \in U$ existe el límite

$$f'(z_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \varepsilon) - f(z_0)}{\varepsilon}, \quad \varepsilon \in \mathbb{C}.$$

2. $f_*: \mathbb{C} = T_{z_0}U \longrightarrow \mathbb{C}$ es \mathbb{C} -lineal en todo punto $z_0 \in U$; es decir, $\partial_{\bar{z}}f = 0$,

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \quad (\text{Ecuaciones de Cauchy-Riemann}).$$

3. La 1-forma compleja $f(z)dz$ es cerrada.

4. Si una circunferencia γ rodea un punto $z_0 \in U$, y está contenida en un disco contenido en U , se cumple la **Fórmula de Cauchy**,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

5. Localmente f es una serie de potencias,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Demostración: (1 \Rightarrow 2) Según que ε tienda a 0 por el eje real o el eje imaginario

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \partial_x f = u_x + iv_x, \\ f'(z_0) &= \frac{1}{i} \partial_y f = -iu_y + v_y. \end{aligned}$$

$$(2 \Rightarrow 3) \quad d(fdz) = df \wedge dz = \left(\frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) \wedge dz = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz = 0.$$

(3 \Rightarrow 4) Si γ está centrada en z_0 , cambiando a polares, $z = z_0 + re^{i\theta}$, vemos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} d(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

es el valor medio de $f(z)$ en γ , y tiende a $f(z_0)$ cuando $r \rightarrow 0$. Pero la integral es la misma cuando dos circunferencias que rodeen z_0 estén en un disco $D \subset U$ y (con orientaciones opuestas) sean el borde de una corona: basta aplicar Stokes a la forma $\frac{f(z)}{2\pi i(z-z_0)} dz$, que es cerrada porque $f(z)dz$ lo es y $d\frac{1}{z-z_0} = -(z-z_0)^{-2}dz$. q.e.d.

Por ejemplo, si un polinomio no constante $P(z)$ no se anulase, $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ sería derivable en todo punto y, como el valor medio de $f(z)$ en el círculo $|z| = r$ tiende a 0 cuando $r \rightarrow \infty$, vemos que $f(0) = 0$, lo que es absurdo y prueba de nuevo el teorema de D'Alembert.

(4 \Rightarrow 5) Sea $D \subset U$ un disco cerrado centrado en z_0 . Si $z \in \overset{\circ}{D}$, $\eta \in \partial D$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta - z} &= \frac{1}{(\eta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\eta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\eta-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\eta - z_0)^{n+1}}, \\ f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\eta)(z - z_0)^n}{(\eta - z_0)^{n+1}} d\eta, \end{aligned}$$

y se integra término a término porque la serie converge uniformemente en D , al estar mayorada por una serie geométrica convergente (K denota el máximo de $|f(z)|$ en D)

$$\left| \frac{f(z)(z - z_0)^n}{(\eta - z_0)^{n+1}} \right| \leq \frac{K}{R} \frac{|z - z_0|^n}{R^n}, \quad \frac{|z - z_0|}{R} < 1; \quad (\text{donde } R \text{ es el radio de } D).$$

Por tanto, en el interior del disco D tenemos el desarrollo en serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}} d\eta.$$

Desigualdades de Cauchy: $|a_n| \leq \frac{M_R}{R^n}$, donde M_R es el máximo de $|f(\eta)|$ en ∂D .

En efecto, pasando a polares $\eta = z_0 + Re^{i\theta}$,

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{i\theta}) Rie^{i\theta}}{R^{n+1} e^{i\theta(n+1)}} d\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + Re^{i\theta})| d\theta.$$

(5 \Rightarrow 1) Toda serie $\sum_n a_n(z - z_0)^n$ es derivable en el interior de su círculo de convergencia, y su derivada coincide con $\sum_n a_n n(z - z_0)^{n-1}$, de igual radio de convergencia. Como la derivada es otra serie de potencias, *las funciones analíticas son infinitamente derivables*.

Teorema de Liouville: *Toda función analítica y acotada en \mathbb{C} es constante.*

Demostración: Si $|f(z)| \leq M$ en todo el plano, $|a_n| \leq \frac{M}{R^n}$ para todo $R > 0$.

Luego $a_n = 0$ cuando $n \geq 1$, y f es localmente constante.

Fórmula de Cauchy-Goursat: *Si U es simplemente conexo y $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica, para toda curva cerrada γ en U tenemos que*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Demostración: Como U es simplemente conexo y $f(z) dz$ es cerrada, es exacta (p. 175).

Definición: Un espacio topológico X , con un haz de funciones continuas complejas \mathcal{O} , es una **superficie de Riemann** si localmente es isomorfo a un abierto de \mathbb{C} con el haz de funciones analíticas, y diremos que $\mathcal{O}(U)$ es el anillo de las **funciones analíticas** en U .

Las aplicaciones analíticas son los morfismos de espacios anillados, y las funciones analíticas en U son los morfismos $U \rightarrow \mathbb{C}$.

Una función $f \in \mathcal{O}(U)$ es una coordenada si define un isomorfismo de U con un abierto de \mathbb{C} , y es una coordenada local en $p \in U$ si es coordenada en algún entorno de p (lo que equivale a que $f'(p) \neq 0$, cuando U es un abierto de \mathbb{C}).

Ejemplos: Los abiertos de \mathbb{C} , la recta proyectiva compleja \mathbb{P}_1 , los toros $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2)$, los revestimientos topológicos de una superficie de Riemann,...

Supondremos siempre que las superficies de Riemann son conexas.

Teorema: *Sea $f: X \rightarrow Y$ una aplicación analítica no constante y $p \in X$. Existen entornos coordinados (U, z) y (V, s) de p y $f(p)$ en los que la aplicación es $s = z^n$.*

Demostración: Tomemos coordenadas en que $p = f(p) = 0$, de modo que la aplicación es $s = z^n h(z)$, donde $h(0) \neq 0$.

En un entorno de $p = 0$ la raíz n -ésima de $h(z)$ es analítica.

Cambiando la coordenada z por $w = z \sqrt[n]{h(z)}$ tenemos que $s = z^n h(z) = w^n$. q.e.d.

De esta sencilla clasificación local de morfismos analíticos entre superficies de Riemann se siguen varias consecuencias tan importantes como evidentes:

1. *Las fibras de un morfismo analítico no constante son discretas. En particular los ceros de una función analítica no constante son discretos.*
2. *Si dos funciones analíticas coinciden en un abierto no vacío, son iguales.*
3. *Todo morfismo analítico no constante es abierto.*
4. *Si una función analítica f no es constante, $|f|$ no tiene máximos ni mínimos locales, salvo donde se anule, donde $|f|$ tiene un mínimo absoluto.*
5. *Toda función analítica en una superficie de Riemann compacta es constante.*
6. *Todo morfismo inyectivo $X \rightarrow Y$ es un isomorfismo con un abierto de Y .*

6.5.1. Funciones Meromorfas

Sea $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ analítica, salvo en un punto $z_0 \in U$; es decir, analítica en $U - z_0$.

En los cálculos supondremos que $z_0 = 0$; pero enunciaremos los resultados en general.

Tomemos una corona circular $\Omega = \{r \leq |z| \leq R\}$. Su borde está formado por las circunferencias γ y Γ de radios r y R . El argumento de la fórmula de Cauchy da

$$\begin{aligned} z \in \Omega; \quad f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta, \\ \eta \in \Gamma; \quad \frac{1}{\eta - z} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\eta^{n+1}}, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\eta)}{\eta^{n+1}} d\eta \right) z^n, \\ \eta \in \gamma; \quad \frac{1}{z - \eta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta^n}{z^{n+1}}, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\eta)}{z - \eta} d\eta = \sum_{n=-1}^{-\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\eta)}{\eta^{n+1}} d\eta \right) z^n, \end{aligned}$$

y la función $f(z)$ se desarrolla en **serie de Laurent** en la corona Ω ,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}} d\eta,$$

donde σ es γ , Γ o un círculo intermedio, pues $f(\eta)(\eta - z_0)^{-n-1}d\eta$ es cerrada en $U - z_0$.

Luego el desarrollo es válido en todo un entorno (salvo en z_0), y se tienen las desigualdades de Cauchy, $|a_n| \leq r^{-n} M_r$, donde $M_r = \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|$.

Si los coeficientes a_n , $n < 0$, son nulos se dice que z_0 es una **singularidad evitable** de f , si son nulos salvo un número finito, z_0 es un **polo** de f , (y su **orden** es el mayor índice m tal que $a_{-m} \neq 0$), y si hay infinitos no nulos, z_0 es una **singularidad esencial**.

Una función es **meromorfa** cuando es analítica salvo en un conjunto discreto de polos.

Si f tiene un polo de orden m , en un entorno $f = h/z^m$ donde h es analítica, así que las funciones meromorfas son las que localmente coinciden con cocientes de funciones analíticas, y por tanto las funciones meromorfas en X forman un cuerpo.

Ejemplo: Si f es una función meromorfa en \mathbb{P}_1 , restando en cada polo la parte singular de su desarrollo de Laurent (que define una función racional con ese único polo) obtenemos una función analítica en \mathbb{P}_1 ; luego constante.

Las funciones meromorfas en \mathbb{P}_1 son las funciones racionales, $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$.

Teorema de Riemann: Si $|f|$ está acotado en un entorno de z_0 , es una singularidad evitable. Luego si f se extiende de modo continuo a z_0 , se extiende de modo analítico.

Demostración: Si $M_\varepsilon \leq M$ para todo ε pequeño, $|a_{-n}| \leq M\varepsilon^n$, y $a_{-n} = 0$.

Teorema de Weierstrass: Una singularidad es esencial si y sólo si la imagen de cualquier entorno es densa en \mathbb{C} .

Demostración: Si el origen es un polo, $f(z) = h(z)z^{-m}$, donde $h(0) \neq 0$. Luego $f(U - \{0\})$ no es denso en \mathbb{C} cuando U es suficientemente pequeño, porque $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \infty$.

Recíprocamente, si existe un entorno U tal que $f(U - \{0\})$ no es denso en \mathbb{C} , podemos suponer que el disco de radio R centrado en el origen no corta a $f(U - \{0\})$.

El módulo de $f(z)^{-1}$ está acotado por R^{-1} ; luego $h(z) = f(z)^{-1}$ es analítica en U , y $f(z) = h(z)^{-1}$ es meromorfa. La singularidad es un polo.

Teorema: Las funciones meromorfas en una superficie de Riemann X son los morfismos analíticos $f: X \rightarrow \mathbb{P}_1$ que no valoren constantemente en el punto del infinito.

Demostración: Si $f: X \rightarrow \mathbb{P}_1$ es un morfismo, y consideramos los entornos coordenados usuales $(U_0; z)$, $(U_\infty; \frac{1}{z})$ del origen y el infinito, la función f es analítica en $V_0 = f^{-1}(U_0)$, y $\frac{1}{f}$ es analítica en $V_\infty = f^{-1}(U_\infty)$. Luego f es meromorfa en $V_0 \cup V_\infty = X$.

Recíprocamente, si f es una función meromorfa en X , y la prolongamos dándole el valor ∞ en los polos, la aplicación $f: X \rightarrow \mathbb{P}_1$ así obtenida es analítica en los polos, porque $\frac{1}{f}$ es una función analítica en un entorno de cada polo.

Corolario: Los automorfismos analíticos de \mathbb{P}_1 son las homografías $\tau(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

Corolario: Los automorfismos analíticos de \mathbb{C} son las afinidades $\tau(z) = az + b$.

Demostración: Si un automorfismo $\tau: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se extiende a \mathbb{P}_1 poniendo $\tau(\infty) = \infty$, se obtiene una función meromorfa en \mathbb{P}_1 , porque en ∞ la singularidad no es esencial.

Luego es una homografía que deja fijo el infinito.

Definición: Una 1-forma compleja ω en una superficie de Riemann X es **analítica** si localmente es $\omega = f(z)dz$, donde $f(z)$ es una función analítica (en particular $d\omega = 0$).

Si ω es analítica en $U - z_0$, su integral a lo largo de una pequeña curva γ que rodee a z_0 (con su orientación como borde de la región donde está z_0) no depende de la curva y, afectada del factor $\frac{1}{2\pi i}$, es el **residuo** de ω en z_0 ,

$$\text{Res}(\omega, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \omega.$$

Si $\omega = f(z)dz$, con $f(z)$ meromorfa y desarrollo de Laurent $f(z) = \sum_n a_n(z-z_0)^n$, la integral se calcula término a término porque la serie converge uniformemente en γ ,

$$\int_{\gamma} (z-z_0)^n dz = \frac{1}{n+1} \int_{\gamma} d(z-z_0)^{n+1} = 0, \text{ cuando } n \neq -1.$$

$$\text{Res}(\omega, z_0) = \frac{a_{-1}}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0} = a_{-1}.$$

Teorema de los Residuos: Sea X una superficie de Riemann, y ω una 1-forma analítica salvo en un conjunto discreto de puntos. Si $\Omega \subseteq X$ es una variedad con borde compacta y ω no tiene puntos singulares en $\partial\Omega$,

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \sum_{z_i \in \Omega} \text{Res}(\omega, z_i).$$

Demostración: Si tomamos un pequeño disco D_i que contenga a cada singularidad $z_i \in \Omega$, tendremos que ω es cerrada en un entorno de $\Omega - \bigcup_i D_i$, y por Stokes

$$0 = \int_{\partial\Omega} \omega - \sum_i \int_{\partial D_i} \omega = \int_{\partial\Omega} \omega - \sum_i \text{Res}(\omega, z_i).$$

Corolario: $\sum_{z_i \in X} \text{Res}(\omega, z_i) = 0$, cuando X es compacta.

Corolario: El número de polos (contados con su orden) de una función meromorfa no constante f en una superficie de Riemann compacta coincide con el de ceros.

Demostración: Si $f(z) = a_m z^m + a_{m+1} z^{m+1} + \dots$, donde $a_m \neq 0$, entonces

$$\omega = \frac{df}{f} = \frac{(ma_m z^{m-1} + \dots)dz}{a_m z^m + \dots} = \left(\frac{m}{z} + \dots\right) dz$$

y el residuo de ω en $z = 0$ es m . La suma de los residuos de ω es el número de ceros de f menos el número de polos, contados con su orden. q.e.d.

Como un polinomio de grado n es una función meromorfa en \mathbb{P}_1 con un polo de orden n en $z = \infty$, tiene n raíces complejas, lo que vuelve obvio el teorema de D'Alembert.

Capítulo 7

Geometría Diferencial I

7.1. Variedades Diferenciables

Dar un **haz de funciones** reales continuas \mathcal{O}_X en un espacio topológico X es dar una subálgebra $\mathcal{O}_X(U) \subseteq \mathcal{C}(U)$ en cada abierto U de X , de modo que para cada recubrimiento abierto $U = \bigcup_i U_i$ se tenga que una función continua $f \in \mathcal{C}(U)$ está en $\mathcal{O}_X(U)$ si y sólo si $f|_{U_i} \in \mathcal{O}_X(U_i)$ para todo índice i ,

$$\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \prod_i \mathcal{O}_X(U_i) \Rightarrow \prod_{i,j} \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j).$$

Un **espacio anillado** es un espacio topológico X con un haz de funciones continuas \mathcal{O}_X , y un **morfismo** de espacios anillados $\phi: (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ es una aplicación continua $\phi: Y \rightarrow X$ que transforme las funciones de $\mathcal{O}_X(U)$ en las de $\mathcal{O}_Y(\phi^{-1}U)$:

$$f \in \mathcal{O}_X(U) \Rightarrow \phi^*(f) = f \circ \phi \in \mathcal{O}_Y(\phi^{-1}U).$$

Ejemplos: Un abierto $V \subseteq \mathbb{R}^n$, con el haz \mathcal{C}_V^∞ de funciones \mathcal{C}^∞ , es un espacio anillado, y los morfismos $f: (V, \mathcal{C}_V^\infty) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{C}_\mathbb{R}^\infty)$ son las funciones \mathcal{C}^∞ . En general, si U es un abierto de \mathbb{R}^m , los morfismos $(V, \mathcal{C}_V^\infty) \rightarrow (U, \mathcal{C}_U^\infty)$ son las aplicaciones de clase \mathcal{C}^∞ .

Una **variedad diferenciable** X (de clase \mathcal{C}^∞) es un espacio anillado localmente isomorfo a un abierto de \mathbb{R}^n con su haz de funciones \mathcal{C}^∞ . Su haz se denotará \mathcal{C}_X^∞ ó \mathcal{C}^∞ , y las **funciones diferenciables** en un abierto U son las funciones continuas que estén en $\mathcal{C}^\infty(U)$.

Los morfismos de variedades son los morfismos de espacios anillados (las aplicaciones continuas que transformen funciones diferenciables en funciones diferenciables) y los isomorfismos se llaman **difeomorfismos**.

El anillo de gérmenes en $p \in X$ de funciones diferenciables se denota $\mathcal{O}_{X,p}$ ó \mathcal{O}_p

$$\mathcal{O}_p = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ p \in U}} \mathcal{C}^\infty(U).$$

Un **abierto coordinado** de X es un abierto U difeomorfo a un abierto de un \mathbb{R}^n .

Si una aplicación continua $(x_1, \dots, x_n): U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo, entonces decimos que (x_1, \dots, x_n) es un **sistema de coordenadas** en U , de modo que toda función diferenciable en U es $f(x_1, \dots, x_n)$ para una única función $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$.

Unas funciones $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{C}^\infty(U)$ definen un **sistema de coordenadas locales** en $p \in U$ si forman un sistema de coordenadas en algún entorno de p .

Lema: \mathcal{O}_p es un anillo local, y su único ideal maximal $\mathfrak{m}_p = \{f \in \mathcal{O}_p: f(p) = 0\}$ está generado por $x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n$, donde x_1, \dots, x_n son coordenadas locales en p , y (a_1, \dots, a_n) son las coordenadas de p .

Demostración: El epimorfismo $\mathcal{O}_p \rightarrow \mathbb{R}, f \rightarrow f(p)$, muestra que \mathfrak{m}_p es un ideal maximal. Si $f \notin \mathfrak{m}_p$, entonces f no se anula en un entorno U de p ; luego f es invertible en $\mathcal{C}^\infty(U)$, y su germen es invertible en \mathcal{O}_p . El único maximal de \mathcal{O}_p es \mathfrak{m}_p .

Es claro que $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \subseteq \mathfrak{m}_p$, y para terminar podemos suponer que $f \in \mathfrak{m}_p$ es el germen de una función definida en un entorno convexo de $p = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

Fijado un punto $x = (x_1, \dots, x_n)$ de dicho entorno, como $f(p) = 0$,

$$\begin{aligned} g(t) &= f(p + t(x - p)), \quad 0 \leq t \leq 1, \\ f(x) &= g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t) dt = \sum_{i=1}^n \int_0^1 (x_i - a_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p + t(x - p)) dt \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(p + t(x - p)) dt = \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) h_i(x). \end{aligned}$$

Tomando gérmenes vemos que $f \in (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$.

Definición: $T_p X = \text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_p, \mathcal{O}_p/\mathfrak{m}_p)$ es el **espacio tangente** a X en p . Si $D \in T_p X$,

$$D(fg) = (Df) \cdot g(p) + f(p) \cdot (Dg).$$

Si $(U; x_1, \dots, x_n)$ es un entorno coordenado, $(\frac{\partial}{\partial x_i})_p = (\partial_{x_i})_p = (\partial_i)_p$ es el vector

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p (f_p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

Teorema: $(\frac{\partial}{\partial x_1})_p, \dots, (\frac{\partial}{\partial x_n})_p$ definen una base del espacio tangente $T_p X$.

Demostración: Son linealmente independientes, si $\sum_i \lambda_i (\partial_i)_p = 0$, entonces

$$0 = \sum_i \lambda_i (\partial_i)_p(x_j) = \sum_i \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j.$$

Además, si un vector tangente D verifica que $Dx_i = 0$ para todo i , entonces $D = 0$.

En efecto, por el lema todo germen es $f = b + \sum_i h_i(x_i - a_i)$; luego

$$Df = \sum_i (Dh_i)(x_i(p) - a_i) + \sum_i h_i(p) Dx_i = 0 + 0 = 0.$$

Ahora está claro que para todo vector tangente $D \in T_p X$ tenemos que

$$D = (Dx_1) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p + \dots + (Dx_n) \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p. \quad (7.1)$$

Definición: La **dimensión** de X en p es la dimensión del espacio vectorial $T_p X$, y por el teorema es localmente constante (luego constante si X es conexa).

Ejemplo: Si E es un espacio vectorial real de dimensión finita y $p \in E$, tenemos un isomorfismo lineal natural $E \rightarrow T_p E$, que asigna a cada vector e la derivada direccional

$$D_p^e f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + te) - f(p)}{t} = \left. \frac{d(f \circ \sigma)}{dt} \right|_{t=0}, \quad \sigma(t) = p + te,$$

porque si x_1, \dots, x_n son coordenadas en una base e_1, \dots, e_n , entonces $D_p^{e_i} = (\partial_i)_p$.

Definición: Sea $\varphi: X \rightarrow Y$ una aplicación diferenciable, y $q = \varphi(p)$.

La **aplicación lineal tangente** de φ en p es la aplicación lineal

$$\varphi_*: T_p X \longrightarrow T_q Y, \quad (\varphi_* D)(f) = D(\varphi^* f) = D(f \circ \varphi).$$

De la definición se sigue la **Regla de la Cadena**: $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$.

Si las ecuaciones de φ en unos entornos coordenados de p y q son $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$, lo que significa que $\varphi^* y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$, aplicando 7.1 tenemos que

$$\varphi_*((\partial_{x_j})_p) = \sum_i (\partial_{x_j} f_i)(p) \cdot (\partial_{y_i})_q$$

y la matriz de φ_* en las bases $\{(\partial_{x_j})_p\}$ y $\{(\partial_{y_i})_q\}$ es la matriz **jacobiana**

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \right)$$

de modo que el **Teorema de la Función Inversa** puede formularse del siguiente modo:

$\varphi: X \rightarrow Y$ es difeomorfismo local en p si y sólo si $\varphi_*: T_p X \rightarrow T_q Y$ es isomorfismo.

Definición: El dual $T_p^* X$ del espacio tangente $T_p X$ es el **espacio cotangente**.

Si $f \in \mathcal{O}_p$, la **diferencial** de f en p es la 1-forma

$$(d_p f)(D) = Df, \quad D \in T_p X.$$

Sea $\varphi: X \rightarrow Y$ una aplicación diferenciable, y $q = \varphi(p)$.

La aplicación traspuesta de $\varphi_*: T_p X \rightarrow T_q Y$ se denota $\varphi^*: T_q^* Y \rightarrow T_p^* X$,

$$(\varphi^* \omega)(D) = \omega(\varphi_* D), \quad D \in T_p X.$$

1. La diferencial es una derivación:

- a) $d_p \lambda = 0, \lambda \in \mathbb{R}$.
- b) $d_p(f + g) = d_p f + d_p g$.
- c) $d_p(fg) = g(p)d_p f + f(p)d_p g$.

2. Si (x_1, \dots, x_n) es un sistema de coordenadas locales en p , las 1-formas $d_p x_1, \dots, d_p x_n$ definen una base de $T_p^* X$, que es la base dual de $(\partial_{x_1})_p, \dots, (\partial_{x_n})_p$, y

$$d_p f = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \cdot d_p x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \cdot d_p x_n.$$

3. $\varphi^*(d_q f) = d_p(\varphi^* f), f \in \mathcal{O}_{Y,q}$.

Proposición: La diferencial define un isomorfismo $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2 = T_p^* X$.

Demostración: La diferencial se anula en \mathfrak{m}_p^2 , porque $d_p(fg) = g(p)d_p f + f(p)d_p g$, y define una aplicación lineal $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2 \rightarrow T_p^* X$, que es isomorfismo porque transforma el sistema de generadores $[x_1 - a_1], \dots, [x_n - a_n]$ en la base $d_p x_1, \dots, d_p x_n$ (ver también p. 77).

Teorema: Si las diferenciales $d_p u_1, \dots, d_p u_n$ forman una base de $T_p^* X$, entonces las funciones u_1, \dots, u_n definen un sistema de coordenadas locales en p .

Demostración: Pongamos $\varphi = (u_1, \dots, u_n): X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $q = \varphi(p)$. Como $\varphi^*(d_q x_i) = d_p u_i$, por hipótesis φ^* transforma una base en una base; luego $\varphi_*: T_p X \rightarrow T_q \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo, y por el Teorema de la Función Inversa, φ es difeomorfismo local.

7.1.1. Campos Tensoriales

En adelante supondremos que las variedades diferenciables son σ -compactas.

Un **campo tangente** a X es una familia de vectores $\{D_x\}_{x \in X}$, donde $D_x \in T_x X$, y es diferenciable (lo que siempre supondremos) si para toda función $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ se tiene que $(Df)(x) = D_x f$ es diferenciable, de modo que define una derivación $D: \mathcal{C}^\infty(X) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X)$.

El $\mathcal{C}^\infty(X)$ -módulo de los campos tangentes a X se denota $\mathcal{D}(X)$.

Teorema: $\mathcal{D}(X) = \text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(X), \mathcal{C}^\infty(X))$.

Demostración: La aplicación inversa asigna a cada derivación D el campo $\{D_x\}_{x \in X}$ definido por los vectores (todo germen $f_x \in \mathcal{O}_x$ tiene un representante global, p. 158)

$$D_x f_x = (Df)(x), \quad f_x \in \mathcal{O}_x.$$

Sólo hay que ver que $(Df)(x)$ no depende del representante f .

Si $f, g \in \mathcal{C}^\infty(X)$ tienen igual germen, coinciden en un entorno U de x , y tomando (p. 158) una función $\phi \in \mathcal{C}^\infty(X)$ con soporte en U , y $\phi(x) = 1$, tendremos $\phi(f - g) = 0$,

$$0 = D(\phi(f - g)) = (D\phi)(f - g) + \phi(Df - Dg),$$

y dando valores en x vemos que $(Df)(x) = (Dg)(x)$. q.e.d.

En un abierto coordenado $(U; x_1, \dots, x_n)$, tenemos el campo ∂_i , que en cada punto x es $(\partial_i)_x$, y los campos tangentes a U son $D = \sum_i f_i \partial_i$, donde $f_i \in \mathcal{C}^\infty(U)$, pues $f_i = Dx_i$ es diferenciable cuando D lo es. *El módulo $\mathcal{D}(U)$ es libre, de base $\partial_1, \dots, \partial_n$.*

Definición: Una **1-forma** en X es una familia de 1-formas $\{\omega_x\}_{x \in X}$, donde $\omega_x \in T_x^* X$, y es diferenciable (lo que siempre supondremos) si la función $\omega(D)(x) = \omega_x(D_x)$ es diferenciable para todo $D \in \mathcal{D}(U)$, de modo que define un morfismo $\mathcal{C}^\infty(X)$ -lineal $\omega: \mathcal{D}(X) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X)$.

El $\mathcal{C}^\infty(X)$ -módulo de las 1-formas en X se denota $\Omega(X)$.

Teorema: $\Omega(X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(X)}(\mathcal{D}(X), \mathcal{C}^\infty(X))$.

Demostración: La aplicación inversa asigna a cada morfismo de módulos $\omega: \mathcal{D}(X) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X)$ la siguiente familia $\{\omega_x\}_{x \in X}$ de 1-formas,

$$\omega_x(D_x) = \omega(D)(x),$$

donde D es cualquier campo tangente a X cuyo valor en x sea D_x (en un entorno coordenado U claramente existe y, después de multiplicar por una función meseta, se puede prolongar por cero fuera de U).

Hay que probar que $\omega(D)(x)$ no depende del campo D elegido.

Si D' es otro campo y $D_x = D'_x$, basta al aplicar el siguiente lema a $D' - D$.

Lema: Si D es un campo tangente a X y $D_x = 0$, entonces $\omega(D)(x) = 0$.

Demostración: En un entorno U coordenado, $D = \sum_i f_i \partial_i$, $f_i(x) = 0$.

Sea $\phi \in \mathcal{C}^\infty(X)$ con soporte en U , y $\phi(x) = 1$.

Ahora $\phi^2 D = \sum_i (\phi f_i)(\phi \partial_i)$, donde los términos ϕf_i , $\phi \partial_i$ se extienden por 0 fuera de U , y se termina al valorar en x la igualdad

$$\phi^2 \omega(D) = \omega(\phi^2 D) = \sum_i (\phi f_i) \omega(\phi \partial_i).$$

Definición: La diferencial de $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ es la 1-forma $\{d_x f\}_{x \in X}$.

Entendida en el dual de los campos tangentes es

$$(df)(D) = Df.$$

En un abierto coordenado $(U; x_1, \dots, x_n)$, el módulo $\Omega(U)$ es libre, de base dx_1, \dots, dx_n .

Definición: Un **campo tensorial** de tipo (p, q) en X es una familia de tensores $\{T_x\}_{x \in X}$ de tipo (p, q) en $T_x X$, y es diferenciable (lo que siempre supondremos) si para todo abierto U y todo $(D^1, \dots, D^p, \omega^1, \dots, \omega^q) \in \mathcal{D}(U)^p \times \Omega(U)^q$ se tiene que $f(x) = T_x(D_x^1, \dots, D_x^p, \omega_x^1, \dots, \omega_x^q)$ es una función diferenciable en U , de modo que cada campo tensorial define una aplicación $\mathcal{C}^\infty(X)$ -multilineal $T: \mathcal{D}(X)^p \times \Omega(X)^q \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X)$.

Las operaciones con tensores (producto tensorial y exterior, contracción de índices, imágenes directas e inversas,...) se extienden punto a punto a los campos tensoriales.

Igual que en el caso de las 1-formas se prueba que *el $\mathcal{C}^\infty(X)$ -módulo $\mathcal{T}_p^q(X)$ de los campos tensoriales de tipo (p, q) en X es canónicamente isomorfo al de las aplicaciones $\mathcal{C}^\infty(X)$ -multilineales $\mathcal{D}(X)^p \times \Omega(X)^q \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X)$, y cuando $(U; x_1, \dots, x_n)$ es un abierto coordenado, $\mathcal{T}_p^q(U)$ es un $\mathcal{C}^\infty(X)$ -módulo libre, de base $dx_{i_1} \otimes \dots \otimes dx_{i_p} \otimes \partial_{j_1} \otimes \dots \otimes \partial_{j_q}$.*

Definición: En un abierto coordenado, la **diferencial exterior** de p -formas es

$$\begin{aligned} \omega_p &= \sum_{\alpha} f_{\alpha} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}, \quad \alpha = (i_1 < \dots < i_p), \\ d\omega_p &= \sum_{\alpha} df_{\alpha} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}. \end{aligned}$$

Es sencillo comprobar que es \mathbb{R} -lineal, que $d \circ d = 0$, y que es una antiderivación,

$$d(\omega_p \wedge \omega_q) = (d\omega_p) \wedge \omega_q + (-1)^p \omega_p \wedge (d\omega_q).$$

Además, probaremos por inducción sobre p que $d(df_1 \wedge \dots \wedge df_p) = 0$. Para $p = 1$, se sigue de que $d^2 = 0$, y el caso general se sigue de que la diferencial exterior es antiderivación,

$$d(df_1 \wedge \dots \wedge df_p) = (ddf_1) \wedge (df_2 \wedge \dots \wedge df_p) - df_1 \wedge d(df_2 \wedge \dots \wedge df_p) = 0 + 0 = 0.$$

Veamos ahora que esta definición no depende del sistema de coordenadas.

Si $\omega_p = \sum_{\alpha} g_{\alpha} du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_p}$, por las propiedades anteriores,

$$d\omega_p = \sum_{\alpha} dg_{\alpha} \wedge du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_p} + \sum_{\alpha} g_{\alpha} d(du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_p}) = \sum_{\alpha} dg_{\alpha} \wedge du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_p} + 0$$

y $d\omega_p$ no depende del sistema de coordenadas, de modo que la diferencial exterior de una p -forma en una variedad diferenciable X es una $(p+1)$ -forma bien definida.

Si $\Omega^p(X)$ es el módulo de las p -formas en X , y ponemos $\Omega^\bullet(X) = \bigoplus_p \Omega^p(X)$, entonces $d: \Omega^\bullet(X) \rightarrow \Omega^\bullet(X)$ es una antiderivación, y $d(d\omega_p) = 0$.

Además, para toda aplicación diferenciable $\varphi: Y \rightarrow X$ es fácil ver que $\varphi^*(d\omega_p) = d(\varphi^*\omega_p)$.

Lema: $d \circ i_D + i_D \circ d$ es una derivación del álgebra $\Omega^\bullet(X)$.

Demostración: $(di_D + i_D d)(\omega_p \wedge \omega_q) =$

$$\begin{aligned} &= d((i_D \omega_p) \wedge \omega_q + (-1)^p \omega_p \wedge i_D \omega_q) + i_D((d\omega_p) \wedge \omega_q + (-1)^p \omega_p \wedge d\omega_q) = \\ &= (di_D \omega_p) \wedge \omega_q + (-1)^{p-1} (i_D \omega_p) \wedge d\omega_q + (-1)^p (d\omega_p) \wedge i_D \omega_q + \omega_p \wedge di_D \omega_q + \\ &\quad + (i_D d\omega_p) \wedge \omega_q + (-1)^{p+1} (d\omega_p) \wedge i_D \omega_q + (-1)^p (i_D \omega_p) \wedge d\omega_q + \omega_p \wedge i_D d\omega_q = \\ &= ((di_D + i_D d)(\omega_p) \wedge \omega_q + \omega_p \wedge (di_D + i_D d)(\omega_q)). \end{aligned}$$

Teorema de Cartan: $D^L\omega_p = di_D\omega_p + i_Dd\omega_p$.

Demostración: Por el lema, basta probarlo para funciones y diferenciales de funciones.

$$\begin{aligned}(di_D + i_Dd)f &= d0 + (df)(D) = Df = D^L f, \\ (di_D + i_Dd)df &= di_Ddf + i_D0 = d(Df) = D^L(df).\end{aligned}$$

Corolario: La derivada de Lie conmuta con la diferencial exterior, $D^Ld = dD^L$.

Fórmula de Cartan: $(d\omega)(D, \bar{D}) = D(\omega(\bar{D})) - \bar{D}(\omega(D)) - \omega([D, \bar{D}])$.

Demostración: $(d\omega)(D, \bar{D}) = (i_Dd\omega)(\bar{D}) = (D^L\omega - di_D\omega)(\bar{D}) =$
 $= D(\omega(\bar{D})) - \omega([D, \bar{D}]) - d(\omega(D))(\bar{D}) = D(\omega(\bar{D})) - \omega([D, \bar{D}]) - \bar{D}(\omega(D)).$

7.1.2. Subvariedades Diferenciables

Una aplicación diferenciable $\varphi: Y \rightarrow X$ es una **inmersión local** (resp. **proyección regular**) en $q \in Y$ si $\varphi_*: T_qY \rightarrow T_pX$, $p = \varphi(q)$, es inyectiva (resp. epiyectiva).

Teorema: Si $\varphi: Y \rightarrow X$ es una inmersión local en q , existen entornos coordenados de p y q en que la aplicación es $\varphi(y_1, \dots, y_m) = (y_1, \dots, y_m, 0, \dots, 0)$.

Demostración: Sea $(U; x_1, \dots, x_n)$ un entorno coordenado de p , y $y_i = \varphi^*x_i$.

Podemos suponer que d_qy_1, \dots, d_qy_m es una base de T_q^*Y , porque $\varphi^*: T_p^*X \rightarrow T_q^*Y$ es epiyectiva. Ahora y_1, \dots, y_m son coordenadas en un entorno de q , en el que tendremos

$$y_{m+j} = f_j(y_1, \dots, y_m).$$

Tomando U pequeño, las funciones $f_j(x_1, \dots, x_m)$ estarán definidas en U , y las funciones

$$\begin{aligned}u_i &= x_i, \quad i = 1, \dots, m \\ u_{m+j} &= x_{m+j} - f_j(x_1, \dots, x_m), \quad j = 1, \dots, r,\end{aligned}$$

tienen diferenciales linealmente independientes en p . Tomando U más pequeño, son coordenadas en U , y en estas coordenadas $\varphi(y_1, \dots, y_m) = (y_1, \dots, y_m, 0, \dots, 0)$.

Teorema: Si $\varphi: Y \rightarrow X$ es una proyección regular en q , existen entornos coordenados de p y q en que la aplicación es $\varphi(y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots, y_m)$.

Demostración: Sea $(U; x_1, \dots, x_m)$ un entorno coordenado de p , y $y_i = \varphi^*x_i$.

Ahora d_qy_1, \dots, d_qy_m son linealmente independientes, porque $\varphi^*: T_p^*X \rightarrow T_q^*Y$ es inyectiva.

Si las completamos hasta una base d_qy_1, \dots, d_qy_n de T_q^*Y , tenemos que y_1, \dots, y_n son coordenadas locales en q , y en estas coordenadas $\varphi(y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots, y_m)$.

Definición: Sea Y un subespacio de una variedad diferenciable X .

Diremos que una función continua $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable si localmente coincide con funciones diferenciables de X : para cada punto $y \in Y$ existe un entorno abierto U en X y una función $F \in \mathcal{C}^\infty(U)$ tal que $F|_{U \cap Y} = f|_{U \cap Y}$.

Tenemos así un haz de funciones continuas \mathcal{C}_Y^∞ en Y , y diremos que Y es una **subvariedad** (diferenciable) de X cuando el espacio anillado $(Y, \mathcal{C}_Y^\infty)$ sea una variedad diferenciable.

Así, $Y = 0 \times \mathbb{R}^m$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, porque \mathcal{C}_Y^∞ es el haz de funciones \mathcal{C}^∞ en \mathbb{R}^m en el sentido usual.

Lema: Si Y una subvariedad de X , la inclusión $i: Y \rightarrow X$ es una inmersión local.

Demostración: El morfismo de restricción $i^*: \mathcal{O}_{X,q} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,q}$ es epiyectivo por definición; luego $i_*: \text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_{Y,q}, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_{X,q}, \mathbb{R})$ es inyectivo.

Teorema: Sea $Y = \{x \in X: f_1(x) = \dots = f_r(x) = 0\}$; $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{C}^\infty(X)$. Si las diferenciales $d_p f_1, \dots, d_p f_r$ son linealmente independientes en todo punto p de Y , entonces Y es una subvariedad de X de codimensión r , y su espacio tangente en p es

$$T_p Y = \langle d_p f_1, \dots, d_p f_r \rangle^\circ.$$

Demostración: Si completamos las diferenciales hasta obtener una base $d_p f_1, \dots, d_p f_n$ de $T_p^* X$, entonces $\varphi = (f_1, \dots, f_n): U \rightarrow \mathbb{R}^n$ define un difeomorfismo de U con un abierto U' de \mathbb{R}^n , y un isomorfismo de espacios anillados de $U \cap Y$ (con su haz $\mathcal{C}_{U \cap Y}^\infty$) con el abierto $\varphi(U \cap Y) = U' \cap (0 \times \mathbb{R}^{n-r})$ de $0 \times \mathbb{R}^{n-r}$. Luego Y es una variedad de codimensión r .

Además, si $D \in T_p Y$, entonces $(df_j)(i_* D) = (i_* D)f_j = D(f_j \circ i) = D(0) = 0$; de modo que $T_p Y \subseteq \langle d_p f_1, \dots, d_p f_r \rangle^\circ$, y coinciden porque ambos tienen dimensión $n - r$.

Teorema: Si Y es una subvariedad de X de codimensión r , cada punto $q \in Y$ admite un entorno coordenado $(U; u_1, \dots, u_n)$ en X tal que

$$U \cap Y = \{x \in U: u_1(x) = \dots = u_r(x) = 0\}.$$

Demostración: Como la inclusión $i: Y \rightarrow X$ es una inmersión local, existe un entorno coordenado $(V; y_1, \dots, y_m)$ de q en Y , y un entorno coordenado $(U; u_1, \dots, u_n)$ de q en X , en los que $i(y_1, \dots, y_m) = (y_1, \dots, y_m, 0, \dots, 0)$; luego $y_i = u_i|_Y$.

Como Y es un subespacio de X , tomando U más pequeño, tendremos que $V = U \cap Y$.

Es decir, podemos suponer que U es un abierto de \mathbb{R}^n , y que $U \cap Y = V \times 0$, donde V es un abierto de \mathbb{R}^m , caso en que el enunciado es evidente.

Corolario: Toda subvariedad es un subespacio localmente cerrado.

7.2. Conexiones Lineales

Dar una **derivación covariante** o **conexión lineal** en una variedad X es asignar a cada par de campos tangentes D_1, D_2 otro campo tangente $D_1^\nabla D_2$ de modo que

1. $D^\nabla(D_1 + D_2) = D^\nabla D_1 + D^\nabla D_2$,
 $D^\nabla(f\bar{D}) = (Df)\bar{D} + fD^\nabla \bar{D}$.
2. $(D_1 + D_2)^\nabla D = D_1^\nabla D + D_2^\nabla D$,
 $(fD)^\nabla \bar{D} = f(D^\nabla \bar{D})$.

Lema: ∇ se extiende de modo único a una derivación de tensores que conserva el tipo y

1. $D^\nabla f = Df$.
2. $D^\nabla(C_i^j T) = C_i^j(D^\nabla T)$.

Demostración: Para la unicidad, derivando $\omega(\bar{D}) = C_1^1(\omega \otimes \bar{D})$ vemos que

$$(D^\nabla \omega)(\bar{D}) = D(\omega(D)) - \omega(D^\nabla \bar{D})$$

y derivando $T(D_1, \dots, \omega_q) = C_1^1 \dots C_1^1(D_1 \otimes \dots \otimes D_p \otimes T \otimes \omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_q)$, vemos que

$$(D^\nabla T)(D_1, \dots, \omega_q) = D(T(D_1, \dots, \omega_q)) - T(D^\nabla D_1, \dots, \omega_q) - \dots - T(D_1, \dots, D^\nabla \omega_q).$$

En cuanto a la existencia, basta tomar estas fórmulas como definición.

Definición: La **diferencial covariante** ∇T de un tensor (p, q) es el tensor $(p+1, q)$

$$(\nabla T)(D, D_1, \dots, D_p, \omega_1, \dots, \omega_q) = (D^\nabla T)(D_1, \dots, D_p, \omega_1, \dots, \omega_q).$$

y diremos que T es **paralelo** o constante cuando $\nabla T = 0$, de modo que $D^\nabla T = 0$.

Lema: Si D ó \bar{D} se anula en un abierto U , también $D^\nabla \bar{D}$.

Demostración: Tomemos $x \in U$, $\phi \in C^\infty(X)$ con soporte en U , y $\phi(x) = 1$.

Si $\phi \bar{D} = 0$, $0 = D^\nabla(\phi \bar{D}) = (D\phi)\bar{D} + \phi(D^\nabla \bar{D})$, y $0 = \lambda \bar{D}_x + (D^\nabla \bar{D})_x = (D^\nabla \bar{D})_x$.

Si $\phi D = 0$, $0 = (\phi D)^\nabla \bar{D} = \phi(D^\nabla \bar{D})$, y $(D^\nabla \bar{D})_x = 0$.

q.e.d.

Este lema muestra que ∇ induce una conexión lineal en cada abierto U de X , de modo que

$$(D^\nabla \bar{D})|_U = (D|_U)^\nabla (\bar{D}|_U).$$

Ahora, en cada abierto coordinado $(U; x_1, \dots, x_n)$ la conexión ∇ vendrá dada por sus **símbolos de Christoffel** $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U)$,

$$\partial_i^\nabla \partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

Ejemplo: En cada espacio vectorial real de dimensión finita E existe una única conexión lineal ∇ tal que los campos D^e que definen (p. 182) los vectores $e \in E$ son paralelos, $D^\nabla(D^e) = 0$.

La unicidad es obvia, y para la existencia, basta considerar la conexión con símbolos de Christoffel nulos en el sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_n) que define una base de E ,

$$D^\nabla(f_1 \partial_1 + \dots + f_n \partial_n) = (Df_1) \partial_1 + \dots + (Df_n) \partial_n.$$

Definición: Un **campo tangente** a X con soporte en una curva diferenciable $\sigma: I \rightarrow X$ es una familia de vectores $\{D_t\}_{t \in I}$, donde $D_t \in T_{\sigma(t)}X$, y es diferenciable (lo que supondremos siempre) si la función $(Df)(t) = D_t f$ es diferenciable para toda función diferenciable f en un abierto de X , de modo que define una derivación $D: C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(I)$.

El $C^\infty(I)$ -módulo de los campos con soporte en σ se denotará $\mathcal{D}_\sigma = \text{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(X), C^\infty(I))$.

Todo campo tangente T en I define un campo tangente con soporte en σ

$$\sigma_*(T_t): C^\infty(X) \xrightarrow{\sigma^*} C^\infty(I) \xrightarrow{T} C^\infty(I),$$

y todo campo tangente D en X también define un campo tangente con soporte en σ

$$D_t = D_{\sigma(t)}: C^\infty(X) \xrightarrow{D} C^\infty(X) \xrightarrow{\sigma^*} C^\infty(I).$$

En un abierto coordinado, todo campo con soporte es $D_t = \sum_i f_i(t) \partial_i$.

Lema: Dada una conexión ∇ , el vector $(D^\nabla \bar{D})_p$ sólo depende de D_p y del valor de \bar{D} a lo largo de una curva tangente a D_p .

Demostración: En un entorno coordenado, $D = \sum_i f_i \partial_i$, $\bar{D} = \sum_j g_j \partial_j$.

$$D^\nabla \bar{D} = \sum_j (Dg_j) \partial_j + \sum_j g_j D^\nabla \partial_j = \sum_j (Dg_j) \partial_j + \sum_{i,j,k} g_j f_i \Gamma_{ij}^k \partial_k,$$

$$(D^\nabla \bar{D})_p = \sum_j (D_p g_j) (\partial_j)_p + \sum_{i,j,k} g_j(p) f_i(p) \Gamma_{ij}^k(p) (\partial_k)_p,$$

y $(D^\nabla \bar{D})_p$ está determinado por los valores $f_i(p)$, es decir D_p , los valores $g_j(p)$, es decir \bar{D}_p , y los valores $D_p g_j$, que dependen sólo de los valores de g_j en una curva tangente a D_p . q.e.d.

Si T es un campo tangente a un intervalo I , y D es un campo tangente a X , este lema afirma que $T^\nabla D$ está bien definido como campo a soporte en la curva $\sigma: I \rightarrow X$.

Lema: Existe una única forma de extender $\partial_t^\nabla: \mathcal{D}(X) \rightarrow \mathcal{D}_\sigma$ a una derivación covariante de campos con soporte $\partial_t^\nabla: \mathcal{D}_\sigma \rightarrow \mathcal{D}_\sigma$,

$$\partial_t^\nabla (D + D') = \partial_t^\nabla D + \partial_t^\nabla D',$$

$$\partial_t^\nabla (f(t)D) = f'(t)D + f(t)(\partial_t^\nabla D), \quad f \in \mathcal{C}^\infty(I).$$

Demostración: Localmente $\sigma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, y la única extensión posible es

$$\partial_t^\nabla \left(\sum_i f_i(t) \partial_i \right) = \sum_i (f_i'(t) \partial_i + f_i(t) \partial_t^\nabla \partial_i) = \sum_i f_i'(t) \partial_i + \sum_i f_i(t) \left(\sum_{j,k} x_j'(t) \Gamma_{ji}^k(\sigma(t)) \partial_k \right)$$

Definición: Un campo D con soporte en una curva σ es **paralelo** si $\partial_t^\nabla D = 0$, y la curva es una **geodésica** de ∇ si su vector tangente es paralelo, $\partial_t^\nabla \partial_t = 0$.

Teorema: Fijada una curva $\sigma: I \rightarrow X$ y un vector $D_p \in T_p X$, $p = \sigma(t_0)$, existe un único campo paralelo D con soporte en σ tal que $D_{t_0} = D_p$.

Demostración: En un abierto coordenado, $\partial_t^\nabla \partial_i = \sum_j h_{ij}(t) \partial_j$.

La condición de que un campo a soporte $D = \sum_i f_i(t) \partial_i$ sea paralelo,

$$0 = \partial_t^\nabla D = \sum_i f_i'(t) \partial_i + \sum_{i,j} h_{ij}(t) f_i(t) \partial_j,$$

es que las funciones f_i definan una solución de la ecuación diferencial lineal

$$f_i' = - \sum_j h_{ji}(t) f_j,$$

con condición inicial $f_i(t_0) = a_i$ cuando $D_p = \sum_i a_i \partial_i$.

Por tanto (p. 161), el traslado paralelo de D_p , luego de una base de $T_p X$, existe y es único en un entorno de t_0 .

Como este traslado paralelo es lineal, en ese entorno está definido el de todos los vectores de $T_p X$. Ahora está claro que el traslado paralelo puede realizarse en todo el intervalo I . q.e.d.

Este **traslado paralelo** de vectores $T_{\sigma(t_0)} X \rightarrow T_{\sigma(t)} X$ es un isomorfismo lineal que depende de la curva σ que conecte el punto $\sigma(t_0)$ con $\sigma(t)$.

Teorema: Fijado $D_p \in T_p X$, existe una geodésica $\sigma: I \rightarrow X$ que en $t = 0$ pasa por p con tangente D_p , y dos de tales geodésicas coinciden en el intervalo común de definición.

Demostración: En un abierto coordenado, $\sigma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ es geodésica si

$$\begin{aligned}\partial_t &= x'_1(t)\partial_1 + \dots + x'_n(t)\partial_n, \\ \partial_t^\nabla \partial_t &= \sum_i x''_i(t)\partial_i + \sum_{i,j,k} x'_i(t)x'_j(t)\Gamma_{ij}^k \partial_k = 0, \\ x''_k(t) &= -\sum_{i,j,k} x'_i(t)x'_j(t)\Gamma_{ij}^k(x_1(t), \dots, x_n(t)),\end{aligned}$$

y concluimos por la existencia y unicidad de solución de una ecuación diferencial (p.161).

7.2.1. Torsión y Curvatura

La **torsión** de una conexión lineal ∇ es el tensor de tipo $(2, 1)$

$$\text{Tor}_\nabla(D_1, D_2) = D_1^\nabla D_2 - D_2^\nabla D_1 - [D_1, D_2]$$

y ∇ es **simétrica** si su torsión es nula, $[D_1, D_2] = D_1^\nabla D_2 - D_2^\nabla D_1$; es decir, $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Como $\text{Tor}_\nabla(D, D) = 0$, basta ver que la torsión es $\mathcal{C}^\infty(X)$ -lineal en el primer índice,

$$\begin{aligned}\text{Tor}_\nabla(fD_1, D_2) &= fD_1^\nabla D_2 - (D_2f)D_1 - fD_2^\nabla D_1 + [D_2, fD_1] \\ &= fD_1^\nabla D_2 - (D_2f)D_1 - fD_2^\nabla D_1 + (D_2f)D_1 + f[D_2, D_1] \\ &= fD_1^\nabla D_2 - fD_2^\nabla D_1 - f[D_1, D_2] = f\text{Tor}_\nabla(D_1, D_2).\end{aligned}$$

La **curvatura** de ∇ es el tensor de tipo $(3, 1)$, alternado en los dos primeros índices,

$$R(D_1, D_2, D_3) = D_1^\nabla D_2^\nabla D_3 - D_2^\nabla D_1^\nabla D_3 - [D_1, D_2]^\nabla D_3,$$

Veamos, por ejemplo, que es $\mathcal{C}^\infty(X)$ -lineal en el tercero,

$$\begin{aligned}R(D_1, D_2, fD_3) &= D_1^\nabla((D_2f)D_3 + fD_2^\nabla D_3) - D_2^\nabla((D_1f)D_3 + fD_1^\nabla D_3) \\ &\quad - ([D_1, D_2]f)D_3 - f[D_1, D_2]^\nabla D_3 = \\ &= (D_1D_2f)D_3 + (D_2f)D_1^\nabla D_3 + (D_1f)D_2^\nabla D_3 + fD_1^\nabla D_2^\nabla D_3 \\ &\quad - (D_2D_1f)D_3 - (D_1f)D_2^\nabla D_3 - (D_2f)D_1^\nabla D_3 - fD_2^\nabla D_1^\nabla D_3 \\ &\quad - (D_1D_2f)D_3 + (D_2D_1f)D_3 - f[D_1, D_2]^\nabla D_3 = \\ &= fD_1^\nabla D_2^\nabla D_3 - fD_2^\nabla D_1^\nabla D_3 - f[D_1, D_2]^\nabla D_3 = fR(D_1, D_2, D_3).\end{aligned}$$

Decimos que ∇ es **plana** si localmente admite una base de campos D_1, \dots, D_n paralelos, $D_i^\nabla D_j = 0$; y que es **localmente euclídea** si cada punto admite un entorno coordenado en que los símbolos de Christoffel son nulos, $\partial_i^\nabla \partial_j = 0$.

Teorema: ∇ es plana si y sólo si su tensor de curvatura R es nulo.

Demostración: Si es plana, $R(D_i, D_j, D_k) = D_i^\nabla D_j^\nabla D_k - D_j^\nabla D_i^\nabla D_k - [D_i, D_j]^\nabla D_k = 0$, porque $D^\nabla D_k = 0$ para todo campo D ; luego $R = 0$.

Recíprocamente, si $R = 0$, podemos suponer que estamos en el origen de \mathbb{R}^n .

Tomamos un vector en el origen D_0 , y lo prolongamos paralelamente a lo largo del eje OX_1 ; luego en las rectas paralelas a OX_2 , y tenemos el campo en el plano OX_1X_2 , etc. Este campo D es diferenciable (las soluciones de una ecuación diferencial dependen diferenciablemente de las condiciones iniciales, p. 163) y $\partial_1^\nabla D = 0$ en OX_1 , $\partial_2^\nabla D = 0$ en OX_1X_2 , \dots , $\partial_n^\nabla D = 0$ en \mathbb{R}^n .

Veamos, por inducción descendente, que $\partial_r^\nabla D = 0$.

Si $\partial_{r+1}^\nabla D = \dots = \partial_n^\nabla D = 0$,

$$0 = R(\partial_{r+1}, \partial_r, D) = \partial_{r+1}^\nabla \partial_r^\nabla D - \partial_r^\nabla \partial_{r+1}^\nabla D = \partial_{r+1}^\nabla \partial_r^\nabla D,$$

lo que muestra que $\partial_r^\nabla D$ es paralelo a lo largo de las rectas paralelas a OX_{r+1} .

Como es nulo en la subvariedad $OX_1 \dots X_r$, se anula en $OX_1 \dots X_{r+1}$.

Repitiendo el argumento con la igualdad $R(\partial_{r+2}, \partial_r, D) = 0$ obtenemos que se anula en $OX_1 \dots X_{r+2}$, hasta llegar a que $\partial_r^\nabla D = 0$ en todo \mathbb{R}^n . El campo D es paralelo.

Repitiendo el argumento con una base de vectores en el origen, obtenemos una base de campos paralelos.

Corolario: ∇ es localmente euclídea si y sólo si $R = 0$ y $\text{Tor}_\nabla = 0$.

Demostración: Si ∇ es localmente euclídea, es claro que $R = 0$ y $\text{Tor}_\nabla = 0$.

Recíprocamente, si $R = 0$, localmente admite una base de campos paralelos D_1, \dots, D_n .

Si además la torsión es nula, $[D_i, D_j] = D_i^\nabla D_j - D_j^\nabla D_i = 0$, y existen sistemas de coordenadas locales en que $D_i = \partial_i$ (p. 174). Ahora $\partial_i^\nabla \partial_j = D_i^\nabla D_j = 0$.

Interpretación Física de la Curvatura: Sea D un campo geodésico, $D^\nabla D = 0$, cuyas curvas integrales interpretamos como trayectorias de móviles que se mueven inercialmente, sin fuerzas que actúen sobre ellos. La posición aparente de los móviles próximos a uno dado ha de representarse por un campo E tal que $D^L E = 0$, su velocidad relativa por $D^\nabla E$ y su aceleración relativa por $D^\nabla D^\nabla E$. Si ∇ es simétrica, en ausencia de fuerzas, la curvatura se manifiesta por una aceleración relativa no nula

$$R(D, E, D) = D^\nabla E^\nabla D - E^\nabla D^\nabla D - [D, E]^\nabla D = D^\nabla E^\nabla D = D^\nabla D^\nabla E.$$

Identidad de Bianchi: Si la torsión es nula,

$$R(D_1, D_2, D_3) + R(D_2, D_3, D_1) + R(D_3, D_1, D_2) = 0.$$

Demostración: Como R es un tensor, basta ver la igualdad en cada punto, así que podemos suponer que $[D_i, D_j] = 0$,

$$\begin{aligned} D_1^\nabla D_2^\nabla D_3 - D_2^\nabla D_1^\nabla D_3 + D_2^\nabla D_3^\nabla D_1 - D_3^\nabla D_2^\nabla D_1 + D_3^\nabla D_1^\nabla D_2 - D_1^\nabla D_3^\nabla D_2 = \\ = D_1^\nabla (D_2^\nabla D_3 - D_3^\nabla D_2) + D_2^\nabla (D_3^\nabla D_1 - D_1^\nabla D_3) + D_3^\nabla (D_1^\nabla D_2 - D_2^\nabla D_1) = 0. \end{aligned}$$

Diferencia de Conexiones: La diferencia $T(D_1, D_2) = D_1^{\bar{\nabla}} D_2 - D_1^\nabla D_2$ de dos conexiones lineales $\bar{\nabla}, \nabla$ es un tensor de tipo (2,1). En D_1 es obvio, y

$$T(D_1, fD_2) = (D_1 f)D_2 + D_1^{\bar{\nabla}} D_2 - (D_1 f)D_2 - D_1^\nabla D_2 = fT(D_1, D_2).$$

1. $\bar{\nabla}$ y ∇ tienen las mismas geodésicas $\Leftrightarrow T$ es hemisimétrico.

En una geodésica común, tenemos que $T(D_p, D_p) = (D^{\bar{\nabla}} D)_p - (D^\nabla D)_p = 0$.

Si T es alternado y $D^\nabla D = 0$, también $D^{\bar{\nabla}} D = T(D, D) + D^\nabla D = 0$.

2. Si $\bar{\nabla}$ y ∇ tienen las mismas geodésicas y tensores de torsión, son iguales.

Si T es alternado, y la torsión coincide, basta sumar las igualdades

$$\begin{aligned} 0 &= (D_1^{\bar{\nabla}} D_2 - D_1^\nabla D_2) + (D_2^{\bar{\nabla}} D_1 - D_2^\nabla D_1) \\ 0 &= (D_1^{\bar{\nabla}} D_2 - D_2^{\bar{\nabla}} D_1) - (D_1^\nabla D_2 - D_2^\nabla D_1) \end{aligned}$$

3. Existe una única conexión simétrica que tiene las mismas geodésicas que ∇ .

La unicidad se sigue de lo anterior. Para la existencia, tomemos el tensor de torsión Tor_∇ y la conexión $D_1^{\bar{\nabla}} D_2 = D_1^\nabla D_2 - \frac{1}{2} \text{Tor}_\nabla(D_1, D_2)$.

Como $-\frac{1}{2} \text{Tor}_\nabla$ es alternado, $\bar{\nabla}$ tiene las mismas geodésicas que ∇ , y es simétrica,

$$D_1^{\bar{\nabla}} D_2 - D_2^{\bar{\nabla}} D_1 - [D_1, D_2] = D_1^\nabla D_2 - D_2^\nabla D_1 - [D_1, D_2] - \text{Tor}(D_1, D_2) = 0.$$

7.3. Métricas Riemannianas

Una **variedad riemanniana** es una variedad diferenciable X con un tensor covariante de orden 2 simétrico g definido-positivo en todo punto. Pondremos $D \cdot \bar{D} = g(D, \bar{D})$.

Una métrica riemanniana es **localmente euclídea** si cada punto admite un entorno coordinado en que $g = \sum_i dx_i \otimes dx_i$ (es decir, $g_{ij} = \partial_i \cdot \partial_j = \delta_{ij}$).

Proposición: Toda variedad diferenciable X admite una métrica riemanniana g .

Demostración: Sea $X = \bigcup_i U_i$ un recubrimiento por abiertos coordinados, $\{\phi_i\}$ una partición de la unidad subordinada, y fijemos en cada abierto U_i una métrica riemanniana g_i .

La métrica $g = \sum_i \phi_i g_i$ es definido-positiva: si $0 \neq D \in T_x X$, entonces $0 < \sum_i \phi_i(x) g_i(D, D)$ porque algún sumando es positivo y ninguno es negativo.

Teorema: Si g es una métrica riemanniana, existe una única conexión lineal simétrica ∇ (la **conexión de Levi-Civita**) tal que $\nabla g = 0$.

Demostración: La condición $\nabla g = 0$ significa que la conexión deriva el producto escalar,

$$D(D_1 \cdot D_2) = (D^\nabla D_1) \cdot D_2 + D_1 \cdot (D^\nabla D_2),$$

lo que permite escribir ∇ en cualquier abierto coordinado en función de g ,

$$\begin{aligned} \partial_i(\partial_j \cdot \partial_k) &= (\partial_i^\nabla \partial_j) \cdot \partial_k + \partial_j \cdot (\partial_i^\nabla \partial_k) \\ \partial_k(\partial_i \cdot \partial_j) &= (\partial_k^\nabla \partial_i) \cdot \partial_j + \partial_i \cdot (\partial_k^\nabla \partial_j) \\ \partial_j(\partial_k \cdot \partial_i) &= (\partial_j^\nabla \partial_k) \cdot \partial_i + \partial_k \cdot (\partial_j^\nabla \partial_i) \end{aligned}$$

Sumándolas con signos alternos, y usando que $0 = [\partial_i, \partial_j] = \partial_i^\nabla \partial_j - \partial_j^\nabla \partial_i$,

$$(*) \quad 2(\partial_i^\nabla \partial_j) \cdot \partial_k = \partial_i(\partial_j \cdot \partial_k) - \partial_k(\partial_i \cdot \partial_j) + \partial_j(\partial_k \cdot \partial_i).$$

Como g es no singular, esta igualdad determina $\partial_i^\nabla \partial_j$, lo que prueba la unicidad de ∇ .

En cuanto a la existencia, se define en los abiertos coordinados por la igualdad anterior, y se comprueba fácilmente que es una conexión simétrica, y que $\nabla g = 0$. La unicidad muestra que esta definición no depende de coordenadas, y tenemos una conexión globalmente definida.

Nota: Si ponemos $g_{ij} = \partial_i \cdot \partial_j$ y (g^{ij}) denota la matriz inversa de (g_{ij}) , la igualdad (*) permite expresar los símbolos de Christoffel de ∇ en términos de la métrica g ,

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_h g^{kh} \left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_h} + \frac{\partial g_{hi}}{\partial x_j} \right).$$

Corolario: Las geodésicas tienen módulo constante.

Demostración: $\partial_t(\partial_t \cdot \partial_t) = (\partial_t^\nabla \partial_t) \cdot \partial_t + \partial_t \cdot (\partial_t^\nabla \partial_t) = 0 \cdot \partial_t + \partial_t \cdot 0 = 0$.

Teorema: Una métrica g es localmente euclídea si y sólo si su tensor de curvatura R es nulo.

Demostración: Si $g = \sum_i dx_i \otimes dx_i$, su conexión de Levi-Civita es $\Gamma_{ij}^k = 0$, y $R = 0$.

Recíprocamente, si $R = 0$, cada punto p tiene un entorno con una base de campos paralelos (D_1, \dots, D_n) , y podemos suponer que forman base ortonormal en p .

Forman base ortonormal en todo un entorno porque las funciones $D_i \cdot D_j$ son localmente constantes,

$$D_k(D_i \cdot D_j) = (D_k^\nabla D_i) \cdot D_j + D_i \cdot (D_k^\nabla D_j) = 0 + 0 = 0.$$

Además $[D_i, D_j] = D_i^\nabla D_j - D_j^\nabla D_i = 0$, y en un entorno coordinado tendremos $D_i = \partial_i$ (p. 174), de modo que $g_{ij} = D_i \cdot D_j = \delta_{ij}$.

Definición: El tensor de Riemann-Christoffel de una métrica riemanniana g es

$$R_{2,2}(D_1, D_2; D_3, D_4) = R(D_1, D_2, D_4) \cdot D_3.$$

Teorema: 1. $R_{2,2}(D_2, D_1; D_3, D_4) = -R_{2,2}(D_1, D_2; D_3, D_4)$.

2. $R_{2,2}(D_1, D_2; D_4, D_3) = -R_{2,2}(D_1, D_2; D_3, D_4)$.

3. $R_{2,2}(D_3, D_4; D_1, D_2) = R_{2,2}(D_1, D_2; D_3, D_4)$.

4. La suma circular en tres índices, dejando fijo el cuarto, es nula.

Demostración: La primera se debe a que R es alternado en sus dos primeros índices.

Para la segunda, como $R_{2,2}$ es un tensor, podemos suponer que $[D_i, D_j] = 0$,

$$\begin{aligned} 0 &= [D_1, D_2](D_3 \cdot D_4) = (D_1 D_2 - D_2 D_1)(D_3 \cdot D_4) = \\ &= D_1(D_2^\nabla D_3 \cdot D_4 + D_3 \cdot D_2^\nabla D_4) - D_2(D_1^\nabla D_3 \cdot D_4 + D_3 \cdot D_1^\nabla D_4) = \\ &= D_1^\nabla D_2^\nabla D_3 \cdot D_4 + D_2^\nabla D_3 \cdot D_1^\nabla D_4 + D_1^\nabla D_3 \cdot D_2^\nabla D_4 + D_3 \cdot D_1^\nabla D_2^\nabla D_4 \\ &\quad - D_2^\nabla D_1^\nabla D_3 \cdot D_4 - D_2^\nabla D_3 \cdot D_1^\nabla D_4 - D_1^\nabla D_3 \cdot D_2^\nabla D_4 - D_3 \cdot D_2^\nabla D_1^\nabla D_4 = \\ &= R_{2,2}(D_1, D_2; D_4, D_3) + R_{2,2}(D_1, D_2; D_3, D_4). \end{aligned}$$

La identidad de Bianchi afirma que la suma circular, dejando fijo el tercer índice, es nula (luego también dejando fijo cualquier otro, una vez probada la propiedad 3, porque las permutaciones que dejan invariante $R_{2,2}$ pasan el tercer índice a cualquier otro),

$$\begin{aligned} R_{2,2}(D_1, D_3; D_2, D_4) + R_{2,2}(D_4, D_1; D_2, D_3) + R_{2,2}(D_3, D_4; D_2, D_1) &= 0 \\ R_{2,2}(D_2, D_4; D_3, D_1) + R_{2,2}(D_4, D_1; D_3, D_2) + R_{2,2}(D_1, D_2; D_3, D_4) &= 0 \\ R_{2,2}(D_2, D_4; D_1, D_3) + R_{2,2}(D_3, D_2; D_1, D_4) + R_{2,2}(D_4, D_3; D_1, D_2) &= 0 \\ R_{2,2}(D_1, D_3; D_4, D_2) + R_{2,2}(D_3, D_2; D_4, D_1) + R_{2,2}(D_2, D_1; D_4, D_3) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando, y usando las 2 propiedades anteriores, se cancelan las dos primeras columnas y obtenemos que $R_{2,2}(D_1, D_2; D_3, D_4) = -R_{2,2}(D_3, D_4; D_2, D_1) = R_{2,2}(D_3, D_4; D_1, D_2)$.

Curvaturas Seccionales: $R_{2,2}$ puede verse como una métrica simétrica en $\Lambda^2 T_p X$,

$$R_{2,2}(D_1 \wedge D_2, D_3 \wedge D_4) = R_{2,2}(D_1, D_2; D_3, D_4),$$

donde también tenemos la métrica $\Lambda^2 g$ que induce (p. 54) la métrica riemanniana g ,

$$(\Lambda^2 g)(D_1 \wedge D_2, D_3 \wedge D_4) = (D_1 \cdot D_3)(D_2 \cdot D_4) - (D_1 \cdot D_4)(D_2 \cdot D_3).$$

Si $\Pi \subseteq T_p X$ es un plano, $\dim \Lambda^2 \Pi = 1$, y en él ambas métricas son proporcionales, con un factor K_Π , la **curvatura seccional** de Π . Si D_1, D_2 es una base de Π ,

$$K_\Pi = \frac{R_{2,2}(D_1, D_2; D_1, D_2)}{(D_1 \cdot D_1)(D_2 \cdot D_2) - (D_1 \cdot D_2)^2}.$$

Si no depende de Π ni del punto, g es de **curvatura constante**. Un ejemplo es

$$g = \frac{4 \sum_i dx_i^2}{(1 + K \sum_i x_i^2)^2}.$$

En las superficies, la única curvatura seccional es la **curvatura** K de la superficie en el punto, y determina el tensor $R_{2,2}$: *Una superficie riemanniana es localmente euclídea si y sólo si su curvatura K es nula en todo punto.*

7.3.1. Inmersiones Riemannianas

Sea (X, g) una variedad riemanniana, \bar{X} una subvariedad, y \bar{g} la restricción de g a \bar{X} .

Pongamos $T_p X = T_p \bar{X} \perp N_p$. Si D_1, D_2 son campos tangentes a \bar{X} , en general $D_1^\nabla D_2$ tiene una componente tangencial $D_1^{\bar{\nabla}} D_2$, y otra normal $\Phi(D_1, D_2) = (D_1^{\bar{\nabla}} D_2)^\perp$,

$$D_1^\nabla D_2 = D_1^{\bar{\nabla}} D_2 + \Phi(D_1, D_2).$$

Teorema: $\bar{\nabla}$ es la conexión de Levi-Civita de \bar{g} , y Φ es $C^\infty(\bar{X})$ -bilineal y simétrica (luego define aplicaciones bilineales simétricas $\Phi_p: T_p \bar{X} \times T_p \bar{X} \rightarrow N_p$).

Demostración: Que $\bar{\nabla}$ es una conexión simétrica y $D(D_1 \cdot D_2) = (D^{\bar{\nabla}} D_1) \cdot D_2 + D_1 \cdot (D^{\bar{\nabla}} D_2)$ se prueba proyectando ortogonalmente sobre $T_p \bar{X}$ las correspondientes propiedades de ∇ , usando que $[D_1, D_2]$ es tangente a \bar{X} cuando D_1, D_2 lo son.

Además Φ es simétrica y bilineal,

$$\begin{aligned} 0 &= D_1^\nabla D_2 - D_2^\nabla D_1 - [D_1, D_2] \\ &= D_1^{\bar{\nabla}} D_2 + \Phi(D_1, D_2) - D_2^{\bar{\nabla}} D_1 - \Phi(D_2, D_1) - [D_1, D_2] \\ &= \Phi(D_1, D_2) - \Phi(D_2, D_1), \\ \Phi(fD_1, D_2) &= (fD_1^{\bar{\nabla}} D_2)^\perp = f(D_1^{\bar{\nabla}} D_2)^\perp = f\Phi(D_1, D_2). \end{aligned}$$

Fórmula de Weingarten: $\Phi(D_1, D_2) \cdot N = -(D_1^{\bar{\nabla}} N) \cdot D_2$; donde N es normal a \bar{X} .

Demostración: $\Phi(D_1, D_2) \cdot N = (D_1^{\bar{\nabla}} D_2) \cdot N = D_1(D_2 \cdot N) - D_2 \cdot (D_1^{\bar{\nabla}} N)$.

Ecuación de Gauss: Si R y \bar{R} son los tensores de Riemann-Christoffel de X y \bar{X} ,

$$\bar{R}(D_1, D_2; D_3, D_4) = R(D_1, D_2; D_3, D_4) + \Phi(D_1, D_3) \cdot \Phi(D_2, D_4) - \Phi(D_1, D_4) \cdot \Phi(D_2, D_3)$$

Demostración: Como R, \bar{R} y $\Phi \cdot \Phi$ son tensores, podemos suponer que $[D_i, D_j] = 0$.

$$\begin{aligned} R(D_1, D_2; D_3, D_4) &= (D_1^{\bar{\nabla}} D_2^{\bar{\nabla}} D_4 - D_2^{\bar{\nabla}} D_1^{\bar{\nabla}} D_4) \cdot D_3 \\ &= [D_1^{\bar{\nabla}} D_2^{\bar{\nabla}} D_4 - D_2^{\bar{\nabla}} D_1^{\bar{\nabla}} D_4 + D_1^{\bar{\nabla}}(\Phi(D_2, D_4)) - D_2^{\bar{\nabla}}(\Phi(D_1, D_4))] \cdot D_3 \\ &= \bar{R}(D_1, D_2; D_3, D_4) - \Phi(D_1, D_3) \cdot \Phi(D_2, D_4) + \Phi(D_2, D_3) \cdot \Phi(D_1, D_4). \end{aligned}$$

7.3.2. Curvas e Hipersuperficies

En el caso de una curva de vector tangente unitario T , el módulo de $T^\nabla T$ es la **curvatura** de la curva, $\kappa = |T^\nabla T|$, y se anula precisamente cuando la curva es una geodésica.

Si la curva está en la subvariedad \bar{X} , tiene también una **curvatura geodésica** $\kappa_g = |T^{\bar{\nabla}} T|$, y una **curvatura normal** $\kappa_n = |\Phi(T, T)|$,

$$\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2.$$

El carácter tensorial de Φ es el **Teorema de Meusnier**:

Todas las curvas tangentes en un punto a la misma dirección, tienen igual curvatura normal.

Si la curva está en un espacio euclídeo orientado de dimensión 3, y su curvatura no se anula en ningún punto, la **normal principal** $N = \frac{1}{\kappa} T^\nabla T$ es ortogonal a T ,

$$0 = T(T \cdot T) = (T^\nabla T) \cdot T + T \cdot (T^\nabla T) = 2(T^\nabla T) \cdot T = 2\kappa(N \cdot T);$$

y en cada punto de la curva tenemos bien definida la **binormal** B , de modo que (T, N, B) es una base ortonormal orientada. La **torsión** de la curva es $\tau = (T^\nabla N) \cdot B$.

$$\text{Fórmulas de Frénet: } \begin{cases} T^\nabla T = \kappa N \\ T^\nabla N = -\kappa T + \tau B \\ T^\nabla B = -\tau N \end{cases}$$

Demostración: La primera es la definición de N . En cuanto a la segunda,

$$(T^\nabla N) \cdot T = T(N \cdot T) - N \cdot (T^\nabla T) = -N \cdot (\kappa N) = -\kappa.$$

Ahora, derivando con T la igualdad $B \cdot T = 0$, vemos que $(T^\nabla B) \cdot T = 0$.

Derivando $B \cdot N = 0$, vemos que $(T^\nabla B) \cdot N = -\tau$.

Derivando $B \cdot B = 1$, vemos que $(T^\nabla B) \cdot B = 0$.

Teorema: *Dada una base ortonormal orientada (T_p, N_p, B_p) en $p \in \mathbb{R}^3$, y funciones diferenciables $\kappa(t) > 0$, $\tau(t)$ en un intervalo I , existe una única curva $I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de curvatura κ y torsión τ , cuyo triedro de Frénet en $t_0 \in I$ es (T_p, N_p, B_p) .*

Demostración: La curva buscada $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, y su triedro de Frénet $T = (f_1, f_2, f_3)$, $N = (g_1, g_2, g_3)$, $B = (h_1, h_2, h_3)$, han de ser solución de las fórmulas de Frénet, que junto con las ecuaciones $\sigma'_i = f_i$, forman un sistema de 12 ecuaciones diferenciales lineales.

Fijadas las condiciones iniciales $\sigma(t_0) = p$, $(T_{t_0}, N_{t_0}, B_{t_0}) = (T_p, N_p, B_p)$, existe solución en I , y es única (pp. 161, 189).

Sólo hemos de ver que la solución define una base ortonormal en cada punto, pues de orientación positiva a negativa no se pasa de modo continuo. Si $A = (T, N, B)$, hay que ver que $A^t A = I$, ó $AA^t = I$.

Es decir, $f_i f_j + g_i g_j + h_i h_j = \delta_{ij}$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} (f_i f_j + g_i g_j + h_i h_j)' &= f'_i f_j + f_i f'_j + g'_i g_j + g_i g'_j + h'_i h_j + h_i h'_j = \\ &= \kappa g_i f_j + \kappa g_j f_i + (\tau h_i - \kappa f_i) g_j + (\tau h_j - \kappa f_j) g_i - \tau g_i h_j - \tau g_j h_i = 0; \end{aligned}$$

y $f_i f_j + g_i g_j + h_i h_j$ es constante. Como en p vale δ_{ij} , concluimos.

Definición: Sea $(\bar{X}; \bar{g}, \bar{\nabla})$ una hipersuperficie de un espacio euclídeo.

En un entorno de cada punto de \bar{X} podemos fijar un campo de vectores N normal y unitario, y tenemos una métrica ϕ_2 , la **segunda forma fundamental** de \bar{X} , tal que (p. 194)

$$D^\nabla D' = D^{\bar{\nabla}} D' + \phi_2(D, D')N;$$

es decir, $\phi_2(D, D') = (D^\nabla D') \cdot N = \Phi(D, D') \cdot N$. El **endomorfismo de Weingarten** es el endomorfismo ϕ asociado al par de métricas (\bar{g}, ϕ_2) ,

$$\phi_2(D, D') = \phi(D) \cdot D'.$$

Fórmula de Weingarten: $\phi(D) = -D^\nabla N$.

Demostración: $(D^\nabla N) \cdot N = \frac{1}{2}D(N \cdot N) = 0$, y $-(D^\nabla N) \cdot D' = \phi_2(D, D')$, (p. 194).

Ecuación de Gauss: Si $\bar{R}_{2,2}$ es el tensor de Riemann-Christoffel de \bar{X} ,

$$\bar{R}_{2,2}(D_1, D_2; D_3, D_4) = \phi_2(D_1, D_3)\phi_2(D_2, D_4) - \phi_2(D_1, D_4)\phi_2(D_2, D_3).$$

Demostración: $R_{2,2} = 0$, y $\Phi(D_i, D_j) \cdot \Phi(D'_i, D'_j) = \phi_2(D_i, D_j)\phi_2(D'_i, D'_j)$, (p. 194).

Ecuación de Codazzi-Mainardi: $D_1^{\bar{\nabla}}(\phi(D_2)) - D_2^{\bar{\nabla}}(\phi(D_1)) = \phi([D_1, D_2])$.

Demostración: Basta tomar la componente tangencial en la siguiente igualdad, debida a que el tensor de curvatura de un espacio euclídeo es nulo,

$$0 = D_1^{\bar{\nabla}} D_2^{\bar{\nabla}} N - D_2^{\bar{\nabla}} D_1^{\bar{\nabla}} N - [D_1, D_2]^{\bar{\nabla}} N = D_1^{\bar{\nabla}}(\phi(D_2)) - D_2^{\bar{\nabla}}(\phi(D_1)) - \phi([D_1, D_2]).$$

Definiciones: El endomorfismo de Weingarten ϕ diagonaliza en una base ortonormal (p. 102), y las **curvaturas principales** de \bar{X} son los valores propios κ_i de ϕ (si se cambia N por $-N$, cambian todas de signo). Las **líneas de curvatura** son las curvas tangentes en cada punto a un vector propio (luego no nulo) de ϕ .

Teorema de Euler: Las curvaturas principales κ_i son las curvaturas normales de las líneas de curvatura.

Demostración: Si $|T| = 1$ y $\phi(T) = \kappa_i T$, entonces $\kappa_i = \phi(T) \cdot T = \phi_2(T, T) = \kappa_n$.

Teorema: Las únicas hipersuperficies cerradas y conexas del espacio euclídeo con todos sus puntos **umbílicos**, $\phi = \lambda \text{Id}$, son los hiperplanos y las hiperesferas.

Demostración: $n = \dim \bar{X}$. Si $\phi = \lambda \text{Id}$, entonces $\lambda = \frac{1}{n} \text{tr} \phi$ es una función diferenciable, y por la ecuación de Codazzi-Mainardi,

$$0 = D_1^{\bar{\nabla}}(\lambda D_2) - D_2^{\bar{\nabla}}(\lambda D_1) - \lambda[D_1, D_2] = (D_1 \lambda)D_2 - (D_2 \lambda)D_1.$$

Tomando D_1, D_2 independientes vemos que $D\lambda = 0$ para todo campo tangente D en \bar{X} .

Luego λ es constante, por ser \bar{X} conexa.

Si $\lambda = 0$, $\phi = 0$, $D^\nabla N = 0$, y N es localmente constante, $N = \sum a_i \partial_i$.

Tomemos el campo de la homotecias $H = \sum_i x_i \partial_i$, de modo que $D^\nabla H = D$ para todo campo D , y cuando D es tangente a la hipersuperficie,

$$D(H \cdot N) = (D^\nabla H) \cdot N + H \cdot D^\nabla N = D \cdot N + H \cdot 0 = 0.$$

$H \cdot N = \sum_i a_i x_i$ es constante, y cada punto tiene un entorno contenido en un hiperplano.

Como es conexa, toda la hipersuperficie está contenida en un hiperplano.

Como es cerrada, es todo el hiperplano.

Si $\lambda \neq 0$, tenemos que $D^\nabla(H + \frac{1}{\lambda}N) = D + \frac{1}{\lambda}D^\nabla N = 0$.

Luego $H + \frac{1}{\lambda}N = \sum_i a_i \partial_i$, y $|H - \sum_i a_i \partial_i| = \frac{1}{|\lambda|}$ en la hipersuperficie.

Localmente está contenida en la hipersfera $\sum_i (x_i - a_i)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$, y concluimos igual que antes.

Superficies: Si \bar{X} es una superficie de un espacio euclídeo de dimensión 3, en cada punto tenemos dos curvaturas principales κ_1, κ_2 (coincidentes si es un punto umbílico).

Sea D_1, D_2 una base ortonormal tal que $\phi(D_i) = \kappa_i D_i$.

Si $T = D_1 \cos \vartheta + D_2 \sin \vartheta$ es unitario, la curvatura normal de las curvas tangentes a T es

$$\kappa_n = \phi_2(T, T) = \phi(T) \cdot T = (\kappa_1 D_1 \cos \vartheta + \kappa_2 D_2 \sin \vartheta) \cdot T = \kappa_1 \cos^2 \vartheta + \kappa_2 \sin^2 \vartheta.$$

Las curvaturas principales son los valores extremos que toma la curvatura normal.

Teorema Egregio de Gauss: *El producto $\kappa_1 \kappa_2$ de las dos curvaturas principales es un invariante intrínseco de la superficie riemanniana (\bar{X}, \bar{g}) .*

Demostración: Por la ecuación de Gauss, $\kappa_1 \kappa_2$ es la curvatura K de la superficie,

$$K = \bar{R}_{2,2}(D_1, D_2; D_1, D_2) = \phi_2(D_1, D_1)\phi_2(D_2, D_2) - \phi_2(D_1, D_2)^2 = \kappa_1 \kappa_2 - 0.$$

7.4. Grupos de Lie

Un **grupo de Lie** es una variedad diferenciable G , con una ley de grupo diferenciable $G \times G \rightarrow G$, $(x, y) \mapsto xy$, tal que $G \rightarrow G$, $x \mapsto x^{-1}$ es diferenciable. El neutro se denota e .

Un morfismo de grupos de Lie es un morfismo de grupos diferenciable.

Cada elemento x de un grupo de Lie G define un difeomorfismo

$$L_x: G \rightarrow G, L_x(g) = xg,$$

y un campo tangente D es **invariante (a izquierda)** cuando $L_x D = D$, $\forall x \in G$; es decir, $L_{x,*} D_y = D_{xy}$.

Los campos invariantes son estables por el paréntesis de Lie, porque $L_x[D, D'] = [L_x D, L_x D']$, y forman el **álgebra de Lie \mathfrak{g}** de G .

Teorema: *La aplicación $\mathfrak{g} \rightarrow T_e G$, $D \mapsto D_e$, es un isomorfismo.*

Demostración: Es inyectiva porque un campo invariante D está determinado por su valor en un punto, $D_x = L_x(D_e)$.

Ahora, dado $D_e \in T_e G$, basta ver que el campo $\{D_x = L_x D_e\}$ es diferenciable; es decir, que para todo $f \in C^\infty(G)$, es diferenciable la función

$$h(x) = D_x f = D_e(f \circ L_x).$$

Sea D un campo en G que en el neutro valga D_e , y consideremos en $G \times G$ el campo $\tilde{D} = (0, D)$ y la función $\tilde{f}(x, y) = xy$. Acabamos porque $h = (\tilde{D}\tilde{f})|_{G \times e}$,

$$h(a) = D_e(f(ay)) = \tilde{D}_{(a,e)}\tilde{f}.$$

Corolario: *Todo grupo de Lie admite una base global de campos, y es orientable.*

Teorema: Si $\psi: G \rightarrow G'$ es morfismo de grupos de Lie, entonces $\psi_*: \mathfrak{g} = T_e G \rightarrow T_e G' = \mathfrak{g}'$ conserva el paréntesis de Lie, y $\psi_*(D_x) = (\psi_* D)_{\psi(x)}$, $D \in \mathfrak{g}$.

Demostración: Veamos que $D' = \psi_* D$ cuando D' es invariante y $D'_e = \psi_*(D_e)$.

Como $\psi L_x = L_{\psi(x)} \psi$,

$$\psi_*(D_x) = \psi_*(L_x D_e) = L_{\psi(x)}(\psi_* D_e) = L_{\psi(x)} D'_e = D'_{\psi(x)},$$

lo que significa que $\psi^*(D'f) = D(\psi^*f)$, y por tanto $\psi^*([D'_1, D'_2]f) = [D_1, D_2](\psi^*f)$.

Luego $\psi_*[D_1, D_2]_x = [D'_1, D'_2]_{\psi(x)}$, y terminamos poniendo $x = e$.

Lema: Los campos invariantes son completos, su flujo está definido en todo $\mathbb{R} \times G$.

Demostración: La curva integral de un campo invariante D que pasa por x en $t = 0$ es $\sigma_x(t) = L_x(\sigma_e(t)) = x\sigma_e(t)$. Luego, si $\sigma_e(t)$ está definida en $(-\varepsilon, \varepsilon)$, todas las curvas integrales $\sigma_x(t)$ también lo están, y el campo es completo. q.e.d.

Un morfismo de grupos de Lie $g_t: \mathbb{R} \rightarrow G$, define un grupo uniparamétrico en G ,

$$\tau(t, x) = xg_t, \quad \tau_{s+t}(x) = xg_{t+s} = xg_t g_s = \tau_s(\tau_t x),$$

y L_x transforma las curvas integrales yg_t en curvas integrales xyg_t ; luego su generador infinitesimal D es invariante (y D_e es el vector tangente en $t = 0$ a la curva g_t).

Teorema: $\text{Hom}(\mathbb{R}, G) = \mathfrak{g}$.

Demostración: Si D es invariante, basta ver que la curva integral $g_t: \mathbb{R} \rightarrow G$ que pasa por el neutro es morfismo de grupos. Como la curva integral que pasa por x es $\tau_t(x) = xg_t$,

$$g_{s+t} = \tau_{s+t}(e) = \tau_t(\tau_s e) = \tau_s(e)g_t = g_s g_t.$$

Definición: La aplicación exponencial de G es

$$\exp: \mathfrak{g} \longrightarrow G, \quad \exp(D) = g_1,$$

donde g_t es el morfismo que se corresponde con D . El vector tangente en $t = 0$ al morfismo $\phi(t) = g_{\lambda t}$ es λD_e , así que le corresponde el campo λD ,

$$g_t = \exp(tD).$$

Teorema: La aplicación exponencial es diferenciable, y su aplicación lineal tangente en el origen $\mathfrak{g} = T_0 \mathfrak{g} \rightarrow T_e G = \mathfrak{g}$ es la identidad.

Demostración: $\tilde{D}_{(x,D)} = (D_x, 0) \in T_x G \times T_D \mathfrak{g}$ es un campo tangente en $G \times \mathfrak{g}$, y su curva integral por (x, D) es $t \mapsto (x \cdot \exp(tD), D)$; luego su flujo es

$$\tau_t(x, D) = (x \cdot \exp(tD), D),$$

y vemos que la aplicación $\tau_1(e, D) = (\exp(D), D)$ es diferenciable.

Ahora, en \mathfrak{g} , el vector tangente en $t = 0$ a la curva tD es D ; luego la aplicación lineal tangente lo lleva al vector tangente en $t = 0$ a la curva $\exp(tD)$, que es D_e .

Teorema: Si $\psi: G \rightarrow G'$ es un morfismo, el siguiente cuadrado conmuta,

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\exp} & G \\ \psi_* \downarrow & & \downarrow \psi \\ \mathfrak{g}' & \xrightarrow{\exp} & G' \end{array}$$

Demostración: El vector tangente en $t = 0$ al morfismo $\psi(g_t): \mathbb{R} \rightarrow G'$ es $\psi_*(D_e)$.

Luego le corresponde el campo invariante ψ_*D , y $\exp(\psi_*D) = \psi(g_1) = \psi(\exp(D))$.

Corolario: Sea G conexo. Si dos morfismos de grupos de Lie $\psi, \varphi: G \rightarrow G'$ coinciden en el álgebra de Lie, $\psi_* = \varphi_*: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$, entonces $\psi = \varphi$.

Demostración: Por el teorema, al ser la aplicación exponencial un difeomorfismo local en el origen, coinciden en un entorno del neutro. Se acaba por el siguiente lema.

Lema: Si G es conexo, y U es un entorno del neutro, entonces $G = \bigcup_n U^n$. En particular, todo subgrupo abierto coincide con G .

Demostración: Sustituyendo U por $U^{-1} \cap U$ podemos suponer que $U = U^{-1}$.

Ahora $H = \bigcup_n U^n$ es un subgrupo, y es abierto porque $hU \subseteq H$ cuando $h \in H$.

Luego todas las clases gH son abiertas, y por tanto cerradas; $H = G$.

Ejemplo: El álgebra de Lie del grupo lineal $Gl(n, \mathbb{R})$ es $M_n(\mathbb{R})$, y cada matriz A se corresponde con el morfismo de grupos $t \mapsto e^{At}$. El paréntesis de Lie es $[A, B] = AB - BA$, y la exponencial es $\exp(A) = e^A$.

Lema: Si G es abeliano y conexo, $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ es un morfismo de grupos epiyectivo.

Demostración: Consideremos el producto $\mu: G \times G \rightarrow G$, $\mu(x, y) = xy$.

La aplicación lineal $\mu_*: T_eG \times T_eG \rightarrow T_eG$ es $\mu_*(D_e, D'_e) = D_e + D'_e$, porque claramente es la identidad en cada factor.

Tomemos $D, D' \in \mathfrak{g}$, y sean $g_t, g'_t: \mathbb{R} \rightarrow G$ sus morfismos.

Como G es abeliano, $g_t g'_t = \mu(g_t, g'_t): \mathbb{R} \rightarrow G$ es morfismo de grupos, y se corresponde con el vector $\mu_*(D_e, D'_e) = D_e + D'_e$; luego

$$\exp(D + D') = g_1 h_1 = \exp(D) \exp(D').$$

Ahora, como es morfismo de grupos, y es difeomorfismo local en el origen, lo es en todo punto, y la imagen es un subgrupo abierto de G .

Lema: Todo subgrupo cerrado y discreto H de un espacio vectorial real E de dimensión finita está generado por una familia de vectores linealmente independientes,

$$H = \mathbb{Z}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}e_r.$$

Demostración: Sustituyendo E por el subespacio vectorial que genere H , podemos suponer que H contiene una base v_1, \dots, v_r de E .

Consideremos la proyección abierta $\pi: E \rightarrow E/\mathbb{Z}v_1 + \dots + \mathbb{Z}v_r \simeq S_1^r$. $\pi(H)$ es un subgrupo cerrado de S_1^r , y es discreto, porque si U es un entorno del origen que no corta a H en ningún otro punto, $\pi(U)$ corta a $\pi(H)$ sólo en el neutro.

Como S_1^r es compacto, $\pi(H)$ es finito, y H es un grupo finitamente generado de rango r .

Como la torsión de H es nula, porque lo es la de E , se sigue (p. 112) que H es un grupo libre, $H = \mathbb{Z}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}e_r$, y e_1, \dots, e_r son linealmente independientes porque generan E .

Teorema: *Todo grupo de Lie abeliano y conexo es $G \simeq (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^r \times \mathbb{R}^n$.*

Demostración: El núcleo H de la exponencial $\mathfrak{g} \xrightarrow{\exp} G$ es un subgrupo cerrado, y discreto porque la exponencial es difeomorfismo local; luego la exponencial factoriza a través de un isomorfismo de grupos $\phi: E/\mathbb{Z}e_1 + \dots + \mathbb{Z}e_r \rightarrow G$, diferenciable porque $\phi \circ \pi = \exp$ lo es, y π es difeomorfismo local.

Además, $E/\mathbb{Z}e_1 + \dots + \mathbb{Z}e_r \simeq (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^r \times \mathbb{R}^n$.

Corolario: *Todo grupo de Lie abeliano, compacto y conexo es un toro $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^r$.*

Corolario: *Todo grupo de Lie abeliano es $G \simeq (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^r \times \mathbb{R}^n \times D$, con D discreto.*

Demostración: Consideremos la componente conexa del neutro G_e y la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow G_e \longrightarrow G \longrightarrow G/G_e \longrightarrow 0$$

Como $G_e \simeq (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^r \times \mathbb{R}^n$ es divisible, es un \mathbb{Z} -módulo inyectivo (p. 62) y la sucesión admite una sección $s: G/G_e \rightarrow G$ (diferenciable porque G/G_e es discreto) que define un isomorfismo

$$G \simeq G_e \times (G/G_e), \quad g \mapsto (g - s(\bar{g}), \bar{g}).$$

Capítulo 8

Topología

8.1. Semianillos

En las funciones no suele importar el valor concreto de una función en un punto, sólo si se anula o no. Al identificar en \mathbb{R} los números no nulos, obtenemos $\mathbb{K} = \{0, g\}$, con un punto cerrado 0 y un punto genérico denso g , y las operaciones naturales son

$$\begin{aligned} 0 + 0 = 0 & \quad , \quad 0 + g = g & \quad , \quad g + g = g \\ 0 \cdot 0 = 0 & \quad , \quad 0 \cdot g = 0 & \quad , \quad g \cdot g = g \end{aligned}$$

de modo que $g = 1$ es la unidad y $\mathbb{K} = \{0, 1\}$ es un semicuerpo topológico (1 carece de opuesto). Cada cerrado c de un espacio topológico X define una función continua $\chi_c: X \rightarrow \mathbb{K}$ que sólo se anula en c , y así podemos identificar los cerrados de X con las funciones continuas $X \rightarrow \mathbb{K}$, entender los cerrados como funciones, y aplicarles los conceptos y recursos del Álgebra.

De este modo la intersección y la unión de cerrados se corresponden con la suma y el producto de funciones, $\chi_a + \chi_b = \chi_{a \cap b}$, $\chi_a \chi_b = \chi_{a \cup b}$, y vemos que los cerrados de un espacio tienen la siguiente estructura:

Definición: $(A, +, \cdot)$ es un semianillo conmutativo cuando

1. $(A, +)$ y (A, \cdot) son semigrupos (operaciones asociativas con neutro) conmutativos.
2. Las aplicaciones $A \xrightarrow{a \cdot} A$ son morfismos de semigrupos

$$a(b + c) = ab + ac \quad , \quad 0 \cdot a = 0$$

y diremos que es un **semianillo reticular** si además $a^2 = a$, $1 + a = 1$.

En estos apuntes todos los semianillos se supondrán siempre reticulares.

Un **morfismo** de semianillos es una aplicación $f: A \rightarrow A'$ tal que

$$\begin{aligned} f(a + b) &= f(a) + f(b) & , & \quad f(0) = 0 \\ f(a \cdot b) &= f(a) \cdot f(b) & , & \quad f(1) = 1 \end{aligned}$$

Teorema: $A^* = (A, \cdot, +)$ también es un semianillo (reticular), el semianillo **dual** de A .

Demostración: $a + a = a(1 + 1) = a \cdot 1 = a$,

$$(a + b)(a + c) = a + a(b + c) + bc = a(1 + b + c) + bc = a + bc.$$

El Ejemplo Fundamental: Los cerrados de un espacio topológico X forman un semianillo $A_X = A(X)$ con las operaciones de intersección y unión,

$$\begin{aligned} a + b &= a \cap b & , & \quad 0 = X \\ ab &= a \cup b & , & \quad 1 = \emptyset \end{aligned}$$

y cada aplicación continua $\phi: Y \rightarrow X$ induce un morfismo $\phi^{-1}: A_X \rightarrow A_Y$.

En general, todo retículo de cerrados (o de subconjuntos) de X es un semianillo.

El semianillo dual A_X^* es canónicamente isomorfo al retículo de los abiertos de X .

Diremos que una familia $B \subseteq A_X$ estable por intersecciones y uniones finitas (en particular $0, 1 \in B$, y B es semianillo) es **base de cerrados** si todo cerrado de X es intersección de cerrados de la base (sus complementarios forman base de abiertos en el sentido usual).

Definiciones: $I \subseteq A$ es un **ideal** cuando $0 \in I$, $I + I \subseteq I$ y $A \cdot I \subseteq I$.

Cada ideal I define una relación de equivalencia en A ,

$$a \equiv b \pmod{I} \Leftrightarrow a + x = b + x, \text{ para algún } x \in I$$

y el cociente A/I es semianillo con las operaciones $\bar{a} + \bar{c} = [a + c]$, $\bar{a} \cdot \bar{c} = [ac]$.

Tiene la propiedad universal usual; pero el teorema de isomorfía falla.

Por ejemplo, $A_Y = A_X/I_Y$ cuando I_Y es el ideal de los cerrados que contienen a un cerrado Y ; pero si $i: Z \rightarrow X$ es un subespacio denso, $i^*: A_X \rightarrow A_Z$ es epiyectivo y de núcleo 0, aunque en general no sea inyectivo.

Si S es un sistema multiplicativo de A , define una relación de equivalencia en $A \times S$,

$$(a, s) \equiv (b, t) \Leftrightarrow atu = bsu, \text{ para algún } u \in S.$$

y el cociente A_S es semianillo con las operaciones $\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at+bs}{st}$, $\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$.

Tiene la propiedad universal usual.

Por ejemplo, si \mathfrak{p}_x es el ideal primo formado por los cerrados que pasan por un punto x , entonces $A(X)_{\mathfrak{p}_x}$ es el semianillo de gérmenes en x de cerrados.

Los semianillos íntegros, los cuerpos, los ideales primos y maximales, y la dimensión se definen igual que en los anillos, e igualmente se prueba (p. 10) que los ideales maximales son primos.

El **espectro** de un semianillo A es el conjunto $\text{Spec } A$ de sus ideales primos, con la topología que definen los ceros de los ideales, $(I)_0 = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A: I \subseteq \mathfrak{p}\}$,

$$(I \cap J)_0 = (I)_0 \cup (J)_0$$

$$(\sum_i I_i)_0 = \bigcap_i (I_i)_0$$

$$(0)_0 = \text{Spec } A$$

$$(A)_0 = \emptyset$$

y cada morfismo de semianillos $f: A \rightarrow B$ induce una aplicación

$$f^*: \text{Spec } B \longrightarrow \text{Spec } A, \quad f^*(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \cap A,$$

que es continua. Los cerrados $(a)_0$, $a \in A$, son los **cerrados básicos**, y sus complementarios $U_a = \text{Spec } A - (a)_0$ son los abiertos básicos.

El subespacio formado por los ideales maximales es el **espectro maximal** $\text{Spec}_m A$.

Muchas propiedades de los anillos, y sus demostraciones, valen en los semianillos:

1. *Los ideales de A/I se corresponden con los ideales de A que contienen a I , y por tanto $\text{Spec}(A/I) = (I)_0$ (p. 59).*
2. *Todo ideal $I \neq A$ está contenido en un ideal maximal (p. 60).*
3. *El cierre de un punto $x \in \text{Spec } A$ es $(\mathfrak{p}_x)_0$. Por tanto $\text{Spec } A$ es T_0 , y $\text{Spec}_m A$ está formado por los puntos cerrados de $\text{Spec } A$ (p. 73).*

4. $\text{Spec } A$ es compacto (p. 74).
5. Los ideales primos de A_S se corresponden con los primos de A que no cortan a S , y los ideales primos de $A_{\mathfrak{p}}$ se corresponden con los primos contenidos en \mathfrak{p} (p. 74).
6. $\text{Spec}(A \oplus B) = (\text{Spec } A) \oplus (\text{Spec } B)$, (p. 75).
7. Los cerrados irreducibles de $\text{Spec } A$ se corresponden con los ideales primos de A , y la dimensión de A es el supremo de las longitudes de las cadenas de cerrados irreducibles (o de especializaciones $x_0 > x_1 \dots > x_n$) en $\text{Spec } A$ (p. 129).

pero los semianillos tienen algunas propiedades adicionales,

1. El único elemento invertible es la unidad, y por dualidad, $a + b = 0 \Rightarrow a = 0$.
Si $ab = 1$, entonces $a = a \cdot ab = a^2b = ab = 1$.
2. Si I es un ideal y $a + b \in I$, entonces $a, b \in I$.
3. Todo elemento nilpotente es nulo.
Como $a^n = a$, si $a^n = 0$, entonces $a = 0$.
4. Todo ideal finito generado es principal.
 $aA + bA = (a + b)A$, porque $a = a(1 + b) = a^2 + ab = a(a + b)$.
5. Todo semianillo es unión de semianillos finitos.
El subanillo que genera una familia finita es finito porque $a^2 = a$, y $a + a = a$.
6. El morfismo canónico $A \rightarrow A_S$ siempre es epiyectivo.
 $\frac{a}{s} = \frac{a}{1}$ porque $as = as^2$.

que tienen consecuencias tan sorprendentes como agradables,

1. Los ideales principales tiene un único generador: $aA = bA \Rightarrow a = b$.
2. Todo elemento $a \neq 1$ está en algún maximal.
3. Un ideal I es maximal si y sólo si $A/I = \mathbb{K} = \{0, 1\}$.
4. Los cerrados básicos (y por tanto los abiertos básicos) son estables por uniones e intersecciones finitas:
$$(a + b)_0 = (a)_0 \cap (b)_0 \quad , \quad (ab)_0 = (a)_0 \cup (b)_0$$
5. Los primos de A se corresponden con los primos del dual A^* , $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}^* = A - \mathfrak{p}$.
6. Todo ideal es intersección de ideales primos.
7. Un ideal primo \mathfrak{p} es minimal si y sólo si $A_{\mathfrak{p}} = \mathbb{K}$.

Teorema de Representación Espectral: *Todo semianillo es canónicamente isomorfo al semianillo de los cerrados básicos de su espectro.*

Demostración: Si $(a)_0 = (b)_0$, entonces $aA = bA$, y $a = b$, porque todo ideal es intersección de ideales primos, y el generador de un ideal principal es único.

Nota: Ahora es claro que nuestros semianillos son retículos con el orden $a \leq b \Leftrightarrow a + b = a$. El primer elemento es 1, el último es 0, $\min(a, b) = a + b$ y $\max(a, b) = ab$.

Teorema: El funtor Spec es representable, $\text{Spec } A = \text{Hom}(A, \mathbb{K})$.

Demostración: El núcleo de un morfismo $A \rightarrow \mathbb{K}$ siempre es un ideal primo.

Cada ideal primo \mathfrak{p} es el núcleo del morfismo $f: A \rightarrow \mathbb{K}$, $f(\mathfrak{p}) = 0$, $f(A - \mathfrak{p}) = 1$.

Corolario: $\text{Spec}(\varinjlim A_i) = \varprojlim(\text{Spec } A_i)$, y $\dim(\varinjlim A_i) \leq \sup\{\dim A_i\}$.

Demostración: La igualdad se debe a que Spec es representable¹.

Si \mathfrak{p} es un ideal primo de A , ponemos $\mathfrak{p}_i = A_i \cap \mathfrak{p}$.

Si $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$, existe un índice i tal que $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{q}_i$; luego, si $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \dots \subset \mathfrak{p}_n$ es una cadena de primos en A , existe un índice i tal que $(\mathfrak{p}_0)_i \subset (\mathfrak{p}_1)_i \dots \subset (\mathfrak{p}_n)_i$, y $n \leq \dim A_i$.

Nota: No es difícil probar la igualdad $\text{Hom}(X, \text{Spec } A) = \text{Hom}(A, A_X)$, de la que el teorema anterior es el caso particular $X = \{p\}$, $A_X = \mathbb{K}$.

Producto Tensorial: Sea $\{A_i\}$ una familia de semianillos, $X_i = \text{Spec } A_i$, $X = \prod_i X_i$.

Por el teorema de representación espectral, A_i puede verse como una familia de cerrados en X_i , y por tanto en X , tomando imagen inversa por la proyección $X \rightarrow X_i$.

El semianillo de cerrados de X que generan estas familias se denota $\bigotimes_i A_i$, porque tenemos morfismos canónicos $A_i \rightarrow \bigotimes_i A_i$ con la propiedad universal

$$\text{Hom}(\bigotimes_i A_i, B) = \prod_i \text{Hom}(A_i, B).$$

En efecto, dados morfismos $f_i: A_i \rightarrow B$, las aplicaciones continuas $f_i^*: Y = \text{Spec } B \rightarrow X_i$ definen una aplicación continua $\phi: Y \rightarrow X$, y un morfismo $f: \bigotimes_i A_i \subseteq A(X) \rightarrow A(Y)$. Por el teorema de representación espectral $B \subseteq A(Y)$, y por construcción $f(A_i) = f_i(A_i) \subseteq B$.

Luego $f: \bigotimes_i A_i \rightarrow B$ induce en cada semianillo A_i el morfismo f_i .

Corolario: $\text{Spec}(\bigotimes_i A_i) = \prod_i(\text{Spec } A_i)$,

$$\text{Spec}_m(\bigotimes_i A_i) = \prod_i(\text{Spec}_m A_i).$$

Demostración: La primera igualdad se debe a que el funtor Spec es representable, y la segunda a que un punto $(x_i) \in \prod_i X_i$ es cerrado si y sólo si todos los puntos x_i lo son.

Corolario: $\dim A \otimes B = \dim A + \dim B$.

Demostración: Pongamos $X = \text{Spec } A$, $Y = \text{Spec } B$.

En $X \times Y$ se da una especialización $(x, y) \geq (x', y')$ si y sólo si $x \geq x'$, $y \geq y'$.

Ahora es evidente que el supremo de las longitudes de las cadenas de especializaciones en $X \times Y$ es $\dim A + \dim B$.

Teorema: Un semianillo A es de dimensión 0 (todo ideal primo es maximal) si y sólo si para cada elemento $a \in A$ existe $a' \in A$ tal que $a' + a = 1$, $a'a = 0$; y en tal caso se dice que A es un **álgebra de Boole**.

¹El límite inductivo de semianillos es el límite inductivo como conjuntos, con las operaciones obvias. Ahora bien, como un límite proyectivo puede ser vacío sin serlo los espacios, aunque A_i sea una base de la topología de X_i , en general $\varinjlim A_i$ no es una base de la topología de $\varinjlim X_i$.

Demostración: Sea $\dim A = 0$. Si $a = 1$, tomamos $a' = 0$. Si $a \neq 1$, y $a \in \mathfrak{p}$, como todos los primos son minimales, $A_{\mathfrak{p}} = \{0, 1\}$, y a está anulado por algún elemento de $A - \mathfrak{p}$.

Es decir, ningún ideal primo contiene a $\text{Ann}(a) + aA$; luego $\text{Ann}(a) + aA = A$, y existe $a' \in A$ tal que $a'a = 0$, y $1 = a' + ab$ para algún $b \in A$,

$$a' + a = a' + a(1 + b) = a + a' + ab = a + 1 = 1.$$

Recíprocamente, si \mathfrak{p} es un primo de A y $a \in \mathfrak{p}$, entonces $a' \notin \mathfrak{p}$ porque $a' + a = 1$; luego $\frac{a'}{s} = 0$ en $A_{\mathfrak{p}}$, al estar anulado a por $a' \in A - \mathfrak{p}$. Se sigue que $A_{\mathfrak{p}} = \{0, 1\}$, y \mathfrak{p} es minimal.

Como todos los primos son minimales, todos son maximales.

Corolario: *En las álgebras de Boole el complemento a' es único, y define un isomorfismo con el semianillo dual; $(a + b)' = a'b'$, $(ab)' = a' + b'$.*

Demostración: Las igualdades $a' + a = 1$, $a'a = 0$, muestran que en la representación espectral a' es el complementario del cerrado a , y ahora todo es evidente.

Corolario: *Toda álgebra de Boole es unión de álgebras de Boole finitas, y toda álgebra de Boole finita es isomorfa al semianillo de las partes de un conjunto finito.*

Demostración: Si A es un álgebra de Boole, toda familia finita a_1, \dots, a_n está contenida en el semianillo que generan $a_1, \dots, a_n, a'_1, \dots, a'_n$, que es un álgebra de Boole finita.

Si además A es finita, $A = A(\text{Spec } A)$, y todos los cerrados de $X = \text{Spec } A$ son abiertos.

Como X es T_0 , sus puntos son cerrados, y su topología es la discreta; luego A coincide con el semianillo de todos los subconjuntos del conjunto finito X .

8.2. Espacios Compactos

De ahora en adelante supondremos que los espacios son T_0 (los cerrados separan puntos, puntos distintos tienen cierres distintos).

Sea B una base de cerrados de un espacio X . Cada punto $x \in X$ define un ideal primo \mathfrak{p}_x de B , formado por los cerrados de la base que pasan por x . Esta aplicación

$$X \longrightarrow \text{Spec } B, \quad x \mapsto \mathfrak{p}_x,$$

es inyectiva porque X es T_0 , es continua y de imagen densa porque $b = (b)_0 \cap X$, y es un homeomorfismo con la imagen porque B es una base de X .

Teorema: *X es compacto si y sólo si $\text{Spec}_{\mathfrak{m}} B \subseteq X$.*

Demostración: Sea \mathfrak{m} un ideal maximal de B .

La intersección de cualquier familia finita de \mathfrak{m} es no vacía, porque $1 \notin \mathfrak{m}$.

Luego, si X es compacto, la intersección de todos los cerrados de \mathfrak{m} es no vacía, $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{p}_x$ para algún $x \in X$, y $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}_x$ porque \mathfrak{m} es maximal.

Recíprocamente, si un cerrado $(I)_0$ de $\text{Spec } B$ no corta a $\text{Spec}_{\mathfrak{m}} B$, es vacío, porque todo ideal de B está contenido en algún maximal.

Como $\text{Spec } B$ es compacto, todo subespacio que contenga a $\text{Spec}_{\mathfrak{m}} B$ es compacto.

Corolario: *X es compacto y T_1 si y sólo si $\text{Spec}_{\mathfrak{m}} B = X$.*

Demostración: Si X es compacto y T_1 , hemos de probar que los ideales \mathfrak{p}_x son maximales.

Si un cerrado $c \in B$ no pasa por x , por compacidad en la base hay un cerrado b que no corta a c y pasa por x ; es decir, $b \in \mathfrak{p}_x$ y $b + c = 1$. Luego $\mathfrak{p}_x + cB = B$, y \mathfrak{p}_x es maximal.

Teorema de Tychonoff: *El producto directo $\prod_i X_i$ de espacios compactos es compacto.*

Demostración: Sea $A_i = A(X_i)$. Por definición $A = \bigotimes_i A_i$ es una base de cerrados de $\prod_i X_i$, y $\text{Spec}_m A_i \subseteq X_i$ cuando X_i es compacto. Terminamos porque (p. 204)

$$\text{Spec}_m A = \prod_i \text{Spec}_m A_i \subseteq \prod_i X_i \subseteq \text{Spec} A.$$

Corolario: *Todo límite proyectivo de compactos Hausdorff no vacíos es un compacto Hausdorff no vacío.*

Demostración: Si $\{X_i, \phi_{ji}\}$ es un sistema proyectivo, su límite proyectivo es el subespacio $\bigcap_{i,j} Y_{ji} \subseteq \prod_i X_i$, donde

$$Y_{ji} = \{(x_i) \in \prod_i X_i : x_i = \phi_{ji}(x_j)\},$$

y las intersecciones finitas no son vacías porque el sistema de índices es filtrante. Cuando los espacios X_i son separados, Y_{ji} es cerrado, y vemos que $\bigcap_{i,j} Y_{ji}$ es un cerrado no vacío.

Lema: *Si una aplicación continua $\phi: X \rightarrow Y$ es cerrada, el morfismo $\phi^{-1}: A_Y/(A_Y \cap I) \rightarrow A_X/I$ es inyectivo para todo ideal I de A_X .*

Demostración: $a, b \in A_Y$. Si $\phi^{-1}(a) + c = \phi^{-1}(b) + c$, $c \in I$, entonces $\phi(c) \in A_Y$, y

$$a + \phi(c) = a \cap \phi(c) = \phi(\phi^{-1}(a) \cap c) = \phi(\phi^{-1}(b) \cap c) = b + \phi(c)$$

donde $\phi(c) \in A_Y \cap I$, porque $\phi^{-1}(\phi(c)) \in I$, ya que contiene a $c \in I$.

Proposición: *Sea $\{X_i, \phi_{ji}\}$ un sistema proyectivo. Si las aplicaciones ϕ_{ji} son cerradas,*

$$\text{Spec}_m(\varinjlim A_i) = \varprojlim(\text{Spec}_m A_i), \quad A_i = A(X_i).$$

Demostración: $\text{Spec}(\varinjlim A_i) = \varprojlim \text{Spec} A_i$; $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}_i)_{i \in I}$, donde $\mathfrak{p}_i = A_i \cap \mathfrak{p}$.

Por el lema, los morfismos $\phi_{ji}^{-1}: A_i/\mathfrak{p}_i \rightarrow A_j/\mathfrak{p}_j$ son inyectivos, así que

$$A/\mathfrak{p} = \varinjlim(A_i/\mathfrak{p}_i) = \bigcup_i A_i/\mathfrak{p}_i$$

y está claro que $A/\mathfrak{p} = \mathbb{K}$ si y sólo si $A/\mathfrak{p}_i = \mathbb{K}$ para todo índice i .

Teorema: *Sea $\{X_i, \phi_{ji}\}$ un sistema proyectivo de espacios compactos no vacíos. Si las aplicaciones ϕ_{ji} son cerradas, el límite proyectivo es compacto y no vacío.*

Demostración: $A = \varinjlim A_i \neq 0$ porque los espacios X_i no son vacíos, y

$$\text{Spec}_m A = \varprojlim(\text{Spec}_m A_i) \subseteq \varprojlim X_i \subseteq \text{Spec} A.$$

8.3. Separación

Dos puntos $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2$ del espectro de un semianillo A **hibridan** si están en el cierre de algún punto; es decir, si $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ contiene algún ideal primo.

La condición de que no hibriden, en términos de los primos $\mathfrak{p}_i^* = A - \mathfrak{p}_i$ del semianillo dual A^* , es que ningún primo de A^* los contenga, $\mathfrak{p}_1^* + \mathfrak{p}_2^* = A^*$.

En A , esta igualdad afirma la existencia de elementos a_1, a_2 tales que $a_1 a_2 = 0$, $a_i \notin \mathfrak{p}_i$; es decir, que ambos puntos tienen entornos disjuntos en $\text{Spec } A$.

Proposición: X es Hausdorff si y sólo si los puntos de $X \subseteq \text{Spec } B$ no hibridan.

Demostración: Por definición X es T_2 si para cada par de puntos $x_1, x_2 \in X$ existen $b_1, b_2 \in B$ tales que $b_i \notin \mathfrak{p}_{x_i}$ y $b_1 b_2 = 0$, lo que significa que los ideales primos $\mathfrak{p}_{x_1}, \mathfrak{p}_{x_2}$ de B no hibridan.

Proposición: Sea X un espacio T_1 . X es **regular** (los abiertos separan puntos de cerrados) si y sólo si los puntos de X no hibridan con los de $\text{Spec}_m A_X$.

Demostración: Sea $x \in X$, y \mathfrak{m} un maximal de A_X tal que algún cerrado $c \in \mathfrak{m}$ no pasa por el punto x . Si X es regular, existen cerrados a, b tales que

$$ab = 0 \quad , \quad a + c = 1 \quad , \quad b \notin \mathfrak{m}_x,$$

luego $a \notin \mathfrak{m}$, porque $c \in \mathfrak{m}$, y los maximales $\mathfrak{m}_x, \mathfrak{m}$ no hibridan.

Recíprocamente, si un cerrado c de X no pasa por x , por hipótesis para cada maximal \mathfrak{m}_i que contenga a c existen cerrados a_i, b_i de X tales que

$$a_i \notin \mathfrak{m}_i \quad , \quad b_i \notin \mathfrak{m}_x \quad , \quad a_i b_i = 0.$$

Ahora el cerrado $(c)_0 \cap (\bigcap_i (a_i)_0)$ no corta a $\text{Spec}_m A_X$, así que es vacío.

Como $\text{Spec } A_X$ es compacto, existe una familia finita a_1, \dots, a_n tal que

$$\begin{aligned} \emptyset &= (c)_0 \cap (a_1)_0 \cap \dots \cap (a_n)_0 = (c + a_1 + \dots + a_n)_0, \\ 1 &= c + a_1 + \dots + a_n. \end{aligned}$$

Poniendo $a = a_1 + \dots + a_n$, $b = b_1 \dots b_n$, tenemos que $ab = 0$, $a + c = 1$, $x \notin (b)_0$.

Los abiertos básicos U_a, U_b cortan a X en entornos disjuntos de c y x .

Definición: Un semianillo A es **normal** si para cada par $a_1, a_2 \in A$ con suma $a_1 + a_2 = 1$ existen $b_1, b_2 \in A$ tales que

$$a_1 + b_1 = 1 \quad , \quad a_2 + b_2 = 1 \quad , \quad b_1 b_2 = 0,$$

y un espacio X es **normal** si su topología A_X es normal; es decir, si cerrados de X disjuntos tienen entornos disjuntos.

Ejemplos: Un álgebra de Boole es normal, pues basta tomar $b_i = a_i'$.

El espacio $\{0, g\}$, con un punto denso g , es normal; pero no T_1 .

Teorema: Si A es un semianillo, las siguientes condiciones son equivalentes,

1. A es un semianillo normal.
2. $\text{Spec } A$ es un espacio normal.
3. Cada ideal primo de A está contenido en un único ideal maximal.

Demostración: $(1 \Rightarrow 2)$ Si $(I_1)_0$ y $(I_2)_0$ son disjuntos en $\text{Spec } A$, como

$$\emptyset = (I_1)_0 \cap (I_2)_0 = (I_1 + I_2)_0,$$

existen $a_i \in I_i$ tales que $a_1 + a_2 = 1$, y por hipótesis tenemos $b_i \in A$ tales que

$$\begin{aligned} (a_i)_0 \cap (b_i)_0 &= (a_i + b_i)_0 = \emptyset, \\ (b_1)_0 \cup (b_2)_0 &= (b_1 b_2)_0 = \text{Spec } A. \end{aligned}$$

Los abiertos básicos U_{b_1}, U_{b_2} son entornos disjuntos de los cerrados dados.

$(2 \Rightarrow 3)$ Dos puntos cerrados de $\text{Spec } A$ tienen entornos disjuntos; luego no hibridan.

$(3 \Rightarrow 1)$ Por hipótesis el cierre de cada punto tiene un único punto cerrado, y los puntos cerrados tienen entornos disjuntos; luego dos puntos con cierres disjuntos siempre tienen entornos (que podemos suponer básicos) disjuntos.

Si $a_1 + a_2 = 1$, los cerrados $C_1 = (a_1)_0$ y $C_2 = (a_2)_0$ son disjuntos.

Si $x \in C_1$, cualquier punto de C_2 y x tienen entornos básicos disjuntos.

Como C_2 es compacto, y los abiertos básicos son estables por uniones e intersecciones finitas, C_2 y x tienen entornos básicos disjuntos.

Como C_1 es compacto, C_1 y C_2 tienen entornos básicos U_{b_1}, U_{b_2} disjuntos,

$$\begin{aligned} (a_i)_0 \subseteq U_{b_i}, \quad \emptyset &= (a_i)_0 \cap (b_i)_0 = (a_i + b_i)_0, \quad a_i + b_i = 1 \\ \emptyset &= U_{b_1} \cap U_{b_2}, \quad \text{Spec } A = (b_1)_0 \cup (b_2)_0 = (b_1 b_2)_0, \quad b_1 b_2 = 1 \end{aligned}$$

Corolario: *Toda base B de un compacto Hausdorff X es normal.*

Demostración: $X = \text{Spec}_m B$, y los puntos de X no hibridan.

Lema: *Si A es normal, dos cerrados disjuntos de $\text{Spec}_m A$ tienen siempre entornos disjuntos en $\text{Spec } A$.*

Demostración: Si dos cerrados $(I_1)_0, (I_2)_0$ de $\text{Spec } A$ cortan a $\text{Spec}_m A$ en cerrados disjuntos, entonces $(I_1)_0 \cap (I_2)_0 = (I_1 + I_2)_0 = \emptyset$ (todo ideal $\neq A$ está en un maximal), y los cerrados $(I_1)_0, (I_2)_0$ tienen entornos disjuntos porque $\text{Spec } A$ es normal.

Corolario: *Si A es normal, $\text{Spec}_m A$ es Hausdorff.*

Corolario: *A es un álgebra de Boole si y sólo si $\text{Spec } A$ es Hausdorff.*

Demostración: Toda álgebra de Boole es normal; luego $\text{Spec } A = \text{Spec}_m A$ es T_2 .

Si $\text{Spec } A$ es T_2 , sus puntos son cerrados, y A es un álgebra de Boole (p. 204).

Teorema del Retracto Continuo: *Si A es normal, la aplicación $r: \text{Spec } A \rightarrow \text{Spec}_m A$ que asigna a cada primo el único maximal que lo contiene, es un retracts continuo.*

Demostración: Nótese que cada punto $x \in \text{Spec}_m A$ está en el cierre de todos los puntos de su fibra $r^{-1}(x)$; luego todo entorno de x en $\text{Spec } A$ contiene a $r^{-1}(x)$.

Sea U un abierto de $\text{Spec}_m A$ y C el cerrado complementario.

Por el lema, cada punto $x \in U$ y C tienen entornos disjuntos V_x, W_x en $\text{Spec } A$.

Luego $r^{-1}(x) \subseteq V_x, r^{-1}(C) \subseteq W_x$, y por tanto $V_x \subseteq r^{-1}(U)$.

Concluimos que $r^{-1}(U) = \bigcup_{x \in U} V_x$ es abierto, y r es continuo.

8.4. Espacios Noetherianos

Un semianillo A es **noetheriano** si todo ideal es finito generado (luego principal).

Un espacio topológico X es **noetheriano** si toda cadena descendente de cerrados es finita (por ejemplo, el espectro de un anillo noetheriano).

Todo espacio noetheriano X es compacto, y

1. *Todo subespacio Y de X también es noetheriano (y compacto)*

Una cadena infinita de cerrados $C_0 \supset C_1 \supset \dots$ en Y definiría una cadena infinita de cerrados $\overline{C}_0 \supset \overline{C}_1 \supset \dots$ en X , porque $C_i = \overline{C}_i \cap Y$.

2. *X tiene un número finito de componentes irreducibles.*

Si X no fuera unión finita de cerrados irreducibles, $X = Y_1 \cup Y_2$, donde alguno de los dos cerrados Y_1, Y_2 también tiene tal propiedad, lo que definiría una cadena decreciente infinita de cerrados en X . Esto da una demostración alternativa de la existencia de un número finito de primos minimales en los anillos noetherianos (p. 129).

3. *A_X es un semianillo noetheriano, y es la única base de la topología X .*

Si un elemento c de un ideal I de A_X no lo genera, hay un cerrado en I que está contenido estrictamente en c , así que un ideal no principal definiría una cadena decreciente infinita de cerrados. Además, cualquier base de X es A_X porque la intersección de una familia de cerrados coincide con la de una subfamilia finita.

4. *Los cerrados irreducibles de X se corresponden con los ideales primos de A_X .*

Un cerrado c de un espacio X es irreducible si y sólo si el ideal cA_X es primo. Si X es noetheriano, todos los ideales primos de A_X son principales, y acabamos.

Si A es un semianillo noetheriano, $\text{Spec } A$ es un espacio noetheriano, porque los ideales de A se corresponden con los cerrados de su espectro, $(I)_0 = (J)_0 \Leftrightarrow I = J$; luego (por 3)

$$A = A(\text{Spec } A).$$

Sin embargo, si un espacio X es noetheriano, la inclusión $X \subseteq \text{Spec } A_X$ es estricta si algún cerrado irreducible de X no es el cierre de un punto.

Teorema: *El funtor Spec define una antiequivalencia de la categoría de semianillos noetherianos con la de espacios noetherianos en que todo cerrado irreducible tiene punto denso,*

$$\left[\begin{array}{c} \text{Semianillos} \\ \text{noetherianos} \end{array} \right]^{\text{op}} \longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} \text{Espacios noetherianos} \\ \text{con puntos genéricos} \end{array} \right], \quad \begin{array}{l} A = A(\text{Spec } A) \\ X = \text{Spec } (A_X) \end{array}$$

8.5. Espacios Finitos

En todo conjunto ordenado finito (X, \leq) tenemos una topología tomando como cerrados los subconjuntos estables por especialización ($x \leq y \in C \Rightarrow x \in C$), y ésta topología define claramente el orden inicial. Además una aplicación $f: X \rightarrow Y$ es continua precisamente cuando conserva el orden, $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

Recíprocamente, en un espacio topológico finito X los cerrados son las uniones (obviamente finitas) de cierres de puntos, y la topología de X está totalmente determinada por los cierres de los puntos; es decir, por la relación de orden

$$x \leq y \text{ cuando } x \in \overline{\{y\}}.$$

Los funtores $A \rightsquigarrow \text{Spec } A$, $X \rightsquigarrow A(X)$ definen una equivalencia de categorías

$$\left[\begin{array}{c} \text{Semianillos} \\ \text{finitos} \end{array} \right]^{\text{op}} \longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} \text{Espacios} \\ \text{finitos} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{Órdenes} \\ \text{finitos} \end{array} \right]$$

Corolario: *Todo límite proyectivo de espacios finitos no vacíos es compacto y no vacío.*

Demostración: Si $X_i = \text{Spec } A_i$, entonces $\varprojlim X_i = \varprojlim (\text{Spec } A_i) = \text{Spec } (\varinjlim A_i)$.

Definición: La **subdivisión baricéntrica** βX de un orden finito X es el espacio de sus cadenas $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, ordenadas por inclusión.

Tenemos una aplicación continua canónica $\beta X \rightarrow X$ que asigna a cada cadena su último elemento, y la anti-imagen de un cerrado Y es βY .

Las subdivisiones iteradas $\beta^n X$ se definen inductivamente, $\beta^n X = \beta(\beta^{n-1} X)$, y obtenemos un sistema proyectivo

$$\longrightarrow \beta^{n+1} X \longrightarrow \beta^n X \longrightarrow \dots \longrightarrow \beta X \longrightarrow X$$

La **realización geométrica** $|X|$ de un espacio finito X es el subespacio de puntos cerrados de $\varprojlim \beta^n X$, y es claro que $|X| = |\beta X| = |\beta^n X|$.

Si A_n denota la topología de $\beta^n X$, las aplicaciones continuas $\beta^{n+1} X \rightarrow \beta^n X$ inducen morfismos $A_n \rightarrow A_{n+1}$, y tenemos que $\varprojlim \beta^n X = \varprojlim (\text{Spec } A_n) = \text{Spec } (\varinjlim A_n)$. Luego

$$|X| = \text{Spec}_m (\varinjlim A_n).$$

Una aplicación continua $f: X \rightarrow X'$ induce una aplicación cerrada

$$\beta f: \beta X \longrightarrow \beta X'$$

que lleva $x_0 < x_1 \dots < x_n$ en la mayor cadena contenida en $f(x_0) \leq f(x_1) \dots \leq f(x_n)$.

Tenemos aplicaciones cerradas $\beta^n f: \beta^n X \rightarrow \beta^n X'$ y, por el lema de la p. 206,

$$\text{Spec } (\varinjlim A_n) = \varprojlim \beta^n X \longrightarrow \varprojlim \beta^n X' = \text{Spec } (\varinjlim A'_n)$$

lleva puntos cerrados en puntos cerrados, y define una aplicación continua

$$|f|: |X| \longrightarrow |X'|.$$

Cuando $Y \rightarrow X$ es una inmersión cerrada, $|Y| \rightarrow Y \times_X |X|$ es un homeomorfismo.

Teorema: *La realización geométrica del orden finito $\Delta_n = \{0, 1, \dots, n\}$ es el n -tetraedro, el subespacio $\{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : t_0 + \dots + t_n = 1, t_i \geq 0\}$.*

Demostración: Sea A_1 el retículo de las uniones finitas de símlices cerrados (vértices, aristas, caras, etc.) del n -tetraedro. Estos símlices son los generadores de los ideales primos de A_1 , así que $\text{Spec } A_1$ tiene un punto por cada símplex, y el orden es la relación de incidencia.

Numerados los vértices del tetraedro, tenemos que $\text{Spec } A_1 = \beta \Delta_n$, donde cada símplex se identifica con la sucesión formada por sus vértices.

Sea A_{i+1} el retículo de las uniones finitas de símlices de la i -ésima subdivisión baricéntrica del tetraedro (tomando como nuevos vértices los baricentros de los símlices de la anterior).

Ahora $\text{Spec } A_i = \beta^i \Delta_n$, y tenemos cuadrados conmutativos

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } A_{i+1} & \longrightarrow & \text{Spec } A_i \\ \parallel & & \parallel \\ \beta^{i+1} \Delta_n & \longrightarrow & \beta^i \Delta_n \end{array}$$

$$\varprojlim \beta^i \Delta_n = \varprojlim \text{Spec}(A_i) = \text{Spec}(\varinjlim A_i)$$

$$|\Delta_n| = \text{Spec}_m(\varinjlim A_i) = \text{Spec}_m B$$

Ahora bien, B es una base de cerrados del tetraedro, que es un compacto T_1 , y coincide por tanto (p. 205) con el espectro maximal de cualquier base de cerrados. q.e.d.

Nótese que B es una base de un compacto Hausdorff; luego es normal (p. 208) y tenemos un retracts continuo $r: \varinjlim \beta^i \Delta_n = \text{Spec} B \rightarrow \text{Spec}_m B = |\Delta_n|$.

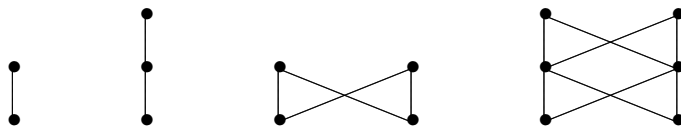
Teorema: *La realización geométrica de cualquier espacio finito X es un **poliedro** finito (tenemos un homeomorfismo $|X| \simeq P$ con una unión finita P de símlices cerrados de un tetraedro, y tal homeomorfismo es una **triangulación** de $|X|$).*

Demostración: Una vez numerados los puntos de X , tenemos que βX es un cerrado de $\beta \Delta_n$; luego $|\beta X| = |X|$ es un cerrado de $|\beta \Delta_n| = |\Delta_n|$ formado por símlices.

Ejemplos: La demostración anterior prueba que el poliedro $|X|$ tiene un vértice por cada punto de X , una arista por cada cadena $x_0 < x_1$ (que une los vértices x_0, x_1), una cara por cada cadena $x_0 < x_1 < x_2$ (que une las aristas $x_0 < x_1, x_1 < x_2, x_0 < x_2$), etc.

Representamos los espacios finitos con un diagrama de puntos a distintas alturas, con un segmento que une un punto y con un punto inferior x cuando $x < y$; es decir, el cierre de cada punto está formado por los que están bajo él (y los puntos cerrados son los más bajos).

Por ejemplo, las realizaciones geométricas de los espacios finitos

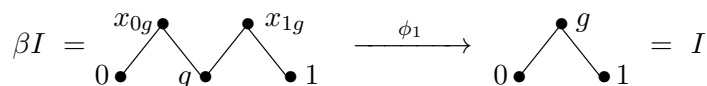


son un segmento, un triángulo, una circunferencia y una esfera respectivamente.

Todo semianillo es límite inductivo de semianillos finitos, así que todo espacio X se aproxima por poliedros, en el sentido de que es un subespacio denso de un límite proyectivo de espacios finitos: $X \subseteq \text{Spec} A_X = \text{Spec}(\varinjlim A_i) = \varprojlim(\text{Spec} A_i)$.

Lema de Uryshon: *Si C_0 y C_1 son cerrados disjuntos de un espacio normal X , existe una función continua $f: X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(C_0) = 0$, $f(C_1) = 1$.*

Demostración: Consideremos el espacio finito $I = \beta \Delta_1 = \{0, 1, g\}$ con dos puntos cerrados $0, 1$ y un punto genérico g . Dar una aplicación continua $\phi: X \rightarrow I$ es dar un par de cerrados disjuntos $C_0 = \phi^{-1}(0), C_1 = \phi^{-1}(1)$, y la existencia de entornos abiertos disjuntos U_1, U_2 en X equivale a levantar ϕ a una aplicación continua $\phi_1: X \rightarrow \beta I$,



donde $U_1 = \phi_1^{-1}\{0, x_{0g}\}, U_2 = \phi_1^{-1}\{1, x_{1g}\}$, y por tanto $\phi_1^{-1}(g) = X - (U_1 \cup U_2)$.

Como βI está formado por dos copias de I , reiterando el argumento podemos levantar ϕ_1 a una aplicación continua $\phi_2: X \rightarrow \beta^2 I$, y así sucesivamente.

La función continua f la proporciona ahora el retracts continuo,

$$X \rightarrow \varinjlim \beta^n \Delta_1 \xrightarrow{r} |\Delta_1| = [0, 1].$$

8.6. Compactificaciones

Una aplicación continua $X \rightarrow K$ es una **compactificación** de X si es un homeomorfismo con un subespacio denso de un compacto K .

Todo espacio admite la compactificación $X \rightarrow \text{Spec } A_X$ y, cuando es T_1 , la compactificación $X \rightarrow \text{Spec}_m A_X$. Vamos a estudiar las compactificaciones Hausdorff.

Los ceros $z(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$ de funciones continuas $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ forman un subanillo $Z(X) \subseteq A_X$ (aunque en general $Z(X)$ no es base de la topología de X) porque

$$\begin{aligned} z(f) + z(h) &= z(f^2 + h^2) & , & \quad z(0) = 0 \\ z(f)z(h) &= z(fh) & , & \quad z(1) = 1 \end{aligned}$$

Lema: *El semianillo $Z(X)$ es normal.*

Demostración: Si $z(f)$ y $z(h)$ son disjuntos, la función continua $g = |f| - |h|$ es positiva en $z(h)$ y negativa en $z(f)$, y poniendo $f' = \frac{1}{2}(g - |g|)$, $h' = \frac{1}{2}(g + |g|)$, tenemos que

$$z(f) + z(f') = 1 \quad , \quad z(h) + z(h') = 1 \quad , \quad z(f') \cdot z(h') = 0 \quad \text{q.e.d.}$$

Ahora $\beta X = \text{Spec}_m Z(X)$ es un compacto Hausdorff (p. 208) y tenemos un retracts continuo $r: \text{Spec } Z(X) \rightarrow \text{Spec}_m Z(X)$. Componiendo con la aplicación continua de imagen densa $X \rightarrow \text{Spec } Z(X)$ (puede no ser inyectiva si $Z(X)$ no es base de X) obtenemos una aplicación canónica de imagen densa $j: X \rightarrow \beta X$, que es universal²:

Teorema: $\text{Hom}(\beta X, K) = \text{Hom}(X, K)$, $f \mapsto fj$, para todo compacto Hausdorff K .

Demostración: Una aplicación continua $\phi: X \rightarrow K$ define un morfismo $\phi^{-1}: Z(K) \rightarrow Z(X)$, y por el lema de Uryshon $Z(K)$ es una base de K ; luego $K = \text{Spec}_m Z(K)$.

La extensión a βX requerida (única porque la imagen de $X \rightarrow \beta X$ es densa y K es T_2) es

$$\beta X = \text{Spec}_m Z(X) \longrightarrow \text{Spec } Z(X) \longrightarrow \text{Spec } Z(K) \xrightarrow{r} \text{Spec}_m Z(K) = K$$

Definición: Un espacio X es **completamente regular** cuando $Z(X)$ es una base de la topología de X (las funciones continuas separan puntos de cerrados).

Todo subespacio de un espacio completamente regular también lo es, y por el lema de Uryshon, todo espacio normal y T_1 es completamente regular.

Todo espacio completamente regular es regular, y por tanto Hausdorff.

Teorema: *Si X es un espacio topológico, las siguientes condiciones son equivalentes,*

1. X admite una compactificación Hausdorff.
2. βX es una compactificación de X (la **compactificación de Stone-Cěch**).
3. X es completamente regular.

Demostración: (3 \Rightarrow 2) Si X es completamente regular, $j: X \rightarrow \beta X$ es una compactificación porque $Z(X)$ es base de la topología de X .

La implicación 2 \Rightarrow 1 es obvia, y por último, si X admite una compactificación Hausdorff $X \rightarrow K$, como K es completamente regular, el subespacio X también.

²La existencia de una aplicación continua universal en los compactos Hausdorff se sigue del Teorema de Representabilidad; pero hemos preferido dar esta construcción directa.

Proposición: *Un espacio topológico T_1 es normal si y sólo si $\beta X = \text{Spec}_m A_X$.*

Demostración: Si X es normal, la extensión a $\text{Spec}_m A_X$ de una aplicación continua $X \rightarrow K$ (única porque la imagen de $X \rightarrow \text{Spec}_m A_X$ es densa y K es T_2) es

$$X \hookrightarrow \text{Spec}_m A_X \longrightarrow \text{Spec} A_X \longrightarrow \text{Spec} A_K \xrightarrow{r} \text{Spec}_m A_K = K.$$

Si $\beta X = \text{Spec}_m A_X$, entonces $\text{Spec}_m A_X$ es Hausdorff, y los maximales de A_X no hibridan; luego A_X es normal. q.e.d.

$\mathcal{C}(X)$ denota el anillo de las funciones reales continuas en un espacio X , y $\mathcal{C}^*(X)$ el de las funciones continuas y acotadas.

Cada punto x define un ideal maximal $\mathfrak{m}_x = \{f \in \mathcal{C}(X) : f(x) = 0\}$, y esta aplicación

$$X \longrightarrow \text{Spec}_m \mathcal{C}(X)$$

es continua y de imagen densa porque $(f)_0 \cap X = z(f)$.

Igualmente tenemos una aplicación continua de imagen densa

$$X \longrightarrow \text{Spec}_m \mathcal{C}^*(X).$$

Teorema: $\beta X = \text{Spec}_m \mathcal{C}^*(X)$.

Demostración: $\mathcal{C}^*(X) = \mathcal{C}(\beta X)$ por la propiedad universal de βX .

$\text{Spec}_m \mathcal{C}(\beta X) = \beta X$, porque βX es un compacto Hausdorff (p. 159).

Teorema: $\beta X = \text{Spec}_m \mathcal{C}(X)$.

Demostración: Cada ideal I del semianillo $Z(X)$ define un ideal $I' = \{f \in \mathcal{C}(X) : z(f) \in I\}$ de $\mathcal{C}(X)$, y cada ideal J de $\mathcal{C}(X)$ define un ideal $z(J) = \{z(f) : f \in J\}$ de $Z(X)$.

Ahora, si \mathfrak{m} es un maximal de $Z(X)$, el ideal \mathfrak{m}' también es maximal, pues si existiera un ideal $\mathfrak{m}' \subset J \subset \mathcal{C}(X)$ tendríamos que $\mathfrak{m} = z(\mathfrak{m}') \subset z(J) \subset Z(X)$ (si $z(f) = \emptyset$, entonces f es invertible). Igualmente, si \mathfrak{m} es un maximal de $\mathcal{C}(X)$, el ideal $z(\mathfrak{m})$ también es maximal, pues si existiera un ideal $z(\mathfrak{m}) \subset I \subset Z(X)$ tendríamos que $\mathfrak{m} \subset I' \subset \mathcal{C}(X)$.

Obtenemos así una biyección natural $\text{Spec}_m Z(X) = \text{Spec}_m \mathcal{C}(X)$, y es homeomorfismo porque los ceros de $z(f)$ se corresponden con los ceros de f .

Definición: Diremos que una subálgebra $B \subseteq \mathcal{C}(X)$ separa puntos de X si para cada par de puntos $x \neq y$ existe una función continua $f \in B$ tal que $f(x) \neq f(y)$. En tal caso, para cualquier par de números reales $a \neq b$ existe $h \in B$ tal que $h(x) = a$, $h(y) = b$.

Teorema de Stone-Weierstrass: *Sea K un compacto Hausdorff. Una subálgebra B de $\mathcal{C}(K)$ es densa si y sólo si separa puntos de K .*

Demostración: Si B es densa, y tomamos $f \in \mathcal{C}(K)$ tal que $f(x) = 0$, $f(y) = 1$ (existe por el lema de Urysohn), cualquier función $h \in B$ tal que $\|f - h\| < \frac{1}{2}$ separa los puntos x, y .

Recíprocamente, si B separa puntos, considerando su cierre podemos suponer que B es cerrada, y basta ver que dada $f \in \mathcal{C}(K)$ y $\varepsilon > 0$, existe $h \in B$ tal que $\|f - h\| < \varepsilon$.

Fijado $x \in K$, para cada $y \in K$ existe $h_y \in B$ tal que $h_y(x) = f(x)$, $h_y(y) = f(y)$.

En un entorno U_y tendremos que $h < f + \varepsilon$, y existen unos puntos y_1, \dots, y_n tales que los abiertos U_{y_i} recubren K . Sea $h_x = \min(h_{y_1}, \dots, h_{y_n})$.

Es claro que $h_x(x) = f(x)$ y $h_x < f + \varepsilon$, y por el siguiente lema $h_x \in B$.

En un entorno V_x de x tendremos que $f - \varepsilon < h_x$, y existen puntos x_1, \dots, x_m tales que los abiertos V_{x_i} recubren K . Ahora $h = \max(h_{x_1}, \dots, h_{x_m}) \in B$, y $f - \varepsilon < h < f + \varepsilon$.

Lema: Si $f, h \in B$, entonces $\max(f, h), \min(f, h) \in B$.

Demostración: Como $\max(f, h) = \frac{1}{2}(f + h + |f - h|)$ y $\min(f, h) = f + h - \max(f, h)$, basta ver que $|f|$ es adherente a B cuando $f \in B$. Ahora bien, la serie

$$\sqrt{1-t} = 1 - \frac{1}{2}t + \dots$$

es uniformemente convergente en $|t| \leq 1$. Si $P_n(t)$ es su polinomio de Taylor de grado n , para cada $\varepsilon > 0$ existe n tal que $|P_n(t) - \sqrt{1-t}| < \varepsilon$ en todo $|t| \leq 1$.

Si $f \in B$, dividiendo por una constante tenemos que $|f| \leq 1$, y poniendo $t = 1 - f(x)^2$,

$$|P_n(1 - f^2) - |f|| = |P_n(1 - f^2) - \sqrt{1 - (1 - f^2)}| < \varepsilon;$$

luego $|f|$ es adherente a B , porque $P_n(1 - f^2) \in B$.

Corolario: Si X es σ -compacto, una subálgebra B de $\mathcal{C}(X)$ es densa (con la topología de la convergencia uniforme sobre los compactos) si y sólo si separa puntos de X .

Demostración: Si B separa puntos de X , para cada compacto $K \subset X$ tenemos que la imagen del morfismo de restricción $B \rightarrow \mathcal{C}(K)$ separa puntos de K .

Luego es densa en $\mathcal{C}(K)$, y esto significa que B es densa en $\mathcal{C}(X)$.

Teorema de Extensión de Tietze: Sea X un espacio normal y T_1 . El morfismo de restricción $\mathcal{C}^*(X) \rightarrow \mathcal{C}^*(Y)$ es epiyectivo para todo cerrado Y de X .

Demostración: Al ser X normal y T_1 , su compactificación de Stone-Cëch es $\beta X = \text{Spec}_m A_X$.

Como Y es cerrado, también es normal y T_1 , así que $\beta Y = \text{Spec}_m A_Y \subset \text{Spec}_m A_X$, porque $A_Y = A_X/I_Y$. Sustituyendo X, Y por $\beta X, \beta Y$, podemos suponer que X es compacto.

Consideremos la imagen del morfismo de restricción $\mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{C}(Y)$.

Es una subálgebra que separa puntos de Y , así que es densa.

Si $h \in \mathcal{C}(Y)$, existen funciones $f_n \in \mathcal{C}(X)$ tales que $|h - f_n| < 2^{-n}$ en Y .

Sea $\phi_n: X \rightarrow [0, 1]$ una función continua que se anule en Y y tome valor 1 en el cerrado $|f_{n+1} - f_n| \geq 2^{1-n}$ (que no corta a Y porque en Y las funciones f_n, f_{n+1} distan de h menos de 2^{-n}). Ahora la serie

$$f = f_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1} - f_n)\phi_n$$

converge uniformemente, porque $|(f_{n+1} - f_n)\phi_n| < 2^{1-n}$, y define una función continua en X que coincide con h en Y , pues en Y la suma parcial n -ésima es f_n , y $f_n \rightarrow h$.

8.7. Teoría de la Dimensión

La **dimensión** $\dim X$ de un espacio topológico X es el mínimo de las dimensiones de las bases de cerrados de su topología.

La dimensión puede ser infinita, y el vacío es el único espacio de dimensión -1 .

Teorema: Un espacio no vacío X es de dimensión 0 si y sólo si los subespacios abiertos y cerrados forman una base de su topología.

Demostración: Los abiertos cerrados de X forman una base si y sólo si hay una base de X que es álgebra de Boole; que son los semianillos de dimensión 0 (p. 204).

Ejemplos: Los números racionales y los números irracionales definen dos espacios de dimensión 0; pero su unión \mathbb{R} , al ser conexa, es de dimensión > 0 .

Todo espacio X de dimensión 0 admite una base B que es un álgebra de Boole; luego es un subespacio del compacto Hausdorff $\text{Spec } B$ (p. 208), y X es completamente regular.

Productos y límites proyectivos de espacios de dimensión 0 son de dimensión 0.

Sea K un compacto Hausdorff, y pongamos $A_K = \bigcup_i A_i$, donde los semianillos A_i son finitos. Sea \overline{X}_i el conjunto finito $\text{Spec } A_i$ con la topología discreta. Por el teorema del retracts continuo, K es imagen continua de un compacto 0-dimensional:

$$\varprojlim \overline{X}_i \longrightarrow \varprojlim (\text{Spec } A_i) = \text{Spec } (\varprojlim A_i) = \text{Spec } A_K \xrightarrow{r} \text{Spec}_m A_K = K$$

Lema: Si tenemos un morfismo $A \rightarrow A'$ epiyectivo, $\dim A' \leq \dim A$.

Demostración: Toda cadena de ideales primos $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_n$ en A' define una cadena de ideales primos $\mathfrak{p}_0 \cap A \subset \mathfrak{p}_1 \cap A \subset \dots \subset \mathfrak{p}_n \cap A$ en A .

Teorema de Monotonía: $\dim Y \leq \dim X$, para todo subespacio Y de X .

Demostración: Si B es una base de X , la imagen del morfismo de restricción $B \rightarrow A_Y$ es una base de Y ; luego $\dim Y \leq \dim B$.

Teorema: $\dim (\text{Spec } A) = \dim A$, para todo semianillo A .

Demostración: $\dim (\text{Spec } A) \leq \dim A$ porque A define una base de $\text{Spec } A$.

Por otra parte, si B es una base de la topología de $\text{Spec } A$, entonces $\text{Spec } A$ es un subespacio de $\text{Spec } B$. Como la dimensión de un semianillo es la mayor longitud de las cadenas de especializaciones en su espectro, concluimos que $\dim A \leq \dim B$.

Corolario: La dimensión de un espacio noetheriano X es el supremo de las longitudes de las cadenas de cerrados irreducibles³ de X .

Demostración: Un espacio noetheriano X tiene una única base, A_X , y sus ideales primos se corresponden con los cerrados irreducibles de X (p. 209).

Corolario: La dimensión de un espacio finito X es la mayor longitud de las cadenas de X (considerado como orden finito), y en particular $\dim X = \dim (\beta X)$.

Teorema: $\dim (X \times Y) \leq \dim X + \dim Y$.

Demostración: Si A y B son bases de X e Y , la imagen del morfismo $A \otimes B \rightarrow A(X \times Y)$ es una base de $X \times Y$; luego $\dim (X \times Y) \leq \dim A \otimes B = \dim A + \dim B$ (p. 204).

Teorema: $\dim (\varprojlim X_i) \leq \sup \{\dim X_i\}$, cuando los espacios X_i son finitos.

Demostración: Si $X_i = \text{Spec } A_i$, entonces $\varprojlim X_i = \text{Spec } (\varprojlim A_i)$, y (p. 204)

$$\dim \text{Spec } (\varprojlim A_i) = \dim (\varprojlim A_i) \leq \sup \{\dim A_i\}.$$

³El supremo de las longitudes de las cadenas de cerrados irreducibles de un espacio X es la **dimensión combinatoria** de X , introducida por Grothendieck.

Corolario: $\dim |X| \leq \dim X$, para todo espacio finito X .

Demostración: $\dim |X| \leq \dim (\varprojlim \beta^n X) \leq \sup\{\dim \beta^n X\} = \dim X$.

Teorema Fundamental de la Dimensión: $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Sabemos que $\dim \mathbb{R}^n \leq \dim |\Delta_n| \leq n$; pero la demostración de la igualdad se pospone al próximo curso de Topología Algebraica (p. 272).

Corolario: $\dim |X| = \dim X$, para todo espacio finito X .

Demostración: Si $\dim X = n$, su realización geométrica contiene un n -tetraedro, que contiene un abierto homeomorfo a \mathbb{R}^n ; luego $n \leq \dim |X|$.

Lema: Sea K un compacto Hausdorff. Si A es una subálgebra densa de $\mathcal{C}(K)$,

$$\dim K \leq \dim A.$$

Demostración: Sea B el semianillo generado por los cerrados $f^{-1}(I)$, donde $f \in A$ e I es un intervalo cerrado (acotado o no). Como A es densa, B es base de la topología de X .

Si \mathfrak{p} es un ideal primo de B , entonces $\mathfrak{p}' = \{f \in A : z(f) \in \mathfrak{p}\}$ es un ideal primo de A , y basta ver que $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{q}'$ cuando $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$.

Los cerrados $f^{-1}([0, \infty))$ generan B , así que \mathfrak{q} contiene algún cerrado $f^{-1}([0, \infty)) \notin \mathfrak{p}$.

Como \mathfrak{p} es primo, y $0 = f^{-1}((-\infty, 0]) \cdot f^{-1}([0, \infty))$, tenemos que $f^{-1}((-\infty, 0]) \in \mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$, y $z(f) = f^{-1}((-\infty, 0]) + f^{-1}([0, \infty)) \in \mathfrak{q}$.

Como $z(f)$ no está en \mathfrak{p} , porque estaría $f^{-1}([0, \infty)) \supseteq z(f)$, vemos que $f \in \mathfrak{q}'$, y $f \notin \mathfrak{p}'$.

Teorema: La dimensión de cualquier poliedro finito P es el mínimo de las dimensiones de las subálgebras densas de $\mathcal{C}(P)$.

Demostración: P es unión finita de símplices de un tetraedro en \mathbb{R}^n . Sea A el álgebra de las funciones polinómicas sobre P , que separa puntos, y $A \simeq \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]/I$, donde I es el ideal de los polinomios que se anulan en P .

Si \mathfrak{p}_σ es el ideal de los polinomios que se anulan en un símplice σ de P , tenemos que $I = \bigcap_\sigma \mathfrak{p}_\sigma$, y la dimensión de A es el máximo de las dimensiones de $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{p}_\sigma$.

Ahora bien, \mathfrak{p}_σ es el ideal de la subvariedad lineal que genera σ ; luego $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{p}_\sigma \simeq \mathbb{R}[y_1, \dots, y_d]$, $d = \dim \sigma$, y la dimensión de A coincide con la de P .

8.8. Teoría de Galois de Revestimientos

Fijamos un espacio topológico S , y trabajamos en la categoría de espacios sobre S .

Una aplicación continua $X \rightarrow S$ es un **revestimiento trivial** si existe un isomorfismo $X \simeq F \times S = \bigoplus_F S$, donde F es un espacio discreto, y es un **revestimiento** si podemos recubrir S por abiertos U en que $X \times_S U \rightarrow U$ es un revestimiento trivial.

En tal caso X hereda la estructura local de S : cuando S es una variedad diferenciable, una superficie de Riemann, una variedad riemanniana, etc., X también lo es.

Por ejemplo, $\mathbb{R} \xrightarrow{e^{2\pi it}} S_1$, $\mathbb{C} \xrightarrow{e^z} \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - 0$, $\mathbb{C}^* \xrightarrow{z^n} \mathbb{C}^*$, $S_n \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, y $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$, donde $\Gamma = \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2$ es discreto, son revestimientos.

1. Los revestimientos son estables por cambios de base. Si $X \rightarrow S$ es un revestimiento, también lo es $X \times_S T \rightarrow T$ para toda aplicación continua $T \rightarrow S$.

2. El concepto de revestimiento es local. Si $R \rightarrow S$ es un recubrimiento abierto (o incluso un revestimiento), entonces $X \rightarrow S$ es revestimiento $\Leftrightarrow X \times_S R \rightarrow R$ lo es.
3. El cardinal de las fibras de un revestimiento $X \rightarrow S$ es localmente constante; luego constante si S es conexo, y se dice que es el **grado** del revestimiento.

El grado puede ser infinito, al contrario de lo que hemos supuesto en el caso de los cuerpos (p. 84) y los anillos noetherianos (p. 153).

4. El funtor “componentes conexas” da una equivalencia de la categoría de revestimientos triviales de un espacio conexo S con la de conjuntos.
5. Si $X \rightarrow S$ es un revestimiento, toda aplicación continua $X \rightarrow Y$ constante en las fibras induce una aplicación continua $S \rightarrow Y$.

La aplicación $S \rightarrow Y$ es continua porque $X \rightarrow S$ es homeomorfismo local.

6. Una sucesión $X' \rightrightarrows X \rightarrow X''$ es exacta (X'' es el espacio cociente de X por la relación de equivalencia que generan $X' \rightrightarrows X$) si y sólo si es exacta sobre cada punto de S ; y por tanto la exactitud es estable por cambios de base $T \rightarrow S$.
7. Si $X \rightarrow S$ es un revestimiento, la sucesión $X \times_S X \rightrightarrows X \rightarrow S$ es exacta.

En adelante supondremos que S es conexo y localmente conexo (todo punto admite una base de entornos conexos). En tal caso todo revestimiento de S también es localmente conexo, todo morfismo entre revestimientos de S es a su vez un revestimiento, y toda componente conexa de un revestimiento de S es un revestimiento. Además toda sección de un revestimiento conexo $X \rightarrow S$ es un isomorfismo; luego los morfismos de un revestimiento conexo X en otro revestimiento Y vienen dados por la **Fórmula de los Puntos**:

$$\text{Hom}_S(X, Y) = \text{Hom}_X(X, X \times_S Y) = \left[\begin{array}{l} \text{Componentes conexas de} \\ X \times_S Y \text{ isomorfas a } X \end{array} \right]$$

Corolario: Sean X, Y dos revestimientos de S . Si X es conexo y dos morfismos $X \rightrightarrows Y$ coinciden en un punto, entonces son iguales.

Demostración: Si dos componentes conexas tienen un punto común, son iguales.

Definición: Un revestimiento conexo $P \rightarrow S$ es de **Galois** cuando el grupo de Galois $G = \text{Aut}(P/S)$ actúa transitivamente en las fibras. En tal caso⁴ $P/G = S$, y

$$P \times_S P = \bigoplus_G P = G \times P.$$

Teorema: $(P/H) \times_S X = (P \times_S X)/H$, para todo subgrupo H de G .

Demostración: Para ver que la biyección continua natural $(P \times_S X)/H \rightarrow (P/H) \times_S X$ es homeomorfismo, podemos pasar a un entorno U de un punto de S , donde P es $G \times U$, y la fórmula se reduce a la igualdad evidente $(G \times X)/H = (G/H) \times X$.

Corolario: $P/H \rightarrow S$ es un revestimiento trivial sobre P ; es decir, $(P/H) \times_S P = \bigoplus P$.

Demostración: $(P/H) \times_S P = (P \times_S P)/H = (G \times P)/H = (G/H) \times P$. q.e.d.

⁴En esta situación el teorema de Artin es obvio: si H es un grupo de automorfismos de un revestimiento conexo $P \rightarrow S$, y $P/H = S$, entonces es un revestimiento de Galois de grupo H .

Si un revestimiento $X \rightarrow S$ es trivial sobre P , el grupo G actúa en

$$F(X) = \{\text{componentes conexas de } X \times_S P\} = \text{Hom}_S(P, X),$$

y cada G -conjunto Δ tiene un **revestimiento asociado**

$$R(\Delta) = (\bigoplus_{\Delta} P)/G = (\Delta \times P)/G,$$

que es trivial sobre P , porque $R(G/H) = ((G/H) \times P)/G = P/H$.

Teorema de Galois: *Los funtores F y R definen una equivalencia de categorías*

$$\left[\begin{array}{c} \text{Revestimientos de } S \\ \text{triviales sobre } P \end{array} \right] \longleftrightarrow [G\text{-conjuntos}], \quad \begin{array}{l} R(F(X)) = X \\ F(R(\Delta)) = \Delta \end{array}$$

Demostración: El argumento de la página 84 sigue siendo válido, porque

1. $F(P) = \text{Hom}_S(P, P) = G$, y $R(G) = (G \times P)/G = P$; luego $P = RF(P)$, $G = FR(G)$.
2. Todo G -conjunto Δ admite una presentación $\bigoplus_i G \rightrightarrows \bigoplus_j G \rightarrow \Delta$; y todo revestimiento X trivial sobre P admite una presentación $\bigoplus_i P \rightrightarrows \bigoplus_j P \rightarrow X$,

$$X \times_S P \times_S P = (X \times_S P) \times_X (X \times_S P) \rightrightarrows X \times_S P \rightarrow X.$$

3. Los funtores R y F son exactos por la derecha.

El functor R porque la exactitud de una sucesión de revestimientos se comprueba en un entorno U de un punto, donde P es $G \times U$, y $R(\Delta)$ es $(\Delta \times G \times U)/G = \Delta \times U$.

El functor F porque $(-)\times_S P$ lo es, y el functor “componentes conexas” da una equivalencia de la categoría de revestimientos triviales de P con la de conjuntos.

Definición: Un revestimiento conexo $\bar{S} \rightarrow S$ es **universal** si todo revestimiento de \bar{S} es trivial, en cuyo caso es de Galois y su grupo de Galois clasifica los revestimientos de S .

En efecto, al ser trivial el revestimiento $\bar{S} \times_S \bar{S} \rightarrow \bar{S}$, para cada par de puntos x, y de una fibra, existen morfismos $\tau, \tau': \bar{S} \rightarrow \bar{S}$ tales que $\tau(x) = y$, $\tau'(y) = x$; luego $\tau\tau'$ y $\tau'\tau$ son la identidad (dejan fijo un punto) y concluimos que son automorfismos de \bar{S} .

El revestimiento universal de S , si existe, es único salvo isomorfismos (no canónicos).

En efecto, si \bar{S}_1 es otro revestimiento universal, $\bar{S}_1 \times_S \bar{S}$ es un revestimiento trivial de ambos factores; luego cualquier componente conexa es isomorfa a \bar{S} y \bar{S}_1 . Pero para que el isomorfismo sea único es necesario fijar puntos de \bar{S} y \bar{S}_1 sobre un punto de S dado.

8.9. El Grupo Fundamental

Una aplicación continua $\gamma: I = [0, 1] \rightarrow X$ es un **arco** de extremos $p = \gamma(0)$, $q = \gamma(1)$, y si γ' es un arco de extremos q, r , la composición $\gamma \cdot \gamma'$ es el arco

$$(\gamma \cdot \gamma')(t) = \gamma(2t), \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \quad ; \quad (\gamma \cdot \gamma')(t) = \gamma'(2t - 1), \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1.$$

Dos arcos γ_0, γ_1 de p a q son **homótopos**, y pondremos $\gamma_0 \equiv \gamma_1$, si existe una aplicación continua $H: I \times I \rightarrow X$, $H_s(t) = H(t, s)$, tal que

$$H_0 = \gamma_0 \quad , \quad H_1 = \gamma_1 \quad , \quad H_s(0) = p \quad , \quad H_s(1) = q,$$

y esta relación es de equivalencia, y compatible con la composición de arcos.

Es reflexiva y simétrica, y si $H: \gamma_0 \equiv \gamma_1$, $H': \gamma_1 \equiv \gamma_2$, entonces $H'': \gamma_0 \equiv \gamma_2$, donde

$$H''_s = \begin{cases} H_{2s} & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ H'_{2s-1} & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

y si $H: \gamma \equiv \gamma'$, $\bar{H}: \bar{\gamma} \equiv \bar{\gamma}'$, entonces $H': \gamma\bar{\gamma} \equiv \gamma'\bar{\gamma}'$, donde

$$H'_s(t) = \begin{cases} H_s(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \bar{H}_s(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Si q es el arco constante $q(t) = q$, entonces $H: \gamma \cdot q \equiv \gamma$ (igualmente $p \cdot \gamma \equiv \gamma$), donde

$$H(t, s) = \begin{cases} \gamma\left(\frac{2t}{1+s}\right) & 2t \leq 1+s \\ q & 2t \geq 1+s \end{cases} \quad \begin{array}{c} t \\ \begin{array}{|c|} \hline q \\ \hline \gamma \\ \hline \end{array} \\ \gamma \\ s \end{array}$$

Si γ^{-1} es el arco inverso $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$, entonces $H: \gamma\gamma^{-1} \equiv p$, donde

$$H(t, s) = \begin{cases} \gamma(2t) & 2t \leq 1-s \\ \gamma(1-s) & 1-s \leq 2t \leq 1+s \\ \gamma^{-1}(2t) & 2t \geq 1+s \end{cases} \quad \begin{array}{c} t \\ \begin{array}{|c|} \hline \gamma^{-1} \\ \hline \gamma \\ \hline \end{array} \\ p \\ s \end{array}$$

y la composición es asociativa, $H: (\gamma_1\gamma_2)\gamma_3 \equiv \gamma_1(\gamma_2\gamma_3)$, donde

$$H(t, s) = \begin{cases} \gamma_1\left(\frac{4t}{1+s}\right) & t \leq \frac{1+s}{4} \\ \gamma_2(4t-s-1) & \frac{1+s}{4} \leq t \leq \frac{2+s}{4} \\ \gamma_3\left(\frac{4t-s-2}{2-s}\right) & \frac{2+s}{4} \leq t \end{cases} \quad \begin{array}{c} \gamma_3 \\ \begin{array}{|c|} \hline \gamma_3 \\ \hline \gamma_2 \\ \hline \gamma_1 \\ \hline \end{array} \\ \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{array}$$

Cuando $p = q$, el arco es un **lazo** en p . Las clases de homotopía de lazos en un punto p forman un grupo $\pi_1(X, p)$ con la composición, el **grupo fundamental** de X en p , y cada aplicación continua $f: X \rightarrow Y$ induce un morfismo de grupos

$$f_*: \pi_1(X, p) \longrightarrow \pi_1(Y, f(p)), \quad f_*[\sigma] = [f \circ \sigma],$$

bien definido, si $H: \sigma_0 \equiv \bar{\sigma}$, una homotopía $f \circ \sigma \equiv f \circ \bar{\sigma}$ es $H'(t, s) = f(H(t, s))$.

Cada arco γ de p a q induce un isomorfismo de grupos (no canónico, depende del arco, salvo cuando el grupo es abeliano)

$$\gamma: \pi_1(X, p) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, q), \quad [\sigma] \mapsto [\gamma^{-1}\sigma\gamma].$$

Definición: Dos aplicaciones continuas $f', f: X \rightarrow Y$ son **homótopas** si existe una aplicación continua $H: X \times I \rightarrow Y$ tal que

$$H(x, 0) = f(x) \quad , \quad H(x, 1) = f'(x)$$

Esta relación es de equivalencia, y compatible con la composición de aplicaciones, de modo que los espacios topológicos, con las clases de homotopía de aplicaciones continuas, forman un categoría. Las **equivalencias homotópicas** son los isomorfismos de esta categoría, y un espacio es **contráctil** si es homotópicamente equivalente a un punto.

Lema: Si γ es el arco $\gamma(s) = H(p, s)$, el siguiente cuadrado es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, p) & \xrightarrow{f_*} & \pi(Y, f(p)) \\ \parallel & & \wr \gamma \\ \pi_1(X, p) & \xrightarrow{f'_*} & \pi(Y, f'(p)) \end{array}$$

Demostración: Consideremos la aplicación continua $F: I \times I \xrightarrow{\sigma \times 1} X \times I \xrightarrow{H} Y$,

$$\begin{aligned} F(t, 0) &= f(\sigma(t)), \\ F(t, 1) &= f'(\sigma(t)), \\ F(0, s) &= F(1, s) = \gamma(s). \end{aligned}$$

Como el lado superior del cuadrado $I \times I$ es homótopo al arco que recorre los tres lados restantes, componiendo con F obtenemos que $\gamma^{-1} \cdot (f \circ \sigma) \cdot \gamma \equiv f' \circ \sigma$.

Teorema: Si $f: X \rightarrow Y$ es una equivalencia homotópica, $f_*: \pi_1(X, p) \rightarrow \pi_1(Y, f(p))$ es un isomorfismo. En particular $\pi_1(X, p) = 0$ cuando X es contráctil.

Definición: X es **simplemente conexo** si es **arco-conexo** (los arcos unen cualquier par de puntos) y $\pi_1(X, p) = 0$, y es **localmente simplemente conexo** si todo punto admite una base de entornos abiertos simplemente conexos (por ejemplo, las variedades topológicas).

Lema: Sea $X \rightarrow S$ un revestimiento trivial, y $f: T \rightarrow S$ una aplicación continua, T conexo. Cada levantamiento continuo $\tilde{f}: C \rightarrow X$ de f , definido en un subespacio conexo $C \subset T$, admite una única extensión a T .

Demostración: Los levantamientos de f se corresponden con las secciones de $X \times_S T \rightarrow T$.

Cada sección continua definida en un subespacio conexo $C \subset T$ valora en una componente conexa de $X \times_S T = \oplus T$, y el enunciado se vuelve evidente.

Lema: Sea $\pi: X \rightarrow S$ un revestimiento, y $\gamma: I \rightarrow S$ un arco con origen en p . Si $\pi(x) = p$, existe un único levantamiento continuo $\tilde{\gamma}: I \rightarrow X$ de γ con origen en x .

Además, si $\gamma \equiv \gamma'$, entonces $\tilde{\gamma} \equiv \tilde{\gamma}'$.

Demostración: La existencia y unicidad del levantamiento $\tilde{\gamma}$ se sigue del lema anterior, considerando una partición de I en intervalos más pequeños, con imágenes contenidas en abiertos de S donde X sea trivial.

En cuanto al levantamiento de una homotopía $H: I \times I \rightarrow S$ entre γ y γ' , también se sigue del lema anterior, considerando una partición de $I \times I$ en cuadrados con imágenes contenidas en abiertos de S donde X sea trivial, porque la intersección de cada cuadrado con la unión de los anteriores es conexa.

Lema: Todo revestimiento $X \rightarrow S$ de un espacio simplemente conexo y localmente arco-conexo es trivial.

Demostración: Basta ver que si X es conexo, es de grado 1.

Si x, y son dos puntos de la fibra de p , proyectando a S un arco que una x con y tendríamos un lazo en p que no es homótopo a punto, pues su levantamiento no es un lazo.

Teorema: Sea S conexo y localmente arco-conexo. Si $\tilde{S} \rightarrow S$ es un revestimiento simplemente conexo, es el revestimiento universal, y cada punto \tilde{p} de la fibra de p define un isomorfismo

$$\pi_1(S, p) = \text{Aut}(\tilde{S}/S).$$

Demostración: Cada lazo σ tiene un levantamiento $\tilde{\sigma}$ con origen en \tilde{p} y final en $\tau(\tilde{p})$.

La aplicación $\pi_1(S, p) \rightarrow \text{Aut}(\tilde{S}/S)$, $[\sigma] \mapsto \tau$, está bien definida (por el lema anterior), es epiyectiva (porque \tilde{S} es arco-conexo, y los puntos de la fibra de p se pueden unir por un arco), es inyectiva (porque todo lazo en \tilde{S} es homótopo a punto) y es morfismo de grupos.

En efecto, si $\tilde{\sigma}_1$ une \tilde{p} con $\tau_1(\tilde{p})$, y $\tilde{\sigma}_2$ une \tilde{p} con $\tau_2(\tilde{p})$, entonces la subida de $\sigma_1\sigma_2$ es $\tilde{\sigma}_1 \cdot \tau_1(\tilde{\sigma}_2)$, cuyo final es $\tau_1(\tau_2(\tilde{p}))$.

Corolario: $\pi_1(S_1, p) = \mathbb{Z}$, generado por el lazo $e^{2\pi ti}$, $0 \leq t \leq 1$.

Demostración: $e^{2\pi ti}: \mathbb{R} \rightarrow S_1$ es un revestimiento simplemente conexo.

q.e.d.

1. No existe ningún retracto continuo $r: D_2 \rightarrow S_1$ del disco en su borde.

$$\mathbb{Z} = \pi_1(S_1) \xrightarrow{i_*} \pi_1(D_2) = 0 \xrightarrow{r_*} \pi_1(S_1) = \mathbb{Z} \text{ sería la identidad.}$$

2. **Teorema de Brouwer:** Toda aplicación continua $f: D_2 \rightarrow D_2$ tiene un punto fijo.

En caso contrario tenemos un retracto continuo $r: D_2 \rightarrow S_1$, donde $r(x)$ es el punto de corte de S_1 con la semirrecta con origen en x que pasa por $f(x)$.

3. Todo polinomio con coeficientes complejos no constante tiene alguna raíz compleja.

Si $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ no tiene raíces complejas, define una homotopía

$$H(z, s) = s^n P\left(\frac{1-s}{s}z\right) = (1-s)^n z^n + a_1 s(1-s)^{n-1} z^{n-1} + \dots + a_n s^n$$

entre las aplicaciones continuas $h_0(z) = z^n, h_1(z) = a_n: S_1 \rightarrow \mathbb{C}^*$.

Pero el morfismo $h_{0,*}: \mathbb{Z} = \pi_1(S_1) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}^*) = \pi_1(S_1) = \mathbb{Z}$ es multiplicar por n , mientras que el morfismo $h_{1,*}$ es nulo.

4. Dos toros $\mathbb{C}/\Gamma, \mathbb{C}/\Gamma'$ son analíticamente isomorfos si y sólo si $\Gamma' = a\Gamma, a \in \mathbb{C}$.

Si $\mathbb{C}/\Gamma' \simeq \mathbb{C}/\Gamma$, el isomorfismo induce un isomorfismo $\tau: \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}$ de los revestimientos universales, y podemos suponer que $\tau(0) = 0$.

Como todo automorfismo analítico de \mathbb{C} es una afinidad (p. 179), $\tau(z) = az$.

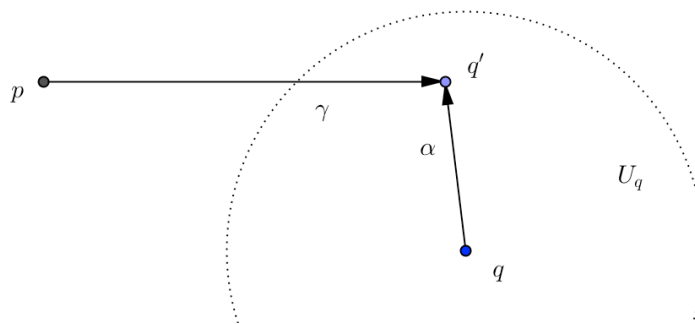
Construcción del Revestimiento Universal:

Sea S un espacio topológico conexo y localmente simplemente conexo.

Sea \tilde{S} el conjunto de las clases de homotopía de arcos con origen en $p \in S$, y $\pi: \tilde{S} \rightarrow S$ la aplicación que asigna a cada arco su final.

En los entornos simplemente conexos U_q de $q \in S$ tenemos una biyección

$$\pi^{-1}(U_q) = U_q \times F_q, \quad F_q = \left[\begin{array}{l} \text{clases de homotopía} \\ \text{de arcos de } p \text{ a } q \end{array} \right]$$



que asigna a $[\gamma]$ la pareja $(q' = \gamma(1), [\gamma\alpha^{-1}])$, donde α es un arco en U_q que une q con q' (no depende de α porque todas las elecciones son homótopas).

Estas biyecciones definen topologías en los abiertos $\pi^{-1}(U_q)$, tomando F_q como espacio discreto, de modo que π es revestimiento (trivial sobre los abiertos U_q).

En efecto, cuando $U_q \subseteq U_{\bar{q}}$, la topología definida en $\pi^{-1}(U_q)$ coincide con la inducida por $\pi^{-1}(U_{\bar{q}})$; es decir, la composición

$$U_q \times F_q = \pi^{-1}(U_q) = U_q \times F_{\bar{q}}$$

es homeomorfismo, porque transforma la componente $U_q \times [\gamma]$ en $U_q \times [\gamma\beta]$, donde β es un arco en $U_{\bar{q}}$ que une q con \bar{q} . Además, el lazo constante \tilde{p} está sobre p .

Teorema: Sea S conexo y localmente simplemente conexo. El espacio de arcos $\pi: \tilde{S} \rightarrow S$ con origen en p es un revestimiento simplemente conexo, con un punto prefijado \tilde{p} sobre p ; luego es un revestimiento universal, y el funtor “fibra sobre p ” define una equivalencia de la categoría de revestimientos de S con la de $\pi_1(S, p)$ -conjuntos.

Demostración: Si γ es un arco en S con origen en p , su levantamiento $\tilde{\gamma}$ con origen en \tilde{p} es el arco $\tilde{\gamma}(s) = [\gamma_s]$, donde

$$\tilde{\gamma}_s(t) = \begin{cases} \gamma(t) & t \leq s \\ \gamma(s) & t \geq s \end{cases}$$

y su extremo es $\tilde{\gamma}(1) = [\gamma_1] = [\gamma]$; luego \tilde{S} es arco-conexo.

Además, todo lazo $\tilde{\sigma}$ en \tilde{p} es el levantamiento de su bajada σ , así que $[\sigma] = \tilde{\sigma}(1) = \tilde{p}$, y su levantamiento $\tilde{\sigma}$ es homótopo a punto; es decir, \tilde{S} es simplemente conexo.

Por último, al tener un punto \tilde{p} prefijado sobre p , el grupo de automorfismos es canónicamente isomorfo a $\pi_1(S, p)$, y $\text{Hom}_S(\tilde{S}, X)$ se identifica con la fibra X_p de cualquier revestimiento X sobre p : si $x \in X_p$, existe un único morfismo $f: \tilde{S} \rightarrow X$ tal que $f(\tilde{p}) = x$.

Corolario: Si un espacio conexo y localmente simplemente conexo S se recubre con dos abiertos simplemente conexos $S = U_1 \cup U_2$ de intersección $U_1 \cap U_2$ conexa, entonces S es simplemente conexo.

Demostración: Basta ver que todo revestimiento de S admite sección continua.

En U_1 la admite, porque es simplemente conexo, y la sección que tenemos en el abierto conexo $U_1 \cap U_2$ se extiende a U_2 con el lema de la página 220.

Corolario: $\pi_1(S_n, p) = 0$, $\pi_1(\mathbb{P}_n(\mathbb{R}), p) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, cuando $n \geq 2$.

Demostración: Tenemos un revestimiento $S_n \rightarrow \mathbb{P}_n$ de grado 2, y S_n es simplemente conexo porque se recubre con dos discos de intersección conexa cuando $n \geq 2$. q.e.d.

1. \mathbb{R}^2 no es homeomorfo a \mathbb{R}^n , $n \neq 2$.

$\pi_1(\mathbb{R}^2 - p) = \pi_1(S_1) = \mathbb{Z}$, y $\pi_1(\mathbb{R}^n - p) = \pi_1(S_{n-1}) = 0$ cuando $n \geq 3$.

2. No existe aplicación continua $f: S_n \rightarrow S_1$, $n \geq 2$, que conserve antípodas.

Si $f(-x) = -f(x)$, induce una aplicación continua $h: \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}_1$ y un cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} S_n & \xrightarrow{f} & S_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}_n & \xrightarrow{h} & \mathbb{P}_1 \end{array}$$

Si tomamos un arco $\bar{\gamma}$ que una dos puntos antipodales $x, -x \in S_n$, su imagen γ es un lazo en \mathbb{P}_n . Como $h_*: \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \pi_1(\mathbb{P}_n) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}_1) = \mathbb{Z}$ es nulo, $h(\gamma)$ es homótopo a punto. Luego $f(\bar{\gamma})$ es el levantamiento de un lazo homótopo a punto, lo que es absurdo porque $f(-x) = -f(x) \neq f(x)$.

3. Toda aplicación continua $S_n \rightarrow S_2$, $n \geq 2$, que conserve antípodas es epiyectiva.

Si deja fuera el polo norte, también el sur, y proyectando sobre el ecuador según los meridianos, tendríamos una aplicación continua $S_n \rightarrow S_1$ que conserva antípodas.

4. **Teorema de Borsuk-Ulam:** Toda aplicación continua $f: S_n \rightarrow \mathbb{R}^2$, $n \geq 2$, coincide en dos puntos antipodales.

En caso contrario, la aplicación continua $\frac{f(x)-f(-x)}{|f(x)-f(-x)|}: S_n \rightarrow S_1$ conserva antípodas.

5. Toda aplicación continua $f: S_n \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(-x) = -f(x)$, se anula en un punto.

6. Ningún compacto de \mathbb{R}^2 es homeomorfo a S_2 .

Definición: Un revestimiento **principal** de grupo G es un revestimiento $P \rightarrow S$ (no necesariamente conexo) dotado de una acción de G libre y transitiva en cada fibra; es decir, la acción $G \times P \rightarrow P$ define un isomorfismo

$$G \times P \xrightarrow{\sim} P \times_S P, (g, x) \mapsto (x, gx).$$

Los isomorfismos son los isomorfismos de revestimientos y de G -conjuntos.

Si se fija un punto de la fibre de $p \in S$, diremos que el revestimiento principal está punteado. Cuando S es conexo, los isomorfismos entre revestimientos principales punteados ya son únicos.

Proposición: Si S es conexo y localmente simplemente conexo,

$$\text{Hom}_{\text{gr}}(\pi_1(S, p), G) = \left[\begin{array}{l} \text{Revestimientos principales} \\ \text{de } S \text{ de grupo } G \text{ punteados} \end{array} \right]$$

Demostración: Dar un revestimiento principal de S es dar un $\pi_1(S, p)$ -conjunto F (digamos por la derecha) con una acción libre y transitiva de G , $g(x\gamma) = (gx)\gamma$. Fijado un punto $x \in F$, el grupo G se identifica con F , y equivale a dar un morfismo de grupos $f: \pi_1(S, p) \rightarrow G$, $x\gamma = f(\gamma)$,

$$f(\gamma_1\gamma_2)x = x\gamma_1\gamma_2 = f(\gamma_1)x\gamma_2 = f(\gamma_1)f(\gamma_2)x.$$

Corolario: $\text{Hom}_{\text{gr}}(\pi_1(S, p), A) = \left[\begin{array}{l} \text{revestimientos princi-} \\ \text{pales de } S \text{ de grupo } A \end{array} \right]$, cuando el grupo A es abeliano.

Demostración: Los revestimientos principales de S de grupo G se corresponden con los morfismos $\pi_1(S, p) \rightarrow G$, módulo automorfismos internos de G . En efecto, si tomamos otro punto $y = gx$ en la fibra de p , el morfismo correspondiente es gfg^{-1} ,

$$y\gamma = gx\gamma = gf(\gamma)x = gf(\gamma)g^{-1}y.$$

Teorema de Van-Kampen: Sean U_1, U_2 dos abiertos conexos y localmente simplemente conexos. Si $U = U_1 \cap U_2$ es conexo, el grupo fundamental de la unión es el coproducto (en la categoría de grupos) de los grupos fundamentales,

$$\pi_1(U_1 \cup U_2, p) = \pi_1(U_1, p) *_{\pi_1(U, p)} \pi_1(U_2, p).$$

Demostración: Como los isomorfismos de revestimientos principales punteados son únicos, dar un revestimiento principal punteado de grupo G en $U_1 \cup U_2$ es dar uno en cada abierto U_i , de modo que coincidan en la intersección.

Es decir, tenemos un producto fibrado

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}}(\pi_1(U_1 \cup U_2, p), G) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}}(\pi_1(U_1, p), G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}}(\pi_1(U_1, p), G) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}}(\pi_1(U_1 \cap U_2, p), G) \end{array}$$

Parte IV
Cuarto Curso

Capítulo 9

Geometría Algebraica I

9.1. Cohomología de Haces

Un módulo **diferencial** es un módulo con un endomorfismo de cuadrado nulo,

$$\begin{aligned} (M, d), \quad d: M &\longrightarrow M, \quad d^2 = 0, \\ Z = \{\text{ciclos}\} &= \text{Ker } d \\ B = \{\text{bordes}\} &= \text{Im } d \\ \text{Im } d &\subseteq \text{Ker } d \end{aligned}$$

y la **cohomología** del módulo diferencial es el módulo $H(M) = Z/B$.

Un morfismo de módulos diferenciales $\varphi: M \rightarrow N$ es un morfismo de módulos que conmuta con las diferenciales, $\varphi d = d\varphi$, e induce un morfismo en cohomología,

$$\varphi: H(M) \longrightarrow H(N), \quad \varphi[c] = [\varphi(c)].$$

Teorema: Si $0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \rightarrow 0$ es una sucesión exacta de módulos diferenciales, tenemos un morfismo de conexión δ y un **triángulo exacto** (la imagen de cada morfismo coincide con el núcleo del siguiente)

$$\begin{array}{ccc} H(M') & \xrightarrow{i} & H(M) \\ & \searrow \delta & \swarrow p \\ & & H(M'') \end{array}$$

Demostración: Definido el *connecting* δ , es rutinario comprobar la exactitud.

$$\begin{aligned} [m''] &\in H(M''), \\ dm'' &= 0, \text{ hence } m'' = p(m), \\ p(dm) &= d(p(m)) = dm'' = 0, \\ dm &\in M', \text{ and } d(dm) = 0 \\ \delta([m'']) &= [dm] \in H(M'). \end{aligned}$$

No depende del representante m elegido:

Si $p(m) = p(n)$, entonces $n - m \in M'$, $dn - dm \in dM'$, y $[dn] = [dm]$ en $H(M')$. q.e.d.

Si el módulo está graduado, $M = \bigoplus_n M_n$, y la diferencial $d_n: M_n \rightarrow M_{n+1}$ es de grado 1, es un **complejo** y su cohomología también está graduada,

$$H(M) = \bigoplus_n H^n(M), \quad \text{donde } H^n(M) = \text{Ker } d_n / \text{Im } d_{n-1}.$$

Los morfismos de complejos son los morfismos diferenciales $\varphi: \bigoplus_n M_n \rightarrow \bigoplus_n N_n$ homogéneos, $\varphi(M_n) \subseteq N_n$, e inducen morfismos $\varphi: H^n(M) \rightarrow H^n(N)$. Por el teorema, toda sucesión exacta de complejos, induce una sucesión exacta larga de cohomología

$$\dots \rightarrow H^{n-1}(M'') \xrightarrow{\delta} H^n(M') \rightarrow H^n(M) \rightarrow H^n(M'') \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(M') \rightarrow \dots$$

Lema de la Serpiente: Dado un diagrama conmutativo de filas exactas

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

consideramos el complejo $R = M \oplus N \oplus 0 \dots$, donde la diferencial es f sobre M y nula en N ; y análogamente R' y R'' .

La sucesión exacta $0 \rightarrow R' \rightarrow R \rightarrow R'' \rightarrow 0$ induce, en cohomología, la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \text{Ker } f' \rightarrow \text{Ker } f \rightarrow \text{Ker } f'' \xrightarrow{\delta} \text{Coker } f' \rightarrow \text{Coker } f \rightarrow \text{Coker } f'' \rightarrow 0$$

Definición: Un haz de grupos abelianos \mathcal{F} sobre un espacio topológico X es **flasco** cuando el morfismo de restricción $\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ es epiyectivo para todo abierto U de X .

Lema: Si una sucesión $0 \rightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{i} \mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ es exacta, y \mathcal{F}' es flasco, entonces también es exacta, para todo abierto U , la sucesión

$$0 \rightarrow \mathcal{F}'(U) \xrightarrow{i} \mathcal{F}(U) \xrightarrow{p} \mathcal{F}''(U) \rightarrow 0$$

Demostración: Basta ver que p es epiyectiva. Si $s'' \in \mathcal{F}''(U)$, consideramos los pares (V, s) , donde $s \in \mathcal{F}(V)$, $p(s) = s''|_V$, y por el lema de Zorn, hay un elemento maximal (V, s) .

Si $V \neq U$, y $x \in U - V$, como $\mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_x''$ es epiyectiva, existe un entorno W de x , y $w \in \mathcal{F}(W)$, tal que $p(w) = s''$. Como \mathcal{F}' es flasco, y $p(s - w) = 0$ en $V \cap W$, existe $s' \in \mathcal{F}'(W)$ que coincide con $s - w$ en $V \cap W$.

Ahora $w + s' \in \mathcal{F}(W)$ y $s \in \mathcal{F}(V)$ coinciden en $V \cap W$, y definen una sección de \mathcal{F} en $U \cup W$ que se proyecta en s'' , contra el carácter maximal de (V, s) .

Corolario: Si $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ exacta y $\mathcal{F}', \mathcal{F}$ son flascos, también lo es \mathcal{F}'' .

Demostración:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X) & \longrightarrow & \mathcal{F}''(X) \\ \text{epi} \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}''(U) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Definición: Si \mathcal{F} es un haz de grupos abelianos, $C^0\mathcal{F}$ es el haz flasco

$$(C^0\mathcal{F})(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x.$$

Como \mathcal{F} es haz, se inyecta en $C^0\mathcal{F}$. Si $\mathcal{F}_1 = (C^0\mathcal{F})/\mathcal{F}$ es el haz cociente,

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow C^0\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow 0$$

y repetimos el proceso, $0 \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow C^0\mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2 \rightarrow 0$. Ponemos $C^1\mathcal{F} = C^0\mathcal{F}_1, \dots$

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow C^0\mathcal{F} \rightarrow C^1\mathcal{F} \rightarrow C^2\mathcal{F} \rightarrow \dots \rightarrow C^n\mathcal{F} \rightarrow \dots$$

$C^\bullet \mathcal{F}: C^0 \mathcal{F} \rightarrow C^1 \mathcal{F} \rightarrow C^2 \mathcal{F} \rightarrow \dots$ es la **resolución de Godement** de \mathcal{F} .

Tomando secciones globales obtenemos un complejo

$$\Gamma(X, C^\bullet \mathcal{F}): \Gamma(X, C^0 \mathcal{F}) \xrightarrow{d_0} \Gamma(X, C^1 \mathcal{F}) \xrightarrow{d_1} \Gamma(X, C^2 \mathcal{F}) \xrightarrow{d_2} \dots$$

El n -ésimo **grupo de cohomología** de X con coeficientes en el haz \mathcal{F} es

$$H^n(X, \mathcal{F}) = H^n[\Gamma(X, C^\bullet \mathcal{F})] = \text{Ker } d_n / \text{Im } d_{n-1}$$

y diremos que \mathcal{F} es **acíclico** si $H^n(X, \mathcal{F}) = 0$, $n \geq 1$.

Un morfismo de haces $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ induce morfismos $f_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$; luego un morfismo de haces $f_0: C^0 \mathcal{F} \rightarrow C^0 \mathcal{G}$, que a su vez induce un morfismo $\mathcal{F}_1 = (C^0 \mathcal{F})/\mathcal{F} \rightarrow (C^0 \mathcal{G})/\mathcal{G} = \mathcal{G}_1, \dots$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & C^0 \mathcal{F} & \longrightarrow & C^1 \mathcal{F} & \longrightarrow & C^2 \mathcal{F} & \longrightarrow & \dots \\ & & f \downarrow & & f_0 \downarrow & & f_1 \downarrow & & f_2 \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & C^0 \mathcal{G} & \longrightarrow & C^1 \mathcal{G} & \longrightarrow & C^2 \mathcal{G} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Tomando secciones globales tenemos un morfismo de complejos $\Gamma(X, C^\bullet \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(X, C^\bullet \mathcal{G})$ que induce morfismos entre los grupos de cohomología

$$f: H^n(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^n(X, \mathcal{G}).$$

Teorema: $H^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$.

Demostración: $0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow C^0 \mathcal{F}(X) \xrightarrow{p} \mathcal{F}_1(X)$, y $0 \rightarrow \mathcal{F}_1(X) \xrightarrow{i} C^1 \mathcal{F}(X)$ son exactas.

Concluimos porque $d_0 = i \circ p$, y $H^0(X, \mathcal{F}) = \text{Ker } d_0$.

Teorema: *Todo haz flasco es acíclico.*

Demostración: $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow C^0 \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow 0$ es exacta, y \mathcal{F} es flasco; luego

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow C^0 \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}_1(X) \rightarrow 0 \text{ es exacta, y } \mathcal{F}_1 \text{ es flasco,}$$

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_1(X) \rightarrow C^1 \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}_2(X) \rightarrow 0 \text{ es exacta, y } \mathcal{F}_2 \text{ es flasco, etc.}$$

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow C^0 \mathcal{F}(X) \rightarrow C^1 \mathcal{F}(X) \rightarrow C^2 \mathcal{F}(X) \rightarrow \dots \text{ es exacta.}$$

Teorema: *Toda sucesión exacta de haces $0 \rightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{i} \mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ induce una sucesión exacta larga de cohomología,*

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}') \xrightarrow{i} H^0(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{p} H^0(X, \mathcal{F}'') \xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathcal{F}') \xrightarrow{i} H^1(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{p} H^1(X, \mathcal{F}'') \xrightarrow{\delta} \dots$$

Demostración: Las sucesiones $0 \rightarrow \mathcal{F}'_x \rightarrow \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}''_x \rightarrow 0$ son exactas; luego también

$$0 \rightarrow C^0 \mathcal{F}'(X) \rightarrow C^0 \mathcal{F}(X) \rightarrow C^0 \mathcal{F}''(X) \rightarrow 0$$

es exacta, y $0 \rightarrow \mathcal{F}'_1 \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}''_1 \rightarrow 0$ es exacta por el lema de la serpiente.

Obtenemos una sucesión exacta de complejos $0 \rightarrow C^\bullet \mathcal{F}'(X) \rightarrow C^\bullet \mathcal{F}(X) \rightarrow C^\bullet \mathcal{F}''(X) \rightarrow 0$ que induce la sucesión exacta larga de cohomología del enunciado.

Teorema de De Rham: *Si $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{R}^0 \rightarrow \mathcal{R}^1 \rightarrow \mathcal{R}^2 \rightarrow \dots$ es una **resolución acíclica** de un haz \mathcal{F} (la sucesión es exacta y los haces \mathcal{R}^n son acíclicos), tenemos isomorfismos*

$$H^n(X, \mathcal{F}) \simeq H^n[\mathcal{R}^\bullet(X)].$$

Demostración: Las sucesiones $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{R}^0 \rightarrow \mathcal{C}_1 \rightarrow 0$ y $0 \rightarrow \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{R}^1 \rightarrow \mathcal{C}_2 \rightarrow 0$ son exactas, y las correspondientes sucesiones exactas largas de cohomología muestran que

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{R}^0(X) \xrightarrow{d_0} \mathcal{C}_1(X) \xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow 0 \text{ es exacta,}$$

$$\delta: H^{n-1}(X, \mathcal{C}_1) \xrightarrow{\sim} H^n(X, \mathcal{F}) \text{ es un isomorfismo,}$$

$$0 \rightarrow \mathcal{C}_1(X) \rightarrow \mathcal{R}^1(X) \rightarrow \mathcal{C}_2(X) \text{ es exacta,}$$

$$H^0[\mathcal{R}^\bullet(X)] = \text{Ker } d_0 = \mathcal{F}(X)$$

$$H^1[\mathcal{R}^\bullet(X)] = \mathcal{C}_1(X)/\text{Im } d_0 = H^1(X, \mathcal{F})$$

y se acaba por inducción sobre n , al ser $H^n(X, \mathcal{F}) = H^{n-1}(X, \mathcal{C}_1)$. q.e.d.

1. Si un haz \mathcal{F} está concentrado en un número finito de puntos cerrados x_1, \dots, x_n (es decir, $\mathcal{F}_x = 0$ cuando $x \neq x_i$), entonces $\mathcal{F}(U) = \bigoplus_{x_i \in U} \mathcal{F}_{x_i}$, y \mathcal{F} es flasco.
2. Sea \mathbb{Z} el haz constante en el espacio finito $X = \{x_1, x_2, y_1, y_2\}$, $x_i < y_j$, que realiza a la circunferencia (p. 211). En fibra, la sucesión exacta $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow C^0\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow 0$ es

$$0 \longrightarrow \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} \\ & \swarrow & \searrow \\ & \mathbb{Z} & \\ & \swarrow & \searrow \\ \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} \\ & \swarrow & \searrow \\ & \mathbb{Z}^3 & \\ & \swarrow & \searrow \\ \mathbb{Z}^3 & & \mathbb{Z}^3 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ & \swarrow & \searrow \\ & \mathbb{Z}^2 & \\ & \swarrow & \searrow \\ \mathbb{Z}^2 & & \mathbb{Z}^2 \end{array} \longrightarrow 0$$

y el haz \mathcal{F}_1 es flasco porque está concentrado en dos puntos cerrados. Luego $H^i(X, \mathbb{Z}) = 0$, $i \geq 2$; y $H^0(X, \mathbb{Z}) = H^1(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ porque son el núcleo y conúcleo de

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^4 &= (C^0\mathbb{Z})(X) \xrightarrow{d} \mathcal{F}_1(X) = \mathbb{Z}^4 \\ d(x_1, x_2, y_1, y_2) &= (y_1 - x_1, y_2 - x_1, y_1 - x_2, y_2 - x_2) \end{aligned}$$

Teorema: Sea \mathcal{F} un haz sobre un espacio noetheriano X . Si $\mathcal{F}_x = 0$ en todo punto x de dimensión $> d$, entonces $H^p(X, \mathcal{F}) = 0$ para todo $p > d$. En particular, si la dimensión de X es finita,

$$H^p(X, \mathcal{F}) = 0, \quad p > \dim X.$$

Demostración: (Ver también p. 271). Procedemos por inducción sobre d , y es obvio cuando $d = -1$.

Sea $\{x_i\}$ la familia de los puntos de X de dimensión d .

El prehaz $\mathcal{F}_d(U) = \bigoplus_{x_i \in U} \mathcal{F}_{x_i}$ es un haz (flasco) porque todo abierto es compacto.

Tenemos un morfismo natural $\phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_d$ porque el soporte de una sección de \mathcal{F} , al ser cerrado, tiene un número finito de componentes irreducibles, y por tanto un número finito de puntos de dimensión d .

Además \mathcal{F}_d tiene fibra nula en los puntos de dimensión $> d$, y $(\mathcal{F}_d)_{x_i} = \mathcal{F}_{x_i}$, de modo que $\text{Ker } \phi$ y $\text{Coker } \phi$ tienen fibra nula en todo punto de dimensión $> d - 1$, y

$$\begin{aligned} H^p(X, \text{Ker } \phi) &= H^p(X, \text{Coker } \phi) = 0, \quad p \geq d \\ 0 &\longrightarrow \text{Ker } \phi \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \text{Im } \phi \longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{9.1}$$

$$\begin{aligned} H^p(X, \mathcal{F}) &= H^p(X, \text{Im } \phi), \quad p \geq d, \\ 0 &\longrightarrow \text{Im } \phi \longrightarrow \mathcal{F}_d \longrightarrow \text{Coker } \phi \longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{9.2}$$

$$H^p(X, \text{Im } \phi) = 0, \quad p > d.$$

Teorema: Todo A -módulo M define un haz \widetilde{M} en $\text{Spec } A$, asociado al prehaz $U \rightsquigarrow M_U$, y $\Gamma(\text{Spec } A, \widetilde{M}) = M$, (p. 129). *Estos haces \widetilde{M} son acíclicos,*

$$H^n(\text{Spec } A, \widetilde{M}) = 0, \quad n \geq 1.$$

Demostración: Si $j: U_f \rightarrow X = \text{Spec } A$ es un abierto básico, pondremos $\mathcal{F}_f = j_*j^*\mathcal{F}$, de modo que $\mathcal{F}_f(U) = \mathcal{F}(U_f \cap U)$, y el haz \mathcal{F}_f es flasco cuando \mathcal{F} lo es. Además, $(\widetilde{M})_f$ es el haz asociado al A -módulo M_f .

Procedemos por inducción sobre n y, dada una clase de cohomología $c \in H^n(X, \widetilde{M})$, primero vamos a ver que cada punto x tiene un entorno básico U_f tal que $c = 0$ en $H^n(X, \widetilde{M}_f)$.

Truncamos una resolución flasca $0 \rightarrow \widetilde{M} \rightarrow \mathcal{C}^\bullet$ en la etapa n -ésima, de modo que tenemos un diagrama conmutativo, donde \mathcal{K} es la imagen de $\mathcal{C}^{n-1} \rightarrow \mathcal{C}^n$ y \mathcal{K}' es la imagen de $\mathcal{C}_f^{n-1} \rightarrow \mathcal{C}_f^n$,

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \widetilde{M} & \longrightarrow & \mathcal{C}^0 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathcal{C}^{n-1} & \longrightarrow & \mathcal{K} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \widetilde{M}_f & \longrightarrow & \mathcal{C}_f^0 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathcal{C}_f^{n-1} & \longrightarrow & \mathcal{K}' & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad \mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}_f$$

y la segunda sucesión también es exacta porque, en $p = 1, \dots, n-1$ la cohomología del complejo de secciones en cualquier abierto básico U_g es $H^p(U_f \cap U_g, \widetilde{M}) = H^p(\text{Spec } A_{fg}, \widetilde{M}) = 0$.

Luego $c \in H^n(X, \widetilde{M}) = \text{Coker}(\mathcal{C}^{n-1}(X) \rightarrow \mathcal{K}(X))$ estará representada por una sección $s \in \mathcal{K}(X)$, y en un entorno U_f de x vendrá de una sección $\bar{s} \in \mathcal{C}^{n-1}(U_f) = \mathcal{C}_f^{n-1}(X)$.

Concluimos que $c = 0$ en $H^n(X, \widetilde{M}_f) = \text{Coker}(\mathcal{C}_f^{n-1}(X) \rightarrow \mathcal{K}'(X))$, según lo afirmado.

Ahora, por compacidad $X = U_{f_1} \cup \dots \cup U_{f_r}$, donde $c = 0$ en $H^n(X, \widetilde{M}_{f_i})$, y la sucesión exacta larga de cohomología asociada a (la hacificación de) la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M_{f_1} \oplus \dots \oplus M_{f_r} \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

muestra que el morfismo $H^n(X, \widetilde{M}) \rightarrow \oplus_i H^n(X, \widetilde{M}_{f_i})$ es inyectivo (y por tanto $c = 0$). Cuando $n = 1$, porque el morfismo $\oplus_i M_{f_i} = H^0(X, \oplus_i \widetilde{M}_{f_i}) \rightarrow H^0(X, \widetilde{N}) = N$ es epiyectivo, y cuando $n > 1$, porque $H^{n-1}(X, \widetilde{N}) = 0$ por inducción.

Nota: En las curvas, este teorema es de demostración mucho más sencilla. Sea X un espacio con un punto denso x cuyos entornos son los conjuntos de complementario finito. En X los haces constantes son flascos, y también los haces \mathcal{F} con fibra nula en x porque el soporte de cualquier sección $s \in \mathcal{F}(U)$, al ser cerrado, está formado por un número finito de puntos cerrados, y s puede prolongarse por 0 fuera de U . En general, las sucesiones exactas 9.1 y 9.2 del morfismo natural $\phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_x$ permiten concluir que $H^p(X, \mathcal{F}) = 0$, $p > 1$, porque tanto $\text{Ker } \phi$ como $\text{Coker } \phi$ tienen fibra nula en x .

Si además $X = \text{Spec } A$, donde A es un anillo noetheriano de dimensión 1 íntegro, veamos que $H^p(X, \widetilde{M}) = 0$, $p \geq 1$. Como el submódulo de torsión T tiene fibra nula en el punto genérico x , define un haz flasco, y la sucesión exacta de cohomología asociada a (la hacificación de) la sucesión exacta $0 \rightarrow T \rightarrow M \rightarrow M/T \rightarrow 0$ muestra que podemos suponer que M carece de torsión. Ahora la sucesión exacta de cohomología asociada a la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M_x \longrightarrow M_x/M \longrightarrow 0$$

permite concluir, porque el haz \widetilde{M}_x es flasco, la fibra en x del haz $(M_x/M)^\sim$ es nula, y el morfismo $M_x = H^0(X, \widetilde{M}_x) \rightarrow H^0(X, (M_x/M)^\sim) = M_x/M$ es epiyectivo.

Cohomología e Imagen Directa: Sea $f: X \rightarrow Y$ una aplicación continua y sea $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{R}^\bullet$ una resolución flasca de un haz \mathcal{F} en X .

Los haces $f_*\mathcal{R}^n$ son flascos; pero la sucesión $0 \rightarrow f_*\mathcal{F} \rightarrow f_*\mathcal{R}^\bullet$ puede no ser exacta. Si lo es, la imagen directa conserva cohomología,

$$H^n(Y, f_*\mathcal{F}) = H^n[\Gamma(Y, f_*\mathcal{R}^\bullet)] = H^n[\Gamma(X, \mathcal{R}^\bullet)] = H^n(X, \mathcal{F}).$$

Teorema: $H^n(X, i_*\mathcal{F}) = H^n(Y, \mathcal{F})$, cuando $i: Y \rightarrow X$ es un cerrado de X .

Demostración: El funtor i_* es exacto porque $(i_*\mathcal{F})_x = \mathcal{F}_x$ cuando $x \in Y$, y 0 en otro caso.

Teorema: Si Y admite una base de abiertos V tales que \mathcal{F} es acíclico en $f^{-1}V$,

$$H^n(Y, f_*\mathcal{F}) = H^n(X, \mathcal{F}).$$

Demostración: Por hipótesis las siguientes sucesiones son exactas

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}(f^{-1}V) & \longrightarrow & \mathcal{R}^\bullet(f^{-1}V) & & \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & (f_*\mathcal{F})(V) & \longrightarrow & (f_*\mathcal{R}^\bullet)(V) & & \end{array}$$

y tomando límite inductivo sobre los entornos de $y \in Y$, vemos que $0 \rightarrow (f_*\mathcal{F})_y \rightarrow (f_*\mathcal{R}^\bullet)_y$ es exacta; luego $f_*\mathcal{R}^\bullet$ es una resolución de $f_*\mathcal{F}$ y terminamos.

9.2. Esquemas y Haces Coherentes

Un **espacio anillado** (X, \mathcal{O}_X) es un espacio topológico X con un haz de anillos \mathcal{O}_X , y es un espacio **localmente anillado** si las fibras $\mathcal{O}_{X,x}$ son anillos locales. Diremos que los elementos del anillo $\mathcal{O}_X(U)$ son las **funciones** en el abierto U .

Un **morfismo** $(f, \phi): (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ es una aplicación continua $f: X \rightarrow Y$ con un morfismo de haces $\phi: \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ (morfismos de anillos $\mathcal{O}_Y(V) \rightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}V)$ compatibles con los morfismos de restricción), y es un morfismo de espacios localmente anillados si además los morfismos $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ son locales, $\mathfrak{m}_x \cap \mathcal{O}_{Y,f(x)} = \mathfrak{m}_{f(x)}$.

$(\text{Spec } A, \tilde{A})$ es un espacio localmente anillado, y cada morfismo de anillos $\phi: A \rightarrow B$ define un morfismo de espacios localmente anillados $(f, \phi): (\text{Spec } B, \tilde{B}) \rightarrow (\text{Spec } A, \tilde{A})$, donde $f: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ es la aplicación continua inducida por ϕ , y $\phi: \tilde{A} \rightarrow f_*\tilde{B}$ es el morfismo asociado al morfismo de prehaces $A_U \rightarrow B_{f^{-1}U} \rightarrow \tilde{B}(f^{-1}U) \rightarrow (f_*\tilde{B})(U)$.

$$\text{Hom}(A, B) = \text{Hom}(\text{Spec } B, \text{Spec } A).$$

En efecto, cada morfismo $(f, \phi): (\text{Spec } B, \tilde{B}) \rightarrow (\text{Spec } A, \tilde{A})$ de espacios localmente anillados induce un morfismo de anillos $\phi: A = \Gamma(\text{Spec } A, \tilde{A}) \rightarrow \Gamma(\text{Spec } B, \tilde{B}) = B$ que lo reconstruye, pues al ser local el morfismo de anillos $A_{f(y)} \rightarrow B_y$, el siguiente cuadrado conmutativo muestra que f es la aplicación inducida por ϕ ,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{f(y)} & \xrightarrow{\phi} & B_y \end{array}$$

Ejemplo: Si A es íntegro, los anillos locales A_x son subanillos del cuerpo de fracciones Σ , y el morfismo de prehaces $A_U \rightarrow \bigcap_{x \in U} A_x$ es isomorfismo en fibras; luego el haz \tilde{A} es

$$\tilde{A}(U) = \bigcap_{x \in U} A_x.$$

Definiciones: Un espacio anillado (X, \mathcal{O}_X) es un **esquema afín** si es isomorfo a $(\text{Spec } A, \tilde{A})$ para algún anillo, que ha de ser $A = \mathcal{O}_X(X)$, y es un **esquema** si cada punto tiene un entorno abierto U , y por tanto una base de entornos, tal que $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ es un esquema afín.

Los morfismos de esquemas son los morfismos de espacios localmente anillados.

Un esquema X es **noetheriano** si es unión finita de abiertos afines $U_i = \text{Spec } A_i$, donde el anillo A_i es noetheriano. En tal caso todo abierto afín es $U = \text{Spec } A$, con A noetheriano.

En efecto, podemos suponer que $X = \text{Spec } A$, y una cadena de ideales de A estabiliza precisamente cuando estabiliza en cada anillo A_i .

Todo esquema noetheriano X es un espacio topológico noetheriano en que cada cerrado irreducible tiene punto genérico, y por tanto coincide con el espectro de su topología (p. 209) así que $H^p(X, \mathcal{F}) = 0$ cuando $p > \dim X$ (p. 230).

Un \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{M} es **casicoherente** si el esquema X se recubre por abiertos afines $U = \text{Spec } A$ en que $\mathcal{M}|_U = \tilde{M}$ para algún A -módulo M (luego en todo abierto afín $V \subset U$).

Cuando X es noetheriano, \mathcal{M} es **coherente** si además M es un A -módulo finito.

Los haces localmente libres son casicoherentes, y las clases de isomorfismo de haces de línea forman un grupo abeliano con el producto tensorial $\otimes_{\mathcal{O}_X}$, el **grupo de Picard** $\text{Pic}(X)$.

La unidad es \mathcal{O}_X , y el inverso de \mathcal{L} es $\mathcal{L}^{-1} = \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$.

Proposición: *Todo haz casicoherente \mathcal{M} en $\text{Spec } A$ es $\mathcal{M} = \tilde{M}$ para un A -módulo M .*

Demostración: Pongamos $M = \mathcal{M}(\text{Spec } A)$.

Los morfismos $M_U \rightarrow \mathcal{M}(U)$ inducen un isomorfismo $\tilde{M} \rightarrow \mathcal{M}$.

En efecto, $\text{Spec } A$ se recubre por abiertos básicos U_i en que $\mathcal{M}|_{U_i} = \tilde{M}_i$, y el siguiente diagrama conmutativo de filas exactas muestra que $M_f = \mathcal{M}(U_f)$,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M_f & \longrightarrow & \bigoplus_i \mathcal{M}(U_i)_f & \cong & \bigoplus_{i,j} \mathcal{M}(U_i \cap U_j)_f \\ & & \downarrow & & \parallel & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}(U_f) & \longrightarrow & \bigoplus_i \mathcal{M}(U_i \cap U_f) & \cong & \bigoplus_{i,j} \mathcal{M}(U_i \cap U_j \cap U_f) \end{array}$$

Definiciones: Si U es un abierto de X , el esquema $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ es un **subesquema abierto** de X . Si \mathcal{I} es un haz de ideales casicoherente, el soporte Y del haz de anillos $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ es un cerrado de X , y el esquema $(Y, \mathcal{O}_X/\mathcal{I})$ es el **subesquema cerrado** de X definido por \mathcal{I} .

Un morfismo $Y \rightarrow X$ es una **inmersión** abierta o cerrada si define un isomorfismo de Y con un subesquema abierto o cerrado de X .

Un esquema es **íntegro** si es irreducible (tiene un punto genérico p_g) y los anillos locales $\mathcal{O}_{X,x}$ son reducidos, de modo que $\mathcal{O}_X(U) \subseteq \Sigma$, donde $\Sigma = \mathcal{O}_{X,p_g}$ es cuerpo.

Un esquema sobre un cuerpo k es un morfismo $X \rightarrow \text{Spec } k$ (y equivale a dar una estructura de k -álgebra en $\mathcal{O}_X(U)$, de modo que los morfismos de restricción sean morfismos de k -álgebras), y es un esquema de **tipo finito** sobre k si es unión finita de abiertos afines $U_i = \text{Spec } k[\xi_1, \dots, \xi_n]$.

Si además es de dimensión 1, es una **curva** sobre el cuerpo k .

Una curva íntegra X es **completa** si todo anillo de valoración discreta \mathcal{V} de Σ , trivial sobre k , centra en un único punto $x \in X$ (i.e., \mathcal{V} domina al anillo local $\mathcal{O}_{X,x} \subset \Sigma$), y es **no singular** si sus anillos locales $\mathcal{O}_{X,x}$ son regulares (de valoración discreta).

Definición: La **variedad de Riemann** de una extensión finita Σ de $k(t)$ es el espacio anillado

$$X = \{\text{anillos de valoración discreta de } \Sigma \text{ triviales sobre } k\}$$

$$\mathcal{O}_X(U) = \bigcap_{x \in U} \mathcal{O}_x$$

donde \mathcal{O}_x es el anillo de valoración de $x \in X$, y los cerrados $\neq X$ son los conjuntos finitos que no contienen al punto genérico p_g que define el anillo de valoración trivial Σ .

La **recta proyectiva** \mathbb{P}_1 sobre el cuerpo k es la variedad de Riemann de $k(t)$.

Por ejemplo, toda curva completa y no singular C sobre un cuerpo k es la variedad de Riemann de su cuerpo de funciones racionales $\Sigma = \mathcal{O}_{C,p_g}$.

Teorema: *La variedad de Riemann (X, \mathcal{O}_X) es una curva completa y no singular.*

Demostración: Si B (resp. B') es el cierre entero de $k[t]$ (resp. $k[\frac{1}{t}]$) en Σ , sabemos que los morfismos $k[t] \rightarrow B$ y $k[\frac{1}{t}] \rightarrow B'$ son finitos (p. 144)

$$X = U \cup U', \quad \begin{cases} U = \{x \in X : v_x(t) \geq 0\} = \text{Spec } B \\ U' = \{x \in X : v_x(t) \leq 0\} = \text{Spec } B' \end{cases}$$

donde U, U' son abiertos de X , porque $X - U = (\frac{1}{t})_0$, y $X - U' = (t)_0$.

Se concluye porque B y B' son dominios de Dedekind (p. 144).

Definiciones: El grupo $\text{Div}(X)$ de los **divisores** de X es el grupo abeliano libre generado por los puntos cerrados de X . El grado de un punto cerrado $\text{gr } x = [\kappa(x) : k]$ es finito por el Teorema de los Ceros, y el **grado** de un divisor $D = \sum_x n_x \cdot x$ es

$$\text{gr } D = \sum_x n_x (\text{gr } x).$$

Toda función racional $0 \neq f \in \Sigma$ tiene un número finito de ceros y polos (en un dominio de Dedekind toda función no nula tiene un número finito de ceros) y su divisor es

$$D(f) = \sum_x v_x(f) \cdot x$$

de modo que $D(f'f) = D(f') + D(f)$. Dos divisores son **linealmente equivalentes**, $D' \sim D$, si difieren en un divisor de alguna función racional,

$$D' = D + D(f),$$

y las clases de equivalencia lineal de divisores forman un grupo $\text{Div}(X)/\sim$.

Teorema: $\text{gr } D(f) = 0$.

Demostración: Si f es algebraica sobre k , entonces $D(f) = 0$.

Si f es trascendente, como es algebraica sobre $k(t)$, también t es algebraica sobre $k(f)$, y Σ es una extensión finita de $k(f)$.

Si B es el cierre entero de $k[f]$ en Σ , es un $k[f]$ -módulo finito (p. 144) sin torsión; luego libre,

$$k[f]^n \simeq B$$

y localizando en el punto genérico vemos que $n = [\Sigma : k(f)]$.

El anillo de la fibra del origen, al ser de dimensión 0, descompone en suma directa (p. 130)

$$\begin{aligned} k^n \simeq B/fB &= (B_{x_1}/fB_{x_1}) \oplus \dots \oplus (B_{x_r}/fB_{x_r}) \\ v_{x_i}(f) &= l(B_{x_i}/fB_{x_i}) \end{aligned}$$

y vemos que $n = \sum v_{x_i}(f)(\text{gr } x_i)$, donde x_i recorre los ceros de f .

El número de ceros de f es $n = [\Sigma : k(f)]$.

El número de polos de f , que es el número de ceros de $\frac{1}{f}$, es $[\Sigma : k(\frac{1}{f})]$.

Ambos coinciden porque $k(\frac{1}{f}) = k(f)$.

q.e.d.

Cada divisor D tiene asociado un haz de línea L_D ,

$$L_D(U) = \{f \in \Sigma : D + D(f) \geq 0 \text{ en } U\}.$$

En efecto, para cada punto x podemos elegir un parámetro $t \in \mathcal{O}_x$ y un entorno U en que t no tenga otros ceros ni polos, ni el divisor D tenga otros puntos, de modo que si n es el coeficiente de x en D , tenemos que L_D es libre en U ,

$$L_D|_U = t^{-n} \mathcal{O}_X|_U.$$

Si $D' = D + D(h)$, entonces $\phi: L_{D'} \rightarrow L_D$, $\phi(f) = hf$, es un isomorfismo, así que el haz L_D sólo depende de la clase $[D]$.

Además, el morfismo $\phi: L_{D_1} \otimes_{\mathcal{O}_X} L_{D_2} \rightarrow L_{D_1+D_2}$, $\phi(f_1 \otimes f_2) = f_1 f_2$, es un isomorfismo porque lo es en cada fibra,

$$L_{D_1+D_2} = L_{D_1} \otimes_{\mathcal{O}_X} L_{D_2}.$$

Teorema: $\text{Pic}(X) = \text{Div}(X)/\sim$.

Demostración: Un isomorfismo $L_{D'} \xrightarrow{\sim} L_D$ define un isomorfismo $\Sigma \simeq \Sigma$ entre sus fibras genéricas, que será una homotecia, de razón h . En cada abierto tenemos que $0 \leq D' + D(f)$ si y sólo si $0 \leq D + D(hf) = D + D(h) + D(f)$; luego $D' = D + D(h)$, y $D' \sim D$.

Además, dado un haz de línea \mathcal{L} , si fijamos un isomorfismo $\mathcal{L}_{p_g} \xrightarrow{\sim} \Sigma$, podemos ver en Σ las secciones de \mathcal{L} y sus fibras \mathcal{L}_x , que son \mathcal{O}_x -módulos libre de rango 1; luego $\mathcal{L}_x = \mathfrak{m}_x^{n_x}$ para algún entero n_x , y $n_x = 0$ en todos los puntos, salvo un número finito, porque $\mathcal{L}(U) = f \mathcal{O}_X(U)$ en cada abierto afín U , y f tiene un número finito de ceros y polos.

Si ponemos $D = -\sum_x n_x \cdot x$, el morfismo natural $\mathcal{L} \rightarrow L_D$ es un isomorfismo.

Corolario: $\text{Pic}(\mathbb{P}_1) = \mathbb{Z}$, y pondremos $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(n) = L_{np_\infty}$.

Demostración: Hemos de ver que todo divisor D de grado 0 es $D = D(f)$, con $f \in k(t)$.

Como ambos son de grado 0, basta ver que coinciden en la parte afín $\text{Spec } k[t]$.

Si en la parte afín $D = n_1 x_1 + \dots + n_r x_r$, tomamos polinomios $p_i(t)$ que generen los ideales maximales \mathfrak{m}_{x_i} de $k[t]$, y D coincide con el divisor de $f(t) = p_1(t)^{n_1} \dots p_r(t)^{n_r}$.

Morfismos: Cada k -morfismo $\Sigma' \rightarrow \Sigma$ induce un morfismo de k -esquemas $\pi: X \rightarrow X'$ entre las variedades de Riemann. En efecto, $\mathcal{O}_{x'} = \mathcal{O}_x \cap \Sigma'$ es un anillo de valoración discreta de Σ' trivial sobre k , y ponemos $x' = \pi(x)$. Como sus fibras son finitas, π es continua, y el morfismo de haces $\mathcal{O}_{X'} \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_X$ se define por las inclusiones

$$\mathcal{O}_{X'}(U) = \bigcap_{x' \in U} \mathcal{O}_{x'} \longrightarrow \mathcal{O}_X(\pi^{-1}U) = \bigcap_{\pi(x) \in U} \mathcal{O}_x.$$

Cuando $U = \text{Spec } A$ es afín, $\pi^{-1}(U) = \text{Spec } B$, donde el cierre entero B de A en Σ es un A -módulo localmente libre de rango $d = [\Sigma : \Sigma']$, el **grado** del morfismo.

Por tanto, cada fibra de π puede verse como un divisor de grado $d(\text{gr } x')$,

$$\pi^*(x') = \sum_{\pi(x)=x'} l(B_x/\mathfrak{m}_{x'} B_x) \cdot x$$

lo que permite definir la imagen inversa $\pi^* D'$ de un divisor, y $L_{\pi^* D'} = \pi^*(L_{D'})$.

Así es todo k -morfismo de esquemas $X \rightarrow X'$ no constante.

9.3. Curvas y Teorema de Riemann-Roch

Teorema: $\dim_k H^p(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}(n)) = \begin{cases} n+1 & p=0 \\ 0 & p \neq 0 \end{cases}$

$$\dim_k H^p(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}(-n)) = \begin{cases} n-1 & p=1 \\ 0 & p \neq 1 \end{cases}$$

Demostración: Una vez probado que el haz $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}$ es acíclico, las sucesiones exactas

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(n) \rightarrow \mathcal{O}(n+1) \rightarrow k_\infty \rightarrow 0,$$

donde k_∞ es el haz k concentrado en el punto del infinito, permiten concluir.

La proyección $\pi: \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{A}^1$, que transforma el origen y el infinito en los dos puntos cerrados, y los restante en el punto denso, conserva la cohomología de los haces casicoherentes (pp. 231, 232). Además el haz $\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}$ admite la resolución flasca,

$$0 \rightarrow \begin{matrix} k[t, \frac{1}{t}] \\ \swarrow \quad \searrow \\ k[t] \quad k[\frac{1}{t}] \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} k[t, \frac{1}{t}] \\ \swarrow \quad \searrow \\ k[t, \frac{1}{t}] \quad k[t, \frac{1}{t}] \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 0 \\ \swarrow \quad \searrow \\ k[\frac{1}{t}]/k \quad k[t]/k \end{matrix} \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow H^0(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}) \rightarrow k[t, \frac{1}{t}] \rightarrow (k[\frac{1}{t}]/k) \oplus (k[t]/k) \rightarrow H^1(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}) \rightarrow 0$$

y terminamos porque el morfismo $k[t, \frac{1}{t}] \rightarrow (k[\frac{1}{t}]/k) \oplus (k[t]/k)$ es epiyectivo.

Teorema: *Los grupos de cohomología de todo haz coherente \mathcal{M} sobre una curva completa y no singular X son espacios vectoriales de dimensión finita.*

Demostración: Un morfismo $k(t) \rightarrow \Sigma$ define una proyección $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}_1$ que conserva la cohomología de los haces coherentes, y $\pi_* \mathcal{M}$ es un haz coherente en \mathbb{P}_1 porque $\pi^{-1}(\text{Spec } k[t]) = \text{Spec } B$, donde B es un $k[t]$ -módulo finito (p. 144). Luego podemos suponer que $X = \mathbb{P}_1$.

La torsión del haz coherente \mathcal{M} está concentrada en un número finito de puntos cerrados, donde su fibra es de dimensión finita; luego podemos suponer que es nula, y \mathcal{M} es un subhaz del haz constante \mathcal{M}_g .

Ahora una sección racional $s \in \mathcal{M}_g$ no nula define un haz de ideales \mathcal{I}

$$\mathcal{I}(U) = \{f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(U) : fs \in \mathcal{M}(U)\}.$$

El teorema es cierto para $\mathcal{I} \simeq \mathcal{O}(-n)$, y para $\mathcal{M}/\mathcal{I}s$ por inducción sobre el rango, y la sucesión exacta $0 \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/\mathcal{I}s \rightarrow 0$ permite concluir.

Definiciones: Pondremos $h^p(\mathcal{M}) = \dim H^p(X, \mathcal{M})$, y la **característica de Euler-Poincaré**

$$\chi(\mathcal{M}) = \chi(X, \mathcal{M}) = h^0(\mathcal{M}) - h^1(\mathcal{M})$$

es una función aditiva sobre los haces coherentes.

El **género** de una curva completa y no singular X es $g = h^1(\mathcal{O}_X)$.

Según el teorema anterior, $\chi(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}(n)) = n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$.

El cierre algebraico de k en Σ es $H^0(X, \mathcal{O}_X)$. Es una extensión finita de k , y supondremos siempre que coincide con k , de modo que $\chi(\mathcal{O}_X) = 1 - g$.

Teorema de Riemann-Roch (débil): $\chi(L_D) = 1 - g + \text{gr } D$.

Demostración: La sucesión exacta larga de cohomología de la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow L_D \longrightarrow L_{D+x} \longrightarrow \kappa(x) \longrightarrow 0$$

muestra que $\chi(L_{D+x}) = \chi(L_D) + \text{gr } x$.

Luego el teorema es cierto para L_D si y sólo si es cierto para L_{D+x} .

Como es cierto cuando $D = 0$, es cierto para todos los divisores.

Corolario: Una curva completa y no singular X es **racional**, $\Sigma_X \simeq k(t)$, si sólo si es de género 0 y tiene un punto racional.

Demostración: Si X es de género 0 y $\text{gr } x = 1$, entonces $\chi(L_x) = 1 - 0 + 1 = 2$.

Se sigue que $h^0(L_x) \geq 2$, y existe $f \in \Sigma$ con un único polo en x , y de orden 1.

Luego $\Sigma = k(f)$, porque $[\Sigma : k(f)] = n^\circ$ de polos de $f = 1$.

Corolario: Si X es una curva completa y no singular, todo abierto $U = X - x$ es afín.

Demostración: Tenemos que $h^0(L_{nx}) \geq 1 - g + n$.

Cuando $n \geq g + 1$, existe una función racional no constante $f: X \rightarrow \mathbb{P}_1$ que sólo tiene polos en el punto x ; luego $U = f^{-1}(\mathbb{A}_1)$ es afín.

Definición: Consideremos, en la categoría de haces coherentes sobre una curva X , el funtor $F(\mathcal{M}) = H^1(X, \mathcal{M})^*$. Es exacto por la izquierda, porque $H^2(X, \mathcal{M}) = 0$, y toda pareja está dominada por una mínima. En efecto, toda sucesión de epimorfismos

$$\mathcal{M}_\xi \xrightarrow{p_1} \mathcal{M}'_{\xi'} \xrightarrow{p_2} \mathcal{M}''_{\xi''} \xrightarrow{p_3} \dots$$

estabiliza porque $\text{Ker } p_1 \subseteq \text{Ker } (p_2 p_1) \subseteq \text{Ker } (p_3 p_2 p_1) \subseteq \dots$ y X es noetheriano.

Por el Teorema de Representabilidad, F es el límite inductivo de los funtores representados por las parejas mínimas; luego para todo haz coherente \mathcal{M} tenemos que,

$$H^1(X, \mathcal{M})^* = \varinjlim \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{M}_i) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X)$$

donde el haz casicoherente $\mathcal{D}_X = \varinjlim \mathcal{M}_i$ es el haz **dualizante** de la curva X .

Teorema: $\mathcal{D}_{\mathbb{P}_1} = \mathcal{O}(-2)$.

Demostración: $H^1(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}(-2)) \neq 0$, así que $\mathcal{O}(-2)$, con cualquier $\xi \in H^1(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}(-2))^*$ no nulo, es una pareja mínima (los cocientes de un haz de línea son de torsión, luego acíclicos).

El haz $\mathcal{O}(-2)$ es un submódulo de $\mathcal{D}_{\mathbb{P}_1}$, y si ponemos $\mathcal{M}(n) = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}} \mathcal{O}(n)$, $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathcal{O}(-2) \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathbb{P}_1} \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow \mathcal{O}(n-2) \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathbb{P}_1}(n) \longrightarrow \mathcal{K}(n) \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow \Gamma(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}(n-2)) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{P}_1, \mathcal{D}_{\mathbb{P}_1}(n)) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{P}_1, \mathcal{K}(n)) \longrightarrow 0 \\ \Gamma(\mathbb{P}_1, \mathcal{D}_{\mathbb{P}_1}(n)) &= \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}(-n), \mathcal{D}_{\mathbb{P}_1}) = H^1(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}(-n))^* \\ \dim \Gamma(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}(n-2)) &= n-1 = \dim H^1(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}(-n))^* \\ \Gamma(\mathbb{P}_1, \mathcal{K}(n)) &= 0 \end{aligned}$$

lo que implica que $\mathcal{K} = 0$, porque no tiene torsión (la torsión define secciones globales), y los elementos de la fibra genérica definen (p. 236) morfismos $\mathcal{O}(-n) \rightarrow \mathcal{K}$.

Teorema: El haz dualizante de una curva completa y no singular es un haz de línea.

Demostración: Consideremos un morfismo $k(t) \rightarrow \Sigma$ y la correspondiente proyección $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}_1$.

La imagen directa π_* conserva la cohomología de los haces coherentes, y $\pi_*\mathcal{M}$ es coherente cuando \mathcal{M} lo es,

$$\begin{aligned} H^1(X, \mathcal{M})^* &= H^1(\mathbb{P}_1, \pi_*\mathcal{M})^* = \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}}(\pi_*\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathbb{P}_1}) \\ &= \text{Hom}_{\pi_*\mathcal{O}_X}(\pi_*\mathcal{M}, \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}}(\pi_*\mathcal{O}_X, \mathcal{D}_{\mathbb{P}_1})), \\ H^1(X, \mathcal{M})^* &= \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X) = \text{Hom}_{\pi_*\mathcal{O}_X}(\pi_*\mathcal{M}, \pi_*\mathcal{D}_X), \\ \pi_*\mathcal{D}_X &= \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}}(\pi_*\mathcal{O}_X, \mathcal{D}_{\mathbb{P}_1}), \end{aligned}$$

luego \mathcal{D}_X no tiene torsión y es de rango 1. Es un haz de línea.

Definición: Un divisor K de la curva X es **canónico** si $\mathcal{D}_X = L_K$.

Teorema de Riemann-Roch: Si K es un divisor canónico de una curva completa y no singular X de género g , para todo divisor D ,

$$\dim H^0(X, L_D) = 1 - g + \text{gr } D + \dim H^0(X, L_{K-D}).$$

Demostración: $H^1(X, L_D)^* = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(L_D, L_K) = H^0(X, L_{K-D})$, y se acaba por el teorema de Riemann-Roch débil.

Corolario: $h^1(L_K) = 1$, $h^0(L_K) = g$, $\text{gr } K = 2g - 2$.

Demostración: $H^1(X, L_K)^* = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(L_K, L_K) = H^0(X, \mathcal{O}_X)$ es de dimensión 1.

$H^0(X, L_K) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, L_K) = H^1(X, \mathcal{O}_X)^*$ es de dimensión g , y

$$g = h^0(L_K) = 1 - g + \text{gr } K + h^0(\mathcal{O}_X) = 2 - g + \text{gr } K.$$

9.3.1. Cálculo del Dualizante

Si X es un k -esquema, el haz asociado al prehaz $U \rightsquigarrow \Omega_{\mathcal{O}_X(U)/k}$ es el **haz de diferenciales** Ω_X . Como las diferenciales localizan (p. 78), en cada abierto afín $U = \text{Spec } A$ es el haz asociado a $\Omega_{A/k}$, y es coherente cuando X es de tipo finito.

Proposición: Si X es una curva no singular y k es perfecto, el haz Ω_X es de línea.

Demostración: Si t es un parámetro local, $\mathfrak{m}_x = t\mathcal{O}_x$, la sucesión exacta

$$\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \longrightarrow \Omega_{\mathcal{O}_x} \otimes_{\mathcal{O}_x} \kappa(x) \longrightarrow \Omega_{\kappa(x)/k} = 0$$

muestra que $\Omega_{\mathcal{O}_x} \otimes_{\mathcal{O}_x} \kappa(x) = \langle dt \rangle$, y por Nakayama $\Omega_{\mathcal{O}_x} = \mathcal{O}_x dt$.

Si tuviera torsión, $\Omega_{\Sigma/k} = 0$, y Σ sería (p. 81) una extensión separable de $k(t)$ a la que no podría extenderse ninguna k -derivación de $k(t)$. Absurdo.

Teorema: El haz dualizante de una curva completa y no singular X sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado es el haz de diferenciales,

$$L_K = \Omega_X.$$

1ª demostración: El teorema es cierto en \mathbb{P}_1 porque $\Omega_{\mathbb{P}_1} = \mathcal{O}(-2)$.

En efecto, dt no tiene ceros ni polos en la parte afín, y en el infinito tiene dos polos

$$u = t^{-1}, \quad dt = d(u^{-1}) = -u^{-2} du.$$

En general, consideramos una extensión $k(t) \rightarrow \Sigma$ separable, de modo que la métrica de la traza (p. 83) no es singular, y define una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \pi_* \mathcal{O}_X \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}}(\pi_* \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}) \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

donde \mathcal{C} está concentrado en un número finito de puntos cerrados, porque su fibra genérica es nula. Luego $\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}} \mathcal{L} = \mathcal{C}$ para todo haz de línea \mathcal{L} , y tenemos sucesiones exactas

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}_1} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}} \pi_* \mathcal{O}_X &\longrightarrow \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}}(\pi_* \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}} \Omega_{\mathbb{P}_1} \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}_1} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}} \pi_* \mathcal{O}_X &\longrightarrow \pi_* \Omega_X \longrightarrow \Omega_{X/\mathbb{P}_1} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

donde $\Omega_{X/\mathbb{P}_1}(\text{Spec } A) = \Omega_{B/A}$, siendo B el cierre entero de A en Σ . Como (p. 238)

$$\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}}(\pi_* \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}} \Omega_{\mathbb{P}_1} = \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}}(\pi_* \mathcal{O}_X, \Omega_{\mathbb{P}_1}) = \pi_* L_K$$

para concluir que $L_K \simeq \Omega_X$ basta ver que B^*/B y $\Omega_{B/A}$ tienen igual longitud en cada punto de $\text{Spec } B$, donde B se ve en $B^* = \text{Hom}_A(B, A)$ vía la métrica de la traza.

La métrica de la traza y las diferenciales son estables por cambios de base.

Luego podemos probarlo después de localizar y completar en un punto $y \in \text{Spec } A$,

$$\widehat{A}_y \longrightarrow \varprojlim B_y/\mathfrak{m}_y^n B_y = \varprojlim B_y/(\mathfrak{m}_{x_1}^{n_1} \dots \mathfrak{m}_{x_r}^{n_r})^n = \widehat{B}_{x_1} \oplus \dots \oplus \widehat{B}_{x_r}$$

donde $\pi^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_r\}$, y basta probarlo para los morfismos $\widehat{A}_y \rightarrow \widehat{B}_x$.

Como k es algebraicamente cerrado, son anillos de series formales (p. 138),

$$\begin{aligned} k[[t]] = \widehat{A} &\longrightarrow \widehat{B} = k[[x]] \\ t\widehat{B} &= (x^n), \\ \widehat{B}/t\widehat{B} &= k[x]/(x^n) \end{aligned}$$

y Nakayama muestra que $(1, x, \dots, x^{n-1})$ es una base del \widehat{A} -módulo \widehat{B} ,

$$\widehat{B} = \widehat{A} \oplus \widehat{A}x \oplus \dots \oplus \widehat{A}x^{n-1} = \widehat{A}[x]/(x^n + \dots) = \widehat{A}[x]/(P).$$

Lema: Sea A un anillo de Dedekind y B el cierre entero de A en una extensión finita y separable de su cuerpo de fracciones. Si $B = A[\xi] = A[x]/(P) = A[x]/(x^n + \dots)$,

$$B^* = A \frac{1}{P'(\xi)} \oplus A \frac{\xi}{P'(\xi)} \oplus \dots \oplus A \frac{\xi^{n-1}}{P'(\xi)},$$

y por tanto, $B^*/B \simeq B/(P'(\xi)) \simeq \Omega_{B/A}$.

Demostración: Si $\xi = \alpha_1, \dots, \alpha_n$ son las raíces del polinomio separable $P(x)$, al descomponer $\frac{1}{P(x)}$ en fracciones simples, y desarrollar en serie de potencias de x^{-1} , vemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{1}{P'(\alpha_i)(x - \alpha_i)} &= \frac{1}{P(x)} = x^{-n}(1 + a_1 x^{-1} + \dots) \\ \text{tr} \left(\frac{\xi^i}{P'(\xi)} \right) &= \begin{cases} 0 & 0 \leq i \leq n-2 \\ 1 & i = n-1 \end{cases} \end{aligned}$$

Luego $\frac{\xi^i}{P'(\xi)} \in B^*$, porque $\xi^{i+j} \in A \oplus A\xi \dots \oplus A\xi^{n-1}$, y la matriz

$$\begin{pmatrix} \text{tr} \frac{\xi^i \xi^j}{P'(\xi)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \bullet \\ 1 & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

es invertible: $\frac{1}{P'(\xi)}, \frac{\xi}{P'(\xi)}, \dots, \frac{\xi^{n-1}}{P'(\xi)}$ forman una base de B^* , y $B^*/B \simeq B/(P'(\xi))$.

2ª demostración: Sea $X = U \cup U' = (\text{Spec } B) \cup (\text{Spec } B')$, el recubrimiento de la p. 234.

Para toda k -álgebra A , el cambio de base X_A es el esquema

$$X_A = X \times_k (\text{Spec } A) = U_A \cup U'_A = \text{Spec } (B \otimes_k A) \cup \text{Spec } (B' \otimes_k A)$$

y el producto directo $X \times X$ es el esquema (íntegro, porque k es algebraicamente cerrado)

$$X \times_k X = X_B \cup X_{B'} = (X \times_k \text{Spec } B) \cup (X \times_k \text{Spec } B').$$

El morfismo diagonal $X \rightarrow X \times X$ es una inmersión cerrada, porque el morfismo

$$B \otimes_k B' \rightarrow \mathcal{O}_X(U \cap U') = B\left[\frac{1}{t}\right] = B'[t]$$

es epiyectivo, y el haz de diferenciales es $\Omega_X = \Delta/\Delta^2$, donde Δ es el haz de ideales de la diagonal, y Δ es localmente principal porque Ω_X es de línea.

Ahora, dado un punto cerrado $x \in X$, restringimos a $X \times x$ la sucesión exacta

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L_K \otimes_k \mathcal{O}_X & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}(\Delta, L_K \otimes_k \mathcal{O}_X) & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}(\Delta/\Delta^2, L_K) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & L_K & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}(\mathfrak{m}_x, L_K) & \longrightarrow & k_{x \times x} \longrightarrow 0 \end{array}$$

donde $k_{x \times x} = \text{Hom}(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, L_K/\mathfrak{m}_x L_K)$ es el haz k concentrado en $x \times x$.

Tomamos imagen directa por la segunda proyección $\pi: X \times X \rightarrow X$,

$$\begin{array}{ccccc} \underline{\text{Hom}}(\Omega_X, L_K) & \xrightarrow{\delta} & R^1 \pi_*(L_K \otimes_k \mathcal{O}_X) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ k_x & \xrightarrow{\delta} & H^1(X, L_K) & \longrightarrow & H^1(X, L_{K+x}) = 0 \end{array}$$

donde $\underline{\text{Hom}}(\Omega_X, L_K)$ es un haz de línea, y $R^1 \pi_*(L_K \otimes_k \mathcal{O}_X) = H^1(X, L_K) \otimes_k \mathcal{O}_X$ es un haz de línea trivial (la igualdad se debe al siguiente lema).

El diagrama anterior muestra que en cada punto $\delta: \underline{\text{Hom}}(\Omega_X, L_K) \rightarrow \mathcal{O}_X$ es epiyectivo.

Luego es un isomorfismo, y $\Omega_X = L_K$.

Lema: Sea X una curva completa y no singular sobre un cuerpo k . Si \mathcal{M} es un haz casicoherente en X , y A es una k -álgebra,

$$H^p(X_A, \mathcal{M} \otimes_k A) = H^p(X, \mathcal{M}) \otimes_k A.$$

Demostación: Comparando las sucesiones de Mayer-Vietoris de \mathcal{M} y $\mathcal{M}_A = \mathcal{M} \otimes_k A$,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(X, \mathcal{M}) & \longrightarrow & \Gamma(U, \mathcal{M}) \oplus \Gamma(U', \mathcal{M}) & \longrightarrow & \Gamma(U \cap U', \mathcal{M}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{M}) \longrightarrow 0 \\ 0 & \longrightarrow & H^0(X_A, \mathcal{M}_A) & \longrightarrow & \Gamma(U, \mathcal{M})_A \oplus \Gamma(U', \mathcal{M})_A & \longrightarrow & \Gamma(U \cap U', \mathcal{M})_A \longrightarrow H^1(X_A, \mathcal{M}_A) \longrightarrow 0 \end{array}$$

vemos, al ser $\otimes_k A$ exacto, que $H^p(X, \mathcal{M}) \otimes_k A \xrightarrow{\sim} H^p(X_A, \mathcal{M} \otimes_k A)$.

Fórmula de Hurwitz: Sea $\pi: X \rightarrow X'$ un morfismo no constante entre curvas completas y no singulares sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado. Si $\Sigma' \rightarrow \Sigma$ es separable de grado d ,

$$2g - 2 = d(2g' - 2) + \sum_{x \in X} e_x, \quad e_x = l(\Omega_{\mathcal{O}_x/\mathcal{O}_{x'}}).$$

Demostración: Tenemos que $\text{gr } \pi^*(K') = d(\text{gr } K') = d(2g' - 2)$. Además, la fibra de $\Omega_{X/X'}$ en el punto genérico de X es $\Omega_{\Sigma/\Sigma'} = 0$, así que tenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \pi^* \Omega_{X'} = L_{\pi^* K'} \rightarrow \Omega_X = L_K \rightarrow \Omega_{X/X'} \rightarrow 0$$

Definición: Una curva X sobre un cuerpo k es **lisa** si $\Omega_{X/k}$ es un haz de línea.

Ejemplos: Cuando k es algebraicamente cerrado, $\Omega_{\mathcal{O}_x}/\mathfrak{m}_x \Omega_{\mathcal{O}_x} = \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ (p. 78), y las curvas lisas son las curvas no singulares.

Sea $k = \mathbb{F}_p(t)$. La curva $y^2 = x^p - t$ es no singular; pero no es lisa, porque es singular al cambiar de base al cierre algebraico \bar{k} .

Proposición: Sea X una curva completa y no singular sobre un cuerpo k . Para toda extensión $k \rightarrow K$ tenemos que el dualizante es estable por cambios de base,

$$\mathcal{D}_{X/k} \otimes_k K = \mathcal{D}_{X_K/K}.$$

Demostración: $H^1(X_K, \mathcal{D}_X \otimes_k K) = H^1(X, \mathcal{D}_X) \otimes_k K$ no es nulo, así que existe un morfismo no nulo $\mathcal{D}_X \otimes_k K \rightarrow \mathcal{D}_{X_K}$, y ambos son haces de línea. Tenemos sucesiones exactas

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{D}_X \otimes_k K & \rightarrow & \mathcal{D}_{X_K} & \rightarrow & \mathcal{C} \rightarrow 0 \\ 0 & \rightarrow & H^0(X, \mathcal{D}_X)_K & \rightarrow & H^0(X_K, \mathcal{D}_{X_K}) & \rightarrow & H^0(X_K, \mathcal{C}) \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ & & H^1(X, \mathcal{O}_X)_K^* & & H^1(X_K, \mathcal{O}_{X_K})^* & & H^0(X, \mathcal{O}_X)_K^* & & H^0(X_K, \mathcal{O}_{X_K}^*) \end{array}$$

y vemos que $H^0(X_K, \mathcal{C}) = 0$. Como es flasco, $\mathcal{C} = 0$, y $\mathcal{D}_X \otimes_k K = \mathcal{D}_{X_K}$.

Teorema: Si una curva completa y no singular X es lisa, entonces $L_K = \Omega_X$.

Demostración: Como el dualizante y las diferenciales cambian de base, basta probar su coincidencia después de cambiar de base al cierre algebraico, donde ya hemos probado que el dualizante coincide con las diferenciales (p. 238).

9.4. Inmersiones Projectivas

El **espectro proyectivo** de un anillo graduado $R = R_0 \oplus R_1 \oplus \dots$ es el subespacio $X = \text{Proj } R$ de $\text{Spec } R$ formado por los ideales primos homogéneos $\mathfrak{p} = \bigoplus_n \mathfrak{p}_n$ que no contienen al **ideal irrelevante** $R_+ = \bigoplus_{n \geq 1} R_n$ (los cerrados son $(I)_0 = \{x \in X : I \subseteq \mathfrak{p}_x\}$, donde $I = \bigoplus_n I_n$ es un ideal homogéneo, y los abiertos $U_f = X - (f)_0$, f homogéneo, forman una base) con el haz de anillos \mathcal{O}_X asociado al prehaz de localización homogénea

$$U \rightsquigarrow R_{(U)} = \left\{ \frac{a_n}{f_n} : a_n, f_n \in R_n, f_n \text{ sin ceros en } U \right\}$$

donde $R_{(U)}$ es la componente de grado 0 de la localización de R por los elementos homogéneos que no se anulan en ningún punto de U . Sus fibras $\mathcal{O}_{X,x} = R_{(x)}$ son la localización homogénea de R por los elementos homogéneos que no se anulan en x .

Siempre supondremos que el ideal irrelevante R_+ está generado por R_1 , de modo que los abiertos básicos $U_f = \text{Proj } R - (f)_0$, con $\text{gr } f = 1$, recubren X .

$\mathbb{P}_{d,A} = \text{Proj } A[x_0, \dots, x_d]$ es el **espacio proyectivo** de dimensión d sobre A .

Teorema: $\text{Proj } R$ es un esquema; $U_f = \text{Spec } R_{(f)}$, $\text{gr } f = 1$.

Demostración: Los primos homogéneos de R que no contienen a f se corresponden con los primos homogéneos $\mathfrak{q} = \bigoplus_{n \geq 0} f^n \mathfrak{q}_0$ de $R_f = \bigoplus_n f^n R_{(f)}$, donde \mathfrak{q}_0 es un primo de $R_{(f)}$.

Esta biyección $U_f = \text{Spec } R_{(f)}$ es homeomorfismo porque $(a_n)_0 \cap U_f = (\frac{a_n}{f^n})_0$, y es un isomorfismo de espacios anillados porque tenemos un isomorfismo de prehaces

$$U \subseteq U_f \quad (R_{(f)})_U \longrightarrow R_{(U)}, \quad \frac{a_n/f^n}{b_m/f^m} \mapsto \frac{f^m a_n}{f^n b_m}.$$

Proposición: Toda curva proyectiva íntegra $\text{Proj } k[\xi_0, \dots, \xi_n]$ es completa.

Demostración: Hemos de ver que cada anillo de valoración discreta \mathcal{V} de su cuerpo de funciones racionales $\Sigma = \left\{ \frac{P_m(\xi_0, \dots, \xi_n)}{Q_m(\xi_0, \dots, \xi_n)} \right\}$ centra en un único punto.

Si tomamos un cociente $\frac{\xi_s}{\xi_i}$ de valoración máxima, $\frac{\xi_r}{\xi_i} = \frac{\xi_r}{\xi_s} \cdot \frac{\xi_s}{\xi_i}$ no puede tener valoración negativa,

$$A_i = k \left[\frac{\xi_0}{\xi_i}, \dots, \frac{\xi_n}{\xi_i} \right] \subset \mathcal{V}$$

y \mathcal{V} centra en el punto que define $A_i \cap \mathfrak{m}_{\mathcal{V}}$.

Si \mathcal{V} centrara en otro punto de $U_j = \text{Spec } A_j$, entonces $A_j \subset \mathcal{V}$, y $\frac{\xi_j}{\xi_i}$ es invertible en \mathcal{V} , de modo que $A_{ij} = A_i \left[\frac{\xi_j}{\xi_i} \right] = A_j \left[\frac{\xi_j}{\xi_i} \right] \subset \mathcal{V}$.

Tanto el centro de \mathcal{V} en U_i como en U_j está en $U_i \cap U_j = \text{Spec } A_{ij}$.

Luego coinciden porque \mathcal{V} no puede centrar en dos puntos de un abierto afín.

Definición: Si $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$ es un R -módulo graduado, \widetilde{M} denotará el haz sobre $\text{Proj } R$ asociado al prehaz de localización homogénea

$$U \rightsquigarrow M_{(U)} = \left\{ \frac{m_n}{f^n} : m_n \in M_n, f_n \in R_n \text{ no se anula en } U \right\}$$

y, al igual que en el caso del haz de anillos locales, coincide en $U_f = \text{Spec } R_{(f)}$ con el haz asociado a $M_{(f)}$, cuando $\text{gr } f = 1$.

$M(n)$ denotará el R -módulo graduado $M(n)_d = M_{n+d}$.

Pondremos $\mathcal{O}_X(n) = R(n)^\sim$, y estos haces son de línea, porque en los abiertos U_f tenemos isomorfismos $f^n : \mathcal{O}_X|_{U_f} \rightarrow \mathcal{O}_X(n)|_{U_f}$.

Si \mathcal{M} es un \mathcal{O}_X -módulo, pondremos $\mathcal{M}(n) = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n)$.

Como $M_f = \bigoplus_n f^n M_{(f)} = M_{(f)} \otimes_{R_{(f)}} R_f$, tenemos que $M_{(f)} \otimes_{R_{(f)}} N_{(f)} = (M \otimes_R N)_{(f)}$, y el morfismo natural $\widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N} \rightarrow (M \otimes_R N)^\sim$ es isomorfismo,

$$\begin{aligned} M(n)^\sim &= \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n) = \widetilde{M}(n), \\ \mathcal{O}_X(n) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(m) &= \mathcal{O}_X(n+m). \end{aligned}$$

Ejemplo: Como $k[x_0, \dots, x_d]$ es dominio de factorización única, el prehaz ya es haz

$$\mathcal{O}(n)(U) = \left\{ \frac{P_{n+m}(x_0, \dots, x_d)}{Q_m(x_0, \dots, x_d)} : Q_m \text{ sin ceros en } U \right\}$$

En $\mathbb{P}_{d,A}$ tenemos que x_i define una sección global del haz $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{d,A}}(1)$ que no se anula en ningún punto de $U_i = \text{Spec } A \left[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_d}{x_i} \right]$. Por tanto, las secciones x_0, \dots, x_d generan la fibra de

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{d,A}}(1)$ en todos los puntos, y definen un epimorfismo $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{d,A}}^{d+1} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{d,A}}(1)$, que ha de verse como un subfibrado de línea del fibrado trivial de rango $d + 1$.

Es el subfibrado de línea universal, en el sentido de que para todo A -esquema X los X -puntos del espacio proyectivo son las familias de rectas del fibrado trivial de rango $d + 1$ parametrizadas por X :

Propiedad Universal: $\text{Hom}_A(X, \text{Proj } A[x_0, \dots, x_d]) = \left[\begin{array}{l} \text{Cocientes de} \\ \text{línea de } \mathcal{O}_X^{d+1} \end{array} \right]$

Demostración: Sean s_0, \dots, s_d secciones de un haz de línea \mathcal{L} en X que generen la fibra en todo punto. En el abierto V_i donde genere s_i tenemos que $s_j = \frac{s_j}{s_i} s_i, \frac{s_j}{s_i} \in \mathcal{O}_X(V_i)$.

Por el siguiente lema, el morfismo $A[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_d}{x_i}] \rightarrow \mathcal{O}_X(V_i), \frac{x_j}{x_i} \mapsto \frac{s_j}{s_i}$, induce un morfismo de A -esquemas $\phi_i: V_i \rightarrow U_i$, y tenemos isomorfismos $\phi_i^* \mathcal{O}(1) = \mathcal{L}|_{V_i}, \phi_i^*(x_j) = s_j$.

Estos morfismos coinciden en las intersecciones, y definen un A -morfismo $\phi: X \rightarrow \mathbb{P}_{d,A}$ y un isomorfismo $\phi^* \mathcal{O}(1) = \mathcal{L}, \phi^*(x_j) = s_j$. La unicidad es evidente.

Lema: $\text{Hom}(X, \text{Spec } A) = \text{Hom}(A, \mathcal{O}_X(X))$.

Demostración: La aplicación $\text{Hom}(U, \text{Spec } A) \rightarrow \text{Hom}(A, \mathcal{O}_X(U))$ es biyectiva cuando U es un abierto afín (p. 232). Como son haces de conjuntos, es biyectiva cuando $U = X$.

Corolario: Sea E un k -espacio vectorial de dimensión finita. El grupo de los automorfismos del esquema $\mathbb{P}(E) = \text{Proj } S^\bullet E^*$ es el grupo $PSL(E)$ de las proyectivizaciones de automorfismos semilíneales de E , y el subgrupo de los k -automorfismos es el grupo $PGL(E)$ de las proyectividades.

Demostración: Cada automorfismo $\sigma: \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}(E)$ define un automorfismo σ^* del anillo de secciones globales $\Gamma(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}) = k$, lo que permite reducirnos al caso de un k -automorfismo; caso que se sigue directamente de la propiedad universal.

Definición: Sea X una curva completa y no singular sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. Las secciones globales de un haz de línea L_D **separan puntos y puntos infinitamente próximos** cuando para cada par de puntos cerrados p, q existe una sección de L_{D-p} que no es sección de L_{D-p-q} (una sección global de L_D que se anula en p y no en q ; y cuando $p = q$ esto significa que no se anula dos veces en p).

Si $X \rightarrow \mathbb{P}_d$ es el morfismo que define una base s_0, \dots, s_d de $\Gamma(X, L_D)$, y B_i es el cierre entero de $A_i = k[\frac{s_0}{s_i}, \dots, \frac{s_d}{s_i}]$ en Σ_X , las secciones de L_D separan puntos cuando los anillos $B_i/\mathfrak{m}B_i$ de las fibras son locales, y separan puntos infinitamente próximos cuando son reducidos; luego $B_i/\mathfrak{m}B_i = A_i/\mathfrak{m}$ porque k es algebraicamente cerrado, y Nakayama muestra que $A_i = B_i$.

Es decir, el morfismo $X \rightarrow \mathbb{P}_d$ es una inmersión cerrada.

Corolario: Las secciones globales de L_D separan puntos y puntos infinitamente próximos cuando $\text{gr } D > 2g$. En particular, toda curva completa y no singular sobre un cuerpo algebraicamente cerrado es proyectiva.

Demostración: Los divisores $K - (D - p)$ y $K - (D - p - q)$ son de grado negativo, y por el teorema de Riemann-Roch, $h^0(L_{D-p}) = h^0(L_{D-p-q}) + 1$. q.e.d.

En el caso de una curva completa y no singular X de género $g \geq 2$ sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, la condición necesaria y suficiente para que los divisores canónicos definan una inmersión cerrada $X \hookrightarrow \mathbb{P}_{g-1}$ es que para todo par de puntos

$$h^0(L_{K-p-q}) < h^0(L_{K-p}) < h^0(L_K) = g;$$

es decir, $h^0(L_{K-p-q}) = g - 2$, lo que equivale a que $h^0(L_{p+q}) = 1$.

La inmersión canónica identifica X con una curva de grado $2g-2$ en \mathbb{P}_{g-1} , bien definida salvo proyectividades (lo que reduce la clasificación de curvas de género g a la clasificación proyectiva de tales curvas canónicas), salvo cuando X admite una proyección $X \rightarrow \mathbb{P}_1$ de grado 2 (X es **hiperelíptica**), que por la fórmula de Hurwitz ha de ramificar en $2g+2$ puntos cuando $\text{car } k \neq 2$, de modo que $\Sigma_X = k(x, \sqrt{P_{2g+2}(x)})$.

9.5. Morfismos Projectivos

Sea $R = A[\xi_0, \dots, \xi_d]$, donde el anillo A es noetheriano.

Pongamos $X = \text{Proj } R$, $U_i = X - (\xi_i)_0$, y sea $i: U_i \rightarrow X$ el morfismo de inclusión.

Los morfismos $\xi_i: R(n) \rightarrow R(n+1)$ inducen morfismos $\mathcal{O}_X(n) \rightarrow \mathcal{O}_X(n+1)$.

Si \mathcal{M} es un haz casi-coherente en X , tenemos morfismos $\mathcal{M}(n) \rightarrow \mathcal{M}(n+1)$, y

$$\varinjlim \mathcal{M}(n) \rightarrow i_*(\mathcal{M}|_{U_i}), \quad m \otimes \frac{f_{r+n}}{h_r} \mapsto \frac{f_{r+n}}{\xi_i^n h_r} m,$$

es un isomorfismo. En efecto, en cada abierto afín U_j tenemos que $\varinjlim M_n = M_{\xi_i}$ cuando $M_n = M$ y los morfismos de transición son $\xi_i: M = M_n \rightarrow M_{n+1} = M$.

Teorema: $\varinjlim H^p(X, \mathcal{F}_i) = H^p(X, \varinjlim \mathcal{F}_i)$, cuando X es un espacio noetheriano.

Demostración: El morfismo natural $\varinjlim \mathcal{F}_i(X) \rightarrow (\varinjlim \mathcal{F}_i)(X)$ es inyectivo porque X es compacto (p. 272).

Cada sección $s \in (\varinjlim \mathcal{F}_i)(X)$ está localmente definida por secciones $s_i \in \mathcal{F}_i(U)$.

Estas secciones s_i no coinciden en las intersecciones; pero, al ser estas compactas, coinciden como secciones de \mathcal{F}_j para un índice j suficientemente grande, y definen una sección global de \mathcal{F}_j que induce s .

Por tanto, en general $\varinjlim C^\bullet \mathcal{F}_i$ es una resolución flasca de $\varinjlim \mathcal{F}_i$, y

$$H^p(X, \varinjlim \mathcal{F}_i) = H^p[\Gamma(X, \varinjlim C^\bullet \mathcal{F}_i)] = \varinjlim H^p[\Gamma(X, C^\bullet \mathcal{F}_i)] = \varinjlim H^p(X, \mathcal{F}_i).$$

Teorema: Todo haz casi-coherente \mathcal{M} sobre X es la localización homogénea $\mathcal{M} = \widetilde{M}$ de un R -módulo graduado M , finito generado si \mathcal{M} es coherente.

Demostración: Si $M = \bigoplus_n \Gamma(X, \mathcal{M}(n))$, el morfismo natural $\widetilde{M} \rightarrow \mathcal{M}$ es isomorfismo,

$$\widetilde{M}(U_i) = \bigcup_n \frac{\Gamma(X, \mathcal{M}(n))}{\xi_i^n} = \varinjlim \Gamma(X, \mathcal{M}(n)) = \Gamma(X, \varinjlim \mathcal{M}(n)) = \Gamma(X, i_* \mathcal{M}|_{U_i}) = \mathcal{M}(U_i).$$

Cuando \mathcal{M} es coherente, los módulos $\mathcal{M}(U_i)$ son finito generados, y existe un submódulo finito generado $N = \bigoplus_n N_n \subseteq M$ tal que $\widetilde{N} \rightarrow \mathcal{M}$ es epiyectivo.

Luego es un isomorfismo porque $\widetilde{N} \subseteq \widetilde{M}$.

Teorema: Todo haz coherente \mathcal{M} sobre X admite una presentación finita

$$\bigoplus \mathcal{O}_X(n_j) \rightarrow \bigoplus \mathcal{O}_X(n_i) \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow 0$$

Demostración: Todo R -módulo graduado finito generado M admite una presentación finita $\oplus R(n_j) \rightarrow \oplus R(n_i) \rightarrow M \rightarrow 0$, y la localización homogénea conserva sucesiones exactas.

Teorema: $H^p(\mathbb{P}_{d,A}, \mathcal{O}(n)) = \begin{cases} A\text{-módulo libre de rango } \binom{n+d}{d} & n \geq 0, p = 0 \\ A\text{-módulo libre de rango } \binom{-n-1}{d} & n < -d, p = d \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Demostración: Una vez probado el enunciado para el haz de anillos locales $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_d}$, por inducción sobre n y d se sigue para $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_d}(n)$ y $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_d}(-n)$ en virtud de las sucesiones exactas

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_d}(n-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_d}(n) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{d-1}}(n) \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_d}(-n) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_d}(-(n-1)) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{d-1}}(-(n-1)) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

La primera muestra también que $H^p(\mathbb{P}_d, \mathcal{O}(n)) = H^p(\mathbb{P}_d, \mathcal{O}(n+1))$ cuando $p \geq 1, n \geq 0$. Por tanto, cuando $p \geq 1$, tenemos que

$$H^p(\mathbb{P}_d, \mathcal{O}) = \varinjlim H^p(\mathbb{P}_d, \mathcal{O}(n)) = H^p(\mathbb{P}_d, \varinjlim \mathcal{O}(n)) = H^p(\mathbb{P}_d, i_* \mathcal{O}_{U_0}) = H^p(U_0, \mathcal{O}_{U_0}) = 0$$

Por último, como $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_d}(U_i) = A\left[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_d}{x_i}\right]$, es claro que $H^0(\mathbb{P}_d, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_d}) = R_0 = A$.

Ejemplo: Si \mathfrak{p}_C es el haz de ideales de una cónica C de ecuación $q(x_0, x_1, x_2) = 0$, tenemos un isomorfismo $q: \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-2) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{p}_C$, y la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathfrak{p}_C = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-2) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2} \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0$$

prueba que $H^0(C, \mathcal{O}_C) = k, H^1(C, \mathcal{O}_C) = 0$. Luego (p. 237) *toda cónica no singular con un punto racional es isomorfa a la recta proyectiva (Teorema de Steiner)*.

Teorema de Serre: Si \mathcal{M} es un haz coherente sobre $X = \text{Proj } A[\xi_0, \dots, \xi_d]$,

1. $H^p(X, \mathcal{M})$ es un A -módulo finito, nulo cuando $p > d$.
2. Existe un entero n_0 tal que, para todo $n > n_0$, los haces $\mathcal{M}(n)$ son acíclicos, y están generados por sus secciones globales,

$$\Gamma(X, \mathcal{M}(n)) \otimes_A \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{M}(n) \longrightarrow 0$$

Demostración: Podemos suponer que $X = \mathbb{P}_{d,A}$.

El retículo de cerrados generado por los complementarios de U_0, \dots, U_d define una proyección $\pi: X \rightarrow \beta\Delta_d$ sobre un espacio finito de dimensión d , y π_* conserva la cohomología de los haces casi-coherentes (p. 232); luego (p. 230)

$$H^p(X, \mathcal{M}) = H^p(\beta\Delta_d, \pi_* \mathcal{M}) = 0, p > d.$$

Por otra parte, si consideramos una presentación

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \oplus \mathcal{O}_X(n_i) \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

los núcleos y conúcleos de los morfismos $H^p(X, \mathcal{M}) \rightarrow H^{p+1}(X, \mathcal{K})$ son A -módulos finito generados y, por inducción descendente vemos que $H^p(X, \mathcal{M})$ es un A -módulo finito generado.

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(n) \longrightarrow \oplus \mathcal{O}_X(n_i + n) \longrightarrow \mathcal{M}(n) \longrightarrow 0$$

Si $n_i + n \gg 0$, los haces $\mathcal{O}_X(n_i + n)$ son acíclicos y $H^p(X, \mathcal{M}(n)) = H^{p+1}(X, \mathcal{K}(n))$, $p \geq 1$. Por inducción descendente concluimos que $H^p(X, \mathcal{M}(n)) = 0$ cuando $n \gg 0$.

Además $\bigoplus_i \mathcal{O}_X(n_i + n)$ está generado por sus secciones globales; luego $\mathcal{M}(n)$ también.

Teorema: Si M es un R -módulo graduado finito generado, $M_n = \Gamma(X, \widetilde{M}(n))$ cuando $n \gg 0$.

Demostración: $0 \rightarrow K \rightarrow \bigoplus R(n_i) \rightarrow M \rightarrow 0$, $0 \rightarrow K' \rightarrow \bigoplus R(n_j) \rightarrow K \rightarrow 0$,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{K}(n) & \longrightarrow & \bigoplus \mathcal{O}_X(n_i + n) & \longrightarrow & \mathcal{M}(n) \longrightarrow 0 \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{K}'(n) & \longrightarrow & \bigoplus \mathcal{O}_X(n_j + n) & \longrightarrow & \mathcal{K}(n) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Cuando $n \gg 0$, al tomar secciones globales se mantienen exactas, y el siguiente diagrama conmutativo de filas exactas permite concluir,

$$\begin{array}{ccccccc} \bigoplus_j R(n_j)_n & \longrightarrow & \bigoplus_i R(n_i)_n & \longrightarrow & M_n & \longrightarrow & 0 \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow & & \\ H^0(X, \bigoplus \mathcal{O}_X(n_j + n)) & \longrightarrow & H^0(X, \bigoplus \mathcal{O}_X(n_i + n)) & \longrightarrow & H^0(X, \mathcal{M}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Teorema de Bézout: Sea $R = k[x_0, x_1, x_2]$, y consideremos dos curvas proyectivas planas C, C' de ecuaciones $P_n = 0, P'_m = 0$, sin componentes irreducibles comunes.

Si $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ son los respectivos haces de ideales, su **multiplicidad de intersección** en un punto z es la longitud del $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2, z}$ -módulo $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2, z}/\mathfrak{p}_z + \mathfrak{p}'_z$,

$$(C' \cap C)_z = l(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2, z}/\mathfrak{p}_z + \mathfrak{p}'_z),$$

y la dimensión del k -espacio vectorial $\Gamma(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}/\mathfrak{p} + \mathfrak{p}') = \bigoplus_z \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2, z}/\mathfrak{p}_z + \mathfrak{p}'_z$ es el número de puntos de corte, contados con su grado y multiplicidad.

Como R es un dominio de factorización única, y P_n, P'_m no tienen factores irreducibles comunes, tenemos sucesiones exactas

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & R(-n-m) & \xrightarrow{\phi} & R(-n) \oplus R(-m) & \xrightarrow{\varphi} & R \longrightarrow R/(P_n, P'_m) \longrightarrow 0 \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-n-m) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-n) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-m) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}/\mathfrak{p} + \mathfrak{p}' \longrightarrow 0 \end{array}$$

donde $\phi(Q) = (P'_m Q, P_n Q)$, $\varphi(A, B) = P_n A - P'_m B$. Como la característica de Euler-Poincaré es aditiva, el número de puntos de corte es el producto de los grados

$$\begin{aligned} \dim_k \Gamma(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}/\mathfrak{p} + \mathfrak{p}') &= \chi(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}/\mathfrak{p} + \mathfrak{p}') \\ &= \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}) - \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-n)) - \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-m)) + \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-n-m)) \\ &= 1 - \binom{n-1}{2} - \binom{m-1}{2} + \binom{n+m-1}{2} = nm. \end{aligned}$$

9.6. Curvas Completas

Sea Σ el cuerpo de funciones racionales en una curva completa X sobre un cuerpo k , y sea \bar{X} la variedad de Riemann de Σ .

Como cada valoración discreta de Σ centra en un único punto de la curva X , tenemos un morfismo natural

$$p: \bar{X} \longrightarrow X$$

y $p^{-1}(\text{Spec } A) = \text{Spec } \bar{A}$, donde \bar{A} es el cierre entero de A en Σ , de modo que la imagen directa p_* conserva (p. 232) la cohomología de los haces casi-coherentes.

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow p_* \mathcal{O}_{\bar{X}} \longrightarrow \mathfrak{C} \longrightarrow 0$$

donde $\mathfrak{C} = (p_*\mathcal{O}_{\bar{X}})/\mathcal{O}_X$ está concentrado en los puntos singulares de X .

$H^0(X, \mathcal{O}_X) = H^0(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}) = k$ cuando k es algebraicamente cerrado en Σ , y la relación entre el **género aritmético** $\pi = \dim_k H^1(X, \mathcal{O}_X)$ y el **género geométrico** $g = \dim_k H^1(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}})$ es

$$g = \pi - \sum_{x \in X} \dim_k(\bar{\mathcal{O}}_x/\mathcal{O}_x).$$

En el caso de una curva plana de grado n , su anillo $B = k[x_0, x_1, x_2]/(P_n) = R/(P_n)$ admite la presentación $0 \rightarrow R(-n) \rightarrow R \rightarrow B \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-n) \xrightarrow{P_n} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0 \\ \pi = \dim_k H^1(X, \mathcal{O}_X) &= \dim_k H^2(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-n)) = \binom{n-1}{2} \end{aligned}$$

Si además k es algebraicamente cerrado, y m_y denota la multiplicidad de un punto y del árbol de explosiones A_x en un punto singular x , el género geométrico es (p. 149)

$$g = \binom{n-1}{2} - \sum_{x \in X} \sum_{y \in A_x} \binom{m_y}{2}.$$

Teorema: Si \mathcal{M} es un haz coherente sobre una curva completa X , los espacios vectoriales $H^n(X, \mathcal{M})$ son de dimensión finita sobre k .

Demostración: El núcleo y el conúcleo del morfismo natural $\phi: \mathcal{M} \rightarrow p_*p^*\mathcal{M}$ verifican el teorema porque son haces coherentes concentrados en los puntos singulares de X .

También $p_*p^*\mathcal{M}$, porque $H^n(X, p_*p^*\mathcal{M}) = H^n(\bar{X}, p^*\mathcal{M})$, y terminamos,

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \text{Im } \phi \longrightarrow p_*p^*\mathcal{M} \longrightarrow \text{Coker } \phi \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow \text{Ker } \phi \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \text{Im } \phi \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Proposición: El haz dualizante \mathcal{D}_X de una curva plana de grado n es

$$\mathcal{D}_X = \mathcal{O}_X(n-3).$$

Demostración: Tenemos sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(m-n) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(m) \longrightarrow \mathcal{O}_X(m) \longrightarrow 0$$

Luego $h^1(\mathcal{O}_X(n-3)) = h^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-3)) = 1$, y $\mathcal{O}_X(n-3)$ es una pareja mínima, con cualquier elemento no nulo de $H^1(X, \mathcal{O}_X(n-3))^*$, porque los haces de torsión son acíclicos.

Si estuviera dominada por otra pareja mínima \mathcal{M}_ξ , para $m \gg 0$ tendríamos

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathcal{O}_X(n-3) \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X(m+n-3)) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{M}(m)) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}(m)) \longrightarrow 0 \\ h^0(\mathcal{M}(m)) &\leq \dim \text{Hom}(\mathcal{O}_X(-m), \mathcal{D}_X) = h^1(\mathcal{O}_X(m)) \\ &= h^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-m-m)) - h^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-m)) = \binom{m+n-1}{2} - \binom{m-1}{2} \\ h^0(\mathcal{O}_X(m+n-3)) &= h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(m+n-3)) - h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(m-3)) = \binom{m+n-1}{2} - \binom{m-1}{2} \\ h^0(\mathcal{K}(m)) &= 0 \end{aligned}$$

y concluimos que $\mathcal{K} = 0$; luego $\mathcal{O}_X(n-3) = \mathcal{M}$, y $\mathcal{O}_X(n-3) = \mathcal{D}_X$.

Corolario: Si X es una curva plana de grado n y L_K es el haz de línea canónico de su modelo no singular \bar{X} , tenemos un isomorfismo de $p_*\mathcal{O}_{\bar{X}}$ -módulos

$$p_*(L_K) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(p_*\mathcal{O}_{\bar{X}}, \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n-3).$$

Demostración: El argumento de la p. 238 prueba que

$$p_*\mathcal{D}_{\bar{X}} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(p_*\mathcal{O}_{\bar{X}}, \mathcal{D}_X)$$

y, como \mathcal{D}_X es un haz de línea, concluimos que

$$\underline{\mathrm{Hom}}(p_*\mathcal{O}_{\bar{X}}, \mathcal{D}_X) = \underline{\mathrm{Hom}}(p_*\mathcal{O}_{\bar{X}}, \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X.$$

Capítulo 10

Geometría Diferencial II

10.1. Cálculo Diferencial Valorado

Sea \mathcal{O}_X un haz de anillos sobre un espacio topológico X . Un \mathcal{O}_X -**módulo** es un haz de grupos abelianos \mathcal{M} en que $\mathcal{M}(U)$ tiene una estructura de $\mathcal{O}_X(U)$ -módulo compatible con los morfismos de restricción, en el sentido de que para todo abierto $V \subset U$,

$$(fm)|_V = f|_V m|_V; \quad f \in \mathcal{O}_X(U), \quad m \in \mathcal{M}(U),$$

y es **localmente libre** de rango r si es localmente isomorfo a \mathcal{O}_X^r (X se recubre por abiertos U en que \mathcal{M} es trivial: $\mathcal{M}|_U \simeq \mathcal{O}_X^r|_U$), y un **haz de línea** cuando $r = 1$.

Por ejemplo, si \mathcal{C}_X^∞ es el haz de funciones diferenciables sobre una variedad diferenciable X de dimensión n , el haz \mathcal{D} de los campos tangentes es un \mathcal{C}_X^∞ -módulo localmente libre de rango n , y el haz de n -formas Ω_X^n es un haz de línea.

Fijemos un \mathcal{C}_X^∞ -módulo localmente libre \mathcal{E} de rango r .

Una **p -forma diferencial** valorada en \mathcal{E} es un morfismo de haces \mathcal{C}_X^∞ -multilineal

$$\omega: \mathcal{D} \times \dots \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$$

y por convenio las 0-formas valoradas en \mathcal{E} son las secciones globales de \mathcal{E} .

La **contracción interior** de ω con un campo D es la $(p-1)$ -forma \mathcal{E} -valorada

$$(i_D \omega)(D_2, \dots, D_p) = \omega(D, D_2, \dots, D_p).$$

Dado un morfismo de haces \mathcal{C}_X^∞ -bilineal $\mathcal{E} \times \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}''$, el **producto exterior** de una p -forma \mathcal{E} -valorada ω con una q -forma \mathcal{E}' -valorada ω' es la $(p+q)$ -forma \mathcal{E}'' -valorada

$$(\omega \wedge \omega')(D_1, \dots, D_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \text{sgn}(\sigma) \omega(D_{\sigma(1)}, \dots, D_{\sigma(p)}) \cdot \omega'(D_{\sigma(p+1)}, \dots, D_{\sigma(p+q)}).$$

Las demostraciones de las pp. 51, 53 prueban que

$$i_D(\omega \wedge \omega') = (i_D \omega) \wedge \omega' + (-1)^p \omega \wedge (i_D \omega')$$

y que $\omega \wedge \omega' = (-1)^{pq} \omega' \wedge \omega$ cuando $\omega' \wedge \omega$ se considera respecto del producto $e' \cdot e = e \cdot e'$.

En particular, si $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$, la igualdad es válida cuando el producto es conmutativo.

Ejemplos: Las p -formas ordinarias son las p -formas valoradas en \mathcal{C}_X^∞ .

Una forma ordinaria ω_p y una sección global e de \mathcal{E} , definen una p -forma \mathcal{E} -valorada

$$(\omega_p \otimes e)(D_1, \dots, D_p) = \omega_p(D_1, \dots, D_p) e.$$

La identidad $I: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, $I(D) = D$, es una 1-forma valorada en los vectores.

La torsión $\text{Tor}(D_1, D_2) = D_1^\nabla D_2 - D_2^\nabla D_1 - [D_1, D_2]$ de una conexión lineal ∇ es una 2-forma valorada en vectores, y su curvatura $R(D_1, D_2) = D_1^\nabla D_2^\nabla - D_2^\nabla D_1^\nabla - [D_1, D_2]^\nabla$ es una 2-forma valorada en $\underline{\text{End}}(\mathcal{D})$.

Lema: Si $(U; u_1, \dots, u_n)$ es un abierto coordenado de X en que \mathcal{E} es trivial, y $\{e_1, \dots, e_r\}$ es una base de $\mathcal{E}(U)$, entonces en U las p -formas \mathcal{E} -valoradas forman un $C^\infty(U)$ -módulo libre de base

$$\{(du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_p}) \otimes e_j\}_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n, 1 \leq j \leq r}.$$

Definición: Un morfismo de haces $\nabla: \mathcal{D} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ es una **conexión lineal** en \mathcal{E} si

1. $D^\nabla(e_1 + e_2) = D^\nabla e_1 + D^\nabla e_2$,
 $(fD)^\nabla e = fD^\nabla e$.
2. $(D_1 + D_2)^\nabla e = D_1^\nabla e + D_2^\nabla e$,
 $D^\nabla(fe) = (Df)e + fD^\nabla e$.

Ejemplos: En C_X^∞ tenemos una conexión natural $D^\nabla f = Df$, que implícitamente se usa en el cálculo diferencial con formas ordinarias.

Las conexiones en \mathcal{D} son las conexiones lineales (p. 187) en la variedad X .

Si tenemos conexiones en \mathcal{E} y \mathcal{E}' , tenemos conexiones naturales en

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \oplus \mathcal{E}' & , & D^\nabla(e + e') &= D^\nabla e + D^\nabla e' \\ \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}' & , & D^\nabla(e \otimes e') &= (D^\nabla e) \otimes e' + e \otimes (D^\nabla e') \\ \mathcal{E}^* & , & (D^\nabla \omega)(e) &= D(\omega(e)) - \omega(D^\nabla e) \\ \underline{\text{Hom}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}') & , & (D^\nabla T)(e) &= D^\nabla(Te) - T(D^\nabla e). \end{aligned}$$

Definición: La **derivada de Lie** de una p -forma \mathcal{E} -valorada ω con un campo tangente D es la p -forma \mathcal{E} -valorada

$$(D^L \omega)(D_1, \dots, D_p) = D^\nabla(\omega(D_1, \dots, D_p)) - \sum_{i=1}^p \omega(D_1, \dots, [D, D_i], \dots, D_p).$$

Si tenemos un producto bilineal $\mathcal{E} \times \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}''$, y conexiones compatibles en el sentido de que $D^\nabla(e \cdot e') = (D^\nabla e) \cdot e' + e \cdot (D^\nabla e')$, no es difícil comprobar que

$$D^L(\omega \wedge \omega') = (D^L \omega) \wedge \omega' + \omega \wedge (D^L \omega').$$

Teorema: Sea $\Omega_p(\mathcal{E})$ el haz de p -formas \mathcal{E} -valoradas. Existen morfismos de haces \mathbb{R} -lineales $d: \Omega_p(\mathcal{E}) \rightarrow \Omega_{p+1}(\mathcal{E})$, únicos, tales que para todo campo tangente D ,

$$D^L = d \circ i_D + i_D \circ d.$$

Demostración: Veamos la unicidad por inducción sobre p .

Si $p = 0$, entonces $D^\nabla e = D^L e = i_D(de)$; luego $(de)(D) = D^\nabla e$.

Cuando $p \geq 1$, tenemos que $i_D(d\omega) = D^L \omega - d(i_D \omega)$ y, por inducción, $d(i_D \omega)$ está determinada de modo único.

Para probar la existencia, definimos la diferencial exterior de modo recurrente. Si $p = 0$,

$$(de)(D) = D^\nabla e$$

y, definida sobre las $(p-1)$ -formas, para toda p -forma ω ponemos

$$(d\omega)(D, D_1, \dots, D_p) = (D^L \omega)(D_1, \dots, D_p) - (di_D \omega)(D_1, \dots, D_p).$$

Hemos de probar que $d\omega$ es una $(p+1)$ -forma. Es \mathbb{R} -multilineal y alternada.

En efecto, es claro que $(d\omega)(D, \dots, D_i, \dots, D_i, \dots) = 0$, y

$$\begin{aligned} (d\omega)(D, D, D_2, \dots, D_p) &= (D^L\omega)(D, D_2, \dots, D_p) - (di_D\omega)(D, D_2, \dots, D_p) = \\ &= D^\nabla(\omega(D, D_2, \dots, D_p)) - \sum_{i=2}^p \omega(D, \dots, [D, D_i], \dots) - (i_D di_D\omega)(D_2, \dots, D_p) = 0 \end{aligned}$$

porque $(i_D di_D\omega)(D_2, \dots, D_p) = D^L D(i_D\omega)(D_2, \dots, D_p) - (di_D i_D\omega)(D_2, \dots, D_p)$

$$= D^\nabla(\omega(D, D_2, \dots, D_p)) - \sum_{i=2}^p \omega(D, \dots, [D, D_i], \dots).$$

Finalmente, veamos que es \mathcal{C}_X^∞ -multilineal. La linealidad en las variables D_1, \dots, D_p es clara; luego también en la primera, porque es alternada.

Fórmula de Cartan: $(d\omega)(D_1, D_2) = D_1^\nabla(\omega(D_2)) - D_2^\nabla(\omega(D_1)) - \omega([D_1, D_2]).$

Demostración:

$$(d\omega)(D_1, D_2) = (D_1^L\omega)(D_2) - (di_{D_1}\omega)(D_2) = D_1^\nabla(\omega(D_2)) - \omega([D_1, D_2]) - D_2^\nabla(\omega(D_1)).$$

Corolario: La torsión de una conexión lineal es la diferencial exterior de la identidad,

$$\text{Tor}_\nabla = dI.$$

Demostración: $(dI)(D_1, D_2) = D_1^\nabla(I(D_2)) - D_2^\nabla(I(D_1)) - I([D_1, D_2]) = \text{Tor}_\nabla(D_1, D_2).$

Teorema: Si tenemos un producto bilineal $\mathcal{E} \times \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}''$, y conexiones compatibles en el sentido de que $D^\nabla(e \cdot e') = (D^\nabla e) \cdot e' + e \cdot (D^\nabla e')$, entonces

$$d(\omega_p \wedge \omega'_q) = (d\omega_p) \wedge \omega'_q + (-1)^p \omega_p \wedge (d\omega'_q).$$

Demostración: Como $i_D d = D^L - di_D$, se sigue directamente de las igualdades

$$\begin{aligned} i_D(\omega_p \wedge \omega'_q) &= (i_D\omega_p) \wedge \omega'_q + (-1)^p \omega_p \wedge (i_D\omega'_q), \\ D^L(\omega_p \wedge \omega'_q) &= (D^L\omega_p) \wedge \omega'_q + \omega_p \wedge (D^L\omega'_q). \end{aligned}$$

10.1.1. Curvatura

En general $d^2 \neq 0$. Por ejemplo, para toda sección e tenemos

$$\begin{aligned} (d^2e)(D_1, D_2) &= D_1^\nabla((de)(D_2)) - D_2^\nabla((de)(D_1)) - (de)([D_1, D_2]) \\ &= D_1^\nabla(D_2^\nabla e) - D_2^\nabla(D_1^\nabla e) - [D_1, D_2]^\nabla e = R(D_1, D_2)(e) \end{aligned}$$

donde la **curvatura** R es una 2-forma $\underline{\text{End}}(\mathcal{E})$ -valorada. Es decir, $d^2e = R \wedge e$, donde el producto exterior se considera respecto del producto $\underline{\text{End}}(\mathcal{E}) \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, $T \cdot e = T(e)$.

Teorema: $d^2\omega = R \wedge \omega$.

Demostración: Si \mathcal{E} es trivial en un abierto U , y $\{e_1, \dots, e_r\}$ es una base de $\mathcal{E}(U)$, tendremos $\omega = \sum_i \omega_i \otimes e_i = \sum_i \omega_i \wedge e_i$, para ciertas p -formas ordinarias ω_i ,

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_i [(d\omega_i) \wedge e_i + (-1)^p \omega_i \wedge (de_i)], \\ d^2\omega &= \sum_i [(d^2\omega_i) \wedge e_i + (-1)^{p+1} (d\omega_i) \wedge (de_i) + (-1)^p (d\omega_i) \wedge (de_i) + \omega_i \wedge (d^2e_i)] \\ &= \sum_i \omega_i \wedge (d^2e_i) = \sum_i \omega_i \wedge (R \wedge e_i) = \sum_i (-1)^{2p} R \wedge \omega_i \wedge e_i = R \wedge \omega. \end{aligned}$$

Identidad Diferencial de Bianchi: $dR = 0$.

Demostración: $d^3e = d^2(de) = R \wedge (de)$ para toda sección e de \mathcal{E} , y

$$d^3e = d(d^2e) = d(R \wedge e) = (dR) \wedge e + R \wedge (de);$$

luego $(dR) \wedge e = 0$. Es decir, $(dR)(D_1, D_2, D_3)(e) = 0$, y $dR = 0$.

Nota: En general d no conmuta con la derivada de Lie, sino que $[D^L, d] = (i_D R) \wedge$.

Traslado Paralelo: El haz de secciones diferenciables \mathcal{E} de un fibrado vectorial real $E \rightarrow X$ es un \mathcal{C}_X^∞ -módulo localmente libre, y las formas valoradas en \mathcal{E} son las formas valoradas en las fibras de E . Dada una conexión ∇ en \mathcal{E} , y una aplicación diferenciable $\phi: Y \rightarrow X$, existe una única conexión $\phi^*\nabla$ en el haz de secciones diferenciables del fibrado vectorial $\phi^*E = E \times_X Y \rightarrow Y$ tal que, para toda sección local $e \in \mathcal{E}(U)$,

$$\phi^*(de) = d(\phi^*e),$$

pues si \mathcal{E} admite una base e_1, \dots, e_r tendremos $D^\nabla e_i = \sum_j \omega_{ij}(D)e_j$ para ciertas 1-formas ordinarias ω_{ij} , y la única posibilidad es considerar la conexión dada por las 1-formas $\phi^*\omega_{ij}$,

$$\bar{D}^{\phi^*\nabla}(\phi^*e_i) = \sum_j (\phi^*\omega_{ij})(\bar{D})(\phi^*e_j)$$

que claramente cumple $\phi^*(de_i) = d(\phi^*e_i)$; luego también para toda sección local e . Por la unicidad, estas conexiones locales coinciden en las intersecciones, y definen una conexión global.

Por ejemplo, cuando $E = TX$ es el fibrado tangente y $\sigma: I \rightarrow X$ es una curva diferenciable, los campos con soporte en σ son las secciones diferenciables de σ^*TX , y la conexión $\sigma^*\nabla$ es la derivación covariante de campos con soporte introducida en la p. 189.

En general, dada una curva $\sigma: I \rightarrow X$ y un vector $e_0 \in E_{x_0}$ en la fibra de $x_0 = \sigma(t_0)$, existe una única sección paralela $e: I \rightarrow E$, $de = 0$, tal que $e(t_0) = e_0$, lo que define un **traslado paralelo** (que depende de σ y no sólo de sus extremos)

$$E_{\sigma(t_0)} \xrightarrow{\sim} E_{\sigma(t_1)}; t_0, t_1 \in I.$$

Ecuaciones de Estructura de Cartan: Sea ∇ una conexión lineal en X . Si $\{D_1, \dots, D_n\}$ es una base local de campos tangentes, y $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ es la base dual, tendremos

1. $dD_j = \sum_{i=1}^n \omega_{ij} \otimes D_i$, $\omega_{ij}(D) = \theta_i(D^\nabla D_j)$.
2. $d^2D_j = R \wedge D_j = \sum_{i=1}^n \Omega_{ij} \otimes D_i$, $\Omega_{ij}(D, D') = \theta_i(R(D, D')D_j)$.
3. $\text{Tor} = dI = \sum_{i=1}^n \Theta_i \otimes D_i$, $\Theta_i(D, D') = \theta_i(\text{Tor}(D, D'))$.

Calculando la diferencial exterior de la identidad $I = \sum_j \theta_j \otimes D_j = \sum_j \theta_j \wedge D_j$,

$$\begin{aligned} dI &= \sum_j d\theta_j \wedge D_j - \sum_j \theta_j \wedge dD_j = \sum_i d\theta_i \otimes D_i - \sum_{i,j} (\theta_j \wedge \omega_{ij}) \otimes D_i \\ &= \sum_i (d\theta_i + \sum_j \omega_{ij} \wedge \theta_j) \otimes D_i \end{aligned}$$

y, comparando con (3), obtenemos la **primera ecuación de estructura**,

$$d\theta_i + \sum_j \omega_{ij} \wedge \theta_j = \Theta_i.$$

Diferenciando (1) y comparando con (2), obtenemos la **segunda ecuación de estructura**,

$$d\omega_{ij} + \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} = \Omega_{ij}.$$

Si consideramos $\theta = (\theta_i)$ y $\Theta = (\Theta_i)$ como formas valoradas en \mathbb{R}^n , y $\omega = (\omega_{ij})$ y $\Omega = (\Omega_{ij})$ como formas valoradas en las matrices $n \times n$, estas ecuaciones son

$$\begin{aligned} d\theta + \omega \wedge \theta &= \Theta \\ d\omega + \omega \wedge \omega &= \Omega \end{aligned}$$

donde los productos exteriores se consideran respecto del producto de matrices.

Si diferenciamos la primera ecuación de estructura,

$$0 + (d\omega) \wedge \theta - \omega \wedge (d\theta) = d\Theta$$

y sustituimos $d\theta$ y $d\omega$ por los valores que dan las ecuaciones de estructura, obtenemos la **Identidad de Bianchi**:

$$\Omega \wedge \theta - \omega \wedge \Theta = d\Theta.$$

Si diferenciamos la segunda ecuación de estructura,

$$0 + (d\omega) \wedge \omega - \omega \wedge (d\omega) = d\omega$$

y sustituimos $d\omega$ por el valor que da la segunda ecuación de estructura, obtenemos la **Identidad Diferencial de Bianchi**:

$$\Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega = d\Omega.$$

En el caso de una conexión simétrica (como es la de Levi-Civita) tenemos que $\Theta = 0$, y las ecuaciones de estructura y de Bianchi son

$$\left. \begin{aligned} d\theta + \omega \wedge \theta &= 0 \\ d\omega + \omega \wedge \omega &= \Omega \end{aligned} \right\} \quad , \quad \left. \begin{aligned} \Omega \wedge \theta &= 0 \\ \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega &= d\Omega \end{aligned} \right\}$$

10.2. Cálculo de Variaciones

Dos aplicaciones diferenciables $\bar{s}, s: X \rightarrow Y$ definidas en sendos entornos de un punto $x \in X$ tienen el mismo **k -jet** en x cuando $s^*(f) \equiv \bar{s}^*(f)$ (mód. \mathfrak{m}_x^{k+1}) para toda $f \in \mathcal{C}^\infty(Y)$.

En particular, tienen el mismo 1-jet cuando $\bar{s}(x) = s(x)$ y tienen igual aplicación lineal tangente en x .

Los k -jets de aplicaciones son las clases de equivalencia, y el k -jet en x de una aplicación s se denota $j_x^k s$.

Fijada una proyección regular $\pi: Y \rightarrow X$, el conjunto de 1-jets de secciones locales (diferenciables) de π se denota J^1Y , y está dotado de proyecciones naturales

$$\begin{array}{ccc} J^1Y & \xrightarrow{p} & Y \\ & \searrow \bar{\pi} & \downarrow \pi \\ & & X \end{array} \quad , \quad \begin{aligned} p(j_x^1 s) &= s(x) \\ \bar{\pi}(j_x^1 s) &= x \end{aligned}$$

Si (x_1, \dots, x_n) son coordenadas en un abierto $U \subseteq X$, y $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ en un abierto $V \subseteq \pi^{-1}(U)$; en $p^{-1}(V)$ cada 1-jet de sección $j_x^1 s$ está determinado por las coordenadas $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ de $s(x)$ y los coeficientes de la matriz jacobiana

$$y_{j,i} = \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(x).$$

En J^1Y tenemos una única estructura de variedad diferenciable tal que $(x_i, y_j, y_{j,i})$ son sistemas de coordenadas locales.

En particular, p y $\bar{\pi}$ son proyecciones regulares, y cada sección $s: X \rightarrow Y$ tiene una prolongación 1-jet $\bar{s}: X \rightarrow J^1Y$, $\bar{s}(x) = j_x^1s$, que es diferenciable, porque si localmente s viene dada por unas ecuaciones $y_j = y_j(x_1, \dots, x_n)$, su prolongación 1-jet \bar{s} viene dada por las ecuaciones

$$y_j = y_j(x_1, \dots, x_n), \quad y_{j,i} = \frac{\partial y_j(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}.$$

Además, en J^1Y tenemos una 1-forma estructural θ con valores en la subida p^*T^vY del fibrado vertical (definido por los vectores tangentes a Y con proyección nula sobre X),

$$\theta(D_{j_x^1s}) = p_*D - s_*\bar{\pi}_*D, \quad \theta = \sum_j (dy_j - \sum_i y_{j,i}dx_i) \otimes \partial_{y_j}.$$

Su núcleo define el sistema de Pfaff estructural P de J^1Y , localmente generado por las **1-formas de estructura**

$$\theta_j = dy_j - \sum_i y_{j,i}dx_i; \quad j = 1, \dots, m,$$

y la extensión 1-jet \bar{s} de una sección s está caracterizada por la condición de ser tangente al sistema de Pfaff estructural, $\bar{s}^*P = 0$.

El **ideal de contacto** I es el que P genera en el álgebra exterior $\bigoplus_p \Omega_{J^1Y}^p$.

Un campo tangente \tilde{D} en J^1Y es una **transformación infinitesimal de contacto** si conserva el sistema de Pfaff estructural, $\tilde{D}^L P \subseteq P$, lo que equivale a que conserve el ideal que genera, $\tilde{D}^L I \subseteq I$.

Proposición: *Todo campo tangente D en Y es la proyección de una única transformación infinitesimal de contacto \tilde{D} . Si $D = \sum_j h_j \partial_{y_j}$ es vertical,*

$$\tilde{D} = \sum_j h_j \frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{j,i} \left(\frac{\partial h_j}{\partial x_i} + \sum_k y_{k,i} \frac{\partial h_j}{\partial y_k} \right) \frac{\partial}{\partial y_{j,i}}.$$

Demostración: Si $f \in C^\infty(Y)$, entonces $df \equiv \sum_i f_i dx_i$ (mód P), para ciertas funciones f_i , porque $dy_j \equiv \sum_i y_{j,i} dx_i$ (mód. P). Ahora, si $D = \sum_i g_i \partial_{x_i} + \sum_j h_j \partial_{y_j}$, entonces $\tilde{D}x_i = g_i$, $\tilde{D}y_j = h_j$, y las funciones $\tilde{D}y_{j,i}$ están determinadas por las congruencias (mód. P)

$$0 \equiv \tilde{D}^L \theta_i = \tilde{D}^L (dy_j - \sum_i y_{j,i} dx_i) = dh_j - \sum_i (\tilde{D}y_{j,i}) dx_i - \sum_i y_{j,i} dg_i, \\ \sum_i (\tilde{D}y_{j,i}) dx_i \equiv dh_j - \sum_i y_{j,i} dg_i \equiv \sum_i u_i dx_i.$$

Definición: Fijada una n -forma \mathbb{L}_n en J^1Y , las secciones **críticas** del problema variacional que define \mathbb{L}_n son las secciones diferenciables $s: X \rightarrow Y$ tales que

$$\int_{\bar{s}} \tilde{D}^L \mathbb{L}_n = 0$$

para todo campo vertical D en Y con soporte compacto.

Si τ_t es el flujo del campo D , esta condición afirma la anulación de la derivada en $t = 0$ de la integral de \mathbb{L}_n sobre la prolongación 1-jet de $\tau_t(s)$.

Como $\int_{\bar{s}} \tilde{D}^L \omega_n = 0$ para toda n -forma $\omega_n \in I$, dos n -formas $\mathbb{L}_n, \mathbb{L}'_n$ definen el mismo problema variacional cuando

$$\mathbb{L}'_n \equiv \mathbb{L}_n \quad (\text{mód. } I).$$

Siempre supondremos que localmente $\mathbb{L}_n = \mathcal{L}dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ para alguna función diferenciable \mathcal{L} en J^1Y , llamada **lagrangiana**, y pondremos $dX = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$.

Lema: Si $(i_D d\mathbb{L}_n)|_{\bar{s}} = 0$ para todo campo D tangente a J^1Y , entonces s es una sección crítica. El recíproco es cierto cuando $d\mathbb{L}_n \equiv 0$ (mód. I).

Demostración: Para todo campo D en J^1Y con soporte compacto en \bar{s} tenemos que

$$\int_{\bar{s}} D^L \mathbb{L}_n = \int_{\bar{s}} i_D d\mathbb{L}_n + \int_{\bar{s}} di_D \mathbb{L}_n = \int_{\bar{s}} di_D \mathbb{L}_n \stackrel{\text{Stokes}}{=} 0$$

porque $i_D \mathbb{L}_n$ tiene soporte compacto en \bar{s} , y la sección s es crítica.

Recíprocamente, si $d\mathbb{L}_n \in I$, localmente $d\mathbb{L}_n = \sum_j \theta_j \wedge \omega_j$ para unas n -formas ω_j .

Ahora, si una sección s es crítica, para todo campo vertical D con soporte compacto

$$0 = \int_{\bar{s}} \tilde{D}^L \mathbb{L}_n = \int_{\bar{s}} i_{\tilde{D}} d\mathbb{L}_n + \int_{\bar{s}} di_{\tilde{D}} \mathbb{L}_n = \sum_j \int_{\bar{s}} \theta_j(\tilde{D}) \omega_j.$$

Cuando $D = \rho \partial_{y_j}$, donde $\rho \geq 0$ tiene soporte compacto,

$$0 = \int_{\bar{s}} \theta_j(\tilde{D}) \omega_j = \int_{\bar{s}} \rho \omega_j.$$

Como el soporte de ρ es arbitrariamente pequeño, $\omega_j|_{\bar{s}} = 0$.

Como también $\theta_j|_{\bar{s}} = 0$, para todo campo D en J^1Y se cumple que

$$(i_D d\mathbb{L}_n)|_{\bar{s}} = (i_D \sum_j \theta_j \wedge \omega_j)|_{\bar{s}} = (\sum_i \theta_j(D) \omega_j - \omega_j(D) \theta_j)|_{\bar{s}} = 0.$$

Lema Fundamental: Existe una n -forma Θ en J^1Y que define el mismo problema variacional que $\mathcal{L}dX$ y, módulo el ideal de contacto, es cerrada

$$\Theta \equiv \mathcal{L}dX \quad , \quad d\Theta \equiv 0 \quad (\text{mód. } I)$$

Además Θ es única si se pide que $\Theta \equiv \mathcal{L}dX$ (mód. $P \wedge \Omega_X^{n-1}$).

Demostración: En J^1Y , una base local de las $(n+1)$ -formas que son múltiplo de dX es

$$\theta_j \wedge dX = dy_j \wedge dX, \quad d\theta_j \wedge i_{\partial_{x_i}} dX = -dy_{j,i} \wedge dX.$$

Por tanto, localmente existen funciones f_{ji}, g_j en J^1Y tales que

$$d(\mathcal{L}dX) = d\mathcal{L} \wedge dX = \sum_{j,i} f_{ji} d\theta_j \wedge i_{\partial_{x_i}} dX + \sum_j g_j \theta_j \wedge dX,$$

$$d(\mathcal{L}dX) \equiv \sum_{j,i} f_{ji} d\theta_j \wedge i_{\partial_{x_i}} dX \quad (\text{mód. } I),$$

$$\Theta = \mathcal{L}dX - \sum_{j,i} f_{ji} \theta_j \wedge i_{\partial_{x_i}} dX,$$

y se cumple que $\Theta \equiv \mathcal{L}dX$, $d\Theta \equiv 0$ (mód. I).

La unicidad local se debe a que $\{\theta_j, dy_{j,i}, dx_j\}$ es una base local de 1-formas, y

$$d(f\theta_j \wedge i_{\partial_{x_i}} dX) \equiv -f dy_{j,i} \wedge dX.$$

Finalmente, la unicidad local permite concluir la existencia global de la n -forma Θ en J^1Y , llamada **forma de Poincaré-Cartan** del problema variacional.

Su expresión local (donde ponemos $\mathcal{L}_{y_{ji}} = \partial\mathcal{L}/\partial y_{j,i}$) es

$$\Theta = \mathcal{L}dX - \sum_{j,i} (-1)^i \mathcal{L}_{y_{ji}} \left(dy_j - \sum_k y_{j,k} dx_k \right) \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Teorema: Una sección s es crítica si y sólo si para todo campo D tangente a J^1Y

$$(i_D d\Theta)|_{\bar{s}} = 0.$$

Definición: Una **simetría infinitesimal** del problema variacional que define $\mathcal{L}dX$ es una transformación infinitesimal de contacto D en J^1Y que cumple $D^L(\mathcal{L}dX) \equiv 0$ (mód. I).

Como $\Theta \equiv \mathcal{L}dX$ (mód. I), y $D^L I \subseteq I$, tal condición equivale a que

$$D^L \Theta \equiv 0 \quad (\text{mód. } I),$$

y el **invariante Noether** asociado a la simetría D es la $(n-1)$ -forma $-i_D \Theta$.

Teorema de Noether: El invariante Noether de una simetría infinitesimal D es una forma cerrada en la extensión 1-jet de cada sección crítica,

$$(di_D \Theta)|_{\bar{s}} = 0.$$

Demostración: Como $D^L \Theta \equiv 0$ (mód. I), en toda sección s tenemos que $(D^L \Theta)|_{\bar{s}} = 0$.

Si además s es crítica, $(i_D d\Theta)|_{\bar{s}} = 0$, y

$$0 = (D^L \Theta)|_{\bar{s}} = (di_D \Theta + i_D d\Theta)|_{\bar{s}} = (di_D \Theta)|_{\bar{s}}.$$

Nota: Cuando $X = \mathbb{R}$, los invariantes Noether son funciones sobre J^1Y , constantes sobre cada sección crítica. Cuando $X = \mathbb{R} \times S$, donde el primer factor se identifica con el tiempo y el segundo con el espacio, $\omega_{n-1} = (i_D \Theta)|_{\bar{s}}$ es una $(n-1)$ -forma cerrada en X y produce leyes de conservación. Así, si el soporte de ω_{n-1} es compacto, $\int_{t \times S} \omega_{n-1}$ no depende del instante t .

10.2.1. Problemas en Dimensión 1

Supongamos ahora que $X = \mathbb{R}$, y pongamos $t = x_1$, $y'_j = y_{j,1}$.

Ahora J^1Y tiene dimensión impar $2m+1$, así que la 2-forma $d\Theta$ tiene radical no nulo (p. 104) y la condición $(i_D d\Theta)|_{\bar{s}} = 0$ expresa que \bar{s} es tangente al radical de

$$d\Theta = \sum_j (d\mathcal{L}_{y'_j} - \mathcal{L}_{y_j} dt) \wedge \theta_j$$

lo que equivale a que las 1-formas $d\mathcal{L}_{y'_j} - \mathcal{L}_{y_j} dt$ se anulen en \bar{s} .

Ecuaciones de Euler-Lagrange: Una sección s es crítica si y sólo si en \bar{s}

$$\frac{d\mathcal{L}_{y'_j}}{dt} - \mathcal{L}_{y_j} = 0.$$

Definición: Una lagrangiana \mathcal{L} es **regular** si en todo punto se cumple que $\det(\mathcal{L}_{y'_i y'_j}) \neq 0$, lo que equivale a que las $2m+1$ formas

$$dt, \theta_j = dy_j - y'_j dt, d\mathcal{L}_{y'_j} - \mathcal{L}_{y_j} dt$$

formen una base local de 1-formas en J^1Y , lo que a su vez equivale a que el radical de la 2-forma $d\Theta = \sum_j (d\mathcal{L}_{y'_j} - \mathcal{L}_{y_j} dt) \wedge \theta_j$ sea de dimensión 1 y no vertical.

En tal caso, el radical $\langle Z \rangle$ de $d\Theta$ es incidente con $P = \langle \theta_j \rangle$, y las curvas integrales del **campo lagrangiano** Z , normalizado con la condición $Zt = 1$, son las extensiones 1-jet de las secciones críticas.

Lema: Sea D un campo tangente a una variedad X . Si existe una función $t \in C^\infty(X)$ tal que $Dt > 0$, entonces existe una variedad W (quizás no separada) y una proyección regular $X \rightarrow W$ cuyas fibras son las curvas integrales del campo D .

Demostración: Sea $\pi: X \rightarrow W$ una aplicación epiyectiva cuyas fibras sean las curvas integrales, y consideremos en W la topología cociente ($U \subseteq W$ es abierto si y sólo si $\pi^{-1}U$ es abierto en X) y el haz de funciones continuas

$$\mathcal{O}(U) = \{f \in \mathcal{C}(U) : \pi^*f \in C^\infty(\pi^{-1}U)\}.$$

Veamos que W es una variedad diferenciable y que π es una proyección regular.

Por hipótesis las hipersuperficies H_a de ecuación $t = a$ cortan transversalmente a las curvas integrales, y en un único punto porque t es creciente en cada curva integral.

Luego cada punto de X admite un entorno abierto V tal que $V \rightarrow \pi(V) = H_a \cap V$ es proyección regular con cierta estructura diferenciable en $\pi(V) = H_a \cap V$, que coincide con la que hereda de W porque si U es un abierto de $H_a \cap V$, entonces

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{V',t} \tau_t(V')$$

es un abierto de X , donde V' recorre todos los abiertos de U .

Por lo mismo, si f es diferenciable en U , también lo es π^*f en $\pi^{-1}U$.

Definición: Como $Zt = 1$, existe una proyección regular $J^1Y \rightarrow W$ cuyas fibras son las extensiones 1-jet de las secciones críticas, y la 2-forma $d\Theta$ es proyectable a W porque

$$i_Z d\Theta = 0, \quad Z^L d\Theta = di_Z d\Theta + i_Z dd\Theta = 0 + 0 = 0.$$

La proyección ω_2 de $d\Theta$ a W es una 2-forma sin radical, y la variedad simpléctica (W, ω_2) es la **variedad de soluciones** del problema variacional.

Proposición: Toda simetría infinitesimal D del problema variacional es proyectable a la variedad de soluciones W .

Demostración: Hemos de ver que D conserva el haz de integrales primeras de Z .

Si $Zf = 0$, entonces

$$Z(Df) = [Z, D]f - D(Zf) = -(D^L Z)f$$

y derivando con D^L la igualdad $0 = C_1^1(Z \otimes d\Theta)$, al ser $D^L(d\Theta) = 0$, vemos que

$$0 = C_1^1(D^L Z \otimes d\Theta);$$

luego $D^L Z$ está en el radical de $d\Theta$ y es proporcional a Z .

Concluimos que $Z(Df) = -(D^L Z)f = 0$.

q.e.d.

El invariante Noether $f = -\Theta(D)$ es constante en las soluciones; luego define una función diferenciable en W , y la condición $D^L \Theta = 0$ significa que $i_D d\Theta = df$, de modo que en W tenemos que $i_D \omega_2 = df$.

Ecuaciones de Hamilton: Supongamos además que el fibrado es trivial, $Y = \mathbb{R} \times F$, y que la lagrangiana \mathcal{L} no depende del tiempo t . En tal caso el campo ∂_t es una simetría infinitesimal del problema variacional, y su invariante Noether $h = -\Theta(\partial_t)$ es la **energía** o **hamiltoniano**. En coordenadas $h = -\mathcal{L} - \sum_j y'_j \mathcal{L}_{y'_j}$.

Ahora $J^1Y = \mathbb{R} \times TF$, y el campo lagrangiano es $Z = \partial_t + \bar{Z}$, donde \bar{Z} es un campo en el fibrado tangente TF (Z no depende del tiempo porque ∂_t es una simetría infinitesimal).

También la 2-forma $d\Theta$ es invariante por traslaciones en el tiempo, y su restricción ω_2 a cualquier fibra TF es no-singular, porque las fibras son transversales a $\langle Z \rangle = \text{rad } d\Theta$.

(TF, ω_2) es una variedad simpléctica.

Como $i_Z d\Theta = 0$ y $i_{\partial_t} d\Theta = \partial_t^L \Theta - \text{di}_{\partial_t} \Theta = dh$, tenemos las **ecuaciones de Hamilton**

$$i_{\bar{Z}} \omega_2 = dh.$$

La restricción de $d\Theta$ a cualquier fibra es $\omega_2 = \sum_j d\mathcal{L}_{y'_j} \wedge dy_j$, así que en cualquier fibra TF las funciones $p_j = y_j, q_j = \mathcal{L}_{y'_j}$ son **coordenadas canónicas**, en el sentido de que $\omega_2 = \sum_j dq_j \wedge dp_j$. En estas coordenadas las ecuaciones de Hamilton son

$$q'_j = h_{p_j} \quad , \quad p'_j = -h_{q_j}.$$

10.3. Fibrados Naturales

Fijemos una variedad diferenciable X de dimensión constante n .

Un **fibrado natural** sobre X es una proyección regular $\pi: F \rightarrow X$, dotada de un levantamiento $\tau_*: F_U = \pi^{-1}(U) \rightarrow F_V = \pi^{-1}(U)$ de cada difeomorfismo $\tau: U \rightarrow V$ entre abiertos de X , tal que conmuten los cuadrados

$$\begin{array}{ccc} F_U & \xrightarrow{\tau_*} & F_V \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ U & \xrightarrow{\tau} & V \end{array}$$

1. *Functorialidad:* $\text{Id}_* = \text{Id}$, y $(\tau \circ \tau')_* = \tau_* \circ \tau'_*$.
2. *Carácter local:* Para todo difeomorfismo $\tau: U \rightarrow V$ y todo abierto $U' \subset U$, se cumple que la restricción de τ_* a $F_{U'}$ es el levantamiento de $\tau|_{U'}: U' \rightarrow \tau(U')$.
3. *Regularidad:* Si $\{\tau_t: U_t \rightarrow V_t\}_{t \in T}$ es una familia diferenciable de difeomorfismos, parametrizada por una variedad T (es decir, $U = \bigcup_t U_t \times t$ y $V = \bigcup_t V_t \times t$ son abiertos de $X \times T$, y la aplicación $U \rightarrow V, (x, t) \mapsto (\tau_t x, t)$, es un difeomorfismo), entonces $\{\tau_{t*}: F_{U_t} \rightarrow F_{V_t}\}_{t \in T}$ es una familia diferenciable de difeomorfismos entre abiertos de F .

Un **morfismo** de fibrados naturales es una aplicación diferenciable $\varphi: F \rightarrow F'$ que conmuta con el levantamiento de difeomorfismos, $\varphi \tau_* = \tau_* \varphi$,

$$\begin{array}{ccc} F_U & \xrightarrow{\varphi} & F'_U \\ \downarrow \tau_* & & \downarrow \tau_* \\ F_V & \xrightarrow{\varphi} & F'_V \end{array}$$

Un fibrado natural es de **orden**¹ $\leq k$ si para todo par de difeomorfismos $\tau', \tau: U \rightarrow V$ y todo $x \in U$ se cumple que $j_x^k \tau' = j_x^k \tau$ implica que $\tau'_* = \tau_*$ en la fibra F_x de x .

¹De hecho todo fibrado natural es de orden finito; pero en estos apuntes no demostraremos ese resultado.

Ejemplos: El fibrado tangente $TX \rightarrow X$, el cotangente $T^*X \rightarrow X$ (donde $\tau_* = (\tau^*)^{-1}$), y los fibrados de tensores $T_p^q X \rightarrow X$, son fibrados vectoriales naturales de orden 1.

Si $F \rightarrow X$ es un fibrado natural de orden k , entonces $J^1 F \rightarrow X$ lo es de orden $k + 1$.

Si $F \rightarrow X$ es un fibrado natural de orden $\leq k$ y fijamos un punto $p \in X$, el grupo de Lie $G_p = G_p^k$ de los k -jets $j_p^k \tau$ de gérmenes de difeomorfismos $U \rightarrow V$ que dejen fijo p actúa sobre la fibra F_p ,

$$g \cdot e = \tau_*(e); \quad g = j_p^k \tau \in G_p^k, \quad e \in F_p,$$

y esta acción es diferenciable (F_p es una G_p^k -variedad). En efecto, tomando un entorno coordinado de p es clara la existencia de una familia diferenciable de difeomorfismos $\tau_g: U_g \rightarrow V_g$, parametrizada por $g \in G_p$, tal que $g = j^k \tau_g$. Por regularidad, $(\tau_g)_*$ es una familia diferenciable de difeomorfismos de F_p , y $g \cdot e = (\tau_g)_*(e)$ es una acción diferenciable.

Teorema de Galois: *El funtor fibra $F \rightsquigarrow F_p$ define una equivalencia de categorías*

$$\left[\begin{array}{l} \text{Fibrados naturales} \\ \text{en } X \text{ de orden } \leq k \end{array} \right] \longleftrightarrow [G_p^k\text{-variedades}]$$

Demostración: La similitud con la teoría de Galois de revestimientos (pp. 218, 222) es evidente; pero ahora los caminos que unen p y x (que definen una identificación de sus fibras) han de sustituirse por los difeomorfismos $\sigma: U \rightarrow V$, $\sigma(x) = p$.

Obtendremos así un fibrado natural universal $P \rightarrow X$ de orden k , que es de Galois y G_p es su grupo de automorfismos, $P \times_X P = G_p \times P$. Además $P/G_p = X$, y P trivializa a todo fibrado natural de orden $\leq k$, $F \times_X P = P \times F_p$, de modo que la acción de G_p en la fibra F_p permite reconstruir el fibrado, $F = (P \times F_p)/G_p$. Vayamos con los detalles:

La variedad P de los jets $j_x^k \sigma$ de difeomorfismos $\sigma: U \rightarrow V$, $\sigma(x) = p$, admite una proyección regular $P \rightarrow X$, $j_x^k \sigma \mapsto x$, y el grupo G_p actúa sobre P ,

$$(j_p^k g) \cdot (j_x^k \sigma) = j_x^k (g\sigma).$$

Este fibrado universal P es un **fibrado principal** (localmente tenemos difeomorfismos $P_U = G_p \times U$ sobre X que conservan la acción de G_p) y es un fibrado natural de orden k . El levantamiento de un difeomorfismo $\tau: U \rightarrow V$ se define por la igualdad

$$P|_U \xrightarrow{\tau_*} P|_V, \quad \tau_*(j_x^k \sigma) = j_{\tau(x)}^k (\sigma\tau^{-1}).$$

Ahora, el fibrado asociado a una G_p -variedad F_p se define como

$$F = (P \times F_p)/G \longrightarrow X, \quad [(j_x^k \sigma, e)] \mapsto x,$$

y es un fibrado natural de orden $\leq k$, donde el levantamiento de $\tau: U \rightarrow V$ es

$$F|_U = (P_U \times F_p)/G_p \xrightarrow{\tau_*} (P_V \times F_p)/G_p = F|_V, \quad \tau_* \left([j_x^k \sigma, e] \right) = [\tau_*(j_x^k \sigma), e].$$

Este levantamiento está bien definido porque las acciones de τ_* y G_p sobre P conmutan:

$$\tau_*(j_p g \cdot j_x \sigma) = \tau_* j_x (g\sigma) = j_{\tau(x)} (g\sigma\tau^{-1}) = j_p g \cdot j_{\tau(x)} (\sigma\tau^{-1}) = j_p g \cdot \tau_* j_x \sigma,$$

y define un funtor de la categoría de G_p -variedades en la de fibrados naturales, donde cada G_p -morfismo $f: F_p \rightarrow F'_p$ se corresponde con el morfismo de fibrados naturales

$$F = (P \times F_p)/G_p \xrightarrow{\text{Id} \times f} (P \times F'_p)/G_p = F', \quad [j_x^k \sigma, e] \mapsto [j_x^k \sigma, f(e)].$$

Veamos que este funtor y el funtor fibra definen una equivalencia de categorías.

Por una parte, tenemos un difeomorfismo G_p -equivariante

$$F_p = [(P \times F_p)/G_p]_p, \quad e \mapsto [(j_p^k \text{Id}, e)];$$

$$j_p g \cdot [j_p \text{Id}, e] = [g_* j_p \text{Id}, e] = [j_p g^{-1}, e] = [j_p g \cdot (j_p g^{-1}, e)] = [j_p \text{Id}, j_p g \cdot e].$$

Por otra parte, si $F \rightarrow X$ es un fibrado natural de orden $\leq k$, tenemos un isomorfismo de F con el fibrado asociado a su fibra F_p ,

$$(P \times F_p)/G_p = F, \quad [j_x \sigma, e] \mapsto \sigma_*^{-1} e,$$

isomorfismo que está bien definido porque si sustituimos una pareja $(j_x \sigma, e)$ por el par equivalente $j_p g \cdot (j_x \sigma, e) = (j_x(g\sigma), j_p g \cdot e) = (j_x(g\sigma), g_* e)$, tenemos que

$$[j_x(g\sigma), g_* e] \mapsto (g\sigma)_*^{-1} g_* e = \sigma_*^{-1} e.$$

Definición: Sustituyendo p por el origen de \mathbb{R}^n vamos a ver que dar un fibrado natural en X significa darlo ya en todas las variedades de dimensión n . Una referencia de orden k en un punto $x \in X$ es el k -jet $j_x^k \sigma$ de un difeomorfismo σ de un entorno de $x \in X$ en un entorno del origen $0 \in \mathbb{R}^n$ que cumple $\sigma(x) = 0$. Las referencias de orden k en el origen de \mathbb{R}^n forman un grupo de Lie G_n^k , que actúa en el fibrado $R_X^k \rightarrow X$ de todas las referencias de orden k en puntos de X , que es un fibrado natural de orden k . El **fibrado asociado** a una G_n^k -variedad F_0 es el fibrado natural $(R_X^k \times F_0)/G_n^k \rightarrow X$, y es de orden $\leq k$.

Corolario: El funtor “fibrado asociado” define una equivalencia de categorías

$$[G_n^k\text{-variedades}] \quad \longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \text{Fibrados naturales} \\ \text{en } X \text{ de orden } \leq k \end{array} \right]$$

Demostración: Fijadas coordenadas locales en $p \in X$, tenemos isomorfismos $G_n^k \simeq G_p^k$, $R_X^k \simeq P$, cada G_n^k -variedad F_0 adquiere una estructura de G_p^k -variedad, y $(R_X^k \times F_0)/G_n^k \simeq (P \times F_0)/G_p^k$. Ahora el resultado se sigue del teorema anterior. q.e.d.

1. Un inverso del funtor “fibrado asociado” es el funtor fibra $F \rightsquigarrow F_p$, donde F_p se considera con la estructura de G_n^k -variedad que define la elección de coordenadas.

Si se desea un funtor inverso intrínseco, basta tomar, como en la teoría de Galois de revestimientos (p. 218), el funtor

$$F \rightsquigarrow \text{Hom}_{\text{nat}}(R_X^k, F) = \text{Hom}_{G_p^k}((R_X^k)_p, F_p) \simeq F_p.$$

2. Los fibrados vectoriales naturales de orden ≤ 1 se corresponden con las representaciones lineales diferenciables del grupo lineal $G_n^1 = Gl(\mathbb{R}^n)$. El fibrado tangente se corresponde con la acción evidente de $Gl(\mathbb{R}^n)$ en \mathbb{R}^n .
3. La acción de $Gl(\mathbb{R}^n)$ en $\{\pm 1\}$ que define el determinante se corresponde con el revestimiento de orientación $\Delta_X \rightarrow X$.
4. Los revestimientos naturales de orden $\leq k$ se corresponden con las acciones de G_n^k en variedades discretas. Éstas factorizan a través del cociente por la componente conexa del neutro, y como G_n^k tiene dos componentes conexas, vemos que los revestimientos naturales son el trivial $X \rightarrow X$, el de orientación $\Delta_X \rightarrow X$, y sus uniones disjuntas.

10.4. Clases de Chern y Curvatura

Sea ∇ una conexión lineal en un fibrado vectorial complejo $E \rightarrow X$ de rango r .

Cada polinomio $P(x_{ij})$ homogéneo de grado p sobre las matrices $M_{r \times r}$ se corresponde con una aplicación lineal simétrica $\tilde{P}: \otimes^p M_{r \times r} \rightarrow \mathbb{C}$, $P(A) = \tilde{P}(A \otimes \dots \otimes A)$.

Cuando el polinomio es invariante (por la acción del grupo lineal) \tilde{P} está bien definida sobre los endomorfismos de cualquier espacio vectorial complejo de dimensión r ; luego induce un morfismo lineal $\tilde{P}: \otimes^p \text{End}(E) \rightarrow \mathbb{C}_X$, y obtenemos una $2p$ -forma ordinaria

$$P(\Omega) = \tilde{P}(R \wedge \dots \wedge R).$$

Si fijamos una base local de secciones, esta $2p$ -forma compleja es $P(\Omega_{ij})$, donde Ω_{ij} son las 2-formas de curvatura (p. 252) y el producto de 2-formas es el producto exterior.

Como ejemplo tenemos los polinomios invariantes $c_p(A) = \text{tr}(\Lambda^p A)$,

$$|I + A| = 1 + c_1(A) + \dots + c_r(A).$$

Teorema: Si un polinomio $P(x_{ij})$ es invariante por el grupo lineal, la forma diferencial $P(\Omega)$ es cerrada, y su clase en $H^\bullet(X, \mathbb{C})$ no depende de la conexión lineal ∇ .

Demostración: Por la identidad de Bianchi, $dR = 0$, tenemos que

$$d(R \wedge \dots \wedge R) = (dR) \wedge \dots \wedge R + \dots + R \wedge \dots \wedge (dR) = 0.$$

Como P es invariante, el morfismo $\tilde{P}: \otimes^p \text{End}(E) \rightarrow \mathbb{C}_X$ conmuta con el traslado paralelo; luego con la derivada covariante de secciones y la diferencial exterior,

$$dP(\Omega) = d(\tilde{P}(R \wedge \dots \wedge R)) = \tilde{P}(d(R \wedge \dots \wedge R)) = 0.$$

Dadas dos conexiones ∇_0, ∇_1 en E , consideramos la proyección $\pi: X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ y la conexión² $\nabla = t\pi^*\nabla_1 + (1-t)\pi^*\nabla_0$ en π^*E , de modo que $[P(\Omega_i)] = s_i^*[P(\Omega)]$.

Terminamos porque $s_0^* = s_1^*$, al ser $\pi^*: H^\bullet(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^\bullet(X \times \mathbb{R}, \mathbb{C})$ un isomorfismo.

Lema: Si Ω es la 2-forma de curvatura de una conexión lineal sobre un fibrado de línea complejo L , entonces la clase de obstrucción de L es $\delta(L) = [\frac{\Omega}{2\pi i}] \in H^2(X, \mathbb{C})$.

Demostración: Sea \mathcal{O} el haz de funciones complejas diferenciables, y \mathcal{Z}^p el haz de p -formas cerradas. El siguiente diagrama conmutativo de filas exactas, donde $dl(f) = f^{-1}df$,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{2\pi i} & \mathcal{O} & \xrightarrow{e^f} & \mathcal{O}^* \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow 2\pi i & & \downarrow & & \downarrow dl \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{O} & \xrightarrow{d} & \mathcal{Z}^1 \longrightarrow 0 \end{array}$$

muestra que hemos de ver que $dl: H^2(X, \mathbb{Z}) = H^1(X, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^1(X, \mathcal{Z}^1) = H^2(X, \mathbb{C})$ transforma $\delta(L)$ en $[\Omega]$. Consideremos el diagrama conmutativo de filas exactas

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}^* & \longrightarrow & C^0 \mathcal{O}^* & \longrightarrow & \mathcal{F} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow dl & & \downarrow dl & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{Z}^1 & \longrightarrow & C^0 \Omega_X^1 & \longrightarrow & \mathcal{G} \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{Z}^1 & \longrightarrow & \Omega_X^1 & \xrightarrow{d} & \mathcal{Z}^2 \longrightarrow 0 \end{array}$$

²Las conexiones lineales no forman un espacio vectorial; pero sí un espacio afín.

Sea $\{U_i\}$ un recubrimiento abierto de X donde haya secciones continuas $e_i: U_i \rightarrow L$ que no se anulen en ningún punto, y pongamos $e_i = g_{ij}e_j$ en $U_i \cap U_j$.

Una vez fijados generadores de las fibras, e_i define una sección f_i de $C^0\mathcal{O}^*$ en U_i , y $f_i/f_j = g_{ij}$ en $\mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$, así que las secciones f_i definen una sección global f de \mathcal{F} , que representa a $\delta(L)$.

Hemos de probar que f y Ω definen secciones de \mathcal{G} que difieren en una sección global de $C^0\Omega_X^1$. Ahora bien, tenemos las 1-formas de conexión θ_i , y $\Omega = d\theta_i - \theta_i \wedge \theta_i = d\theta_i$ por la ecuación de estructura; luego hemos de ver que el germen de $\theta_i - d\ln(f_i)$ en un punto no depende del índice i ; es decir, $\theta_i - \theta_j = d\ln(f_i/f_j) = d\ln(g_{ij})$,

$$\begin{aligned} D^\nabla e_i &= \theta_i(D)e_i = g_{ij}\theta_i(D)e_j, \\ D^\nabla e_i &= D^\nabla(g_{ij}e_j) = D(g_{ij})e_j + g_{ij}D^\nabla e_j = (dg_{ij} + g_{ij}\theta_j)(D)e_j, \\ \theta_i &= \theta_j + g_{ij}^{-1}dg_{ij}. \end{aligned}$$

Teorema: Las clases de Chern de cualquier fibrado vectorial complejo E son

$$c_p(E) = \left[c_p \left(\frac{-\Omega}{2\pi i} \right) \right].$$

Demostración: Dos conexiones ∇', ∇'' en ciertos fibrados vectoriales E', E'' , con 2-formas de curvatura Ω', Ω'' , inducen una conexión ∇ en $E' \oplus E''$. Su 2-forma de curvatura es

$$\begin{aligned} \Omega &= \begin{pmatrix} \Omega' & 0 \\ 0 & \Omega'' \end{pmatrix} \\ \det\left(I + \frac{-1}{2\pi i}\Omega\right) &= \det\left(I + \frac{-1}{2\pi i}\Omega'\right) \wedge \det\left(I + \frac{-1}{2\pi i}\Omega''\right) \\ c_n\left(\frac{-1}{2\pi i}\Omega\right) &= \sum_{p+q=n} c_p\left(\frac{-1}{2\pi i}\Omega'\right) \wedge c_q\left(\frac{-1}{2\pi i}\Omega''\right) \end{aligned}$$

y si el teorema se cumple para E' y E'' , también es cierto para $E' \oplus E''$ por la fórmula de Cartan (p. 303) pues el producto exterior representa el producto cup (p. 284).

Después de un cambio de base $Y \rightarrow X$, inyectivo en cohomología, podemos suponer que E descompone en suma directa de fibrados de línea (p. 303) y se termina por el lema anterior.

Teorema: Si X es una variedad conexa orientable de dimensión n , las clases de cohomología entera en $H_c^n(X, \mathbb{R})$ son las de integral entera,

$$\int_X \varepsilon_X = 1.$$

Demostración: Si U es un abierto conexo de X , el morfismo natural $H_c^n(U, \mathbb{Z}) \rightarrow H_c^n(X, \mathbb{Z})$ es isomorfismo, porque su dual es el morfismo de restricción $\mathbb{T}_X(X) \rightarrow \mathbb{T}_X(U)$, así que basta probar el teorema cuando $X = \mathbb{R}^n$.

Ahora, por los teoremas de Künneth y de Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon_{\mathbb{R}^n} = \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon_{\mathbb{R}} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{\mathbb{R}} = \left(\int_{\mathbb{R}} \varepsilon_{\mathbb{R}} \right)^n$$

y basta probar el teorema cuando $X = \mathbb{R}$, ó \mathbb{R}^2 ó la esfera S_2 (nótese que $\int_X \varepsilon_X$ es positivo, porque integramos con la orientación que define ε_X).

Lo probaremos en la recta proyectiva compleja \mathbb{P}_1 , que identificamos con la esfera de radio 1 en \mathbb{R}^3 mediante la proyección estereográfica.

Si ξ es el fibrado de línea tautológico de \mathbb{P}_1 , el fibrado tangente es $\xi^* \otimes \xi^*$ (p. 238) y

$$c_1(\xi^* \otimes \xi^*) = -2c_1(\xi) = 2\varepsilon_{\mathbb{P}_1}.$$

La conexión de Levi-Civita de la esfera es una conexión en el fibrado vectorial complejo $\xi^* \otimes \xi^*$, porque conserva el giro de ángulo recto.

Su 2-forma de curvatura es $\Omega = -i\omega_2$, donde ω_2 es la forma de área; luego

$$c_1(\xi^* \otimes \xi^*) = \left[\frac{i}{2\pi} \Omega \right] = \left[\frac{1}{2\pi} \omega_2 \right],$$

$$\int_{\mathbb{P}_1} 2\varepsilon_{\mathbb{P}_1} = \frac{1}{2\pi} \int_{S_2} \omega_2 = \frac{4\pi}{2\pi} = 2.$$

Corolario: Si $\pi: Y \rightarrow X$ es un morfismo propio entre variedades diferenciables conexas y orientadas de dimensión n , para toda n -forma ω_n con soporte compacto en X ,

$$\int_Y \pi^* \omega_n = (\text{gr } \pi) \int_X \omega_n.$$

Demostración: $\int_X: H_c^n(X, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$, $\int_Y: H_c^n(Y, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$, y $\pi^*(\varepsilon_X) = (\text{gr } \pi)\varepsilon_Y$ (p. 297).

Teorema de Gauss-Bonnet

Sea X una superficie riemanniana compacta y orientada.

El fibrado tangente TX es un fibrado de línea complejo con la estructura que define el automorfismo J asociado a la forma de área ω_2 ,

$$J(D) \cdot D' = \omega_2(D, D').$$

La conexión de Levi-Civita ∇ conserva el producto escalar y la forma de área; luego también la estructura compleja, y es una conexión en este fibrado de línea complejo.

Si K es la curvatura escalar de la superficie, la 2-forma de curvatura de esta conexión es

$$\Omega = -iK\omega_2.$$

Teorema de Gauss-Bonnet: $\frac{1}{2\pi} \int_X K\omega_2 = \chi(X)$.

Demostración: Como el fibrado tangente TX es el fibrado normal de la inmersión diagonal $X \rightarrow X \times X$, por el siguiente lema tenemos un difeomorfismo de un entorno de la sección nula s_0 en TX con un entorno de la diagonal Δ en $X \times X$; luego

$$c_1(TX) = s_0^*(s_{0,*}(1)) = \Delta^*(\Delta_*(1)) = \chi(X)\varepsilon_X,$$

$$\int_X c_1(TX) = \int_X \chi(X)\varepsilon_X = \chi(X),$$

$$\int_X c_1(TX) = \int_X \frac{i\Omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_X K\omega_2.$$

Lema del Entorno Tubular: Sea N el fibrado normal de una subvariedad compacta $i: Y \rightarrow X$ de una variedad riemanniana X . Existe un entorno abierto U de Y en X , y un difeomorfismo $\varphi: N \rightarrow U$ que transforma la sección nula en la inmersión $i = \varphi \circ s_0$.

Demostración: Consideremos los entornos $U_\varepsilon = \{D_y \in N: \|D_y\| < \varepsilon\}$ de la sección nula.

Por los teoremas de existencia, unicidad y dependencia diferenciable de las condiciones iniciales de la solución de una ecuación diferencial (p. 163) la **aplicación exponencial**

$$\exp: U_\varepsilon \rightarrow X, \exp(D_y) = \sigma(1),$$

donde $\sigma(t)$ es la única curva geodésica tangente en $t = 0$ al vector normal D_y , está definida y es diferenciable cuando ε es suficientemente pequeño.

Además, en cada punto y de Y , la aplicación lineal tangente

$$\exp_* : T_y(N) = T_yY \oplus N_y \longrightarrow T_yX = T_yY \oplus N_y$$

es la identidad: en el primer sumando es obvio, y en el segundo porque la recta $\gamma(t) = tD_y$ es tangente en $t = 0$ al vector D_y , y $\exp \gamma(t) = \sigma(t)$ es tangente en $t = 0$ a D_y .

Por tanto, podemos tomar ε de modo que la exponencial sea difeomorfismo local en todo punto, e incluso inyectiva.

En caso contrario, tendríamos vectores D_n, D'_n de módulo $< 1/n$ en puntos $y_n, y'_n \in Y$, tales que $\exp(D_n) = \exp(D'_n)$.

Como Y es compacta, podemos suponer que tales sucesiones convergen,

$$(y, 0) = \lim(D_n)_{y_n}, \quad (y', 0) = \lim(D'_n)_{y'_n}.$$

Como la exponencial es continua, $y = y'$, de modo que las igualdades $\exp(D_n) = \exp(D'_n)$, $n \gg 0$, contradicen el hecho de que la exponencial es difeomorfismo local en y .

Por último, el difeomorfismo $U_\varepsilon \rightarrow N$, $D_y \mapsto \sqrt{1 - \|D_y\|^2/\varepsilon^2} D_y$, es la identidad en $s_0(Y)$.

Capítulo 11

Topología Algebraica

11.1. Haces y Prehaces

Un **prehaz** \mathcal{P} de grupos abelianos sobre un espacio topológico X es un funtor contravariante de la categoría de abiertos de X en la de grupos abelianos. Es decir, tenemos un grupo abeliano $\mathcal{P}(U)$ para cada abierto U , y morfismos de grupos $\rho_V^U: \mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{P}(V)$ cuando $V \subseteq U$, de modo que $\rho_U^U = \text{Id}$, y $\rho_W^U = \rho_W^V \circ \rho_V^U$ cuando $W \subseteq V \subseteq U$.

Los elementos $s \in \mathcal{P}(U)$ se llaman **secciones** de \mathcal{P} en U , y decimos que $s|_V = \rho_V^U(s)$ es la **restricción** de s a V . Dar un **morfismo de prehaces** $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ es dar morfismos de grupos $f_U: \mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{P}'(U)$ compatibles con los morfismos de restricción, en el sentido de que los siguientes cuadrados son conmutativos,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(U) & \xrightarrow{f_U} & \mathcal{P}'(U) \\ \rho_V^U \downarrow & & \downarrow \rho_V^U \\ \mathcal{P}(V) & \xrightarrow{f_V} & \mathcal{P}'(V) \end{array}$$

Un prehaz \mathcal{F} es un **haz** si $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$, y para todo recubrimiento abierto $U = \bigcup_i U_i$ de un abierto U de X se tiene que

1. Si $s, s' \in \mathcal{F}(U)$ coinciden en el recubrimiento, $s|_{U_i} = s'|_{U_i}$, entonces $s = s'$.
2. Dadas secciones $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ que coincidan en las intersecciones, $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$, existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s_i = s|_{U_i}$ para todo índice i ,

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_i \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j).$$

Los morfismos de haces son los morfismos de prehaces.

Un **subhaz** de \mathcal{F} es un haz \mathcal{F}' tal que $\mathcal{F}'(U)$ es un subgrupo de $\mathcal{F}(U)$ en todo abierto U y los morfismos de inclusión definen un morfismo de haces $\mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}$.

La **restricción** de \mathcal{F} a un abierto U de X es el haz $(\mathcal{F}|_U)(V) = \mathcal{F}(V)$, $V \subseteq U$.

De modo análogo se definen los haces de conjuntos, anillos, etc.

Espacio Etalé: Dos secciones s', s de un prehaz de conjuntos \mathcal{P} , definidas en sendos entornos de un punto x , tienen el mismo **germen** en x si coinciden en algún entorno de x .

El germen de una sección s se denota s_x , y la **fibra** de \mathcal{P} en x es el conjunto \mathcal{P}_x formado por los gérmenes, $\mathcal{P}_x = \varinjlim_{x \in U} \mathcal{P}(U)$. Consideremos la aplicación (ver pp. 129, 175)

$$\pi: \mathcal{P}^{et} = \coprod_{x \in X} \mathcal{P}_x \longrightarrow X, \quad \pi(s_x) = x.$$

Cuando $x \in U$, tenemos una aplicación $\mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{P}_x$, así que cada sección $s \in \mathcal{P}(U)$ del prehaz define una sección $\tilde{s}: U \rightarrow \mathcal{P}^{et}$, $\tilde{s}(x) = s_x$, de π .

Si dos secciones \tilde{s}', \tilde{s} coinciden en un punto, $s_x = s'_x$, por definición coinciden en un entorno de x , así que las imágenes de las secciones \tilde{s} son base de una topología en \mathcal{P}^{et} con la que π es homeomorfismo local, y las secciones \tilde{s} son continuas.

Además, cada sección continua de π coincide localmente con una de estas secciones, de modo que \mathcal{P}_x también es el conjunto de gérmenes en x de secciones continuas de π .

El **espacio etalé** del prehaz \mathcal{P} es $\pi: \mathcal{P}^{et} \rightarrow X$, y su haz de secciones continuas \mathcal{P}^\sharp es el **haz asociado** al prehaz \mathcal{P} . Las aplicaciones $\mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{P}^\sharp(U)$, $s \mapsto \tilde{s}$, definen un morfismo canónico $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^\sharp$ que induce biyecciones en fibra, $\mathcal{P}_x = \mathcal{P}_x^\sharp$.

Cada morfismo de prehaces $f: \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_2$ induce una aplicación continua $f^{et}: \mathcal{P}_1^{et} \rightarrow \mathcal{P}_2^{et}$, y por tanto un morfismo de haces $f^\sharp: \mathcal{P}_1^\sharp \rightarrow \mathcal{P}_2^\sharp$.

Propiedad Universal: Si \mathcal{F} es un haz de conjuntos, el morfismo $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^\sharp$ es un isomorfismo, y para todo prehaz de conjuntos \mathcal{P} ,

$$\text{Hom}(\mathcal{P}, \mathcal{F}) = \text{Hom}(\mathcal{P}^\sharp, \mathcal{F}).$$

Demostración: La aplicación $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}^\sharp(U)$ es inyectiva porque si $s', s \in \mathcal{F}(U)$ tiene igual germen en todo punto de U , coinciden en un recubrimiento de U , y $s' = s$.

Es epiyectiva: cada sección continua $\sigma: U \rightarrow \mathcal{F}^{et}$ coincide en un entorno de cada punto con la que define algún $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$, y s_i coincide con s_j en $U_i \cap U_j$ porque $\mathcal{F}(U_i \cap U_j) \rightarrow \mathcal{F}^\sharp(U_i \cap U_j)$ es inyectiva. Luego existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s_i = s|_{U_i}$, de modo que $\sigma = \tilde{s}$.

Ahora todo morfismo $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{F}$ factoriza a través del morfismo canónico $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^\sharp$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{f} & \mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow \wr \\ \mathcal{P}^\sharp & \xrightarrow{f^\sharp} & \mathcal{F}^\sharp \end{array}$$

y de modo único porque toda sección de \mathcal{P}^\sharp coincide localmente con alguna sección \tilde{s} .

Corolario: $\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \text{Hom}_X(\mathcal{F}^{et}, \mathcal{G}^{et})$, cuando \mathcal{F} y \mathcal{G} son haces de conjuntos.

Corolario: Un morfismo de haces de conjuntos $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ es un isomorfismo si y sólo si $f_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ es biyectiva en todo punto $x \in X$.

Demostración: Si las aplicaciones f_x son biyectivas, la aplicación continua $f^{et}: \mathcal{F}^{et} \rightarrow \mathcal{G}^{et}$ es biyectiva; luego homeomorfismo, porque las proyecciones $\mathcal{P}^{et} \rightarrow X$ son homeomorfismos locales, y concluimos que $f^\sharp: \mathcal{F}^\sharp \rightarrow \mathcal{G}^\sharp$ es isomorfismo.

Ejemplo: Si G es un grupo abeliano, el haz constante G es el haz asociado al prehaz $U \rightsquigarrow G$. Sus fibras son $G_x = G$, y su espacio etalé es $G \times X \rightarrow X$, donde la topología de G es la discreta; luego el haz constante G es el haz de aplicaciones continuas en G .

Definición: Un morfismo de haces $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ es **inyectivo** (resp. **epiyectivo**) si lo son los morfismos $\mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$, y en general diremos que una sucesión $\mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}''$ es **exacta** si lo es la sucesión $\mathcal{F}'_x \rightarrow \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}''_x$ en todo punto $x \in X$.

Es sencillo probar que si una sucesión $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}''$ es exacta, la sucesión

$$0 \rightarrow \mathcal{F}'(U) \rightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}''(U)$$

también es exacta en todo abierto U ; pero un morfismo de haces $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ puede ser epiyectivo sin que lo sean todos los morfismos $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$.

Por ejemplo, si \mathcal{C}^∞ es el haz de funciones diferenciables en S_1 y Ω es el haz de 1-formas, la diferencial $d: \mathcal{C}^\infty \rightarrow \Omega$ es epiyectiva (localmente toda 1-forma es exacta); pero $d: \mathcal{C}^\infty(S_1) \rightarrow \Omega(S_1)$ no es epiyectiva, porque toda 1-forma globalmente exacta tiene integral nula,

$$\int_{S_1} df = \int_{\partial S_1} f = \int_{\emptyset} f = 0.$$

Operaciones con Haces: Sea \mathcal{F}' un subhaz de un haz \mathcal{F} en X , sea $\{\mathcal{F}_i\}$ una familia de haces en X , y sea $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ es un morfismo de haces.

1. El cociente \mathcal{F}/\mathcal{F}' es el haz asociado al prehaz $U \rightsquigarrow \mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U)$, y $(\mathcal{F}/\mathcal{F}')_x = \mathcal{F}_x/\mathcal{F}'_x$.
2. $\text{Ker } f$ es el subhaz $(\text{Ker } f)(U) = \text{Ker}[\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)]$, y $(\text{Ker } f)_x = \text{Ker } f_x$.
3. $\text{Im } f$ es el haz asociado al prehaz $U \rightsquigarrow \text{Im}[\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)]$, y $(\text{Im } f)_x = \text{Im } f_x$.
4. $\bigoplus_i \mathcal{F}_i$ es el haz asociado al prehaz $U \rightsquigarrow \bigoplus_i \mathcal{F}_i(U)$, y $(\bigoplus_i \mathcal{F}_i)_x = \bigoplus_i (\mathcal{F}_i)_x$.
5. $\prod_i \mathcal{F}_i$ es el haz $(\prod_i \mathcal{F}_i)(U) = \prod_i \mathcal{F}_i(U)$, y su fibra no es $\prod_i (\mathcal{F}_i)_x$.
6. $\varinjlim \mathcal{F}_i$ es el haz asociado al prehaz $U \rightsquigarrow \varinjlim \mathcal{F}_i(U)$, y $(\varinjlim \mathcal{F}_i)_x = \varinjlim (\mathcal{F}_i)_x$.
7. $\varprojlim \mathcal{F}_i$ es el haz $(\varprojlim \mathcal{F}_i)(U) = \varprojlim \mathcal{F}_i(U)$, y su fibra no es $\varprojlim (\mathcal{F}_i)_x$.
8. Si \mathcal{M}, \mathcal{N} son \mathcal{O} -módulos, $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{N}$ es el haz asociado al prehaz $U \rightsquigarrow \mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}(U)} \mathcal{N}(U)$, y $(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{N})_x = \mathcal{M}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathcal{N}_x$.
9. El haz de homomorfismos $\underline{\text{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es el haz $\underline{\text{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) = \text{Hom}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$.
10. Si $\phi: X \rightarrow Y$ es una aplicación continua, la **imagen directa** de \mathcal{F} es el siguiente haz sobre Y ,

$$(\phi_* \mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(\phi^{-1}V), \quad V \subseteq Y.$$

11.1.1. Cohomología

El **soporte** de $s \in \mathcal{F}(U)$ es $\text{sop}(s) = \{x \in U: s_x \neq 0\}$, y es cerrado en U .

Pondremos $\Gamma(U, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(U)$, el subgrupo de las secciones con soporte compacto se denota $\Gamma_c(U, \mathcal{F})$ y, fijado un cerrado Y de X , el de las secciones con soporte en Y se denota $\Gamma_Y(X, \mathcal{F})$. Los grupos de cohomología con soporte compacto y con soporte en Y se definen con la resolución de Godement, y las demostraciones de la p. 229 siguen siendo válidas,

$$\begin{aligned} H_c^n(X, \mathcal{F}) &= H^n[\Gamma_c(X, C^\bullet \mathcal{F})] \\ H_Y^n(X, \mathcal{F}) &= H^n[\Gamma_Y(X, C^\bullet \mathcal{F})] \end{aligned}$$

Los haces flascos son Γ_c -acíclicos y Γ_Y -acíclicos porque si $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ es una sucesión exacta y \mathcal{F}' es flasco, en el epimorfismo $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}''(U)$ toda sección s'' proviene de una sección s de igual soporte. En efecto, s define en $V = U - \text{sop}(s'')$ una sección de \mathcal{F}' , que se extiende a una sección s' en U , y $s - s'$ ya se anula en V .

Definición: Un haz de anillos \mathcal{O} admite **particiones de la unidad** si para todo recubrimiento abierto $X = \bigcup_i U_i$ existen secciones globales $f_i \in \mathcal{O}(X)$ tales que la familia de soportes $\{\text{sop } f_i\}$ es localmente finita, $\text{sop } f_i \subseteq U_i$, y $\sum_i f_i = 1$.

El haz de funciones diferenciables \mathcal{C}_X^∞ en una variedad σ -compacta, y el haz de funciones continuas \mathcal{C}_X en un espacio σ -compacto, admiten particiones de la unidad (pp. 158, 157).

En un espacio σ -compacto X , el haz de funciones enteras discontinuas $C^0\mathbb{Z}$ admite particiones de la unidad, pues todo recubrimiento abierto $X = \bigcup_i U_i$ admite una partición de la unidad $\{\phi_i\}$ formada por funciones continuas. Si elegimos para cada punto $x \in X$ un índice i tal que $\phi_i(x) \neq 0$, y tomamos $f_i: X \rightarrow \mathbb{Z}$ con valor 1 en los puntos en que se haya elegido el índice i , y 0 en los demás, entonces $\sum_i f_i = 1$ y $\text{sop } f_i \subseteq \text{sop } \phi_i \subseteq U_i$.

Lema: Si un haz de anillos \mathcal{O} admite particiones de la unidad, todo \mathcal{O} -módulo \mathcal{M} es acíclico (y Γ_c -acíclico si X es σ -compacto).

Demostración: $H^p(X, \mathcal{M})$ es la cohomología del complejo de $\mathcal{O}(X)$ -módulos

$$\Gamma(X, C^0\mathcal{M}) \xrightarrow{d_0} \Gamma(X, C^1\mathcal{M}) \xrightarrow{d_1} \Gamma(X, C^2\mathcal{M}) \xrightarrow{d_2} \dots$$

y las diferenciales d_p son morfismos de $\mathcal{O}(X)$ -módulos.

Si $d_{p+1}z = 0$, existe un recubrimiento abierto $X = \bigcup_i U_i$ y secciones $z_i \in \Gamma(U_i, C^p\mathcal{M})$ tales que $z|_{U_i} = d_p z_i$. Si $\{f_i\}$ es una partición de la unidad subordinada a $\{U_i\}$, entonces

$$d_p(\sum_i f_i z_i) = \sum_i f_i d_p z_i = \sum_i f_i z = z.$$

Si X es σ -compacto y $\text{sop } z$ es compacto, podemos tomar $U_0 = (\text{sop } z)^c, U_1, \dots, U_n$, con $\bar{U}_1, \dots, \bar{U}_n$ compactos, y $z_0 = 0$, de modo que el soporte de $\sum_i f_i z_i$ es compacto.

Teorema: Los grupos de cohomología de De Rham son invariantes topológicos,

$$H_{DR}^p(X) = H^p(X, \mathbb{R}).$$

Demostración: Sea Ω^p el haz de p -formas diferenciales en X . Toda forma cerrada es localmente exacta (lema de Poincaré), así que tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{C}_X^\infty \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2 \xrightarrow{d} \dots$$

que es una resolución acíclica del haz constante \mathbb{R} , porque Ω^p es un \mathcal{C}_X^∞ -módulo.

Por el teorema de De Rham, $H^p(X, \mathbb{R}) = H^p[\Gamma(X, \Omega^\bullet)] = H_{DR}^p(X)$. Igualmente,

$$H_c^p(X, \mathbb{R}) = \frac{\Gamma_c(X, \Omega^p)}{d\Gamma_c(X, \Omega^{p-1})}.$$

Definición: Si Y es un subespacio de X , la **restricción** $\mathcal{F}|_Y$ de un haz \mathcal{F} es el haz de secciones continuas del homeomorfismo local $(\mathcal{F}^{et})|_Y \rightarrow Y$.

Su fibra en cada punto coincide con la de \mathcal{F} , y pondremos $H^n(Y, \mathcal{F}) = H^n(Y, \mathcal{F}|_Y)$.

Cuando Y es cerrado, la imagen directa por la inclusión $i: Y \rightarrow X$ conserva cohomología (p. 232), y poniendo $\mathcal{F}_Y = i_*(\mathcal{F}|_Y)$,

$$H^n(X, \mathcal{F}_Y) = H^n(Y, \mathcal{F}).$$

La restricción de secciones continuas define un epimorfismo $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_Y$, porque $(\mathcal{F}_Y)_x = \mathcal{F}_x$ ó 0, según que $x \in Y$ ó no, y el núcleo se denota \mathcal{F}_U , donde $U = X - Y$,

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_U \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}_Y \longrightarrow 0$$

Tomando secciones en un abierto V vemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_U(V) &= \{s \in \mathcal{F}(V) : \text{sop } s \subseteq U \cap V\} = \{s \in \mathcal{F}(U \cap V) \text{ con soporte cerrado en } V\} \\ \Gamma_c(X, \mathcal{F}_U) &= \Gamma_c(U, \mathcal{F}) \text{ cuando } X \text{ es separado.}\end{aligned}$$

Por otra parte, el espacio etalé de \mathbb{Z}_U , además de la sección 0, tiene una copia de U por cada entero no nulo, así que $\text{Hom}(\mathbb{Z}_U, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(U)$.

Todo haz \mathcal{F} admite un epimorfismo $\oplus_i \mathbb{Z}_{U_i} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$.

Lema: $H_c^n(X, \mathcal{F}_U) = H_c^n(U, \mathcal{F})$, cuando X es σ -compacto.

Demostración: Si \mathcal{M} es un \mathcal{O} -módulo, \mathcal{M}_U también, porque $\text{sop}(fm) \subseteq \text{sop } m$.

Luego $(C^n \mathcal{F})_U$ es un $C^0 \mathcal{Z}$ -módulo, y $(C^\bullet \mathcal{F})_U$ es una resolución Γ_c -acíclica de \mathcal{F}_U ,

$$H_c^n(X, \mathcal{F}_U) = H^n[\Gamma_c(X, (C^\bullet \mathcal{F})_U)] = H^n[\Gamma_c(U, C^\bullet \mathcal{F})] = H_c^n(U, \mathcal{F}).$$

Sucesión Exacta de Mayer-Vietoris: Si $X = U_1 \cup U_2$, con U_i abiertos, tenemos sucesiones exactas

$$\dots \xrightarrow{\delta} H^n(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^n(U_1, \mathcal{F}) \oplus H^n(U_2, \mathcal{F}) \longrightarrow H^n(U_1 \cap U_2, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \dots$$

y si además X es σ -compacto, también tenemos sucesiones exactas

$$\dots \xrightarrow{\delta} H_c^n(U_1 \cap U_2, \mathcal{F}) \longrightarrow H_c^n(U_1, \mathcal{F}) \oplus H_c^n(U_2, \mathcal{F}) \longrightarrow H_c^n(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} H_c^{n+1}(U_1 \cap U_2, \mathcal{F}) \longrightarrow \dots$$

Si $X = Y_1 \cup Y_2$, con Y_i cerrados, tenemos sucesiones exactas

$$\dots \xrightarrow{\delta} H^n(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^n(Y_1, \mathcal{F}) \oplus H^n(Y_2, \mathcal{F}) \longrightarrow H^n(Y_1 \cap Y_2, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \dots$$

Demostración: Tenemos sucesiones exactas

$$0 \rightarrow \Gamma(X, C^\bullet \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(U_1, C^\bullet \mathcal{F}) \oplus \Gamma(U_2, C^\bullet \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(U_1 \cap U_2, C^\bullet \mathcal{F}) \rightarrow 0.$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_{U_1 \cap U_2} \longrightarrow \mathcal{F}_{U_1} \oplus \mathcal{F}_{U_2} \longrightarrow \mathcal{F}_{U_1 \cup U_2} \longrightarrow 0, \text{ y } H_c^n(X, \mathcal{F}_U) = H_c^n(U, \mathcal{F}).$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_{Y_1 \cup Y_2} \longrightarrow \mathcal{F}_{Y_1} \oplus \mathcal{F}_{Y_2} \longrightarrow \mathcal{F}_{Y_1 \cap Y_2} \longrightarrow 0, \text{ y } H^n(X, \mathcal{F}_Y) = H^n(Y, \mathcal{F}).$$

Sucesión Exacta del Subespacio Cerrado: Si Y es un cerrado de un espacio σ -compacto X , y $U = X - Y$, tenemos sucesiones exactas

$$\dots \xrightarrow{\delta} H_c^n(U, \mathcal{F}) \longrightarrow H_c^n(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H_c^n(Y, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} H_c^{n+1}(U, \mathcal{F}) \longrightarrow \dots$$

Demostración: $0 \longrightarrow \mathcal{F}_U \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}_Y \longrightarrow 0$ y el lema anterior.

Sucesión Exacta de Cohomología Local: Si Y es un cerrado de X , y $U = X - Y$, tenemos sucesiones exactas

$$\dots \xrightarrow{\delta} H_Y^n(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^n(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^n(U, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} H_Y^{n+1}(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \dots$$

Demostración: $0 \rightarrow \Gamma_Y(X, C^\bullet \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(X, C^\bullet \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(U, C^\bullet \mathcal{F}) \rightarrow 0$.

Escisión: $H_Y^n(X, \mathcal{F}) = H_Y^n(U, \mathcal{F})$, cuando U es un entorno abierto de Y en X .

Demostración: $\Gamma_Y(X, \mathcal{F}) = \Gamma_Y(U, \mathcal{F})$ para todo haz \mathcal{F} sobre X .

Teorema: *Todo haz constante G sobre el cubo $C = [0, 1]^n$ es acíclico.*

Demostración: Por inducción sobre n , y es obvio cuando C es un punto.

Si $n \geq 1$, descomponemos el cubo $C = P_1 \cup P_2$ en unión de 2 paralelepípedos que se cortan en uno de dimensión $n - 1$. Como el morfismo

$$G \oplus G = H^0(P_1, G) \oplus H^0(P_2, G) \longrightarrow H^0(P_1 \cap P_2, G) = G, \quad (g_1, g_2) \mapsto g_2 - g_1,$$

es epiyectivo, por Mayer-Vietoris, $H^p(C, G) = H^p(P_1, G) \oplus H^p(P_2, G)$, $p \geq 1$.

Reiterando las divisiones, $C = P_1 \cup \dots \cup P_r$, obtenemos que

$$H^p(C, G) = H^p(P_1, G) \oplus \dots \oplus H^p(P_r, G), \quad p \geq 1,$$

y como cada clase cohomología se anula, por definición, en un entorno de cada punto, y C es compacto, concluimos que $H^p(C, G) = 0$, $p \geq 1$.

$$1. \text{ Cohomología de las Esferas: } H^p(S_n, G) = \begin{cases} G & p = 0, n \\ 0 & p \neq 0, n \end{cases}$$

Mayer-Vietoris para dos hemisferios que se cortan en el ecuador.

$$2. H_c^p(\mathbb{R}^n, G) = \begin{cases} G & p = n \\ 0 & p \neq n \end{cases}$$

Sucesión exacta del subespacio cerrado cuando Y es un punto de S_n , y $U = \mathbb{R}^n$.

3. Si \mathbb{R}^n es homeomorfo a \mathbb{R}^m , entonces $n = m$.

4. Sea X un compacto Hausdorff, y $\emptyset = X_{-1} \subseteq X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X_d = X$ cerrados tales que $X_i - X_{i-1} = \coprod_{n_i} \mathbb{R}^i$. Los grupos de cohomología $H^p(X, k)$ con coeficientes en un cuerpo k son de dimensión finita, nulos cuando $p > d$, y $\sum_i (-1)^i n_i$ coincide con la **característica de Euler-Poincaré** $\chi(X) = \sum_p \dim_k (-1)^p H^p(X, k)$.

Sea $U = \mathbb{R}^d$ una componente conexa de $X_d - X_{d-1}$. La sucesión exacta del subespacio cerrado $Y = X - U$ muestra que $H^p(X, k) = H^p(Y, k)$ cuando $p \neq d, d - 1$, y que tenemos una sucesión exacta (que permite concluir por inducción sobre $\sum_i n_i$)

$$0 \longrightarrow H^{d-1}(X, k) \longrightarrow H^{d-1}(Y, k) \longrightarrow k \longrightarrow H^d(X, k) \longrightarrow H^d(Y, k) \longrightarrow 0$$

$$5. \text{ Cohomología de } \mathbb{P}_{n, \mathbb{C}}: H^p(\mathbb{P}_{n, \mathbb{C}}, G) = \begin{cases} G & p = 2m, 0 \leq m \leq n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sucesión del subespacio cerrado $Y = \mathbb{P}_{n-1}$, $U = \mathbb{P}_n - Y = \mathbb{R}^{2n}$, e inducción sobre n .

6. Si $\pi: \bar{X} \rightarrow X$ es un revestimiento de una variedad, $H^p(\bar{X}, G) = H^p(X, \pi_* G)$.

Basta ver que la sucesión $0 \rightarrow \pi_* G \rightarrow \pi_*(C^\bullet G)$ es exacta (p. 232). Ahora bien, cada punto de X admite una base de entornos C_i que son cubos y

$$H^p(\pi^{-1}C_i, G) = H^p(\coprod C_i, G) = \prod H^p(C_i, G) = 0, \quad p \geq 1.$$

$$7. \text{ Cohomología de } \mathbb{P}_{n, \mathbb{R}}: H^p(\mathbb{P}_{n, \mathbb{R}}, \mathbb{F}_2) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & 0 \leq p \leq n \\ 0 & p > n \end{cases}$$

Por inducción sobre n , la sucesión exacta del subespacio cerrado $Y = \mathbb{P}_{n-1}$, $U = \mathbb{R}^n$, muestra que basta ver que $H^n(\mathbb{P}_n, \mathbb{F}_2) \neq 0$. Si $\pi: S_n \rightarrow \mathbb{P}_n$ es el revestimiento universal, en \mathbb{P}_n tenemos una sucesión exacta de haces

$$0 \longrightarrow \mathbb{F}_2 \longrightarrow \pi_* \mathbb{F}_2 \xrightarrow{\text{tr}} \mathbb{F}_2 \longrightarrow 0, \quad \text{tr}f = f + \tau f,$$

donde $\{\text{Id}, \tau\}$ es el grupo de Galois de π . Luego $H^n(\mathbb{P}_n, \mathbb{F}_2) \neq 0$ por la sucesión exacta de cohomología $H^n(\mathbb{P}_n, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^n(\mathbb{P}_n, \pi_* \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2 \rightarrow H^n(\mathbb{P}_n, \mathbb{F}_2)$.

11.1.2. Cohomología y Dimensión

Lema: Sea A un anillo o semianillo y \mathcal{C} un haz sobre $X = \text{Spec } A$. Si $\mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{C}(U)$ es epiyectivo para todo abierto básico U , entonces \mathcal{C} es acíclico.

Demostración: Si $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ es una sucesión exacta de haces, y \mathcal{F}' cumple tal condición, en todo abierto básico U tenemos que

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'(U) \xrightarrow{i} \mathcal{F}(U) \xrightarrow{p} \mathcal{F}''(U) \longrightarrow 0$$

también es exacta, porque si $s'' \in \mathcal{F}''(U)$, al ser U compacto admite un recubrimiento $U = U_1 \cup \dots \cup U_n$ por abiertos básicos en que $s''|_{U_i}$ proviene de una sección de \mathcal{F} , y el argumento del lema de la p. 228 (sin usar Zorn) prueba que en el abierto básico $U_1 \cup U_2$ (en el espectro de un semianillo los abiertos básicos forman un semianillo!) también s proviene de una sección de \mathcal{F} . Luego también proviene en $U = U_1 \cup \dots \cup U_n$ de una sección de \mathcal{F} .

Ahora los argumentos de la p. 229 se mantienen tal cual.

Teorema: Sea A un semianillo, y \mathcal{F} un haz sobre $X = \text{Spec } A$. Si $\mathcal{F}_x = 0$ en todo punto x de dimensión $> d$, entonces $H^p(X, \mathcal{F}) = 0$ para todo $p > d$. En particular,

$$H^p(X, \mathcal{F}) = 0, \quad p > \dim X.$$

Demostración: Sea X_d el subespacio de X formado por los puntos de dimensión $\geq d$.

Sea $i: X_d \rightarrow X$ la inclusión. En todos los puntos de X_d el morfismo natural

$$\phi: \mathcal{F} \longrightarrow i_*(\mathcal{F}|_{X_d})$$

induce un isomorfismo en fibra y, si vemos que $i_*(\mathcal{F}|_{X_d})$ es acíclico, el argumento de la p. 230 permite terminar.

Por el lema, basta ver que, en todo abierto básico U , es epiyectivo el morfismo de restricción

$$(\mathcal{F}|_{X_d})(X_d) = (i_* \mathcal{F}|_{X_d})(X) \longrightarrow (i_* \mathcal{F}|_{X_d})(U) = (\mathcal{F}|_{X_d})(X_d \cap U).$$

Si el soporte $|s|$ de $s \in (\mathcal{F}|_{X_d})(X_d \cap U)$ es cerrado en X_d , la sección se extiende por 0.

Ahora bien, $|s|$ es cerrado en $X_d \cap U$; luego su cierre Y en U no tiene puntos de dimensión $> d$, y $|s|$ es cerrado en X_d por el siguiente resultado:

Lema: Si un punto $x \in X - U_f$ es adherente a un cerrado Y de un abierto básico U_f , entonces la dimensión de x es menor que la de algún punto de Y .

Demostración: Como todo cerrado de $\text{Spec } A$ también es el espectro de un semianillo, podemos suponer que $Y = U_f$.

Si \mathfrak{p} es el ideal primo de x , no existe $h \in A - \mathfrak{p}$ tal que $U_h \cap U_f = \emptyset$.

Es decir, \mathfrak{p} contiene al anulador de f , y f no es cero en $A_{\mathfrak{p}}$.

Como la intersección de los primos de un semianillo es nula, f no está en cierto primo \mathfrak{q} de $A_{\mathfrak{p}}$, que no es \mathfrak{p} porque $x \in (f)_0$, y \mathfrak{q} define un punto de U_f de dimensión mayor que la de x .

Teorema: $H^p(X, \mathcal{F}) = 0$, $p > \dim X$, cuando X es un compacto Hausdorff.

Demostración: Si B es una base de la topología de X de dimensión d , entonces $X = \text{Spec}_m B$ y la inclusión $j: X \rightarrow \text{Spec } B$ admite un retracts continuo $r: \text{Spec } B \rightarrow X$ (p. 208).

Además, $r^{-1}(U)$ está contenido en todo abierto de $\text{Spec } B$ que corte a X en U .

Luego $(r_*\mathcal{C})_x = \mathcal{C}_x$ y la imagen directa r_* conserva cohomología. Como $\mathcal{F} = r_*j_*\mathcal{F}$,

$$H^p(X, \mathcal{F}) = H^p(\text{Spec } B, j_*\mathcal{F}) = 0, \quad p > d.$$

Corolario: $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Demostración: En la bola cerrada B_n tenemos que $H^n(B_n, \mathbb{Z}_U) = H_c^n(U, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ cuando $U \simeq \mathbb{R}^n$; luego $\dim \mathbb{R}^n \geq \dim B_n \geq n$, y ya sabemos que $\dim \mathbb{R}^n \leq n$ (p. 216).

Lema: $\varinjlim \Gamma(X, \mathcal{F}_i) = \Gamma(X, \varinjlim \mathcal{F}_i)$, cuando X es un compacto Hausdorff.

Demostración: El morfismo natural $\varinjlim \Gamma(X, \mathcal{F}_i) \rightarrow \Gamma(X, \varinjlim \mathcal{F}_i)$ es inyectivo porque si $s \in \mathcal{F}_i(X)$ se anula como sección del límite inductivo, en un entorno de cada punto x se anula como sección de \mathcal{F}_j para algún índice $j \geq i$, que puede tomarse independiente de x al ser X compacto. Luego $s = 0$ en $\mathcal{F}_j(X)$.

Ahora, dada una sección $s \in (\varinjlim \mathcal{F}_i)(X)$, en un recubrimiento abierto finito $X = \bigcup_r U_r$ provendrá de secciones $s_r \in \mathcal{F}_0(U_r)$. Estas secciones s_r no coinciden en las intersecciones; pero cada punto x tiene un entorno abierto W_x en que todas las secciones s_r (con $x \in U_r$) definen la misma sección $s^x \in \mathcal{F}_j(W_x)$, $j \gg 0$.

Además, tomando un recubrimiento abierto $X = \bigcup_r V_r$ con $\bar{V}_r \subseteq U_r$, podemos suponer que $W_x \subseteq V_r$ cuando $x \in V_r$, y que $W_x \cap \bar{V}_r = \emptyset$ cuando $x \notin \bar{V}_r$, de modo que, cuando W_x y W_y se corten, tendremos $x, y \in U_r$ para algún índice r , y las secciones s^x, s^y coinciden en $W_x \cap W_y$, tomando $j \gg 0$.

Un número finito de estos abiertos W_x recubren X , y las secciones s^x definen una sección global de \mathcal{F}_j que induce s .

Teorema: $H_c^n(X, \varinjlim \mathcal{F}_i) = \varinjlim H_c^n(X, \mathcal{F}_i)$, cuando X es σ -compacto.

Demostración: El morfismo $\varinjlim \Gamma_c(X, \mathcal{F}_i) \rightarrow \Gamma_c(X, \varinjlim \mathcal{F}_i)$ es inyectivo, y dada una sección $s \in (\varinjlim \mathcal{F}_i)(X)$ de soporte compacto K , contenido en el interior de un compacto K' , contenido en el interior de un compacto K'' , por el lema anterior proviene de una sección s'' de algún haz \mathcal{F}_j en K'' , que se anulará fuera del interior de K' cuando j es muy grande. Prolongando s'' por 0 fuera de K' , tenemos una sección global de \mathcal{F}_j , con soporte en K' , que induce s .

Ahora, como $C^0\mathbb{Z}$ admite particiones de la unidad (p. 268), todo $C^0\mathbb{Z}$ -módulo es Γ_c -acíclico, y terminamos,

$$\begin{aligned} H_c^n(X, \varinjlim \mathcal{F}_i) &= H^n[\Gamma_c(X, C^0\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (\varinjlim \mathcal{F}_i))] = H^n[\varinjlim \Gamma_c(X, C^0\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{F}_i)] \\ &= \varinjlim H^n[\Gamma_c(X, C^0\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{F}_i)] = \varinjlim H_c^n(X, \mathcal{F}_i). \end{aligned}$$

Teorema: Si X es una *variedad topológica* de dimensión n (todo punto tiene un entorno homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^n),

$$H_c^p(X, \mathcal{F}) = 0, \quad p > n.$$

Demostración: $H_c^p(X, \mathcal{F}) = H_c^p(X, \varinjlim \mathcal{F}_U) = \varinjlim H_c^p(X, \mathcal{F}_U) = \varinjlim H_c^p(U, \mathcal{F})$,

donde $U = V_1 \cup \dots \cup V_m$ recorre las uniones finitas de abiertos contenidos en compactos de dimensión n , de modo que $H_c^p(V, \mathcal{F}) = H^p(K, \mathcal{F}_V) = 0$, $p > n$, para todo abierto $V \subseteq V_i$.

Si $H_c^p(V_1 \cup \dots \cup V_r, \mathcal{F}) = 0$, $p > n$, la sucesión exacta de Mayer-Vietoris permite demostrar que $H_c^p(V_1 \cup \dots \cup V_{r+1}, \mathcal{F}) = 0$, $p > n$. Luego $H_c^p(U, \mathcal{F}) = 0$, $p > n$, y terminamos.

11.2. Álgebra Homológica

Un **complejo** de A -módulos (K^\bullet, d) es una familia de A -módulos $\{K^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ con morfismos de A -módulos $d^n: K^n \rightarrow K^{n+1}$ tales que $d^{n+1} \circ d^n = 0$, y un morfismo de complejos $f: K^\bullet \rightarrow L^\bullet$ es una sucesión de morfismos $f^n: K^n \rightarrow L^n$ que conmutan con las diferenciales,

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{d^{n-2}} & K^{n-1} & \xrightarrow{d^{n-1}} & K^n & \xrightarrow{d^n} & K^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \dots \\ & & \downarrow f^{n-1} & & \downarrow f^n & & \downarrow f^{n+1} \\ \dots & \xrightarrow{d^{n-2}} & L^{n-1} & \xrightarrow{d^{n-1}} & L^n & \xrightarrow{d^n} & L^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \dots \end{array}$$

Diremos que f es un **casi-isomorfismo** cuando $f: H^n(K^\bullet) \rightarrow H^n(L^\bullet)$ sea un isomorfismo para todo $n \in \mathbb{Z}$, en cuyo caso pondremos $f: K^\bullet \xrightarrow{\sim} L^\bullet$.

Cuando el complejo tiene componentes de grado negativo, es cómodo numerar con subíndices, y poner $K_n = K^{-n}$, $d_n = d^{-n}: K_n \rightarrow K_{n-1}$, y $H_n(K_\bullet) = H^{-n}(K^\bullet)$.

Análogamente, un **bicomplejo** $(K^{\bullet\bullet}, d_1, d_2)$ es una familia de A -módulos $\{K^{p,q}\}_{p,q \in \mathbb{Z}}$ con morfismos de A -módulos $d_1^{p,q}: K^{p,q} \rightarrow K^{p+1,q}$, $d_2^{p,q}: K^{p,q} \rightarrow K^{p,q+1}$ tales que el siguiente diagrama es conmutativo, y sus filas y columnas son complejos:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \uparrow d_2 & & \uparrow d_2 & & \\ \dots & \xrightarrow{d_1} & K^{p,q+1} & \xrightarrow{d_1} & K^{p+1,q+1} & \xrightarrow{d_1} & \dots \\ & & \uparrow d_2 & & \uparrow d_2 & & \\ \dots & \xrightarrow{d_1} & K^{p,q} & \xrightarrow{d_1} & K^{p+1,q} & \xrightarrow{d_1} & \dots \\ & & \uparrow d_2 & & \uparrow d_2 & & \end{array}$$

El complejo simple asociado (que denotamos K^\bullet , o $K^{\bullet\bullet}$ si no confunde) es

$$K^n = \bigoplus_{p+q=n} K^{p,q}, \quad d(m_{pq}) = d_1 m_{pq} + (-1)^p d_2(m_{pq})$$

donde el signo se introduce para que $d \circ d = 0$. Diremos que el bicomplejo tiene *diagonales acotadas* cuando las sumas directas $\bigoplus_{p+q=n} K^{p,q}$ sean finitas. Un morfismo de bicomplejos $f: K^{\bullet\bullet} \rightarrow L^{\bullet\bullet}$ es una familia de morfismos de módulos $f^{pq}: K^{pq} \rightarrow L^{pq}$ que conmutan con las diferenciales, $f \circ d_1 = d_1 \circ f$, $f \circ d_2 = d_2 \circ f$.

Lema: Sea $K^{\bullet\bullet}$ un bicomplejo con diagonales acotadas. Si sus columnas $K^{p\bullet}$ son sucesiones exactas, entonces $H^n(K^\bullet) = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Demostración: Si $[m] \in H^n(K^\bullet)$ y $m = m_{p,q} + m_{p+1,q-1} + m_{p+2,q-2} + \dots$, con $m_{p,q} \neq 0$, la condición de ciclo $dm = 0$ implica que $d_2 m_{p,q} = 0$. Luego $m_{p,q} = d_2 n_{p,q-1}$, con $n_{p,q-1} \in K^{p,q-1}$, porque las columnas son exactas, y $[m] = [m']$, donde $m' = m - (-1)^p d n_{p,q-1}$ tiene altura más baja que m en el bicomplejo. Cualquier clase $[m]$ tiene representantes de altura tan baja como se desee y, al estar acotadas las diagonales, $[m] = 0$.

Teorema del Bicomplejo: Sea $f: K^{\bullet\bullet} \rightarrow L^{\bullet\bullet}$ un morfismo inyectivo (o epiyectivo) entre bicomplejos con diagonales acotadas. Si $f: K^{p\bullet} \rightarrow L^{p\bullet}$ es un casi-isomorfismo para todo $p \in \mathbb{Z}$, entonces $f: K^{\bullet} \rightarrow L^{\bullet}$ es un casi-isomorfismo.

Demostración: La sucesión exacta de complejos $0 \rightarrow K^{p\bullet} \rightarrow L^{p\bullet} \rightarrow C^{p\bullet} \rightarrow 0$, donde $C^{pq} = K^{pq}/L^{pq}$, muestra que $H^n(C^{p\bullet}) = 0$ y, por el lema, $H^n(C^{\bullet}) = 0$.

Ahora la sucesión exacta de complejos $0 \rightarrow K^{\bullet} \rightarrow L^{\bullet} \rightarrow C^{\bullet} \rightarrow 0$ permite concluir que $H^n(K^{\bullet}) \rightarrow H^n(L^{\bullet})$ es isomorfismo para todo $n \in \mathbb{Z}$.

En el caso epiyectivo tomamos $C^{pq} = \text{Ker } f^{pq}$.

11.2.1. Los Funtores Tor_n^A y Ext_A^n

Sean M, N dos A -módulos. Tomamos una resolución de M por módulos proyectivos

$$\dots \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

y ponemos $\text{Tor}_n^A(M, N) = H_n(P_{\bullet} \otimes_A N)$. Como $\otimes_A N$ es exacto por la derecha,

$$\text{Tor}_0^A(M, N) = M \otimes_A N.$$

Si $P'_n \rightarrow N \rightarrow 0$ es una resolución proyectiva, $P_n \otimes_A P'_n \rightarrow P_n \otimes_A N$ porque los módulos proyectivos son planos, y por el teorema del bicomplejo $P_{\bullet} \otimes_A P'_n \rightarrow P_{\bullet} \otimes_A N$.

Igualmente tenemos un casi-isomorfismo $P_{\bullet} \otimes_A P'_n \rightarrow M \otimes_A P'_n$,

$$\text{Tor}_n^A(M, N) = H_n(P_{\bullet} \otimes_A N) = H_n(P_{\bullet} \otimes_A P'_n) = H_n(M \otimes_A P'_n).$$

Vemos que $\text{Tor}_n^A(M, N) = \text{Tor}_n^A(N, M)$, y que no depende de la resolución elegida.

Además, si $0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$ es una sucesión exacta, la sucesión exacta de complejos $0 \rightarrow P_{\bullet} \otimes_A N' \rightarrow P_{\bullet} \otimes_A N \rightarrow P_{\bullet} \otimes_A N'' \rightarrow 0$ induce una sucesión exacta

$$\dots \rightarrow \text{Tor}_n^A(M, N') \rightarrow \text{Tor}_n^A(M, N) \rightarrow \text{Tor}_n^A(M, N'') \rightarrow \text{Tor}_{n-1}^A(M, N') \rightarrow \dots$$

Si $0 \rightarrow N \rightarrow I^{\bullet}$ es una resolución por módulos inyectivos, $\text{Hom}_A(P_n, N) \rightarrow \text{Hom}_A(P_n, I^{\bullet})$ y $\text{Hom}_A(M, I^n) \rightarrow \text{Hom}_A(P_{\bullet}, I^n)$. Por el teorema del bicomplejo tenemos casi-isomorfismos $\text{Hom}_A(P_{\bullet}, N) \rightarrow \text{Hom}_A(P_{\bullet}, I^{\bullet})$, $\text{Hom}_A(M, I^{\bullet}) \rightarrow \text{Hom}_A(P_{\bullet}, I^{\bullet})$, y ponemos

$$\text{Ext}_A^n(M, N) = H^n[\text{Hom}_A(P_{\bullet}, N)] = H^n[\text{Hom}_A(P_{\bullet}, I^{\bullet})] = H^n[\text{Hom}_A(M, I^{\bullet})].$$

Como $\text{Hom}_A(M, -)$ es exacto por la izquierda,

$$\text{Ext}_A^0(M, N) = \text{Hom}_A(M, N).$$

Si $0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$ es una sucesión exacta, la sucesión exacta de complejos $0 \rightarrow \text{Hom}_A(P_{\bullet}, N') \rightarrow \text{Hom}_A(P_{\bullet}, N) \rightarrow \text{Hom}_A(P_{\bullet}, N'') \rightarrow 0$ induce una sucesión exacta

$$\dots \rightarrow \text{Ext}_A^n(M, N') \rightarrow \text{Ext}_A^n(M, N) \rightarrow \text{Ext}_A^n(M, N'') \rightarrow \text{Ext}_A^{n+1}(M, N') \rightarrow \dots$$

Si $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ es una sucesión exacta, la sucesión exacta de complejos $0 \rightarrow \text{Hom}_A(M'', I^{\bullet}) \rightarrow \text{Hom}_A(M, I^{\bullet}) \rightarrow \text{Hom}_A(M', I^{\bullet}) \rightarrow 0$ induce una sucesión exacta

$$\dots \rightarrow \text{Ext}_A^n(M'', N) \rightarrow \text{Ext}_A^n(M, N) \rightarrow \text{Ext}_A^n(M', N) \rightarrow \text{Ext}_A^{n+1}(M'', N) \rightarrow \dots$$

Proposición: Si A es un DIP, todo A -módulo M admite una resolución proyectiva

$$0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

Demostración: Los A -módulos inyectivos son los módulos divisibles (p. 62).

Luego todo cociente de un módulo inyectivo es inyectivo y todo A -módulo N tiene una resolución inyectiva $0 \rightarrow N \rightarrow I \rightarrow I/N \rightarrow 0$, de modo que $\text{Ext}^n(M, N) = 0$, $n \geq 2$.

Ahora, si $0 \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$ es una sucesión exacta, donde L es libre, tenemos que $\text{Ext}^1(K, N) = \text{Ext}^2(M, N) = 0$ para todo A -módulo N .

Luego el funtor $\text{Hom}_A(K, -)$ es exacto y K es proyectivo.

11.2.2. Funtores Derivados

Si (K^\bullet, d) es un complejo, $K^\bullet[r]$ denota el complejo $K^\bullet[r]^n = K^{n+r}$ con la diferencial $(-1)^r d$, de modo que $H^n(K^\bullet[r]) = H^{n+r}(K^\bullet)$.

El **cono** de un morfismo de complejos $f: K^\bullet \rightarrow L^\bullet$ es el complejo

$$\text{Cono}^n f := K^{n+1} \oplus L^n, \quad d(a, b) = (-da, fa + db).$$

(si vemos $f: K^\bullet \rightarrow L^\bullet$ como bicomplejo, es el complejo simple asociado).

Tenemos una sucesión exacta de complejos

$$0 \longrightarrow L^\bullet \longrightarrow \text{Cono}^\bullet f \longrightarrow K^\bullet[1] \longrightarrow 0$$

y el connecting inducido en cohomología por esta sucesión exacta es f , así que f es *casi-isomorfismo precisamente cuando su cono* $\text{Cono}^\bullet f$ *es acíclico*, $H^n(\text{Cono}^\bullet f) = 0$.

Definición: Un funtor covariante $F: \mathbf{A} \rightsquigarrow \mathbf{B}$ de la categoría de A -módulos en la de B -módulos es **aditivo** cuando las aplicaciones $F: \text{Hom}_A(M, N) \rightarrow \text{Hom}_B(F(M), F(N))$ son morfismos de grupos, $F(f + g) = F(f) + F(g)$.

En tal caso, si $K^\bullet = \{K^n, d_n\}$ un complejo de A -módulos, $F(K^\bullet) = \{F(K^n), F(d_n)\}$ es un complejo de B -módulos, porque $F(d)^2 = F(d^2) = F(0) = 0$. Además, los funtores aditivos transforman sucesiones exactas escindidas en sucesiones exactas escindidas, y por tanto conservan sumas directas finitas, $F(M \oplus N) = F(M) \oplus F(N)$, y conmutan con la formación del complejo simple asociado cuando las diagonales están acotadas.

Lema: Si F es aditivo, y $f: I^\bullet \xrightarrow{\sim} J^\bullet$ es un *casi-isomorfismo entre complejos inyectivos acotados inferiormente*, entonces $F(f): F(I^\bullet) \xrightarrow{\sim} F(J^\bullet)$ es un *casi-isomorfismo*.

Demostración: Si $J^\bullet = 0$, entonces $I^\bullet = 0 \rightarrow I_n \rightarrow I_{n+1} \rightarrow \dots$ es una sucesión exacta de módulos inyectivos; luego escinde y $F(I^\bullet)$ también es una sucesión exacta.

En el caso general, $\text{Cono}^\bullet f \xrightarrow{\sim} 0$; luego $\text{Cono}^\bullet F(f) = F(\text{Cono}^\bullet f) \xrightarrow{\sim} 0$, y se concluye que $F(f)$ es un *casi-isomorfismo*. q.e.d.

Sea M un A -módulo y $L_0 M$ el módulo libre generado por los elementos de M , cociente por el submódulo que genera el 0 de M (para que el funtor L_0 transforme complejos en complejos). Tenemos un epimorfismo natural $L_0 M \rightarrow M$, así que M admite una *resolución proyectiva funtorial* (de hecho libre) $L_\bullet M \rightarrow M \rightarrow 0$. Ahora (p. 72) M es submódulo del módulo inyectivo $I^0 M = (L_0 M^*)^*$, y vemos que M admite una *resolución inyectiva funtorial* $0 \rightarrow M \rightarrow I^\bullet M$.

Definición: Los **funtores derivados** por la derecha $R^n F: \mathbf{A} \rightsquigarrow \mathbf{B}$ de un funtor covariante aditivo exacto por la izquierda $F: \mathbf{A} \rightsquigarrow \mathbf{B}$ son

$$R^n F(M) = H^n [F(I^\bullet M)]$$

y diremos que un módulo M es F -**acíclico** cuando $R^n F(M) = 0$ para todo $n > 0$; en particular, todo módulo inyectivo es F -acíclico.

La condición de que F sea exacto por la izquierda significa que $R^0F = F$.

Vamos a extender esta definición a los complejos acotados inferiormente, y diremos que un complejo K^\bullet es inyectivo, F -acíclico, etc., cuando lo sean todos los módulos K^n .

Nótese que $I^\bullet M$ es un complejo inyectivo y que, si M se considera como un complejo cuya única componente no nula es M en grado 0, entonces $M \rightarrow I^\bullet M$ es un casi-isomorfismo.

Por el teorema del bicomplejo $K^\bullet \rightarrow I^\bullet K^\bullet$ es un casi-isomorfismo cuando K^\bullet está acotado inferiormente, y pondremos

$$\mathbf{R}F(K^\bullet) = F(I^\bullet K^\bullet), \quad \mathbf{R}^n F(K^\bullet) = H^n [F(I^\bullet K^\bullet)].$$

Por el lema, si $f: K^\bullet \rightarrow L^\bullet$ es un casi-isomorfismo entre complejos inferiormente acotados, también lo es $f: \mathbf{R}F(K^\bullet) \rightarrow \mathbf{R}F(L^\bullet)$, y $f: \mathbf{R}^n F(K^\bullet) \rightarrow \mathbf{R}^n F(L^\bullet)$ es isomorfismo.

Lema: $F(A^\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}F(A^\bullet)$ para todo complejo inferiormente acotado F -acíclico A^\bullet .

Demostración: La sucesión $0 \rightarrow F(A^q) \rightarrow F(I^\bullet A^q)$ es exacta porque A^q es F -acíclico.

El teorema del bicomplejo afirma que $F(A^\bullet) \xrightarrow{\sim} F(I^\bullet A^\bullet)$. q.e.d.

El morfismo $L^\bullet \rightarrow I^\bullet L^\bullet$ induce un morfismo canónico $F(L^\bullet) \rightarrow \mathbf{R}F(L^\bullet)$, y por tanto morfismos $H^n [F(L^\bullet)] \rightarrow \mathbf{R}^n F(L^\bullet)$. Así, un casi-isomorfismo $K^\bullet \xrightarrow{\sim} L^\bullet$ induce morfismos¹ DR: $H^n [F(L^\bullet)] \rightarrow \mathbf{R}^n F(K^\bullet)$, y son naturales en el sentido de que cada cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} K^\bullet & \xrightarrow{\sim} & L^\bullet \\ \downarrow f & & \downarrow t \\ \bar{K}^\bullet & \xrightarrow{\sim} & \bar{L}^\bullet \end{array}$$

induce cuadrados conmutativos

$$\begin{array}{ccc} H^n [F(L^\bullet)] & \xrightarrow{\text{DR}} & \mathbf{R}^n F(K^\bullet) \\ \downarrow F(t) & & \downarrow f \\ H^n [F(\bar{L}^\bullet)] & \xrightarrow{\text{DR}} & \mathbf{R}^n F(\bar{K}^\bullet) \end{array}$$

Teorema de De Rham: Si $K^\bullet \xrightarrow{\sim} A^\bullet$, y A^\bullet es F -acíclico, entonces los morfismos naturales DR: $H^n [F(A^\bullet)] \rightarrow \mathbf{R}^n F(K^\bullet)$ son isomorfismos.

Demostración: $F(A^\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}F(A^\bullet) \xleftarrow{\sim} \mathbf{R}F(K^\bullet)$.

Sucesión Exacta de Funtores Derivados: Toda sucesión exacta de complejos inferiormente acotados $0 \rightarrow K^\bullet \rightarrow L^\bullet \rightarrow M^\bullet \rightarrow 0$ induce una sucesión exacta

$$\dots \rightarrow \mathbf{R}^n F(K^\bullet) \rightarrow \mathbf{R}^n F(L^\bullet) \rightarrow \mathbf{R}^n F(M^\bullet) \xrightarrow{\delta} \mathbf{R}^{n+1} F(K^\bullet) \rightarrow \dots$$

Demostración: Tenemos un diagrama conmutativo de filas exactas

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K^\bullet & \longrightarrow & L^\bullet & \longrightarrow & M^\bullet \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & I^\bullet K^\bullet & \longrightarrow & I^\bullet L^\bullet & \longrightarrow & I^\bullet L^\bullet / I^\bullet K^\bullet \longrightarrow 0 \end{array}$$

¹Coinciden salvo un signo con el de iteración de connectings, usado en el teorema de De Rham (p. 229). En adelante sólo siempre usaremos éste porque, en el caso del casi-isomorfismo $M \rightarrow I^\bullet M$, el morfismo DR: $H^n [F(I^\bullet M)] \rightarrow \mathbf{R}^n F(M)$ es la identidad.

donde $I^\bullet L^\bullet / I^\bullet K^\bullet$ es una resolución inyectiva de M^\bullet . Se concluye al considerar la sucesión exacta larga de cohomología inducida por la sucesión exacta de complejos

$$0 \longrightarrow F(I^\bullet K^\bullet) \longrightarrow F(I^\bullet L^\bullet) \longrightarrow F(I^\bullet L^\bullet / I^\bullet K^\bullet) \longrightarrow 0$$

Lema: Sea $0 \rightarrow M \rightarrow A^0 \rightarrow A^1 \rightarrow \dots \rightarrow A^{n-1} \rightarrow M_n \rightarrow 0$ una sucesión exacta de A -módulos. Si los módulos A^i son F -acíclicos, tenemos isomorfismos canónicos

$$R^p F(M_n) = R^{p+n} F(M), \quad p \geq 1.$$

Demostración: Toda resolución F -acíclica $0 \rightarrow M_n \rightarrow B^0 \rightarrow B^1 \dots$ define una resolución F -acíclica de M ,

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow A^0 \longrightarrow \dots \longrightarrow A^{n-1} \longrightarrow B^0 \longrightarrow B^1 \longrightarrow \dots$$

y obtenemos isomorfismos canónicos $R^p F(M_n) = H^p[F(B^\bullet)] = R^{p+n} F(M)$, $p \geq 1$. q.e.d.

1. Los funtores derivados de $\text{Hom}_A(M, -)$ son los funtores $\text{Ext}_A^n(M, -)$.
2. Los funtores covariantes aditivos exactos por la derecha se derivan por la izquierda usando resoluciones proyectivas en lugar de inyectivas, y se extienden a los complejos acotados superiormente. Los funtores derivados por la izquierda de $M \otimes_A (-)$ son los funtores $\text{Tor}_n^A(M, -)$.
3. Los funtores contravariantes aditivos exactos por la izquierda se derivan por la derecha usando resoluciones proyectivas en lugar de inyectivas, y se extienden a los complejos acotados superiormente. Los funtores derivados por la derecha de $\text{Hom}_A(-, M)$ son los funtores $\text{Ext}_A^n(-, M)$.
4. La categoría de módulos sobre un anillo se puede reemplazar por la de haces sobre un espacio topológico X , porque todo haz admite una resolución funtorial por haces inyectivos, como veremos a continuación.

Los funtores derivados de Γ , Γ_c y Γ_Y coinciden con la cohomología de haces que hemos definido con la resolución Godement, porque todo haz inyectivo \mathcal{I} es flasco,

$$\mathcal{I}(X) = \text{Hom}(\mathbb{Z}_X, \mathcal{I}) \longrightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}_U, \mathcal{I}) = \mathcal{I}(U) \longrightarrow 0$$

Así, para todo complejo de haces \mathcal{K}^\bullet acotado inferiormente tenemos grupos de hipercohomología $\mathbf{H}^n(X, \mathcal{K}^\bullet)$, $\mathbf{H}_c^n(X, \mathcal{K}^\bullet)$, $\mathbf{H}_Y^n(X, \mathcal{K}^\bullet)$, y es inmediato generalizar a este caso la imagen inversa y el producto cup que vamos a definir.

Definición: Sea \mathcal{O} un haz de anillos sobre X . Si elegimos un \mathcal{O}_x -módulo M_x en cada punto $x \in X$, el correspondiente **haz Godement** \mathcal{C} es el haz flasco

$$\mathcal{C}(U) = \prod_{x \in U} M_x,$$

y para todo \mathcal{O} -módulo \mathcal{N} tenemos un isomorfismo natural

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{N}, \mathcal{C}) = \prod_{x \in X} \text{Hom}_{\mathcal{O}_x}(\mathcal{N}_x, M_x).$$

Por tanto, si M_x es un \mathcal{O}_x -módulo inyectivo para todo $x \in X$, entonces \mathcal{C} es un \mathcal{O} -módulo inyectivo. En efecto, M_x define un \mathcal{O} -módulo concentrado en el cierre de x ,

$$M_x(U) = \begin{cases} M_x & x \in U \\ 0 & x \notin U \end{cases}$$

y el haz Godement \mathcal{C} es el haz producto directo, $\mathcal{C} = \prod_x M_x$.

Además, es sencillo ver que $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{N}, M_x) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_x}(\mathcal{N}_x, M_x)$, lo que permite concluir,

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{N}, \mathcal{C}) = \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{N}, \prod_{x \in X} M_x) = \prod_{x \in X} \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{N}, M_x) = \prod_{x \in X} \text{Hom}_{\mathcal{O}_x}(\mathcal{N}_x, M_x).$$

Ahora, si \mathcal{M} es un \mathcal{O} -módulo, y para cada fibra \mathcal{M}_x elegimos el \mathcal{O}_x -módulo inyectivo $I^0 \mathcal{M}_x$, el correspondiente haz Godement $\mathcal{I}^0 \mathcal{M}$ es un \mathcal{O} -módulo inyectivo, y tenemos un morfismo de \mathcal{O} -módulos inyectivo $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{I}^0 \mathcal{M}$.

Vemos así que *todo* \mathcal{O} -módulo \mathcal{M} admite una resolución inyectiva funtorial $0 \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{I}^\bullet \mathcal{M}$.

11.3. Imagen Inversa

Si $f: Y \rightarrow X$ es una aplicación continua y \mathcal{F} es un haz sobre X , su **imagen inversa** $f^{-1}\mathcal{F}$ es el haz sobre Y ,

$$(f^{-1}\mathcal{F})(V) = \text{Hom}_X(V, \mathcal{F}^{et}) = \text{Hom}_Y(V, \mathcal{F}^{et} \times_X Y).$$

Su espacio etalé es $\mathcal{F}^{et} \times_X Y \rightarrow Y$, y sus fibras son $(f^{-1}\mathcal{F})_y = \mathcal{F}_{f(x)}$.

Luego f^{-1} es un funtor exacto, conserva límites inductivos, $f^{-1}(\mathbb{Z}_U) = \mathbb{Z}_{f^{-1}U}$, etc.

Si $s \in \mathcal{F}(U)$, entonces $f^*s = s \circ f \in (f^{-1}\mathcal{F})(f^{-1}U)$, y tenemos una imagen inversa de secciones

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{f^*} (f^{-1}\mathcal{F})(f^{-1}U).$$

Ahora, un morfismo de haces $f^{-1}\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ en Y induce morfismos $\mathcal{F}(U) \rightarrow (f^*\mathcal{G})(f^{-1}U) \rightarrow \mathcal{G}(f^{-1}U)$, y define un morfismo de haces $\mathcal{F} \rightarrow f_*\mathcal{G}$.

Fórmula de Adjunción: $\text{Hom}_Y(f^{-1}\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \text{Hom}_X(\mathcal{F}, f_*\mathcal{G})$.

Demostración: Como \mathcal{F} admite una presentación $\oplus_j \mathbb{Z}_{U_j} \rightarrow \oplus_i \mathbb{Z}_{U_i} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$ y ambos funtores son exactos por la izquierda, basta verlo cuando $\mathcal{F} = \mathbb{Z}_U$,

$$\text{Hom}(f^{-1}\mathbb{Z}_U, \mathcal{G}) = \text{Hom}(\mathbb{Z}_{f^{-1}U}, \mathcal{G}) = \mathcal{G}(f^{-1}U) = (f_*\mathcal{G})(U) = \text{Hom}(\mathbb{Z}_U, f_*\mathcal{G}).$$

Nota: En el caso de un morfismo de espacios anillados $(f, \phi): Y \rightarrow X$, el morfismo de haces de anillos $\phi: \mathcal{O}_X \rightarrow f_*\mathcal{O}_Y$ se corresponde con un morfismo de haces de anillos $f^{-1}\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Y$, y la imagen inversa de \mathcal{O}_X -módulos se define

$$f^*\mathcal{M} = (f^{-1}\mathcal{M}) \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y,$$

de modo que la fórmula de adjunción $\text{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f^*\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, f_*\mathcal{N})$ es válida.

En nuestro caso todos los espacios topológicos se suponen anillados con el haz constante \mathbb{Z} , y pondremos $f^*\mathcal{F}$ ó $f^{-1}\mathcal{F}$ indistintamente.

La sucesión $0 \rightarrow f^*\mathcal{F} \rightarrow f^*(C^\bullet \mathcal{F})$ es exacta, porque el funtor f^* es exacto; luego la imagen inversa de secciones induce una imagen inversa de clases de cohomología (compatible con los morfismos de haces en un sentido obvio)

$$f^*: H^n(X, \mathcal{F}) = H^n[\Gamma(X, C^\bullet \mathcal{F})] \xrightarrow{f^*} H^n[\Gamma(Y, f^* C^\bullet \mathcal{F})] \longrightarrow H^n(Y, f^*\mathcal{F})$$

Lema: Si $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{R}^\bullet$ es una resolución, el siguiente cuadrado es conmutativo,

$$\begin{array}{ccc} H^n[\Gamma(X, \mathcal{R}^\bullet)] & \xrightarrow{f^*} & H^n[\Gamma(Y, f^*\mathcal{R}^\bullet)] \\ \downarrow \text{DR} & & \downarrow \text{DR} \\ H^n(X, \mathcal{F}) & \xrightarrow{f^*} & H^n(Y, f^*\mathcal{F}) \end{array}$$

Demostración: El siguiente diagrama es conmutativo (pp. 276)

$$\begin{array}{ccccc} H^n[\Gamma(X, C^\bullet \mathcal{F})] & \xrightarrow{\sim} & H^n[\Gamma(X, C^\bullet \mathcal{R}^\bullet)] & \longleftarrow & H^n[\Gamma(X, \mathcal{R}^\bullet)] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^n[\Gamma(Y, f^* C^\bullet \mathcal{F})] & \longrightarrow & H^n[\Gamma(Y, \phi^* C^\bullet \mathcal{R}^\bullet)] & \longleftarrow & H^n[\Gamma(Y, \phi^* \mathcal{R}^\bullet)] \end{array}$$

Corolario: Si $f: Y \rightarrow X$ es una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables, los morfismos $f^*: H^p(X, \mathbb{R}) \rightarrow H^p(Y, \mathbb{R})$ están definidos por la imagen inversa de formas diferenciales, $f^*[\omega_p] = [f^*\omega_p]$.

Teorema: Si $Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$ son aplicaciones continuas, $(fg)^* = g^* f^*$.

Demostración: Como $f^*(C^\bullet \mathcal{F})$ es una resolución de $f^*\mathcal{F}$, conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} H^n[\Gamma(X, C^\bullet \mathcal{F})] & \xrightarrow{f^*} & H^n[\Gamma(Y, f^* C^\bullet \mathcal{F})] & \xrightarrow{g^*} & H^n[\Gamma(Z, (fg)^* C^\bullet \mathcal{F})] \\ \parallel & & \downarrow \text{DR} & & \downarrow \text{DR} \\ H^n(X, \mathcal{F}) & \xrightarrow{f^*} & H^n(Y, f^* \mathcal{F}) & \xrightarrow{g^*} & H^n(Z, g^*(f^* \mathcal{F})) \end{array}$$

Proposición: La imagen inversa conserva el connecting, $f^*(\delta c_n) = \delta(f^* c_n)$.

Demostración: Si $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ es una sucesión exacta de haces, basta tomar cohomología en el siguiente diagrama conmutativo de filas exactas,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Gamma(X, C^\bullet \mathcal{F}') & \longrightarrow & \Gamma(X, C^\bullet \mathcal{F}) & \longrightarrow & \Gamma(X, C^\bullet \mathcal{F}'') \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f^* & & \downarrow f^* & & \downarrow f^* \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma(Y, C^\bullet (f^* C^\bullet \mathcal{F}')) & \longrightarrow & \Gamma(Y, C^\bullet (f^* C^\bullet \mathcal{F})) & \longrightarrow & \Gamma(Y, C^\bullet (f^* C^\bullet \mathcal{F}'')) \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma(Y, C^\bullet f^* \mathcal{F}') & \longrightarrow & \Gamma(Y, C^\bullet f^* \mathcal{F}) & \longrightarrow & \Gamma(Y, C^\bullet f^* \mathcal{F}'') \longrightarrow 0 \end{array}$$

Lema: Si un haz de anillos \mathcal{O} sobre X admite particiones de la unidad, su restricción $\mathcal{O}|_Y$ a cualquier cerrado Y también admite particiones de la unidad.

Demostración: Si $\{V_i\}$ es un recubrimiento abierto de Y , y $\{f_0, f_i\}$ es una partición de la unidad de \mathcal{O} subordinada al recubrimiento $\{U_0 = X - Y, U_i\}$, donde $V_i = U_i \cap Y$, entonces $\{f_i|_Y\}$ es una partición de la unidad de $\mathcal{O}|_Y$ subordinada al recubrimiento $\{V_i\}$.

Definición: Si $f: Y \rightarrow X$ es una aplicación continua y \mathcal{F} es un haz sobre Y , las **imágenes directas superiores** $R^n f_* \mathcal{F} = \mathcal{H}^n[f_*(C^\bullet \mathcal{F})]$ son los haces de cohomología del complejo de haces $f_*(C^\bullet \mathcal{F})$, de modo que $R^n f_* \mathcal{F}$ es el haz asociado al prehaz

$$U \rightsquigarrow H^n(f^{-1}U, \mathcal{F}).$$

Cuando $R^n f_* \mathcal{F} = 0$, $n \geq 1$, tenemos que $f_*(C^\bullet \mathcal{F})$ es una resolución de $f_* \mathcal{F}$, y

$$H^n(Y, \mathcal{F}) = H^n(X, f_* \mathcal{F}).$$

Cohomología de la Fibra: Sea $f: Y \rightarrow X$ un morfismo **propio** entre espacios σ -compactos (continuo, y la imagen inversa de todo compacto es compacta). Si \mathcal{F} es un haz sobre Y , y $x \in X$, tenemos isomorfismos naturales

$$(R^n f_* \mathcal{F})_x = H^n(f^{-1}x, \mathcal{F}).$$

Demostración: Veamos primero que, si \mathcal{C} es un haz de Godement en Y , la restricción de secciones define un isomorfismo

$$(f_*\mathcal{C})_x = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ x \in \bar{U}}} \Gamma(f^{-1}U, \mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(f^{-1}x, \mathcal{C}).$$

Es inyectivo: si el soporte de una sección $s \in \Gamma(f^{-1}U, \mathcal{C})$ no corta a la fibra de x , que es compacta, entonces $f(\text{sop } s)$ es cerrado en U , y s se anula en $f^{-1}(U - f(\text{sop } s))$.

Es epiyectivo: si $\bar{s} \in \Gamma(f^{-1}x, \mathcal{C})$, cada punto $y \in f^{-1}x$ tiene un entorno U_i de cierre compacto y $s_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{C})$ que extiende a \bar{s} , y un número finito U_1, \dots, U_r recubren $f^{-1}(x)$.

Si f_0, f_1, \dots, f_r es una partición de la unidad de $C^0\mathbb{Z}_Y$ subordinada al recubrimiento abierto $\{U_0 = Y - f^{-1}(x), U_1, \dots, U_r\}$, entonces $f_1s_1 + \dots + f_rs_r \in \Gamma(Y, \mathcal{C})$ extiende a \bar{s} .

Por el lema, $(C^\bullet\mathcal{F})|_{f^{-1}x}$ es una resolución acíclica de $\mathcal{F}|_{f^{-1}x}$, y terminamos,

$$(R^n f_*\mathcal{F})_x = H^n[(f_*C^\bullet\mathcal{F})_x] = H^n[\Gamma(f^{-1}x, C^\bullet\mathcal{F})] = H^n(f^{-1}x, \mathcal{F}).$$

Cambio de Base: Dado un producto fibrado de aplicaciones continuas

$$\begin{array}{ccc} X \times_S T & \xrightarrow{\bar{\phi}} & X \\ \downarrow \bar{f} & & \downarrow f \\ T & \xrightarrow{\phi} & S \end{array}$$

entre espacios σ -compactos, si f es propio, la imagen inversa $\bar{\phi}^*$ define isomorfismos

$$\phi^*(R^n f_*\mathcal{F}) = R^n \bar{f}_*(\bar{\phi}^*\mathcal{F}).$$

Demostración: La imagen inversa $\bar{\phi}^*$ induce morfismos

$$H^n(f^{-1}U, \mathcal{F}) \longrightarrow H^n(\bar{\phi}^{-1}f^{-1}U, \bar{\phi}^*\mathcal{F}) = H^n(\bar{f}^{-1}\phi^{-1}U, \bar{\phi}^*\mathcal{F}) \longrightarrow (R^n \bar{f}_*\bar{\phi}^*\mathcal{F})(\phi^{-1}U)$$

que definen un morfismo de haces $R^n f_*\mathcal{F} \rightarrow \phi_*(R^n \bar{f}_*\bar{\phi}^*\mathcal{F})$, y el correspondiente morfismo $\phi^*(R^n f_*\mathcal{F}) \rightarrow R^n \bar{f}_*(\bar{\phi}^*\mathcal{F})$ es isomorfismo porque si $s = f(t)$,

$$(\phi^*R^n f_*\mathcal{F})_t = (R^n f_*\mathcal{F})_s = H^n(f^{-1}s, \mathcal{F}) \xrightarrow{\bar{\phi}^*} H^n(\bar{f}^{-1}t, \bar{\phi}^*\mathcal{F}) = (R^n \bar{f}_*\bar{\phi}^*\mathcal{F})_t$$

es un isomorfismo al ser $\bar{\phi}: \bar{f}^{-1}(t) \rightarrow f^{-1}(s)$ un homeomorfismo.

Corolario: $\pi^*: H^n(X, G) \xrightarrow{\sim} H^n(X \times [0, 1], G)$, cuando X es σ -compacto.

Demostración: Sea \mathcal{C}^\bullet la resolución Godement del haz constante G sobre $X \times [0, 1]$.

La cohomología de la fibra muestra que $\pi_*\mathcal{C}^\bullet$ es una resolución (flasca) de $\pi_*G = G$, y permite por tanto calcular la imagen inversa.

Terminamos porque tenemos un morfismo canónico $\pi^*\pi_*\mathcal{C}^\bullet \rightarrow \mathcal{C}^\bullet$ y la siguiente composición es la identidad,

$$\Gamma(X, \pi_*\mathcal{C}^\bullet) \xrightarrow{\pi^*} \Gamma(X \times [0, 1], \pi^*\pi_*\mathcal{C}^\bullet) \longrightarrow \Gamma(X \times [0, 1], \mathcal{C}^\bullet).$$

Corolario: Si dos aplicaciones continuas $\phi, \psi: X \rightarrow Y$ entre espacios σ -compactos son homótopas, entonces $\phi^* = \psi^*: H^n(Y, G) \rightarrow H^n(X, G)$. Por tanto, si $\phi: X \rightarrow Y$ es una equivalencia homotópica, $\phi^*: H^n(Y, G) \rightarrow H^n(X, G)$ es un isomorfismo.

Demostración: Sea $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ una aplicación continua tal que $\phi = Hi_0$ y $\psi = Hi_1$, donde $i_t(x) = (x, t)$.

Tenemos que $\phi^* = i_0^*H^* = i_1^*H^* = \psi^*$, porque $i_0^* = i_1^*$ al ser ambos el inverso de π^* .

1. **Cohomología de los Espacios Afines:** $H^p(\mathbb{R}^n, G) = 0, p \geq 1$.

$$2. H_x^p(\mathbb{R}^n, G) = \begin{cases} G & p = n \\ 0 & p \neq n \end{cases}$$

$\mathbb{R}^n - x$ es homótopo a S_{n-1} , y la sucesión de cohomología local concluye.

3. *El borde de una variedad con borde es un concepto topológico.*

Si x es un punto del borde de $P = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0\}$, tanto P como $P - x$ son contráctiles, y $H_x^p(P, G) = 0, p \geq 0$, por la sucesión de cohomología local.

4. *Si S_n y S_m son homotópicamente equivalentes, entonces $n = m$.*

5. *La inclusión $i: S_{n-1} \hookrightarrow B_n$ de la esfera en el disco no admite retracts continuo.*

Si i admite un retracts r continuo, $i^*: 0 = H^{n-1}(B_n, \mathbb{Z}) \rightarrow H^{n-1}(S_{n-1}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ admite una sección r^* , lo que es absurdo.

6. *Toda aplicación continua $\phi: B_n \rightarrow B_n$ tiene punto fijo. (Teorema de Brouwer).*

En caso contrario tendríamos un retracts continuo $r: B_n \rightarrow S_{n-1}$, donde $r(x)$ es el punto de corte con S_{n-1} de la semirecta con origen en $\phi(x)$ que pase por x .

7. *Si n es par, todo campo continuo de vectores tangentes a S_n se anula en un punto.*

Si un campo continuo de vectores en la bola B_n no se anula en ningún punto, entonces apunta hacia fuera en algún punto del borde S_{n-1} .

Se repiten las demostraciones del caso diferenciable (p. 174).

Teorema de Finitud: *Sea A un anillo noetheriano y \mathcal{F} un haz de A -módulos sobre un espacio separado localmente compacto X . Si cada punto tiene una base de entornos U en que los A -módulos $H^p(U, \mathcal{F})$ son finito generados, entonces para cada compacto K contenido en el interior de un compacto L se verifica que las imágenes de los morfismos $H^p(L, \mathcal{F}) \rightarrow H^p(K, \mathcal{F})$ de restricción también son A -módulos finito generados.*

Demostración: Procedemos por inducción sobre p .

Fijado L , consideramos la familia de los compactos K que tienen un entorno compacto \bar{K} contenido en el interior de L tal que $H^p(L, \mathcal{F}) \rightarrow H^p(\bar{K}, \mathcal{F})$ tenga imagen finito generada.

Es claro que todo compacto contenido en uno de esta familia también está en la familia, y por hipótesis que cada punto del interior de L tiene un entorno compacto en tal familia.

Luego basta probar que la unión de dos compactos K_1, K_2 de la familia también está en ella.

Por definición K_i tiene algún entorno compacto \bar{K}_i contenido en el interior de L tal que $H^p(L, \mathcal{F}) \rightarrow H^p(\bar{K}_i, \mathcal{F})$ tiene imagen finito generada. Podemos elegir un entorno compacto K'_i de K_i contenido en el interior de \bar{K}_i , de modo que tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} H^p(L, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H^p(L, \mathcal{F}) \oplus H^p(L, \mathcal{F}) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow \rho \\ H^{p-1}(\bar{K}_1 \cap \bar{K}_2, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H^p(\bar{K}_1 \cup \bar{K}_2, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H^p(\bar{K}_1, \mathcal{F}) \oplus H^p(\bar{K}_2, \mathcal{F}) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ H^{p-1}(K'_1 \cap K'_2, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H^p(K'_1 \cup K'_2, \mathcal{F}) & & \end{array}$$

donde la fila central es exacta por Mayer-Vietoris, ρ tiene imagen finito generada, y también γ por inducción. Ahora es sencillo concluir que $H^p(L, \mathcal{F}) \rightarrow H^p(K'_1 \cup K'_2, \mathcal{F})$ tiene imagen finito generada, de modo que $K_1 \cup K_2$ está en la familia considerada.

Corolario: Si \mathcal{F} es un haz localmente constante de fibra A sobre una variedad compacta X , los A -módulos $H^p(X, \mathcal{F})$ son finito generados. Luego lo son los módulos $H^p(X, A)$.

Demostración: Hay una base de abiertos U tales que los módulos $H^p(U, \mathcal{F}) = H^p(\mathbb{R}^d, A)$ son finito generados. Se concluye tomando $K = L = X$ en el teorema anterior.

Corolario: Si X es una variedad diferenciable compacta, los grupos de cohomología de De Rham $H_{DR}^p(X)$ son espacios vectoriales de dimensión finita.

11.4. Producto Cup

En adelante A denotará un dominio de ideales principales, de modo que los A -módulos planos son los módulos sin torsión, y diremos que un haz de A -módulos \mathcal{M} es **plano** si lo son sus fibras \mathcal{M}_x , lo que equivale a que los sean los módulos $\mathcal{M}(U)$, porque $\mathcal{M}(U)$ es un submódulo de $\prod_{x \in U} \mathcal{M}_x$, y $\mathcal{M}_x = \varinjlim \mathcal{M}(U)$.

Lema: Si \mathcal{M} es un haz de A -módulos sobre un espacio σ -compacto X , y P es un A -módulo proyectivo,

$$H_c^n(X, \mathcal{M}) \otimes_A P = H_c^n(X, \mathcal{M} \otimes_A P).$$

Demostración: Ya lo sabemos cuando P es libre (p. 272).

En general P es sumando directo de un libre, $L = P \oplus P'$, y terminamos.

Fórmula de los Coeficientes Universales: Si \mathcal{M} es un haz plano sobre un espacio σ -compacto X , para todo A -módulo N tenemos sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow H_c^n(X, \mathcal{M}) \otimes_A N \longrightarrow H_c^n(X, \mathcal{M} \otimes_A N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(H_c^{n+1}(X, \mathcal{M}), N) \longrightarrow 0$$

y si N es finito generado, tenemos sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow H^n(X, \mathcal{M}) \otimes_A N \longrightarrow H^n(X, \mathcal{M} \otimes_A N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(H^{n+1}(X, \mathcal{M}), N) \longrightarrow 0$$

Demostración: Fijada una resolución proyectiva $0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow N \rightarrow 0$ (p. 274), el núcleo y el conúcleo del morfismo $\phi_n: H_c^n(X, \mathcal{M}) \otimes_A P_1 \rightarrow H_c^n(X, \mathcal{M}) \otimes_A P_0$ son precisamente los módulos $\mathrm{Tor}_1(H_c^n(X, \mathcal{M}), N)$ y $H_c^n(X, \mathcal{M}) \otimes_A N$ respectivamente.

Como \mathcal{M} es plano, la sucesión $0 \rightarrow \mathcal{M} \otimes_A P_1 \rightarrow \mathcal{M} \otimes_A P_0 \rightarrow \mathcal{M} \otimes_A N \rightarrow 0$ es exacta, y la sucesión exacta larga de cohomología

$$H_c^n(X, \mathcal{M}) \otimes P_1 \xrightarrow{\phi_n} H_c^n(X, \mathcal{M}) \otimes P_0 \rightarrow H_c^n(X, \mathcal{M} \otimes N) \rightarrow H_c^{n+1}(X, \mathcal{M}) \otimes P_1 \xrightarrow{\phi_{n+1}} H_c^{n+1}(X, \mathcal{M}) \otimes P_0$$

muestra la existencia de una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Coker} \phi_n \longrightarrow H_c^n(X, \mathcal{M} \otimes_A N) \longrightarrow \mathrm{Ker} \phi_{n+1} \longrightarrow 0$$

Cuando N es finito, admite una resolución $0 \rightarrow A^m \rightarrow A^n \rightarrow N \rightarrow 0$.

Como la igualdad $H^n(X, \mathcal{M} \otimes_A L) = H^n(X, \mathcal{M}) \otimes_A L$ es obvia cuando $L = A^r$, se repite la demostración dada para la cohomología con soportes compactos.

Corolario: $0 \longrightarrow H_c^n(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} G \longrightarrow H_c^n(X, G) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_c^{n+1}(X, \mathbb{Z}), G) \longrightarrow 0$.

Fórmula de Proyección: Sea $f: X \rightarrow Y$ un morfismo propio entre espacios σ -compactos. Si \mathcal{M} es un haz plano sobre X , para todo haz de A -módulos \mathcal{N} sobre Y tenemos que

$$(R^n f_* \mathcal{M}) \otimes_A \mathcal{N} = R^n f_*(\mathcal{M} \otimes_A f^* \mathcal{N}).$$

Demostración: El morfismo $(R^n f_* \mathcal{M}) \otimes_A \mathcal{N} \rightarrow R^n f_*(\mathcal{M} \otimes_A \phi^* \mathcal{N})$ que da la fórmula de los coeficientes universales es un isomorfismo de acuerdo con la cohomología de la fibra,

$$\begin{aligned} ((R^n f_* \mathcal{M}) \otimes_A \mathcal{N})_y &= (R^n f_* \mathcal{M})_y \otimes_A \mathcal{N}_y = H^n(f^{-1}y, \mathcal{M}) \otimes_A \mathcal{N}_y \\ &= H^n(f^{-1}y, \mathcal{M} \otimes_A \mathcal{N}_y) = (R^n f_*(\mathcal{M} \otimes_A f^* \mathcal{N}))_y \end{aligned}$$

Definición: Si (K^\bullet, d) y (L^\bullet, d) son dos complejos de A -módulos (o de haces de A -módulos), entonces $K^\bullet \otimes_A L^\bullet$ es un bicomplejo, con las diferenciales $d_1 = d \otimes 1$ y $d_2 = 1 \otimes d$, de modo que el complejo simple asociado tiene la diferencial $d = d \otimes 1 + (-1)^p 1 \otimes d$.

El producto tensorial de ciclos es un ciclo de $K^\bullet \otimes_A L^\bullet$, así que tenemos morfismos

$$H^p(K^\bullet) \otimes_A H^q(L^\bullet) \xrightarrow{\otimes} H^{p+q}(K^\bullet \otimes_A L^\bullet).$$

Los isomorfismos naturales $K^p \otimes_A L^q \xrightarrow{\sim} L^q \otimes_A K^p$ no definen un isomorfismo de complejos $K^\bullet \otimes_A L^\bullet \rightarrow L^\bullet \otimes_A K^\bullet$, sino que han de ser afectados de un factor $(-1)^{pq}$,

$$(d \otimes 1 + (-1)^q 1 \otimes d)((-1)^{pq} b_q \otimes a_p) = (-1)^{(p+1)q} b_q \otimes da_p + (-1)^{p(q+1)} (-1)^p db_q \otimes a_p.$$

Si \mathcal{M} es un haz de A -módulos sobre un espacio topológico X , la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow C^0 \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_1 \rightarrow 0$$

escinde en fibra, pues un retracts $(C^0 \mathcal{M})_x \rightarrow \mathcal{M}_x$ se obtiene al asignar a cada germen de sección discontinua su valor en $x \in X$. Luego, para todo haz de A -módulos \mathcal{N} , la sucesión

$$0 \rightarrow \mathcal{M} \otimes_A \mathcal{N} \rightarrow C^0 \mathcal{M} \otimes_A \mathcal{N} \rightarrow C^1 \mathcal{M} \otimes_A \mathcal{N} \rightarrow C^2 \mathcal{M} \otimes_A \mathcal{N} \rightarrow \dots$$

es exacta. Es decir, $\mathcal{M} \otimes_A \mathcal{N} \xrightarrow{\sim} C^\bullet \mathcal{M} \otimes_A \mathcal{N}$.

Tenemos casi-isomorfismos $\mathcal{M} \otimes_A C^q \mathcal{N} \xrightarrow{\sim} C^\bullet \mathcal{M} \otimes_A C^q \mathcal{N}$, y $\mathcal{M} \otimes_A C^\bullet \mathcal{N} \xrightarrow{\sim} C^\bullet \mathcal{M} \otimes_A C^\bullet \mathcal{N}$ por el teorema del bicomplejo.

Es decir, $C^\bullet \mathcal{M} \otimes_A C^\bullet \mathcal{N}$ es una resolución de $\mathcal{M} \otimes_A \mathcal{N}$, y tenemos morfismos naturales

$$H^p[\Gamma(X, C^\bullet \mathcal{M})] \otimes H^q[\Gamma(X, C^\bullet \mathcal{N})] \xrightarrow{\otimes} H^{p+q}[\Gamma(X, C^\bullet \mathcal{M} \otimes_A C^\bullet \mathcal{N})] \xrightarrow{\text{DR}} H^{p+q}(X, \mathcal{M} \otimes_A \mathcal{N})$$

que definen el **producto cup** $H^p(X, \mathcal{M}) \otimes_A H^q(X, \mathcal{N}) \xrightarrow{\cup} H^{p+q}(X, \mathcal{M} \otimes_A \mathcal{N})$.

Proposición: Si $0 \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{R}^\bullet$ y $0 \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{S}^\bullet$ son resoluciones tales que $\mathcal{R}^\bullet \otimes_A \mathcal{S}^\bullet$ es una resolución de $\mathcal{M} \otimes_A \mathcal{N}$, el siguiente cuadrado es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H^p[\Gamma(X, \mathcal{R}^\bullet)] \otimes_A H^q[\Gamma(X, \mathcal{S}^\bullet)] & \xrightarrow{\otimes} & H^{p+q}[\Gamma(X, \mathcal{R}^\bullet \otimes_A \mathcal{S}^\bullet)] \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^p(X, \mathcal{M}) \otimes_A H^q(X, \mathcal{N}) & \xrightarrow{\cup} & H^{p+q}(X, \mathcal{M} \otimes_A \mathcal{N}) \end{array}$$

Demostración: Por el teorema del bicomplejo tenemos casi-isomorfismos

$$\mathcal{M} \otimes_A \mathcal{N} \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}^\bullet \otimes_A \mathcal{S}^\bullet \xrightarrow{\sim} C^\bullet \mathcal{R}^\bullet \otimes_A \mathcal{S}^\bullet \xrightarrow{\sim} C^\bullet \mathcal{R}^\bullet \otimes_A C^\bullet \mathcal{S}^\bullet$$

de modo que $C^\bullet \mathcal{R}^\bullet \otimes_A C^\bullet \mathcal{S}^\bullet$ es una resolución de $\mathcal{M} \otimes_A \mathcal{N}$, y se concluye al considerar el siguiente diagrama conmutativo (p. 276)

$$\begin{array}{ccc} H^p[\Gamma(X, C^\bullet \mathcal{M})] \otimes H^q[\Gamma(X, C^\bullet \mathcal{N})] & \longrightarrow & H^{p+q}[\Gamma(X, C^\bullet \mathcal{M} \otimes C^\bullet \mathcal{N})] \\ \parallel & & \downarrow \\ H^p[\Gamma(X, C^\bullet \mathcal{R}^\bullet)] \otimes H^q[\Gamma(X, C^\bullet \mathcal{S}^\bullet)] & \longrightarrow & H^{p+q}[\Gamma(X, C^\bullet \mathcal{R}^\bullet \otimes C^\bullet \mathcal{S}^\bullet)] \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^p[\Gamma(X, \mathcal{R}^\bullet)] \otimes H^q[\Gamma(X, \mathcal{S}^\bullet)] & \longrightarrow & H^{p+q}[\Gamma(X, \mathcal{R}^\bullet \otimes \mathcal{S}^\bullet)] \end{array}$$

Corolario: $(c_p \cup c_q) \cup c_r = c_p \cup (c_q \cup c_r)$.

$$c_p \cup c_q = (-1)^{pq} c_q \cup c_p.$$

$$f^*(c_p \cup c_q) = (f^* c_p) \cup (f^* c_q).$$

Corolario: En las variedades diferenciables el producto cup de $H^\bullet(X, \mathbb{R})$ está definido por el producto exterior, $[\omega_p] \cup [\omega_q] = [\omega_p \wedge \omega_q]$.

Lema: Sea A un dominio de ideales principales. Si K^\bullet, L^\bullet son complejos de A -módulos y L^\bullet es plano, tenemos sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} H^p(K^\bullet) \otimes_A H^q(L^\bullet) \longrightarrow H^n(K^\bullet \otimes_A L^\bullet) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n+1} \text{Tor}_1^A(H^p(K^\bullet), H^q(L^\bullet)) \longrightarrow 0$$

Demostración: Al ser L^\bullet plano, sus ciclos Z^q y bordes B^q carecen de torsión, y definen una resolución plana de $H^q(L^\bullet)$,

$$0 \longrightarrow B^q \longrightarrow Z^q \longrightarrow H^q(L^\bullet) \longrightarrow 0$$

El conúcleo de $\phi_{pq}: H^p(K^\bullet) \otimes_A B^q \rightarrow H^p(K^\bullet) \otimes_A Z^q$ es $H^p(K^\bullet) \otimes_A H^q(L^\bullet)$, y su núcleo es $\text{Tor}_1^A(H^p(K^\bullet), H^q(L^\bullet))$. Además tenemos una sucesión exacta de complejos

$$0 \longrightarrow Z^\bullet \longrightarrow L^\bullet \xrightarrow{d} B^\bullet[1] \longrightarrow 0$$

donde las diferenciales de Z^\bullet y $B^\bullet[1]$ son nulas, y el connecting

$$\delta: B^q = H^{q-1}(B^\bullet[1]) \longrightarrow H^q(Z^\bullet) = Z^q$$

es la inclusión. Al ser planos los módulos B^q , tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K^\bullet \otimes_A Z^\bullet \longrightarrow K^\bullet \otimes_A L^\bullet \xrightarrow{1 \otimes d} K^\bullet \otimes_A (B^\bullet[1]) \longrightarrow 0$$

que induce sucesiones exactas

$$\begin{array}{c} \dots \xrightarrow{\delta_n} H^n(K^\bullet \otimes_A Z^\bullet) \rightarrow H^n(K^\bullet \otimes_A L^\bullet) \rightarrow H^n(K^\bullet \otimes_A (B^\bullet[1])) \xrightarrow{\delta_{n+1}} \dots \\ 0 \longrightarrow \text{Coker } \delta_n \longrightarrow H^n(K^\bullet \otimes_A L^\bullet) \longrightarrow \text{Ker } \delta_{n+1} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Además, al ser Z^q y B^q módulos planos, tenemos que

$$\begin{aligned} H^n(K^\bullet \otimes_A Z^\bullet) &= \bigoplus_{p+q=n} H^p(K^\bullet \otimes_A Z^q) = \bigoplus_{p+q=n} H^p(K^\bullet) \otimes_A Z^q \\ H^{n-1}(K^\bullet \otimes_A B^\bullet[1]) &= \bigoplus_{p+q=n-1} H^p(K^\bullet \otimes_A B^\bullet[1]^q) = \bigoplus_{p+q=n} H^p(K^\bullet) \otimes_A B^q \end{aligned}$$

de modo que $\delta_n = \bigoplus_{p+q=n} \phi_{pq}$, y concluimos que

$$\begin{aligned} \text{Coker } \delta_n &= \bigoplus_{p+q=n} \text{Coker } \phi_{pq} = \bigoplus_{p+q=n} H^p(K^\bullet) \otimes_A H^q(L^\bullet) \\ \text{Ker } \delta_{n+1} &= \bigoplus_{p+q=n+1} \text{Ker } \phi_{pq} = \bigoplus_{p+q=n+1} \text{Tor}_1^A(H^p(K^\bullet), H^q(L^\bullet)) \end{aligned}$$

Nota: En espacios σ -compactos consideramos la **imagen directa con soportes propios**

$$(f_! \mathcal{F})(U) = \{s \in \mathcal{F}(f^{-1}U) : \text{el soporte de } s \text{ es propio sobre } U\}$$

de modo que $\Gamma_c(X, f_! \mathcal{F}) = \Gamma_c(Y, \mathcal{F})$, y pondremos $R^n f_! \mathcal{F} = \mathcal{H}^n[f_!(C^\bullet \mathcal{F})]$.

Cuando $R^n f_! \mathcal{F} = 0$, $n \geq 1$, tenemos que $f_!(C^\bullet \mathcal{F})$ es una resoluci3n de $f_! \mathcal{F}$ por haces Γ_c -ac3clicos (los haces $f_!(C^p \mathcal{F})$ son $C^0\mathbb{Z}$ -m3dulos), y $H_c^n(Y, \mathcal{F}) = H_c^n(X, f_! \mathcal{F})$.

Las f3rmulas de la Cohomolog3a de la Fibra, Cambio de Base y Proyecci3n (y sus demostraciones) son v3lidas para aplicaciones continuas si las im3genes directas $R^n f_*$ se sustituyen por $R^n f_!$, y la cohomolog3a por la cohomolog3a con soportes compactos.

Por otra parte, si un haz \mathcal{M} es plano, $C^0\mathcal{M}$ tambi3n, porque $(C^0\mathcal{M})(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{M}_x$ carece de torsi3n. Adem3s, como la sucesi3n exacta $0 \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow C^0\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_1 \rightarrow 0$ escinde en fibra, el haz \mathcal{M}_1 es plano, y todos los haces $C^p\mathcal{M}$ son planos.

Teorema de K3nneth: Sean $p_1: X \times Y \rightarrow X$, $p_2: X \times Y \rightarrow Y$ las proyecciones naturales, donde X, Y son σ -compactos, y sea A un dominio de ideales principales. Si \mathcal{M} y \mathcal{N} son haces de A -m3dulos planos sobre X e Y respectivamente, tenemos sucesiones exactas

$$0 \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_c^p(X, \mathcal{M}) \otimes H_c^q(Y, \mathcal{N}) \rightarrow H_c^n(X \times Y, p_1^* \mathcal{M} \otimes p_2^* \mathcal{N}) \rightarrow \bigoplus_{p+q=n+1} \text{Tor}_1(H_c^p(X, \mathcal{M}), H_c^q(Y, \mathcal{N})) \rightarrow 0$$

Demostraci3n: De acuerdo con el lema, basta probar las siguientes afirmaciones,

$$1. \quad p_1^* \otimes p_2^*: \Gamma_c(X, C^\bullet \mathcal{M}) \otimes_A \Gamma_c(Y, C^\bullet \mathcal{N}) = \Gamma_c(X \times Y, p_1^* C^\bullet \mathcal{M} \otimes_A p_2^* C^\bullet \mathcal{N}).$$

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{p_1} & X \\ \downarrow p_2 & & \downarrow q_1 \\ Y & \xrightarrow{q_2} & \bullet \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_c(X \times Y, p_1^* C^i \mathcal{M} \otimes p_2^* C^j \mathcal{N}) &= q_{1!} p_{1!} (p_1^* C^i \otimes p_2^* C^j) = q_{1!} (C^i \otimes p_{1!} (p_2^* C^j)) \\ &= q_{1!} (C^i \otimes q_1^* q_{2!} (C^j)) = (q_{1!} C^i) \otimes (q_{2!} C^j) \\ &= \Gamma_c(X, C^i \mathcal{M}) \otimes \Gamma_c(Y, C^j \mathcal{N}) \end{aligned}$$

$$2. \quad p_1^* C^\bullet \mathcal{M} \otimes_A p_2^* C^\bullet \mathcal{N} \text{ es una resoluci3n } \Gamma_c\text{-ac3clica de } p_1^* \mathcal{M} \otimes_A p_2^* \mathcal{N}.$$

$0 \rightarrow p_1^* \mathcal{M} \rightarrow p_1^* C^\bullet \mathcal{M}$ y $0 \rightarrow p_2^* \mathcal{N} \rightarrow p_2^* C^\bullet \mathcal{N}$ escinden en fibra; luego $p_1^* C^\bullet \mathcal{M} \otimes p_2^* C^\bullet \mathcal{N}$ es una resoluci3n de $p_1^* \mathcal{M} \otimes p_2^* \mathcal{N}$, y los haces $p_1^* C^i \mathcal{M} \otimes p_2^* C^j \mathcal{N}$ son Γ_c -ac3clicos:

$$R^n p_{1!} (p_1^* C^i \otimes p_2^* C^j) = C^i \otimes R^n p_{1!} (p_2^* C^j) = C^i \otimes q_1^* (R^n q_{2!} C^j) = 0, \quad n \geq 1,$$

y los haces $p_{1!} (p_1^* C^i \otimes p_2^* C^j) = C^i \otimes q_1^* (q_{2!} C^j)$ son Γ_c -ac3clicos,

$$H_c^n(X, C^i \otimes q_1^* (q_{2!} C^j)) = R^n q_{1!} (C^i \otimes q_1^* (q_{2!} C^j)) = (R^n q_{1!} C^i) \otimes (q_{2!} C^j) = 0, \quad n \geq 1.$$

Ejemplo: El anillo de cohomología de la esfera S_n es $H^\bullet(S_n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[t_n]/(t_n^2)$, así que

$$H^\bullet(S_n \times S_m, \mathbb{Z}) = H^\bullet(S_n, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H^\bullet(S_m, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x_n, y_m]/(x_n^2, y_m^2)$$

donde $p_1^*(t_n) = t_n \otimes 1 = x_n$ y $p_2^*(t_m) = 1 \otimes t_m = y_m$. Si n es par, ninguna aplicación continua $\mu: S_n \times S_n \rightarrow S_n$ define una estructura de grupo en S_n , pues en tal caso $\mu^*(t_n) = ax_n + by_n$, y si e es el neutro de S_n , la aplicación continua $j: S_n \rightarrow S_n \times S_n$, $j(p) = (p, e)$, verifica que μj y $p_1 j$ son la identidad, y que $p_2 j$ es constante,

$$t_n = j^* \mu^*(t_n) = j^*(ax_n + by_n) = j^*(ap_1^*(t_n) + bp_2^*(t_n)) = at_n + 0,$$

luego $a = 1$. Igualmente $b = 1$, y obtenemos una contradicción si n es par

$$0 = \mu^*(t_n^2) = (\mu^*t_n)^2 = (x_n + y_n)^2 = x_n y_n + y_n x_n = 2x_n y_n.$$

11.5. Clase de Cohomología de una Subvariedad

11.5.1. Fibrados de Línea

Lema: Si G es un grupo abeliano, el haz de automorfismos \mathcal{G} del revestimiento principal trivial $X \times G \rightarrow X$ es el haz constante G .

Demostración: Cada elemento $h \in G$ define un automorfismo $\tau_h(y) = hy$ porque G es abeliano, $\tau_h(gy) = hgy = ghy = g\tau_h(y)$, y este morfismo inyectivo de haces $G \rightarrow \mathcal{G}$ es epiyectivo.

En efecto, si $\tau: U \times G \rightarrow U \times G$ es un automorfismo y $\tau(x, 1) = (x, h(x))$, entonces $\tau = \tau_h$,

$$\tau_h(x, g) = (x, h(x)g) = g(x, h(x)) = g\tau(x, 1) = \tau(x, g).$$

Teorema: $H^1(X, G) = \left[\begin{array}{l} \text{Revestimientos principales} \\ \text{de } X \text{ de grupo abeliano } G \end{array} \right]$

Demostración: Fijemos un recubrimiento abierto $\mathcal{R} = \{U_i\}_{i \in I}$ de X .

Si un revestimiento principal $P \rightarrow X$ es trivial en el recubrimiento, $\phi_i: P_{U_i} \xrightarrow{\sim} U_i \times G$, en $U_{ij} = U_i \cap U_j$ tenemos un automorfismo $g_{ij} = \phi_i \phi_j^{-1}: U_{ij} \times G \xrightarrow{\sim} U_{ij} \times G$, y en cada abierto $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$ tenemos que

$$g_{ij} g_{jk} = g_{ik}.$$

Las familias $\{g_{ij} \in G(U_{ij})\}_{i,j \in I}$ verificando tal condición se llaman datos de construcción, pues permiten reconstruir el revestimiento principal como el cociente

$$P \simeq \left[\coprod_{i \in I} U_i \times G \right] / \equiv$$

por la relación de equivalencia $(x, g_i) \equiv (x, g_j)$ cuando $x \in U_{ij}$, $g_i = g_{ij}(x)g_j$.

El dato de construcción $\{g_{ij}\}$ depende de las trivializaciones ϕ_i .

Si elegimos otras trivializaciones $\bar{\phi}_i: P_{U_i} \xrightarrow{\sim} G \times U_i$, obtendremos otro dato de construcción $\{\bar{g}_{ij}\}$; pero $g_i = \bar{\phi}_i \phi_i^{-1}: U_i \times G \xrightarrow{\sim} U_i \times G$ es un automorfismo, así que $g_i \in G(U_i)$ y

$$\bar{g}_{ij} = g_i g_{ij} g_j^{-1}.$$

Si decimos que dos datos de construcción $\{g_{ij}\}$ y $\{\bar{g}_{ij}\}$ son equivalentes cuando existen secciones $g_i \in G(U_i)$ tales que $\bar{g}_{ij} = g_i g_{ij} g_j^{-1}$, tenemos una biyección natural

$$\left[\begin{array}{l} \text{Revestimientos principales} \\ \text{de } X \text{ que trivializan en } \mathcal{R} \end{array} \right] = \frac{\{\text{Datos de construcción}\}}{\text{Equivalencia de datos}}$$

Consideremos ahora la resolución Godement de G ,

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow G \longrightarrow C^0G \longrightarrow G_1 \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow G_1 \longrightarrow C^1G \longrightarrow G_2 \longrightarrow 0 \\ H^1(X, G) &= \frac{\Gamma(X, G_1)}{\Gamma(X, C^0G)} \end{aligned}$$

Si $H^1(X, G)_{\mathcal{R}}$ denota el subgrupo de $H^1(X, G)$ formado por las clases de cohomología que se anulan en el recubrimiento \mathcal{R} , y $\Gamma(X, G_1)_{\mathcal{R}}$ denota el subgrupo de las secciones globales de G_1 que provienen de secciones de C^0G en el recubrimiento \mathcal{R} , tenemos que

$$H^1(X, G)_{\mathcal{R}} = \frac{\Gamma(X, G_1)_{\mathcal{R}}}{\Gamma(X, C^0G)}$$

Si $f' \in \Gamma(X, G_1)_{\mathcal{R}}$, existen $f_i \in \Gamma(U_i, C^0G)$ tales que $f'|_{U_i} = f_i$; luego $f_i = g_{ij}f_j$ en U_{ij} para algún dato de construcción $g_{ij} \in G(U_{ij})$. Si consideramos otras secciones \bar{f}_i que representen a f' , definirán otro dato $\{\bar{g}_{ij}\}$, y tendremos $\bar{f}_i = g_i f_i$, donde $g_i \in G(U_i)$, y

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ij} &= \bar{f}_i / \bar{f}_j = g_i f_i / g_j f_j = g_i g_{ij} g_j^{-1}. \\ \Gamma(X, G_1)_{\mathcal{R}} &\longrightarrow \frac{\{\text{Datos de construcción}\}}{\text{Equivalencia de datos}} \end{aligned}$$

Este morfismo de grupos no es inyectivo, y su núcleo es la imagen de $\Gamma(X, C^0G)$, pues la condición $g_{ij} = 1$ significa que las secciones f_i coinciden en las intersecciones U_{ij} .

Veamos por último que este morfismo es epiyectivo. Dado un dato de construcción $\{g_{ij}\}$, para cada $x \in X$ elegimos un índice $k_x \in I$ tal que $x \in U_{k_x}$ y definimos

$$f_i(x) = g_{ik_x}(x), \quad f_i \in \Gamma(U_i, C^0G)$$

de modo que en U_{ij} tenemos $f_i = g_{ik_x} = g_{ij}g_{jk_x} = g_{ij}f_j$.

Estas secciones de C^0G coinciden como secciones de G_1 , así que definen una sección global f' de G_1 que induce el dato de construcción $\{g_{ij}\}$. En resumen,

$$H^1(X, G)_{\mathcal{R}} = \frac{\{\text{Datos de construcción}\}}{\text{Equivalencia de datos}} = \left[\begin{array}{l} \text{Revestimientos principales} \\ \text{de } X \text{ que trivializan en } \mathcal{R} \end{array} \right]$$

y concluimos porque toda clase de cohomología se anula en algún recubrimiento y todo revestimiento principal es trivial en algún recubrimiento. q.e.d.

Este argumento prueba que cualquier tipo de estructura localmente trivial está clasificada por el grupo de cohomología $H^1(X, \mathcal{G})$, donde \mathcal{G} es el haz de automorfismos de la correspondiente estructura trivial (siempre que \mathcal{G} sea abeliano).

Teorema de Hurewicz: *Si X es conexo y localmente simplemente conexo, para todo grupo abeliano G tenemos un isomorfismo de grupos*

$$H^1(X, G) = \text{Hom}_{\text{gr}}(\pi_1(X, x), G).$$

Demostración: Los revestimientos principales de grupo abeliano G están clasificados (p. 223) por $\text{Hom}_{\text{gr}}(\pi_1(X, x), G)$, y sólo queda ver que la biyección $H^1(X, G) = \text{Hom}_{\text{gr}}(\pi_1(X, x), G)$ es morfismo de grupos.

El grupo de automorfismos del revestimiento universal $\tilde{X} \rightarrow X$ es $\pi_1 = \pi_1(X, x)$, y a cada morfismo de grupos $\phi: \pi_1 \rightarrow G$ se le asocia el revestimiento principal

$$P = (G \times \tilde{X})/\pi_1 \longrightarrow \tilde{X}/\pi_1 = X, \quad \sigma(g, \tilde{x}) = (g \cdot \phi(\sigma^{-1}), \sigma\tilde{x})$$

Fijado un recubrimiento de X por abiertos simplemente conexos U_i , tendremos π_1 -isomorfismos $\tilde{X}|_{U_i} \simeq \pi_1 \times U_i$ que inducen trivializaciones

$$\phi_i: P|_{U_i} \xrightarrow{\sim} G \times U_i, \quad \phi_i[(g, \sigma, x)] = (g \cdot \phi(\sigma), x)$$

y en U_{ij} tendremos que el isomorfismo $(\pi_1 \times U_j)|_{U_{ij}} \simeq \tilde{X}|_{U_{ij}} \simeq (\pi_1 \times U_i)|_{U_{ij}}$ transforma $(1, x)$ en $(\sigma_{ij}(x), x)$. Luego

$$(\phi_i \phi_j^{-1})(g, x) = \phi_j[(g, \sigma_{ij}, x)] = (g\phi(\sigma_{ij}), x)$$

y un dato de construcción de P es precisamente $\phi(\sigma_{ij})$.

Ahora está claro que al producto de morfismos le corresponde el producto de datos.

Definiciones: Un espacio vectorial real sobre X es una aplicación continua $\pi: E \rightarrow X$ junto con operaciones continuas $E \times_X E \rightarrow E$ y $\mathbb{R} \times E \rightarrow E$ que verifiquen los axiomas de espacio vectorial, entre ellos la existencia de la sección continua $0: X \rightarrow E$ (en particular cada fibra $E_x = \pi^{-1}(x)$ hereda una estructura de espacio vectorial).

Un morfismo entre dos espacios vectoriales $E \rightarrow X$ y $E' \rightarrow X$ sobre X es una aplicación continua $\phi: E \rightarrow E'$ sobre X tal que las aplicaciones $\phi_x: E_x \rightarrow E'_x$ son lineales.

El espacio vectorial trivial de rango n sobre X es $\mathbb{R}^n \times X \rightarrow X$, y un **fibrado vectorial real** de rango n es un espacio vectorial $E \rightarrow X$ localmente trivial de rango n ; es decir, localmente $E|_U \simeq \mathbb{R}^n \times U$. Es un fibrado de **línea** cuando $n = 1$.

Análogamente se definen los fibrados vectoriales complejos sustituyendo \mathbb{R} por \mathbb{C} , y los fibrados vectoriales diferenciables sustituyendo los espacios topológicos y las aplicaciones continuas por variedades y aplicaciones de clase C^∞ .

Ejemplos: El haz de secciones continuas de un fibrado vectorial real de rango n es un haz localmente libre de rango n sobre el haz de funciones reales continuas \mathcal{C}_X , lo que define una equivalencia entre ambas categorías, y el funtor inverso asigna a cada \mathcal{C}_X -módulo localmente libre \mathcal{E} el fibrado vectorial $E = \coprod_{x \in X} (\mathcal{E}_x / \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x) \rightarrow X$ (con la topología evidente).

Los fibrados vectoriales complejos se corresponden con los módulos localmente libres sobre el haz de funciones complejas continuas, y los fibrados vectoriales diferenciables se corresponden con los módulos localmente libres sobre el haz de funciones diferenciables.

La gráfica $\xi \subset \mathbb{P}_n \times E$ de la incidencia (i.e., $(p, e) \in \xi$ cuando el vector $e \in E$ está en el subespacio vectorial representado por $p \in \mathbb{P}_n$) define un fibrado de línea $\pi: \xi \rightarrow \mathbb{P}_n$, llamado **fibrado tautológico** de \mathbb{P}_n , que no es trivial porque toda sección continua $s: \mathbb{P}_n \rightarrow \xi$ se anula en algún punto. En efecto, si no se anulase en ningún punto, considerando un producto escalar en E y dividiendo cada vector $s(p)$ por el módulo, tendríamos una sección continua del revestimiento $S_n \rightarrow \mathbb{P}_n$, lo que es absurdo porque la esfera S_n es conexa.

Lema: El haz de automorfismos de \mathcal{O} es el haz \mathcal{O}^* de secciones invertibles de \mathcal{O} .

Demostración: $\mathcal{O}(U) = \text{Hom}_{\mathcal{O}|_U}(\mathcal{O}|_U, \mathcal{O}|_U)$.

Teorema: $H^1(X, \mathcal{O}^*) = \left[\begin{array}{l} \mathcal{O}\text{-módulos} \\ \text{de línea} \end{array} \right]$

Corolario: $H^1(X, \mathbb{F}_2) = \left[\begin{array}{l} \text{Haces localmente} \\ \text{constantes de fibra } \mathbb{Z} \end{array} \right]$

Corolario: Si X es un espacio σ -compacto (e igualmente si X es una variedad diferenciable y los fibrados son C^∞),

$$H^1(X, \mathbb{F}_2) = \left[\begin{array}{l} \text{Fibrados de línea} \\ \text{reales sobre } X \end{array} \right]$$

$$H^2(X, \mathbb{Z}) = \left[\begin{array}{l} \text{Fibrados de línea} \\ \text{complejos sobre } X \end{array} \right]$$

Demostración: El haz de funciones reales continuas (resp. diferenciables) \mathcal{O} es acíclico, y la siguiente sucesión exacta muestra que el morfismo natural $H^1(X, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^1(X, \mathbb{F}_2)$ es un isomorfismo.

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{e^f} \mathcal{O}^* \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

El haz de funciones complejas continuas (resp. diferenciables) \mathcal{O} también es acíclico, y la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2\pi i} \mathcal{O} \xrightarrow{e^f} \mathcal{O}^* \longrightarrow 0$$

muestra (p.277) que tenemos un isomorfismo canónico $H^1(X, \mathcal{O}^*) = H^2(X, \mathbb{Z})$.

Definición: Si X es σ -compacto, cada fibrado de línea real $L \rightarrow X$ está clasificado por su **clase de obstrucción** $\delta(L) \in H^1(X, \mathbb{F}_2)$, y cada fibrado de línea complejo $L \rightarrow X$ está clasificado por su clase de obstrucción $\delta(L) \in H^2(X, \mathbb{Z})$.

Proposición: Si $\phi: Y \rightarrow X$ es una aplicación continua, $\delta(\phi^*L) = \phi^*(\delta(L))$.

Demostración: Si $\{g_{ij}\}$ es un dato de construcción de L en un recubrimiento $\{U_i\}$, entonces $\{g_{ij} \circ \phi\}$ es un dato de ϕ^*L en el recubrimiento $\{\phi^{-1}U_i\}$; luego si $c \in H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ se corresponde con L , entonces ϕ^*L se corresponde con la imagen de c por el morfismo

$$H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{\phi^*} H^1(Y, \phi^*\mathcal{O}_X^*) \longrightarrow H^1(Y, \mathcal{O}_Y^*).$$

Se termina por la compatibilidad de ϕ^* con el morfismo $H^1(X, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^1(X, \mathbb{F}_2)$ en el caso real, y con $H^1(X, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$ en el caso complejo. q.e.d.

1. La cohomología del toro de género g es $H^n(\tau_g, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0, 2 \\ \mathbb{Z}^{2g} & n = 1 \\ 0 & n > 2 \end{cases}$

$$H^1(\tau_g, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(\pi_1(\tau_g)_{ab}, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(\mathbb{Z}^{2g}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2g}.$$

El complementario de un disco abierto es homótopo a $2g$ circunferencias identificadas en un punto, y la sucesión exacta del subespacio cerrado permite concluir,

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^{2g} \longrightarrow \mathbb{Z}^{2g} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow H^2(\tau_g, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

2. Si S es la suma conexas de g planos proyectivos, $H^n(S, \mathbb{F}_2) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & n = 0, 2 \\ \mathbb{F}_2^g & n = 1 \\ 0 & n > 2 \end{cases}$

$$H^1(S, \mathbb{F}_2) = \text{Hom}(\pi_1(S)_{ab}, \mathbb{F}_2) = \text{Hom}(\mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2^g.$$

El complementario de un disco abierto es homótopo a g circunferencias identificadas en un punto, y la sucesión exacta del subespacio cerrado permite concluir,

$$0 \longrightarrow \mathbb{F}_2^g \longrightarrow \mathbb{F}_2^g \longrightarrow \mathbb{F}_2 \longrightarrow H^2(S, \mathbb{F}_2) \longrightarrow 0$$

3. Una variedad diferenciable X de dimensión n es orientable si y sólo si el haz de línea Ω_X^n es trivial. Por tanto, si $H^1(X, \mathbb{F}_2) = 0$, entonces X es orientable.
4. Si Y es una hipersuperficie cerrada de una variedad diferenciable X , su haz de ideales $\mathfrak{p}_Y(U) = \{f \in \mathcal{C}_X^\infty(U) : f|_{U \cap Y} = 0\}$ es un haz de línea, trivial si y sólo si Y admite una ecuación global $f = 0$ con diferencial no nula en Y . Si $H^1(X, \mathbb{F}_2) = 0$, toda hipersuperficie cerrada Y de X admite una ecuación global y es orientable.

En efecto, si $f = 0$ es una ecuación global de Y , el campo $N = \text{grad } f$ no se anula en ningún punto de Y , y define una orientación $[i_N \omega_X]$ de Y .

11.5.2. Cohomología Local

Sea Y un cerrado de un espacio topológico X .

Diremos que $\underline{\Gamma}_Y \mathcal{F} = \underline{\text{Hom}}(\mathbb{Z}_Y, \mathcal{F})$ es el haz de secciones de \mathcal{F} con soporte en el cerrado Y , y que $\mathcal{H}_Y^n \mathcal{F} = R^n \underline{\Gamma}_Y(\mathcal{F}) = \underline{\text{Ext}}^n(\mathbb{Z}_Y, \mathcal{F})$ es el n -ésimo **haz de cohomología local** de \mathcal{F} ,

$$\begin{aligned} (\underline{\Gamma}_Y \mathcal{F})(U) &= \Gamma_{Y \cap U}(U, \mathcal{F}), \\ (\mathcal{H}_Y^n \mathcal{F})(U) &= \mathcal{H}^n[\underline{\Gamma}_Y(\mathcal{C}^\bullet \mathcal{F})], \end{aligned}$$

y $\mathcal{H}_Y^n \mathcal{F}$ es el haz asociado al prehaz $U \rightsquigarrow H_{Y \cap U}^n(U, \mathcal{F})$.

Lema: Si \mathcal{C} es un haz Godement, entonces $\underline{\Gamma}_Y \mathcal{C}$ es un haz flasco.

Demostración: Si $\mathcal{C}(U) = \prod_{x \in U} M_x$, entonces $\Gamma_{Y \cap U}(U, \mathcal{C}) = \prod_{x \in Y \cap U} M_x$.

Teorema: Sea Y una subvariedad cerrada de codimensión d de una variedad topológica X . Los haces de cohomología local $\mathcal{H}_Y^p \mathbb{Z}$ son todos nulos, salvo el **haz de orientación normal** $\mathbb{T}_{Y/X} = \mathcal{H}_Y^d \mathbb{Z}$, que es un haz concentrado en Y , localmente constante de fibra \mathbb{Z} .

Demostración: El enunciado es local, y podemos suponer que $X = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d$, $Y = \mathbb{R}^m \times 0$, y en tal caso se termina por la sucesión exacta de cohomología local, al ser $X - Y = \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^d - 0)$ homótopo a la esfera S_{d-1} .

Corolario: $H_Y^p(X, \mathbb{Z}) = H^{p-d}(Y, \mathbb{T}_{Y/X})$.

Demostración: Si $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\bullet$ es la resolución Godement del haz constante \mathbb{Z} sobre X , tenemos casi-isomorfismos $\mathbb{T}_{Y/X}[-d] \leftarrow \mathcal{Z}^\bullet \xrightarrow{\sim} \underline{\Gamma}_Y \mathcal{C}^\bullet$, donde \mathcal{Z}^\bullet es el complejo

$$\underline{\Gamma}_Y \mathcal{C}^0 \rightarrow \underline{\Gamma}_Y \mathcal{C}^1 \rightarrow \dots \rightarrow \underline{\Gamma}_Y \mathcal{C}^{d-1} \rightarrow \mathcal{Z}^d \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

Como $\mathbb{T}_{Y/X}$ está concentrado en Y , y $\underline{\Gamma}_Y \mathcal{C}^\bullet$ es un complejo de haces flascos,

$$H^{p-d}(Y, \mathbb{T}_{Y/X}) = \mathbf{H}^p(X, \mathbb{T}_{Y/X}[-d]) = \mathbf{H}^p(X, \mathcal{Z}^\bullet) = \mathbf{H}^p(X, \underline{\Gamma}_Y \mathcal{C}^\bullet) = H_Y^p(X, \mathbb{Z}).$$

Definición: Y es **normalmente orientable** en X cuando $\mathbb{T}_{Y/X}|_Y$ es isomorfo al haz constante \mathbb{Z} en Y , y los isomorfismos $\mathbb{Z}_Y \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}_{Y/X}|_Y$ son las orientaciones normales de Y en X .

Fijada una orientación normal, el morfismo $H^{p-d}(Y, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_Y^p(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^p(X, \mathbb{Z})$ se denota i_* , la sucesión de Cohomología Local da la **sucesión exacta de Gysin**

$$\dots \rightarrow H^{p-d}(Y, \mathbb{Z}) \xrightarrow{i_*} H^p(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^p(X - Y, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} H^{p-d+1}(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow \dots$$

y la **clase de cohomología** de Y en X es $p_X(Y) = i_*(1) \in H^d(X, \mathbb{Z})$.

Fórmula de Proyección: $i_*(i^*(a) \cup b) = a \cup i_*(b)$; $a \in H^\bullet(X, \mathbb{Z})$, $b \in H^\bullet(Y, \mathbb{Z})$.

Demostración: Esta fórmula afirma que $i_*: H^\bullet(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H^\bullet(X, \mathbb{Z})$ es morfismo de $H^\bullet(X, \mathbb{Z})$ -módulos, donde la estructura de módulo en $H^\bullet(Y, \mathbb{Z})$ viene definida por el morfismo de anillos $i^*: H^\bullet(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^\bullet(Y, \mathbb{Z})$. Ahora bien, salvo el cambio de graduación, la imagen directa i_* se obtiene de los siguientes morfismos:

$$\mathbf{H}^\bullet(Y, \mathbb{Z}[-d]) \xleftarrow{i^*} \mathbf{H}^\bullet(X, \mathbb{Z}_Y[-d]) \xleftarrow{\simeq} \mathbf{H}^\bullet(X, \mathcal{Z}^\bullet) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{H}^\bullet(X, \Gamma_Y \mathcal{C}^\bullet) \rightarrow \mathbf{H}^\bullet(X, \mathcal{C}^\bullet)$$

donde todos son morfismos de módulos porque son compatibles con el producto cup.

Por último, el cambio de graduación $H^\bullet(Y, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{H}^\bullet(Y, \mathbb{Z}[-d])$ es un isomorfismo de módulos, cuando la estructura de módulo se considera por la izquierda, porque la diferencial total de un bicomplejo no se altera al cambiar el segundo grado. q.e.d.

1. Si $H^1(Y, \mathbb{F}_2) = 0$, todo haz localmente constante en Y de fibra \mathbb{Z} es trivial; luego Y es normalmente orientable cualquiera que sea el ambiente X y la codimensión d .
2. Si Y es conexa y $H_Y^d(X, \mathbb{Z}) \neq 0$, entonces $\mathbb{T}_{Y/X}|_Y$ tiene una sección que no se anula en ningún punto, y por tanto es trivial.

Por ejemplo, si una hipersuperficie conexa Y admite un entorno conexo U tal que $U - Y$ no es conexo, $H_Y^1(X, \mathbb{Z}) = H_Y^1(U, \mathbb{Z}) \neq 0$ por la sucesión exacta de cohomología local, e Y es normalmente orientable.

3. Todo haz de línea sobre el haz constante \mathbb{F}_2 es trivial, porque $\mathbb{F}_2^* = 1$.

Por tanto, si usamos cohomología con coeficientes en \mathbb{F}_2 , todas las subvariedades cerradas son normalmente orientables y admiten una única orientación normal, y la clase de cohomología siempre está bien definida.

4. Si Y es una subvariedad conexa y cerrada de \mathbb{R}^n de codimensión 1, el abierto complementario $U = \mathbb{R}^n - Y$ tiene exactamente dos componentes conexas:

$$0 \longrightarrow \mathbb{F}_2 = H^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}_2) \longrightarrow H^0(U, \mathbb{F}_2) \longrightarrow H^0(Y, \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2 \xrightarrow{i_*} H^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{F}_2) = 0$$

11.5.3. Teoría Topológica de la Intersección

En este apartado suponemos que todas las subvariedades están normalmente orientadas.

Sean Y_1, Y_2 subvariedades cerradas de una variedad topológica X de codimensiones d_1 y d_2 respectivamente. Si $Y = Y_1 \cap Y_2$ es una subvariedad de codimensión $d_1 + d_2$, en cada abierto $U \subseteq X$ tenemos un morfismo de grupos

$$\cup: H_{Y_1 \cap U}^{d_1}(U, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H_{Y_2 \cap U}^{d_2}(U, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{Y \cap U}^{d_1+d_2}(U, \mathbb{Z}),$$

de modo que el producto cup define un morfismo de haces

$$\cup: \mathbb{T}_{Y_1/X} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{T}_{Y_2/X} \longrightarrow \mathbb{T}_{Y/X}.$$

Fijadas orientaciones normales ξ_1, ξ_2, ξ de las subvariedades Y_1, Y_2, Y , en cada punto $y \in Y$

$$\xi_1 \cup \xi_2 = m\xi \in \mathbb{T}_{Y/X, y}$$

para cierto número entero m , llamado **multiplicidad de intersección** de Y_1 con Y_2 en y .

Es localmente constante, y cambia de signo si se cambia alguna orientación normal.

Teorema: Sean Y_1, Y_2 subvariedades cerradas normalmente orientadas, de codimensiones d_1, d_2 respectivamente. Si $Y_1 \cap Y_2$ es una subvariedad de codimensión $d_1 + d_2$ con un número finito de componentes conexas C_1, \dots, C_r y m_i es la multiplicidad de intersección de Y_1 con Y_2 a lo largo de C_i , entonces

$$p_X(Y_1) \cup p_X(Y_2) = m_1 p_X(C_1) + \dots + m_r p_X(C_r).$$

Demostración: Tenemos que $H_{Y_1 \cap Y_2}^{d_1+d_2}(X, \mathbb{Z}) = \bigoplus_j H_{C_j}^{d_1+d_2}(X, \mathbb{Z})$.

Fijadas orientaciones normales, tenemos que $\xi_{Y_1} \cup \xi_{Y_2} = \sum_j m_j \xi_{C_j}$, y el siguiente cuadrado conmutativo permite concluir,

$$\begin{array}{ccc} H_{Y_1}^{d_1}(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H_{Y_2}^{d_2}(X, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cup} & H_{Y_1 \cap Y_2}^{d_1+d_2}(X, \mathbb{Z}) = \bigoplus_j H_{C_j}^{d_1+d_2}(X, \mathbb{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{d_1}(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H^{d_2}(X, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cup} & H^{d_1+d_2}(X, \mathbb{Z}) \end{array}$$

Definición: Diremos que Y_1 e Y_2 se cortan **transversalmente** en un punto $y \in Y_1 \cap Y_2$ cuando existe un entorno abierto U de y en X y un homeomorfismo $\phi: U \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \times \mathbb{R}^m$ tal que $\phi(Y_1 \cap U) = 0 \times \mathbb{R}^{d_2} \times \mathbb{R}^m$ y $\phi(Y_2 \cap U) = \mathbb{R}^{d_1} \times 0 \times \mathbb{R}^m$.

Teorema: El morfismo $\mathbb{T}_{Y_1/X} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{T}_{Y_2/X} \rightarrow \mathbb{T}_{Y/X}$ que define el producto cup es un isomorfismo cuando Y_1, Y_2 se cortan transversalmente; es decir, la multiplicidad de intersección es ± 1 .

Demostración: Como la multiplicidad de intersección es un invariante topológico local, podemos suponer que $X = S_{d_1} \times S_{d_2} \times S_{d_3}$, $Y_1 = p_1 \times S_{d_2} \times S_{d_3}$, $Y_2 = S_{d_1} \times p_2 \times S_{d_3}$.

Por el teorema de Künneth tenemos un isomorfismo de anillos graduados

$$H^\bullet(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x_1]/(x_1^2) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[x_2]/(x_2^2) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[x_3]/(x_3^2)$$

donde $p_X(Y_1) = x_1 \otimes 1 \otimes 1$, $p_X(Y_2) = 1 \otimes x_2 \otimes 1$.

Ahora bien, $Y_1 \cap Y_2$ es una subvariedad conexas de codimensión $d_1 + d_2$ y

$$x_1 \otimes x_2 \otimes 1 = p_X(Y_1) \cup p_X(Y_2) = m \cdot p_X(Y_1 \cap Y_2)$$

no es divisible en $H^{d_1+d_2}(X, \mathbb{Z})$ por ningún número natural, salvo el 1.

Concluimos que la multiplicidad de intersección es $m = \pm 1$.

Corolario: El grupo $H^2(\mathbb{P}_{n, \mathbb{C}}, \mathbb{Z})$ está generado por la clase de cohomología x de cualquier hiperplano y tenemos un isomorfismo de anillos graduados

$$H^\bullet(\mathbb{P}_{n, \mathbb{C}}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x]/(x^{n+1}), \quad \text{gr } x = 2.$$

Demostración: \mathbb{P}_{n-1} es normalmente orientable en \mathbb{P}_n , porque $H_{\mathbb{P}_{n-1}}^2(\mathbb{P}_n, \mathbb{Z}) \neq 0$.

Ahora, por la sucesión exacta de Gysin tenemos isomorfismos

$$i_*: H^{p-2}(\mathbb{P}_{n-1}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^p(\mathbb{P}_n, \mathbb{Z}), \quad p \geq 1.$$

En particular $x = i_*(1)$ es un generador de $H^2(\mathbb{P}_n, \mathbb{Z})$. Además, por inducción sobre n , $i_*(y^{p-1})$ es un generador de $H^p(\mathbb{P}_n, \mathbb{Z})$, donde y denota un generador de $H^2(\mathbb{P}_{n-1}, \mathbb{Z})$.

La sucesión exacta del subespacio cerrado

$$H^2(\mathbb{P}_n, \mathbb{Z}) \xrightarrow{i^*} H^2(\mathbb{P}_{n-1}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} H^3(\mathbb{C}^n, \mathbb{Z}) = 0$$

muestra que $y = i^*(x)$, y por la fórmula de proyección $H^p(\mathbb{P}_n, \mathbb{Z})$ está generado por

$$i_*(y^{p-1}) = i_*((i^*x)^{p-1}) = i_*(1)x^{p-1} = x^p.$$

Corolario: *El grupo $H^1(\mathbb{P}_{n,\mathbb{R}}, \mathbb{F}_2)$ está generado por la clase de cohomología x de cualquier hiperplano, y tenemos un isomorfismo de anillos graduados*

$$H^\bullet(\mathbb{P}_{n,\mathbb{R}}, \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[x]/(x^{n+1}), \text{ gr } x = 1.$$

1. *La inclusión $i: \mathbb{P}_m \hookrightarrow \mathbb{P}_n$, $m < n$, no admite retracto continuo.*

El epimorfismo de anillos $i^*: A[x]/(x^n) \rightarrow A[x]/(x^m)$ no admite sección.

2. *Todo difeomorfismo $\phi: \mathbb{P}_{2n,\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{P}_{2n,\mathbb{C}}$ conserva la orientación.*

Al ser $\phi^*(x) = \pm x$, tenemos que $\phi^*(x^{2n}) = (\pm x)^{2n} = x^{2n}$.

3. $\mathbb{P}_{n,\mathbb{R}}$ *no se puede recubrir con n abiertos homeomorfos a espacios afines.*

Si un espacio topológico admite un recubrimiento $X = U_1 \cup \dots \cup U_n$ por abiertos $U_i \simeq \mathbb{R}^{m_i}$, y ponemos $Y_i = X - U_i$, los morfismos $H_{Y_i}^p(X, A) \rightarrow H^p(X, A)$ son epiyectivos para todo $p \geq 1$, y el siguiente cuadrado conmutativo muestra que en $H^\bullet(X, A)$ es nulo el producto de n elementos cualesquiera de grado positivo,

$$\begin{array}{ccc} H_{Y_1}^\bullet(X, A) \otimes \dots \otimes H_{Y_n}^\bullet(X, A) & \xrightarrow{\cup} & H_{Y_1 \cap \dots \cap Y_n}^\bullet(X, A) = 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^\bullet(X, A) \otimes \dots \otimes H^\bullet(X, A) & \xrightarrow{\cup} & H^\bullet(X, A) \end{array}$$

4. **Teorema de Borsuk-Ulam:** *Toda aplicación continua $\phi: S_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ identifica algún par de puntos antipodales.*

En caso contrario $\varphi: S_n \rightarrow S_{n-1}$ es continua y $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, donde

$$\varphi(x) = \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{\|\phi(x) - \phi(-x)\|}$$

Por tanto φ induce una aplicación continua $\bar{\varphi}: \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}_{n-1}$ que no trivializa al revestimiento $S_{n-1} \rightarrow \mathbb{P}_{n-1}$. Luego el morfismo de anillos

$$\bar{\varphi}^*: \mathbb{F}_2[x]/(x^n) = H^\bullet(\mathbb{P}_{n-1}, \mathbb{F}_2) \longrightarrow H^\bullet(\mathbb{P}_n, \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[x]/(x^{n+1})$$

verifica que $\bar{\varphi}^*(x) = x$, lo que es absurdo.

11.6. Teorema de Dualidad

Sea X un espacio σ -compacto en que $H_c^p(X, \mathcal{F}) = 0$ para todo $p > n$ y todo haz \mathcal{F} (por ejemplo una variedad topológica de dimensión n , p. 272), y consideremos la resolución Godement del haz constante definido por un dominio de ideales principales A , truncada en la etapa n -ésima:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow C^0 A \longrightarrow C^1 A \longrightarrow \dots \longrightarrow C^{n-1} A \longrightarrow C^n \longrightarrow 0$$

Como esta resolución $0 \rightarrow A \rightarrow C^\bullet$ escinde en fibra, para todo haz de A -módulos \mathcal{M} tenemos una resolución $0 \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \otimes_A C^\bullet$, que es Γ_c -acíclica porque los haces $\mathcal{M} \otimes_A C^i A$ son $C^0 \mathbb{Z}$ -módulos, y $H_c^p(X, \mathcal{M} \otimes_A C^n) = H_c^{p+n}(X, \mathcal{M}) = 0$ (p. 277).

Fijemos ahora una resolución inyectiva $0 \rightarrow A \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow 0$ del anillo A .

El funtor contravariante $F(\mathcal{M}) = \text{Hom}_A(\Gamma_c(X, \mathcal{M} \otimes_A \mathcal{C}^p, I^q)$ es exacto (el haz \mathcal{C}^p es plano, los haces $\mathcal{M} \otimes_A \mathcal{C}^p$ son Γ_c -acíclicos y el A -módulo I^q es inyectivo) y F transforma límites inductivos en límites proyectivos, porque Γ_c conserva límites inductivos (p. 272).

Por el teorema de representabilidad² existe un haz de A -módulos inyectivo $\mathcal{D}^{-p,q}$ tal que

$$\begin{aligned}\text{Hom}_A(\mathcal{M}, \mathcal{D}^{-p,q}) &= \text{Hom}_A(\Gamma_c(X, \mathcal{M} \otimes_A \mathcal{C}^p), I^q), \\ \text{Hom}_A^\bullet(\mathcal{M}, \mathcal{D}) &= \text{Hom}_A^\bullet(\Gamma_c(X, \mathcal{M} \otimes_A \mathcal{C}), I).\end{aligned}$$

(donde $\text{Hom}_A^{p,q}(K, L) = \text{Hom}_A(K^{-p}, L^q)$, con las diferenciales inducidas por las de K^\bullet y L^\bullet), y el **complejo dualizante** de X es el complejo \mathcal{D} asociado al bicomplejo inyectivo $\mathcal{D}^{\bullet\bullet}$.

Por el siguiente lema, tenemos sucesiones exactas

$$0 \rightarrow \text{Ext}_A^1(H_c^{p+1}(X, \mathcal{M}), A) \rightarrow \mathbf{Ext}_A^{-p}(\mathcal{M}, \mathcal{D}) \rightarrow \text{Hom}_A(H_c^p(X, \mathcal{M}), A) \rightarrow 0$$

Lema: Para todo complejo de A -módulos K^\bullet tenemos sucesiones exactas

$$0 \rightarrow \text{Ext}_A^1(H^{p+1}(K^\bullet), A) \rightarrow H^{-p}[\text{Hom}_A^\bullet(K, I)] \rightarrow \text{Hom}_A(H^p(K^\bullet), A) \rightarrow 0$$

Demostración: $\text{Hom}_A(H^p(K^\bullet), A)$ y $\text{Ext}_A^1(H^p(K^\bullet), A)$ son el núcleo y el conúcleo de

$$\varphi_p: \text{Hom}_A(H^p(K^\bullet), I^0) \rightarrow \text{Hom}_A(H^p(K^\bullet), I^1)$$

Por otra parte, tenemos una sucesión exacta de complejos

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A^\bullet(K, I^1[-1]) \rightarrow \text{Hom}_A^\bullet(K, I) \rightarrow \text{Hom}_A^\bullet(K, I^0) \rightarrow 0$$

y los morfismos de conexión δ_{-p} de la sucesión exacta larga de cohomología

$$\dots \xrightarrow{\delta_{-(p+1)}} H^{-p}[\text{Hom}_A^\bullet(K, I^1[-1])] \rightarrow H^{-p}[\text{Hom}_A^\bullet(K, I)] \rightarrow H^{-p}[\text{Hom}_A^\bullet(K, I^0)] \xrightarrow{\delta_{-p}} \dots$$

coinciden con los morfismos φ_p ; es decir el siguiente cuadrado es conmutativo,

$$\begin{array}{ccc} H^{-p}[\text{Hom}_A^\bullet(K, I^0)] & \xrightarrow{\delta_{-p}} & H^{-p+1}[\text{Hom}_A^\bullet(K, I^1[-1])] \\ \parallel & & \parallel \\ \text{Hom}_A(H^p(K^\bullet), I^0) & \xrightarrow{\varphi_p} & \text{Hom}_A(H^p(K^\bullet), I^1) \end{array}$$

Teorema de Dualidad: Si X es una variedad topológica de dimensión n , los haces de cohomología $\mathcal{H}^{-p}\mathcal{D}$ son nulos, salvo $\mathbb{T}_X^A = \mathcal{H}^{-n}\mathcal{D}$, que es un haz localmente constante de fibra A , y para todo haz de A -módulos \mathcal{M} tenemos sucesiones exactas

$$0 \rightarrow \text{Ext}_A^1(H_c^{p+1}(X, \mathcal{M}), A) \rightarrow \text{Ext}_A^{n-p}(\mathcal{M}, \mathbb{T}_X^A) \rightarrow \text{Hom}_A(H_c^p(X, \mathcal{M}), A) \rightarrow 0$$

Demostración: Si U es un abierto de X , cuando $\mathcal{M} = A_U$ tenemos sucesiones exactas

$$0 \rightarrow \text{Ext}_A^1(H_c^{p+1}(U, A), A) \rightarrow H^{-p}[\mathcal{D}(U)] \rightarrow \text{Hom}_A(H_c^p(U, A), A) \rightarrow 0$$

Si U es homeomorfo a \mathbb{R}^n , tenemos que $H_c^n(U, A) \simeq A$ y $H_c^p(X, A) = 0$ cuando $p \neq n$.

Luego $H^{-p}[\mathcal{D}(U)] = 0$ cuando $p \neq n$, y por tanto $\mathcal{H}^{-p}(\mathcal{D}) = 0$, y $H^{-n}[\mathcal{D}(U)] \simeq A$.

²En el caso de un funtor contravariante F sobre la categoría de \mathcal{O} -módulos, como $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_U, \mathcal{M}) = \mathcal{M}(U)$, dado un submódulo estricto $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$, tenemos algún morfismo $\mathcal{O}_U \rightarrow \mathcal{M}$ que no factoriza a través de \mathcal{N} , y vemos que cada pareja mínima Q_ξ está determinada por el conjunto de los elementos $\eta \in F(\mathcal{O}_U)$ que admitan un morfismo de parejas $(\mathcal{O}_U)_\eta \rightarrow Q_\xi$ (p. 73).

El haz $\mathcal{H}^{-n}\mathcal{D}$ es localmente constante porque cuando $X = \mathbb{R}^n$ y U es una bola abierta, el morfismo natural $H_c^n(U, A) \rightarrow H_c^n(X, A)$ es isomorfismo, al ser $H_c^n(X - U, A) = 0$.

Ahora, como el complejo dualizante \mathcal{D} no tiene términos de grado menor que $-n$, tenemos una sucesión es exacta:

$$0 \longrightarrow \mathbb{T}_X^A \longrightarrow \mathcal{D}^{-n} \longrightarrow \mathcal{D}^{-n+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{D}^1 \longrightarrow 0$$

que es una resolución inyectiva de \mathbb{T}_X^A ; luego $\mathbf{Ext}_A^{-p}(\mathcal{M}, \mathcal{D}) = \text{Ext}_A^{n-p}(\mathcal{M}, \mathbb{T}_X^A)$.

Corolario: $\mathbb{T}_X^A(U) = \text{Hom}_A(H_c^n(U, A), A)$, y por tanto $\mathbb{T}_U^A = \mathbb{T}_X^A|_U$.

Corolario: $0 \longrightarrow \text{Ext}_A^1(H_c^{p+1}(X, A), A) \longrightarrow H^{n-p}(X, \mathbb{T}_X^A) \longrightarrow \text{Hom}_A(H_c^p(X, A), A) \longrightarrow 0$

Corolario: $H^{n-p}(X, \mathbb{F}_2) = H_c^p(X, \mathbb{F}_2)^*$.

Demostración: Cuando $A = \mathbb{F}_2$, todo haz localmente constante es trivial, $\mathbb{T}_X^{\mathbb{F}_2} = \mathbb{F}_2$.

Definición: El **haz de orientación** de una variedad X es $\mathbb{T}_X = \mathbb{T}_X^{\mathbb{Z}}$, y diremos que X es **orientable** si es trivial $\mathbb{Z} \simeq \mathbb{T}_X$. Las **orientaciones** de X en un punto x son los dos generadores de la fibra $\mathbb{T}_{X,x}$, y las orientaciones de X son las secciones globales de \mathbb{T}_X que generen la fibra en todo punto (los isomorfismos $\mathbb{Z} \simeq \mathbb{T}_X$).

Si X es conexa de dimensión n , la condición de ser orientable equivale a que

$$0 \neq \Gamma(X, \mathbb{T}_X) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_c^n(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$$

y en una variedad orientable X de dimensión n tenemos sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_c^{p+1}(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{n-p}(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_c^p(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

Proposición: $\mathbb{T}_X^A = \mathbb{T}_X \otimes_{\mathbb{Z}} A$. Por tanto, $\mathbb{T}_X^A \simeq A$ cuando X es orientable.

Demostración: El morfismo natural $H_c^n(U, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} A \rightarrow H_c^n(U, A)$ es isomorfismo en virtud del teorema de los coeficientes universales. Tenemos así un morfismo

$$\mathbb{T}_X(U) \otimes_{\mathbb{Z}} A = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_c^n(U, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} A \longrightarrow \text{Hom}_A(H_c^n(U, A), A) = \mathbb{T}_X^A(U)$$

que es isomorfismo cuando $U \simeq \mathbb{R}^n$, e induce un isomorfismo de haces $\mathbb{T}_X \otimes_{\mathbb{Z}} A = \mathbb{T}_X^A$.

Corolario: Si X es una variedad orientable de dimensión n y k es un cuerpo,

$$H^{n-p}(X, k) = H_c^p(X, k)^*.$$

Corolario: Si $\text{car } k \neq 2$, una variedad X es orientable si y sólo si $k \simeq \mathbb{T}_X^k$.

Demostración: El haz Δ_X de orientaciones de X define un revestimiento $\Delta_X \rightarrow X$ de grado 2, el **revestimiento de orientación**, que es trivial precisamente cuando X es orientable.

Por otra parte, cuando $\text{car } k \neq 2$, el morfismo natural $\Delta_X^{et} \hookrightarrow \mathbb{T}_X^{et} \rightarrow (\mathbb{T}_X^k)^{et}$ es inyectivo, y si $(\mathbb{T}_X^k)^{et} \rightarrow X$ es un revestimiento trivial, también lo es Δ_X^{et} , y X es orientable.

Corolario: Una variedad diferenciable X es topológicamente orientable si sólo si admite una forma de volumen

Demostración: Consideremos el haz de conjuntos de las orientaciones diferenciables,

$$\Delta_X^{dif}(U) = \left[\begin{array}{c} \text{orientaciones} \\ \text{diferenciables de } U \end{array} \right].$$

Cada orientación diferenciable de U permite integrar n -formas con soporte compacto y, por el teorema de Stokes, para toda $(n - 1)$ -forma con soporte compacto ω_{n-1}

$$\int_U d\omega_{n-1} = \int_{\partial U} \omega_{n-1} = \int_{\emptyset} \omega_{n-1} = 0.$$

Así, cada orientación diferenciable de U define una forma lineal $\int_U: H_c^n(U, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ no nula, y obtenemos un morfismo inyectivo de haces $\Delta_X^{dif} \hookrightarrow \mathbb{T}_X^{\mathbb{R}}$.

Ahora, si X admite una orientación diferenciable, $\mathbb{T}_X^{\mathbb{R}}$ tiene una sección global que no se anula en ningún punto; luego $\mathbb{R} \simeq \mathbb{T}_X^{\mathbb{R}}$, y X es topológicamente orientable.

Recíprocamente, si $(\mathbb{T}_X^{\mathbb{R}})^{et} \rightarrow X$ es un revestimiento trivial, también lo es $(\Delta_X^{dif})^{et} \rightarrow X$, y X admite una orientación diferenciable. q.e.d.

1. Si X es una variedad compacta y orientable de dimensión n impar, $\chi(X) = 0$.
 $\chi(X) = \sum_p (-1)^p \dim H^p(X, \mathbb{Q}) = - \sum_p (-1)^{n-p} \dim H^{n-p}(X, \mathbb{Q}) = -\chi(X)$.
2. Si X es una variedad conexa de dimensión n y $H_c^n(X, \mathbb{Q}) \neq 0$, entonces $\mathbb{T}_X^{\mathbb{Q}}$ tiene una sección no nula y X es orientable, y por tanto $H_c^n(X, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}$.
3. Toda subvariedad cerrada Y de \mathbb{R}^n de codimensión 1 es orientable. En particular, el plano proyectivo real no es una subvariedad cerrada de \mathbb{R}^3 .

Podemos suponer que Y es conexa, en cuyo caso (p. 291) $U = \mathbb{R}^n - Y$ tiene dos componentes conexas (obviamente orientables) y la sucesión exacta del subespacio cerrado permite concluir,

$$0 \longrightarrow H_c^{n-1}(Y, \mathbb{Q}) \longrightarrow H_c^n(U, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^2 \longrightarrow H_c^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \longrightarrow 0$$

11.6.1. Teoría del Grado

Teorema: $H_c^n(X, \mathbb{T}_X) = \mathbb{Z}$, cuando X es una variedad de dimensión n conexa.

Demostración: Si k es cuerpo, por dualidad y el teorema de los coeficientes universales,

$$k = \text{Hom}_k(\mathbb{T}_X^k, \mathbb{T}_X^k) = H_c^n(X, \mathbb{T}_X \otimes_{\mathbb{Z}} k)^* = (H_c^n(X, \mathbb{T}_X) \otimes_{\mathbb{Z}} k)^*;$$

luego $H_c^n(X, \mathbb{T}_X) \otimes_{\mathbb{Z}} k = k$ y, si $H_c^n(X, \mathbb{T}_X)$ es finito generado, $\mathbb{Z} = H_c^n(X, \mathbb{T}_X)$.

Por otra parte, si un abierto conexo es unión $U = V_1 \cup \dots \cup V_r$ de un número finito de abiertos $V_i \simeq \mathbb{R}^n$, la sucesión exacta de Mayer-Vietoris

$$H_c^n(V_1, \mathbb{T}_X) \oplus H_c^n(V_2 \cup \dots \cup V_r, \mathbb{T}_X) \longrightarrow H_c^n(U, \mathbb{T}_X) \longrightarrow H_c^{n+1}(V_1 \cap (V_2 \cup \dots \cup V_r), \mathbb{T}_X) = 0$$

muestra, por inducción sobre r , que $H_c^n(U, \mathbb{T}_X)$ es finito generado, y $\mathbb{Z} = H_c^n(U, \mathbb{T}_X)$.

Estos abiertos U recubren X , y tenemos que (p. 272)

$$H_c^n(X, \mathbb{T}_X) = H_c^n(X, \varinjlim (\mathbb{T}_X)_U) = \varinjlim H_c^n(U, \mathbb{T}_X) = \mathbb{Z}$$

porque los morfismos de transición $\mathbb{Z} = H_c^n(U, \mathbb{T}_X) \rightarrow H_c^n(U', \mathbb{T}_X) = \mathbb{Z}$ son isomorfismos, al serlo sus duales (U y U' son conexos):

$$\Gamma(U', \mathbb{Z}) = \text{Hom}(H_c^n(U', \mathbb{T}_X), \mathbb{Z}) \longrightarrow \text{Hom}(H_c^n(U, \mathbb{T}_X), \mathbb{Z}) = \Gamma(U, \mathbb{Z})$$

Lema: Si $\pi: Y \rightarrow X$ es un revestimiento, $\mathbb{T}_Y = \pi^*\mathbb{T}_X$.

Demostración: Si $U \subset Y$ es un abierto tal que $\pi: U \rightarrow \pi(U)$ es homeomorfismo, tenemos un isomorfismo natural $\varphi_U: (\pi^*\mathbb{T}_X)|_U \rightarrow (\mathbb{T}_Y)|_U$, y $\varphi_V = (\varphi_U)|_V$ cuando V es un abierto de U ; luego definen un isomorfismo $\pi^*\mathbb{T}_X \rightarrow \mathbb{T}_Y$.

Teorema: Si X es una variedad conexa de dimensión n ,

$$H_c^n(X, \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } X \text{ es orientable} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } X \text{ no es orientable} \end{cases}$$

Demostración: Si X es orientable, $H_c^n(X, \mathbb{Z}) \simeq H_c^n(X, \mathbb{T}_X) = \mathbb{Z}$.

Si X no es orientable, consideramos el revestimiento de orientación $\pi: Y \rightarrow X$.

Como $\mathbb{T}_Y = \pi^*\mathbb{T}_X$ tiene una sección canónica que no se anula en ningún punto, Y es orientable. Además tenemos un epimorfismo $\text{tr}: \pi_*\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $\text{tr}(f)(x) = f(x_1) + f(x_2)$, donde $\pi^{-1}(x) = \{x_1, x_2\}$, y la sucesión exacta larga de cohomología asociada

$$H_c^n(Y, \mathbb{Z}) = H_c^n(X, \pi_*\mathbb{Z}) \longrightarrow H_c^n(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_c^{n+1}(X, \text{Ker tr}) = 0$$

muestra que $H_c^n(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, donde $m > 0$ porque X no es orientable.

Por otra parte, la composición $\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi^*} \pi_*\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{tr}} \mathbb{Z}$ es la multiplicación por 2; luego también lo es la composición

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = H_c^n(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi^*} H_c^n(X, \pi_*\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{tr}} H_c^n(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

y vemos que $m = 1$ ó 2 . El caso $m = 1$ es imposible porque la fórmula de los coeficientes universales daría $H_c^n(X, \mathbb{F}_2) = 0$, y por dualidad $H_c^n(X, \mathbb{F}_2)^* = H^0(X, \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2$.

Corolario: Si X es una variedad diferenciable conexa y orientada de dimensión n , la integración de n -formas induce un isomorfismo

$$\int_X : H_c^n(X, \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}.$$

Demostración: La aplicación lineal $\int_X: \mathbb{R} = H_c^n(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ no es nula, como puede verse integrando formas de soporte compacto contenido en un abierto coordenado.

Definición: Si X es una variedad conexa y orientable de dimensión n , cada orientación define un isomorfismo $\mathbb{Z} = H_c^n(X, \mathbb{Z})$, y por tanto un generador ε_X de este grupo.

Si $\pi: Y \rightarrow X$ es un morfismo propio entre dos variedades conexas y orientadas de dimensión n , induce un morfismo

$$\pi^*: \mathbb{Z}\varepsilon_X = H_c^n(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_c^n(Y, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\varepsilon_Y$$

y el **grado** de π es el único número entero $\text{gr } \pi$ tal que $\pi^*(\varepsilon_X) = (\text{gr } \pi)\varepsilon_Y$.

Teorema: Si X es una variedad conexa y orientable de dimensión n , el morfismo

$$H_p^n(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_c^n(X, \mathbb{Z})$$

es isomorfismo, y cada orientación $\varepsilon_X \in H_c^n(X, \mathbb{Z})$ de X define una orientación normal $\varepsilon_p \in H_p^n(X, \mathbb{Z})$ en cada punto p .

Demostración: Si U es un entorno abierto conexo de p , el morfismo $H_c^n(U, \mathbb{Z}) \rightarrow H_c^n(X, \mathbb{Z})$ es un isomorfismo, porque lo es su morfismo traspuesto, y $H_p^n(X, \mathbb{Z}) = H_p^n(U, \mathbb{Z})$; así que basta probar el teorema en cualquier variedad orientable de dimensión n .

Cuando $X = S_n$, el teorema se sigue de la sucesión exacta de cohomología local,

$$H_p^n(S_n, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^n(S_n, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{Z}) = 0$$

Definición: Sea $\pi: Y \rightarrow X$ una aplicación continua entre dos variedades de dimensión n . Si $p = \pi(q)$, tenemos un morfismo

$$\pi^*: \mathbb{Z}\varepsilon_p = H_p^n(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_q^n(Y, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\varepsilon_q$$

y el **grado** de π en q es el número entero $\text{gr}_q \pi$ tal que $\pi^*(\varepsilon_p) = (\text{gr}_q \pi)\varepsilon_q$.

Teorema: Sea $\pi: Y \rightarrow X$ un morfismo propio entre variedades conexas y orientadas de dimensión n . Si la fibra de $p \in X$ es finita, $\pi^{-1}(p) = \{q_1, \dots, q_r\}$, entonces

$$\text{gr } \pi = \text{gr}_{q_1} \pi + \dots + \text{gr}_{q_r} \pi$$

Demostración: Es consecuencia directa del siguiente cuadrado conmutativo,

$$\begin{array}{ccc} H_p^n(X, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\pi^*} & H_{\pi^{-1}p}^n(Y, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\varepsilon_{q_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\varepsilon_{q_r} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_c^n(X, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\pi^*} & H_c^n(Y, \mathbb{Z}) \end{array}$$

porque $\pi^*\varepsilon_X = (\text{gr } \pi)\varepsilon_Y$, $\pi^*\varepsilon_p = ((\text{gr}_{q_1} \pi)\varepsilon_{q_1}, \dots, (\text{gr}_{q_r} \pi)\varepsilon_{q_r})$ y los morfismos verticales transforman ε_p en ε_X , y ε_{q_i} en ε_Y , de acuerdo con el teorema anterior.

Corolario: Si el grado de π no es nulo, entonces π es epiyectivo.

Teorema: Sea $\pi: Y \rightarrow X$ una aplicación continua entre variedades de dimensión n . Si π es homeomorfismo local en $q \in Y$, entonces $\text{gr}_q \pi = \pm 1$.

Demostración: Por escisión la definición de $\text{gr}_q \pi$ es local en X y en Y , así que podemos suponer que π es un homeomorfismo, caso en que el teorema es obvio. q.e.d.

1. Todo polinomio no constante define un morfismo propio $P(z): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, de grado no nulo porque conserva la orientación en todo punto donde $P'(z) \neq 0$; luego es epiyectivo, y $P(z)$ ha de tener alguna raíz compleja, lo que vuelve a demostrar el teorema de D'Alembert.
2. Sea D un campo tangente a \mathbb{R}^n . Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es una variedad con borde compacta y D no se anula en el borde, podemos considerar el grado del morfismo propio $\phi: \partial\Omega \rightarrow S_{n-1}$, $\phi(p) = D_p/|D_p|$. Este grado es nulo cuando D no se anula en Ω , porque ϕ puede extenderse a un entorno de Ω y

$$\int_{\partial\Omega} \phi^* \omega_{n-1} = \int_{\Omega} d(\phi^* \omega_{n-1}) = \int_{\Omega} \phi^*(d\omega_{n-1}) = \int_{\Omega} \phi^* 0 = 0.$$

Por tanto, cuando Ω es una pequeña bola centrada en una singularidad aislada, $D_p = 0$, el grado no depende de la bola y se llama **índice** del campo D en p .

En general, si todas las singularidades del campo son aisladas, tomando pequeñas bolas abiertas B_i alrededor de las singularidad p_1, \dots, p_r contenidas en Ω , tendremos que D no se anula en la variedad con borde $\Omega - (B_1 \cup \dots \cup B_r)$, de modo que el grado de ϕ coincide con la suma de los índices del campo en las singularidades contenidas en Ω .

3. Si $\pi: S_n \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, es una aplicación continua, no existe ningún abierto no vacío $U \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ tal que π defina un homeomorfismo de $\pi^{-1}(U)$ con U .

En efecto, en caso contrario

$$\pi^*: H_p^n(\mathbb{P}_n, \mathbb{F}_2) = H_p^n(U, \mathbb{F}_2) \longrightarrow H_p^n(\pi^{-1}(U), \mathbb{F}_2) = H_p^n(S_n, \mathbb{F}_2)$$

sería un isomorfismo, y $\pi^*: H^n(\mathbb{P}_n, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^n(S_n, \mathbb{F}_2)$ también lo sería (ambos grupos están generados por la clase de cohomología de un punto) lo que es absurdo: $\pi^*(x^n) = (\pi^*x)^n = 0$, ya que $\pi^*x \in H^1(S_n, \mathbb{F}_2) = 0$.

11.6.2. Teorema de Lefschetz

Los isomorfismos $\text{Hom}_A(\mathcal{M}, \mathcal{D}^{-p,q}) = \text{Hom}_A(\Gamma_c(X, \mathcal{M} \otimes_A \mathcal{C}^p), I^q)$ de dualidad vienen dados por morfismos $\Gamma_c(X, \mathcal{D}^{-p,q} \otimes_A \mathcal{C}^p) \rightarrow I^q$ que definen un morfismo de complejos

$$\xi: \Gamma_c(X, \mathcal{D} \otimes_A \mathcal{C}) \longrightarrow I.$$

En el caso de una variedad de dimensión constante n , el morfismo

$$\xi: H_c^n(X, \mathbb{T}_X^A) = \mathbf{H}_c^0(X, \mathcal{D}) \longrightarrow A$$

es epiyectivo (y por tanto isomorfismo) porque en caso contrario no existiría ningún morfismo $H_c^n(X, \mathcal{M}) \rightarrow A$ epiyectivo, y existen cuando $\mathcal{M} = \mathbb{T}_X^A$.

El isomorfismo $\text{Hom}_A^\bullet(\mathcal{M}, \mathcal{D}) = \text{Hom}_A^\bullet(\Gamma_c(X, \mathcal{M} \otimes_A \mathcal{C}), I)$ proviene del acoplamiento

$$\Gamma(\underline{\text{Hom}}^\bullet(\mathcal{M}, \mathcal{D})) \otimes \Gamma_c(\mathcal{M} \otimes \mathcal{C}^\bullet) \xrightarrow{\otimes} \Gamma_c(\underline{\text{Hom}}^\bullet(\mathcal{M}, \mathcal{D}) \otimes (\mathcal{M} \otimes \mathcal{C}^\bullet)) \xrightarrow{\lambda} \Gamma_c(\mathcal{D} \otimes \mathcal{C}^\bullet) \xrightarrow{\xi} I$$

donde λ es el morfismo obvio.

Cuando $\mathcal{M} = A$, tenemos que $\underline{\text{Hom}}^\bullet(\mathcal{M}, \mathcal{D}) = \mathcal{D}$ es una resolución inyectiva de \mathbb{T}_X^A , que $\mathcal{M} \otimes \mathcal{C}^\bullet = \mathcal{C}^\bullet$ es una resolución Γ_c -acíclica de A , y que $\underline{\text{Hom}}^\bullet(\mathcal{M}, \mathcal{D}) \otimes (\mathcal{M} \otimes \mathcal{C}^\bullet)$ es una resolución Γ_c -acíclica de $\mathbb{T}_X^A \otimes A$. Luego los epimorfismos $H^{n-p}(X, \mathbb{T}_X^A) \rightarrow \text{Hom}_A(H_c^p(X, A), A)$ del Teorema de Dualidad vienen dados por los acoplamientos

$$H^{n-p}(X, \mathbb{T}_X^A) \otimes_A H_c^p(X, A) \xrightarrow{\cup} H_c^n(X, \mathbb{T}_X^A \otimes_A A) \xrightarrow{\lambda} H_c^n(X, \mathbb{T}_X^A) \xrightarrow{\xi} A$$

Cuando X es una variedad compacta orientada y $A = k$ es un cuerpo, el producto cup define una métrica que identifica $H^\bullet(X) = H^\bullet(X, k)$ con su dual $H^\bullet(X)^*$,

$$\langle c', c \rangle = \xi(c' \cup c).$$

Por el teorema de Künneth $H^\bullet(X \times X) = H^\bullet(X) \otimes H^\bullet(X)$, así que cada orientación ε_X de X define una orientación $\varepsilon_X \otimes \varepsilon_X$ de $X \times X$, y fijamos la orientación normal de la diagonal $\Delta: X \rightarrow X \times X$ para que Δ_* conserve tales orientaciones, de modo que $\langle \Delta^*a, b \rangle = \langle a, \Delta_*b \rangle$ según la fórmula de proyección.

Teorema: La clase de cohomología de la diagonal define la métrica del producto cup

$$\langle a \otimes b, p_{X \times X}(\Delta) \rangle = \langle a, b \rangle.$$

Demostración: $\langle a \otimes b, p_{X \times X}(\Delta) \rangle = \langle a \otimes b, \Delta_*(1) \rangle = \langle \Delta^*(a \otimes b), 1 \rangle = \langle a \cup b, 1 \rangle = \langle a, b \rangle$.

Corolario: Fijada una base (a_i) de $H^\bullet(X)$, si (b_i) es la base dual, $\langle a_i, b_j \rangle = \delta_{ij}$,

$$p_{X \times X}(\Delta) = \sum_i (-1)^{\text{gr } a_i} a_i \otimes b_i.$$

Demostración: $\langle b_j \otimes a_i, \sum_i (-1)^{\text{gr } a_i} a_i \otimes b_i \rangle = (-1)^{\text{gr } a_i} \delta_{ij} \langle b_i \otimes a_i, a_i \otimes b_i \rangle = \delta_{ij} \langle b_i, a_i \rangle \langle a_i, b_i \rangle =$
 $= (-1)^{(\text{gr } a_i)(\text{gr } b_i)} \delta_{ij} = \langle b_j, a_i \rangle = \langle b_j \otimes a_i, p_{X \times X}(\Delta) \rangle.$

Definición: Si X es una variedad compacta y orientada, el **número de Lefschetz** de una aplicación continua $f: X \rightarrow X$ es el número global de intersección de la diagonal con la gráfica $\Gamma_f = f \times 1: X \rightarrow X \times X$ de f ,

$$\Lambda_f = \langle p_{X \times X}(\Delta), p_{X \times X}(\Gamma_f) \rangle.$$

Fórmula de Lefschetz: $\Lambda_f = \sum_{p=0}^n (-1)^p \text{tr } f_p^*$, $f_p^*: H^p(X) \rightarrow H^p(X)$.

Demostración: $\Lambda_f = \langle p_{X \times X}(\Delta), (f \times 1)_* 1 \rangle = \langle (1 \times f)^* p_{X \times X}(\Delta), 1 \rangle =$
 $= \langle (1 \times f)^* \sum_i (-1)^{\text{gr } a_i} a_i \otimes b_i, 1 \rangle = \sum_i (-1)^{\text{gr } a_i} \langle f^* a_i, b_i \rangle = \sum_p (-1)^p \text{tr } f_p^*.$

Corolario: La auto-intersección de la diagonal es la característica de Euler-Poincaré,

$$\Delta^* [p_{X \times X}(\Delta)] = \chi(X) \cdot \varepsilon_X.$$

1. Si X es una variedad compacta y orientable de dimensión n par, y no múltiplo de 4, entonces $\chi(X)$ es par.

Sea $n = 4d + 2$. Como $(-1)^p \dim H^p(X, \mathbb{Q}) = (-1)^{n-p} \dim H^{n-p}(X, \mathbb{Q})$, basta ver que la dimensión de $H^{2d+1}(X, \mathbb{Q})$ es par, lo que se debe a que el producto cup define una métrica hemisimétrica no singular $\cup: H^{2d+1}(X, \mathbb{Q}) \times H^{2d+1}(X, \mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q}$.

2. Si una variedad diferenciable compacta y orientable X admite un campo continuo de vectores tangentes que no se anula en ningún punto, entonces $\chi(X) = 0$.

Si el fibrado tangente $\pi: TX \rightarrow X$ admite una sección continua s sin ceros, tendremos

$$0 = s^*(p_{TX}(s_0 X)) = s_0^*[p_{TX}(s_0 X)].$$

Ahora bien, como X admite una métrica riemanniana (p. 192) y TX es el fibrado normal a la inmersión diagonal $\Delta: X \rightarrow X \times X$, por el lema del entorno tubular

$$s_0^*[p_{TX}(s_0 X)] = \Delta^*[p_{X \times X}(\Delta)] = \chi(X) \cdot \varepsilon_X.$$

3. Si τ es una homografía de la recta proyectiva compleja, su grado es 1 porque conserva la orientación; luego $\Lambda_\tau = 2$. Cuando es parabólica, la multiplicidad topológica de intersección (de la diagonal y la gráfica) en el único punto fijo es 2.
4. Toda aplicación continua $f: S_{2n} \rightarrow S_{2n}$ de grado $\neq -1$ tiene número de Lefschetz $\Lambda_f \neq 0$, y f tiene puntos fijos. Igualmente, toda aplicación continua $S_{2n+1} \rightarrow S_{2n+1}$ de grado $\neq 1$ tiene algún punto fijo.
5. Si $X = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, cada matriz 2×2 con coeficientes enteros A induce una aplicación continua $f: X \rightarrow X$. Su acción sobre $H^1(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^2$ es la que define A , y sobre $H^2(X, \mathbb{R})$ es la homotecia de razón $|A|$. Luego $\Lambda_f = 1 - \text{tr } A + |A|$.
6. Si f es un endomorfismo analítico de un toro complejo $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta)$, su levantamiento al revestimiento universal es un endomorfismo $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que deja fijo el origen; luego es el producto por un número complejo $a + bi$, así que el grado de f es $d = a^2 + b^2$, y $\Lambda_f = 1 - 2a + a^2 + b^2$. Vemos así que $|\Lambda_f - d - 1| \leq 2\sqrt{d}$.

11.7. Clases Características

Si $E \rightarrow X$ es un fibrado vectorial real o complejo ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C}) el conjunto de los subespacios vectoriales de dimensión 1 de las fibras E_x , dotado de la topología cociente, se denota $\mathbb{P}(E)$, y está dotado de una proyección $\pi: \mathbb{P}(E) \rightarrow X$.

El fibrado vectorial $\pi^*E = E \times_X \mathbb{P}(E)$ tiene un subfibrado de línea canónico o **tautológico** $\xi_E \hookrightarrow \pi^*E$, que consiste en poner sobre cada punto $p \in \mathbb{P}(E)$ los vectores del correspondiente subespacio vectorial de dimensión 1 de E_x , donde $x = \pi(p)$.

El fibrado de línea tautológico del espacio proyectivo \mathbb{P}_d se denota ξ_d .

Lema: Si L es un fibrado de línea sobre un espacio compacto y separado X , existe alguna aplicación continua $f: X \rightarrow \mathbb{P}_d$ tal que $L = f^*\xi_d$.

Demostración: Si vemos que el fibrado dual L^* está generado por un número finito de secciones globales $\{s_0, s_1, \dots, s_d\}$, tendremos un epimorfismo

$$X \times \mathbb{K}^{d+1} \longrightarrow L^*, (x, \lambda_0, \dots, \lambda_d) \mapsto \lambda_0 s_0(x) + \dots + \lambda_d s_d(x),$$

y la inyección $L \rightarrow X \times \mathbb{K}^{d+1}$ define una aplicación continua $f: X \rightarrow \mathbb{P}_d$, y $L = f^*\xi_d$.

Ahora bien, como X es completamente regular, para cada punto de X existe alguna sección global que genera la fibra en un entorno, y por compacidad se concluye que un número finito de secciones globales generan la fibra en todos los puntos.

Corolario: La clase de obstrucción $\delta(\xi_d)$ del fibrado tautológico es un generador del grupo $H^2(\mathbb{P}_d, \mathbb{Z})$ en el caso complejo, y de $H^1(\mathbb{P}_d, \mathbb{F}_2)$ en el caso real.

Demostración: Sea $i: \mathbb{P}_{d-1} \rightarrow \mathbb{P}_d$ un hiperplano. En el caso complejo, la sucesión exacta del subespacio cerrado muestra que $i^*: H^2(\mathbb{P}_d, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\mathbb{P}_{d-1}, \mathbb{Z})$ es un isomorfismo.

Como $i^*(\delta(\xi_d)) = \delta(i^*\xi_d) = \delta(\xi_{d-1})$, el índice m del subgrupo generado por $\delta(\xi_d)$ en $H^2(\mathbb{P}_d, \mathbb{Z})$ no depende de la dimensión d .

El lema anterior muestra que todo fibrado de línea sobre \mathbb{P}_1 es potencia m -ésima de otro fibrado de línea, lo que es falso si $m \neq 1$ porque $H^2(\mathbb{P}_1, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$.

El argumento también es válido en el caso real.

q.e.d.

En el caso complejo consideraremos siempre cohomología con coeficientes en \mathbb{Z} , y en el caso real con coeficientes en \mathbb{F}_2 , y fijaremos las orientaciones para que la clase de obstrucción $\delta(\xi_d)$ sea la clase de cohomología de un hiperplano.

Teorema de Hirsch-Leray: Sea E un fibrado vectorial de rango r sobre un espacio σ -compacto X . Si $x_E = \delta(\xi_E)$ es la clase de obstrucción del fibrado tautológico de $\mathbb{P}(E)$, entonces $H^\bullet(\mathbb{P}(E))$ es un $H^\bullet(X)$ -módulo libre de base $\{1, x_E, x_E^2, \dots, x_E^{r-1}\}$.

Demostración: Sea $\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{C}^\bullet$ la resolución Godement del haz constante \mathbb{Z} en $\mathbb{P}(E)$.

Cada clase de cohomología x_E^j , $0 \leq j \leq r-1$, está representada por una sección global de \mathcal{C}^{2j} , y estas secciones definen un morfismo de complejos

$$\bigoplus_j \mathbb{Z}[-2j] \longrightarrow \pi_* \mathcal{C}^\bullet$$

que es un casi-isomorfismo por el cálculo de la Cohomología de la Fibra y de los espacios proyectivos complejos (p. 292).

Ahora bien, como $\pi_*\mathcal{C}^\bullet$ es un complejo de haces flascos, tenemos un isomorfismo de grupos

$$\bigoplus_j H^\bullet(X, \mathbb{Z})[-2j] = H^\bullet[\Gamma(X, \pi_*\mathcal{C}^\bullet)] = H^\bullet[\Gamma(\mathbb{P}(E), \mathcal{C}^\bullet)] = H^\bullet(\mathbb{P}(E), \mathbb{Z})$$

que transforma (a_0, \dots, a_{r-1}) en $\pi^*(a_0) + \pi^*(a_1)x_E + \dots + \pi^*(a_{r-1})x_E^{r-1}$.

Esto último se debe a que $\Gamma(X, \pi_*\mathcal{C}^\bullet) \xrightarrow{\pi^*} \Gamma(\mathbb{P}(E), \pi^*\pi_*\mathcal{C}^\bullet) \rightarrow \Gamma(\mathbb{P}(E), \mathcal{C}^\bullet)$ es la identidad, $\Gamma(X, \pi_*\mathcal{C}^\bullet) = \Gamma(\mathbb{P}(E), \mathcal{C}^\bullet)$.

En el caso de fibrados vectoriales reales se sustituye \mathbb{Z} por \mathbb{F}_2 y $2j$ por j .

Definición: Las **clases de Chern** de un fibrado vectorial complejo $E \rightarrow X$ de rango r son los coeficientes $c_i(E) \in H^{2i}(X, \mathbb{Z})$ del polinomio característico del endomorfismo del $H^\bullet(X)$ -módulo libre $H^\bullet(\mathbb{P}(E^*))$ que define el producto con $x_E = \delta(\xi_E)$,

$$x_E^r + c_1(E)x_E^{r-1} + \dots + c_r(E) = 0.$$

Convenimos que $c_0(E) = 1$ y $c_i(E) = 0$, $i > r$. La **clase total de Chern** es $c(E) := \sum_i c_i(E)$.

Análogamente, cuando $E \rightarrow X$ es un fibrado vectorial real, tenemos **clases de Stieffel-Whitney** $w_i(E) \in H^i(X, \mathbb{F}_2)$, y convenimos que $w_0(E) = 1$ y $w_i(E) = 0$, $i > r$. La **clase total de Stieffel-Whitney** es $w(E) := \sum_i w_i(E)$, y las clases de Stieffel-Whitney de una variedad diferenciable X son las de su fibrado tangente, $w_i(X) := w_i(TX)$.

En adelante daremos los enunciados y las demostraciones sólo para las clases de Chern, porque son igualmente válidos para las de Stieffel-Whitney.

Teorema: $c_i(f^*E) = f^*(c_i(E))$, para toda aplicación continua $f: T \rightarrow X$.

Demostración: Consideremos la aplicación continua $1 \times f: \mathbb{P}(f^*E) = \mathbb{P}(E) \times_X T \rightarrow \mathbb{P}(E) \times_X X = \mathbb{P}(E)$.

Tenemos que $\xi_{f^*E} = (1 \times f)^*\xi_E$; luego $x_{f^*E} = (1 \times f)^*x_E$, y en $H^\bullet(\mathbb{P}(f^*E))$,

$$0 = (1 \times f)^*(x_E^r + a_1x_E^{r-1} + \dots + a_r) = x_{f^*E}^r + (f^*a_1)x_{f^*E}^{r-1} + \dots + f^*a_r.$$

Teorema: $c_1(L) = -\delta(L)$, para todo fibrado de línea L .

Demostración: $x_L + c_1(L) = 0$. Ahora bien, $\mathbb{P}(L) = X$, $\xi_L = L$ y $x_L = \delta(L)$.

Teorema: La clase $c_r(E)$ coincide con los ceros de cualquier sección continua $s: X \rightarrow E$,

$$c_r(E) = s^*[p_E(s_0(X))].$$

Demostración: Sea \hat{x} la clase de obstrucción del fibrado tautológico de $\hat{E} = \mathbb{P}(E \oplus 1)$.

Por el teorema de Hirsch-Leray, la clase de cohomología de la sección nula será

$$p_{\hat{E}}(s_0(X)) = a_0\hat{x}^r + a_1\hat{x}^{r-1} + \dots + a_r, \quad a_i \in H^{2i}(X).$$

La restricción de esta clase a cualquier fibra coincide con la clase de cohomología de un punto (porque localmente el fibrado es trivial), que es la restricción de \hat{x}^r .

Como la restricción de a_i es nula cuando $i > 0$, vemos que $a_0 = 1$.

Ahora, la restricción de esta clase a la zona del infinito $j: \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}(E \oplus 1)$ es nula, porque la sección nula s_0 no corta al infinito,

$$0 = j^*(\hat{x}^r + a_1\hat{x}^{r-1} + \dots + a_r) = x_E^r + a_1x_E^{r-1} + \dots + a_r$$

y vemos que $a_i = c_i(E)$. Como el fibrado tautológico es trivial en la parte afín E ,

$$s^*[p_E(s_0(X))] = s^*[p_{\widehat{E}}(s_0(X))] = s^*(\widehat{x}^r + a_1\widehat{x}^{r-1} + \dots + a_r) = a_r = c_r(E).$$

Teorema: Si $0 \rightarrow E_1 \rightarrow E \rightarrow E_2 \rightarrow 0$ es una sucesión exacta,

$$c(E) = c(E_1) \cdot c(E_2).$$

Demostración: En $\mathbb{P}(E)$ tenemos que $\xi_E \hookrightarrow \pi^*E$ es un fibrado de línea y π^*E/ξ_E es un fibrado vectorial de rango $r - 1$. Como $\pi^*: H^\bullet(X) \rightarrow H^\bullet(\mathbb{P}(E))$ es inyectivo por el teorema de Hirsch-Leray, existe un cambio de base $p: Y \rightarrow X$ tal que $p^*: H^\bullet(X) \rightarrow H^\bullet(Y)$ es inyectivo y p^*E_1, p^*E_2 admiten filtraciones con cocientes sucesivos de línea.

La inyectividad de p^* y la funtorialidad de las clases de Chern reducen la fórmula al siguiente

Lema: Sea $0 = E_r \subset \dots \subset E_1 \subset E_0 = E$ una filtración con cocientes E_{i-1}/E_i de línea. Si $\alpha_i = c_1(E_{i-1}/E_i)$, se cumple que $c(E) = (1 + \alpha_1) \dots (1 + \alpha_r)$.

Demostración: Por inducción sobre r , y es una identidad cuando $r = 1$.

Consideremos la proyección $\pi: \mathbb{P}(E) \rightarrow X$ y la inclusión $j: \mathbb{P}(E_1) \rightarrow \mathbb{P}(E)$.

El morfismo natural $\xi_E \rightarrow \pi^*(E/E_1)$ define una sección global de $\pi^*(E/E_1) \otimes \xi_E^*$ que se anula en $\mathbb{P}(E_1)$, y corta transversalmente a la sección nula, como puede verse localmente. Luego

$$j_*(1) = c_1(\pi^*(E/E_1) \otimes \xi_E^*) = x_E + \alpha_1.$$

Por inducción $j^*[(x_E + \alpha_2) \dots (x_E + \alpha_r)] = 0$, y aplicando j_* la fórmula de proyección prueba que $c_i(E)$ es la i -ésima función simétrica elemental de $\alpha_1, \dots, \alpha_r$,

$$0 = (x_E + \alpha_2) \dots (x_E + \alpha_r)j_*(1) = (x_E + \alpha_1) \dots (x_E + \alpha_r).$$

Raíces de un Fibrado Vectorial: Si $0 \rightarrow E_1 \rightarrow E \rightarrow E_2 \rightarrow 0$ es una sucesión exacta, y fijamos una métrica hermítica (producto escalar en el caso real) en E , tenemos que $E = E_1 \oplus E_1^\perp$, y $E_1^\perp \rightarrow E_2$ es un isomorfismo, $E \simeq E_1 \oplus E_2$.

Luego en $\mathbb{P}(E)$ tenemos que $\pi^*E = \xi_E \oplus (\pi^*E)/\xi_E$, y reiterando la construcción con $(\pi^*E)/\xi_E$ obtenemos un cambio de base $\pi: Y \rightarrow X$ tal que $\pi^*: H^\bullet(X) \rightarrow H^\bullet(Y)$ es inyectivo y π^*E descompone en suma directa de fibrados de línea, $\pi^*E = L_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus L_{\alpha_r}$, donde $\alpha := c_1(L_\alpha)$, y $c_i(E)$ es la i -ésima función simétrica elemental de $\alpha_1, \dots, \alpha_r$.

- $c_i(E^*) = (-1)^i c_i(E)$.

Si $E = L_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus L_{\alpha_r}$, entonces $E^* = L_{-\alpha_1} \oplus \dots \oplus L_{-\alpha_r}$.

- $c_1(E) = c_1(\Lambda^r E)$.

Si $E = L_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus L_{\alpha_r}$, entonces $\Lambda^r E = L_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes L_{\alpha_r} = L_{\alpha_1 + \dots + \alpha_r}$.

- Si \mathfrak{p}_Y es el haz de ideales de una hipersuperficie Y de una variedad diferenciable X , $w_1(\mathfrak{p}_Y) = p_X(Y)$; luego Y admite una ecuación global $f = 0$ con diferencial no nula en todo punto de Y si y sólo si su clase $p_X(Y) \in H^1(X, \mathbb{F}_2)$ es nula.

La inclusión $\mathfrak{p}_Y \rightarrow \mathcal{C}_X^\infty$ induce una sección $s: \mathcal{C}_X^\infty \rightarrow \mathfrak{p}_Y^*$ que corta transversalmente a la sección 0 a lo largo de Y ; luego $p_X(Y) = w_1(\mathfrak{p}_Y^*) = w_1(\mathfrak{p}_Y)$.

- Si N es el fibrado normal a una subvariedad diferenciable compacta $i: Y \rightarrow X$ de codimensión d , $w_d(N) = i^*(p_X(Y))$.

Como X admite una métrica riemanniana (p. 192) hay un entorno U de Y en X y un difeomorfismo $U \simeq N$ que transforma i en la sección cero (p. 263).

5. Sea X una variedad diferenciable compacta de dimensión n . Si X es una subvariedad diferenciable de \mathbb{R}^{n+d} , entonces $w(X)^{-1}$ es de grado $< d$.

La sucesión $0 \rightarrow TX \rightarrow (T\mathbb{R}^{n+d})|_X \rightarrow N \rightarrow 0$ es exacta, y el fibrado tangente $T\mathbb{R}^{n+d}$ es trivial; luego

$$w(X)^{-1} = w(N) = 1 + w_1(N) + \dots + w_d(N)$$

y $w_d(N) = 0$ porque la clase de cohomología de X en \mathbb{R}^{n+d} es nula.

6. $w(\mathbb{P}_{n,\mathbb{R}}) = (1+x)^{n+1}$.

Si $E = \mathbb{R}^{n+1}$, la proyección $E - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_n$ induce, en cada vector e , una identificación de $E/\mathbb{R}e$ con el espacio tangente a \mathbb{P}_n en $\langle e \rangle$, lo que define un isomorfismo canónico $T\mathbb{P}_n = \text{Hom}(\xi_n, E/\xi_n)$, y tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(\xi_n, \xi_n) \longrightarrow \text{Hom}(\xi_n, E) \longrightarrow T\mathbb{P}_n \longrightarrow 0$$

$$w(\mathbb{P}_n) = w(\xi_n^*)^{n+1} = (1 + \delta(\xi_n))^{n+1} = (1+x)^{n+1}.$$

7. \mathbb{P}_4 no es una subvariedad diferenciable de \mathbb{R}^7 .

$$w(\mathbb{P}_4)^{-1} = (1+x+x^4)^{-1} = 1+x+x^2+x^3$$

8. Si \mathbb{P}_n es paralelizable, $n+1$ es potencia de 2.

Si $n+1 = 2^r m$, entonces $(1+x)^{n+1} = (1+x^{2^r})^m = 1 + mx^{2^r} + \dots, w_{2^r}(\mathbb{P}_n) \neq 0$.

9. Si existe un producto bilineal $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sin divisores de cero, n es potencia de 2.

Si a_1, \dots, a_n es una base de \mathbb{R}^n y $v_i(x) = xa_1^{-1}a_i$, entonces $x, v_2(x), \dots, v_n(x)$ son linealmente independientes para todo $x \neq 0$. Luego v_2, \dots, v_n definen secciones linealmente independientes de $T\mathbb{P}_{n-1} = \text{Hom}(\xi, \mathbb{R}^n/\xi)$, y \mathbb{P}_{n-1} es paralelizable.

11.8. Sucesiones Espectrales

Trabajaremos en categorías de módulos (o de haces de módulos sobre un espacio X). Cada triángulo exacto

$$\begin{array}{ccc} C_1 & \xrightarrow{i_1} & C_1 \\ & \searrow \delta_1 & \swarrow j_1 \\ & & E_1 \end{array}$$

define una diferencial $d_1 = j_1\delta_1: E_1 \rightarrow E_1, d_1^2 = j_1\delta_1j_1\delta_1 = 0$, y pondremos

$$C_2 = \text{Im } i_1, E_2 = H(E_1) = \text{Ker } d_1 / \text{Im } d_1.$$

$i_2: C_2 \rightarrow C_2$, la restricción de i_1 a C_2 .

$\delta_2: E_2 \rightarrow C_2$, el morfismo que induce $\delta_1: \text{Ker } d_1 \rightarrow C_2$ en el cociente.

$j_2: C_2 \rightarrow E_2$, el morfismo definido por el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \delta_1(E_1) & \longrightarrow & C_1 & \xrightarrow{i_1} & C_2 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow j_1 & & \downarrow j_1 & & \downarrow j_2 \\ 0 & \longrightarrow & j_1\delta_1(E_1) & \longrightarrow & \text{Ker } d_1 & \longrightarrow & E_2 \longrightarrow 0 \end{array}$$

Teorema: El triángulo $C_2 \xrightarrow{i_2} C_2$ es exacto.

$$\begin{array}{ccc} C_2 & \xrightarrow{i_2} & C_2 \\ \delta_2 \swarrow & & \searrow j_2 \\ & E_2 & \end{array}$$

Demostración: La igualdad $i_2(C_2) = i_1(\text{Ker } j_1) = \text{Ker } j_2$ se sigue del lema de la serpiente aplicado al diagrama anterior. Las otras dos son inmediatas. q.e.d.

Iterando el proceso obtenemos triángulos exactos derivados y diferenciales

$$\begin{array}{ccc} C_r & \xrightarrow{i_r} & C_r, \quad d_r = j_r \delta_r: E_r \longrightarrow E_r \\ \delta_r \swarrow & & \searrow j_r \\ & E_r & \end{array}$$

Sea (M, d) un módulo diferencial, con una filtración $\dots \subseteq F^{p+1} \subseteq F^p \subset \dots$, $M = \bigcup_p F^p$, compatible con la diferencial, $dF^p \subseteq F^p$. La sucesión exacta obvia

$$0 \longrightarrow \bigoplus_p F^{p+1} \xrightarrow{i} \bigoplus_p F^p \longrightarrow \bigoplus_p F^p / F^{p+1} \longrightarrow 0$$

induce (p. 227) un triángulo exacto

$$\begin{array}{ccc} C_1 & \xrightarrow{i_1} & C_1 = \bigoplus_p H(F^p) \\ & \delta_1 \swarrow & \downarrow j_1 \\ & E_1 = \bigoplus_p H(F^p / F^{p+1}) & \end{array}$$

Si $i_k^p: H(F^p) \rightarrow H(F^{p-k})$ es el morfismo natural, en los triángulos derivados tendremos que $C_r = \text{Im } i_{r-1} = \bigoplus_p \text{Im } i_{r-1}^{p+r-1} \subseteq \bigoplus_p H(F^p)$. Además $E_r = \bigoplus_p E_r^p$, el triángulo

$$\begin{array}{ccc} C_r & \xrightarrow{i_r} & C_r = \text{Im } i_{r-1} \\ \delta_r \swarrow & & \searrow j_r \\ & E_r & \end{array}$$

descompone en sucesiones exactas

$$\dots \longrightarrow E_r^p \xrightarrow{\delta_r} \text{Im } i_{r-1}^{p+r} \xrightarrow{i_r} \text{Im } i_{r-1}^{p+r-1} \xrightarrow{j_r} E_r^{p+r-1} \xrightarrow{\delta_r} \dots$$

y la diferencial d_r viene dada por morfismos $d_r = j_r \delta_r: E_r^p \longrightarrow E_r^{p+r}$.

Supongamos ahora que M es un complejo, $M = \bigoplus_n M^n$, $dM^n \subseteq M^{n+1}$, y que la filtración F^p es compatible con la graduación, $F^p = \bigoplus_n (F^p \cap M^n) = \bigoplus_n M^{p, n-p}$.

Ahora, si $i_k^{p, n-p}: H^n(F^p) \rightarrow H^n(F^{p-k})$ es el morfismo natural, tendremos que

$$C_r = \text{Im } i_{r-1} = \bigoplus_{p,n} \text{Im } i_{r-1}^{p+r-1, n+1-p-r} \subseteq \bigoplus_{p,n} H^n(F^p).$$

Además $E_r = \bigoplus_{p,n} E_r^{p, n-p}$, los triángulos descomponen en sucesiones exactas

$$\dots \longrightarrow E_r^{p,q} \xrightarrow{\delta_r} \text{Im } i_{r-1}^{p+r, q+1-r} \xrightarrow{i_r} \text{Im } i_{r-1}^{p+r-1, q+2-r} \xrightarrow{j_r} E_r^{p+r-1, q+2-r} \longrightarrow \dots$$

y la diferencial d_r viene dada por morfismos

$$d_r = j_r \delta_r: E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r, q-r+1}.$$

Por otra parte, las imágenes de los morfismos naturales $i_\infty^{p,n-p}: H^n(F^p) \rightarrow H^n(M)$ definen una filtración de $H^n(M)$, y vamos a ver cuándo la sucesión espectral aproxima al graduado $GH^n(M) = \bigoplus_p E_\infty^{p,n-p}$, donde $E_\infty^{p,n-p} = \text{Im } i_\infty^{p,n-p} / \text{Im } i_\infty^{p+1,n-p-1}$.

Definición: Diremos que la filtración es **regular** si para cada número entero n se cumple que $H^n(F^p) = 0$ para todo $p \gg 0$.

Teorema: Si la filtración es regular, la sucesión espectral **converge** al graduado de $H^n(M)$, y pondremos $E_2^{p,q} \Rightarrow H^{p+q}(M)$, en el sentido de que

$$E_\infty^{p,q} = \varinjlim E_r^{p,q}.$$

Demostración: Fijados p y n , el morfismo $\delta_r: E_r^{p,n-p} \rightarrow \text{Im } i_{r-1}^{p+r,n+1-p-r}$ es nulo cuando $r \gg 0$, porque $i_{r-1}^{p+r,n+1-p-r}: 0 = H^{n+1}(F^{p+r}) \rightarrow H^{n+1}(F^{p+1})$,

$$\text{Im } i_{r-1}^{p+1,n-p-1} \rightarrow \text{Im } i_{r-1}^{p,n-p} \rightarrow E_r^{p,n-p} \rightarrow 0$$

Además $d_r = j_r \delta_r$ se anula en $E_r^{p,n-p}$, y tenemos epimorfismos $E_r^{p,n-p} \rightarrow E_{r+1}^{p,n-p}$.

Tomando límite inductivo sobre r , concluimos

$$\text{Im } i_\infty^{p,n-p} \rightarrow \text{Im } i_\infty^{p+1,n-p-1} \rightarrow \varinjlim E_r^{p,n-p} \rightarrow 0$$

Teorema: Sea $\phi: M \rightarrow \bar{M}$ un morfismo de complejos filtrados, $\phi(F^p) \subseteq \bar{F}^p$. Si las filtraciones son regulares y ϕ induce isomorfismos $E_r^{p,q} \xrightarrow{\sim} \bar{E}_r^{p,q}$ para algún índice r , entonces ϕ es un casi-isomorfismo, $\phi: H^n(M) \xrightarrow{\sim} H^n(\bar{M})$.

Demostración: Como las sucesiones espectrales convergen, ϕ induce un isomorfismo entre los graduados $GH^n(M) \xrightarrow{\sim} GH^n(\bar{M})$; luego entre los completados (p. 135).

Pero, cuando la filtración es regular, los morfismos $i_\infty^{p,n-p}: H^n(F^p) \rightarrow H^n(M)$ son nulos, $p \gg 0$, y $H^n(M)$ es completo.

Sucesión Espectral del Bicomplejo:

Un bicomplejo $(K^{\bullet\bullet}; d_1, d_2)$ admite la filtración $F^p = \bigoplus_{i \geq p} \bigoplus_j K^{i,j}$, y

$$\begin{aligned} E_1^{p,q} &= H_{d_2}^q(K^{p\bullet}) \\ E_2^{p,q} &= H_{d_1}^p(H_{d_2}^q(K^{\bullet\bullet})) \end{aligned}$$

Si la filtración es regular (por ejemplo, cuando $K^{\bullet\bullet}$ tiene diagonales acotadas inferiormente) tenemos una sucesión espectral que converge a la cohomología del bicomplejo

$$E_2^{p,q} = H_{d_1}^p(H_{d_2}^q(K^{\bullet\bullet})) \Rightarrow H^{p+q}(K^{\bullet\bullet}).$$

Si el bicomplejo $K^{\bullet\bullet}$ tiene diagonales superiormente acotadas, obtenemos una segunda sucesión espectral convergente al considerar la filtración $F^p = \bigoplus_i \bigoplus_{j \geq p} K^{i,j}$,

$$E_2^{p,q} = H_{d_2}^p(H_{d_1}^q(K^{\bullet\bullet})) \Rightarrow H^{p+q}(K^{\bullet\bullet}).$$

Sucesión Espectral de Hipercohomología:

Sea K^\bullet un complejo inferiormente acotado. Elegidas resoluciones inyectivas $I_B^{\bullet\bullet}$ y $I_H^{\bullet\bullet}$ de los bordes B^p y la cohomología H^p de K^\bullet , tenemos sucesiones exactas

$$0 \rightarrow I_B^{p,\bullet} \rightarrow I_Z^{p,\bullet} \rightarrow I_H^{p,\bullet} \rightarrow 0$$

donde $I_Z^{p,\bullet}$ es una resolución inyectiva de los ciclos Z^p , y sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow I_Z^{p,\bullet} \longrightarrow I^{p,\bullet} \longrightarrow I_B^{p+1,\bullet} \longrightarrow 0$$

donde $I^{p,\bullet}$ es una resolución inyectiva de K^p . Por el teorema del bicomplejo, $K^\bullet \rightarrow I^{\bullet\bullet}$ es un casi-isomorfismo, y además los ciclos, bordes y cohomología de $I^{\bullet\bullet}$ respecto de su diferencial d_1 son resoluciones inyectivas de los ciclos, bordes y cohomología de K^\bullet .

Ahora, si F es un funtor aditivo exacto por la izquierda, $H^n[F(I^{\bullet\bullet})] = \mathbf{R}^n F(K^\bullet)$, y

$$H_{d_1}^p[F(I^{\bullet\bullet})] = F[H_{d_1}^p(I^{\bullet\bullet})] = F(I_H^{p,\bullet})$$

porque los ciclos, bordes y cohomología del complejo $(I^{\bullet q}, d_1)$ son inyectivos, de modo que cualquier funtor aditivo los conserva. Luego $H_{d_2}^p(H_{d_1}^q(I^{\bullet\bullet})) = R^p F(H^q(K^\bullet))$, y la segunda sucesión espectral del bicomplejo $F(I^{\bullet\bullet})$ es

$$E_2^{p,q} = R^p F(H^q(K^\bullet)) \Rightarrow \mathbf{R}^{p+q} F(K^\bullet).$$

Teorema del Functor Compuesto de Grothendieck: Sean $F: \mathbf{A} \rightsquigarrow \mathbf{B}$ y $G: \mathbf{B} \rightsquigarrow \mathbf{C}$ funtores covariantes aditivos exactos por la izquierda. Si F transforma inyectivos en G -acíclicos, para todo complejo K^\bullet inferiormente acotado de \mathbf{A} tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(GF)(K^\bullet) &\simeq \mathbf{R}G(\mathbf{R}F(K^\bullet)), \\ E_2^{p,q} = R^p G(R^q F(M)) &\Rightarrow R^{p+q}(GF)(M). \end{aligned}$$

Demostración: Sea $K^\bullet \simeq I^\bullet$ la resolución inyectiva. Como $F(I^\bullet)$ es G -acíclico,

$$\mathbf{R}(GF)(K^\bullet) = GF(I^\bullet) \simeq \mathbf{R}G(F(I^\bullet)) = \mathbf{R}G(\mathbf{R}F(K^\bullet)),$$

y tenemos la sucesión espectral de hipercohomología

$$E_2^{p,q} = R^p G(\mathbf{R}^q F(K^\bullet)) \Rightarrow \mathbf{R}^{p+q} G(F(I^\bullet)) = \mathbf{R}^{p+q}(GF)(K^\bullet).$$

Sucesión Espectral de Leray: Si $f: X \rightarrow Y$ y $g: Y \rightarrow Z$ son aplicaciones continuas, tenemos una sucesión espectral

$$E_2^{p,q} = R^p g_*(R^q f_* \mathcal{F}) \Rightarrow R^{p+q}(gf)_* \mathcal{F}.$$

Demostración: La imagen directa f_* transforma haces flascos en haces flascos, luego g_* -acíclicos.

Ejemplos:

1. $E_2^{p,q} = H^p(Y, R^q f_* \mathcal{F}) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathcal{F})$, (cuando $f: X \rightarrow Y$ es una aplicación continua).

2. $E_2^{p,q} = H_c^p(Y, R^q f_* \mathcal{F}) \Rightarrow H_c^{p+q}(X, \mathcal{F})$, (si además X, Y son σ -compactos).

$\Gamma_c(X, -) = \Gamma_c(Y, -) \circ f_*$, y si \mathcal{C} es un haz Godement, $f_* \mathcal{C}$ es un $C^0\mathbb{Z}$ -módulo, y por tanto es Γ_c -acíclico.

3. $E_2^{p,q} = H^p(X, \mathcal{H}_Y^q \mathcal{F}) \Rightarrow H_Y^{p+q}(X, \mathcal{F})$, (cuando Y es un cerrado de X).

$\Gamma_Y = \Gamma \circ \underline{\Gamma}_Y$, y si \mathcal{C} es un haz Godement, $\underline{\Gamma}_Y \mathcal{C}$ es flasco (p. 290).

4. $E_2^{p,q} = H^p(X, \underline{\text{Ext}}_{\mathcal{O}}^q(\mathcal{M}, \mathcal{N})) \Rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}}^{p+q}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$.

$\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}, -) = \Gamma \circ \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}, -)$, y si \mathcal{I} es un \mathcal{O} -módulo inyectivo, $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}, \mathcal{I})$ es flasco porque los morfismo de restricción son epiyectivos

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}, \mathcal{I}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}_U, \mathcal{I}) = \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}|_U, \mathcal{I}|_U).$$

Parte V

Quinto Curso

Capítulo 12

Geometría Algebraica II

12.1. Módulos Inyectivos

Supondremos que todos los anillos son noetherianos.

Un morfismo de A -módulos inyectivo $M \hookrightarrow M_e$ es una **extensión esencial** si ningún submódulo no nulo de M_e corta a M en 0, y se llama **envolvente inyectiva** de M si además M_e es un A -módulo inyectivo.

Lema: Si $M \hookrightarrow M_e$ es una extensión esencial y $j: M \hookrightarrow I$, toda extensión $M_e \rightarrow I$ de j es un morfismo inyectivo (porque su núcleo corta a M en 0; luego es nulo).

Teorema: Todo A -módulo M admite una única envolvente inyectiva $E(M)$.

Demostración: M es un submódulo de un módulo inyectivo I (p. 72), y por el lema de Zorn existe una extensión esencial $M \hookrightarrow M_e \hookrightarrow I$ maximal.

De nuevo por Zorn, existe un submódulo $N \subset I$ máximo entre los que cumplen $M_e \cap N = 0$.

Como $M_e \hookrightarrow I/N$ es esencial, por el lema $M_e \hookrightarrow I/N \hookrightarrow I$, y $M_e \hookrightarrow I/N$ es isomorfismo.

Luego M_e es sumando directo de I , y por tanto es una envolvente inyectiva de M .

Si $M \hookrightarrow M_{e'}$ es otra envolvente inyectiva, por el lema $M_e \hookrightarrow M_{e'}$, y si no fuera epiyectivo, al ser M_e inyectivo tendrá un suplementario no nulo en $M_{e'}$, lo que contradice que $M_{e'}$ es extensión esencial de M ; luego $M_e \simeq M_{e'}$.

Teorema: Todo módulo inyectivo es $I \simeq \bigoplus_j E(A/\mathfrak{p}_j)$, donde los ideales \mathfrak{p}_j son primos.

Demostración: Consideremos una familia maximal $\{I_j\}$ de submódulos $I_j \simeq E(A/\mathfrak{p}_j)$ tal que su suma $J = \sum_j I_j$ sea directa (existe por el lema de Zorn).

Por el criterio del ideal las sumas directas de módulos inyectivos son inyectivas (A es noetheriano); luego $I = J \oplus I'$, y si $I' \neq 0$, tendrá algún elemento de anulador \mathfrak{p} primo (p. 132) y $E(A/\mathfrak{p}) \hookrightarrow I'$, lo que contradice el carácter maximal de la familia.

Lema: El anulador de cualquier elemento no nulo de $E(A/\mathfrak{p})$ es un ideal \mathfrak{p} -primario.

Demostración: Si $A/I \hookrightarrow E(A/\mathfrak{p})$ y $\bar{\mathfrak{p}}$ es un primo asociado al ideal I , entonces $A/\bar{\mathfrak{p}} \hookrightarrow A/I$ (p. 132), y el anulador de $0 \neq m \in (A/\mathfrak{p}) \cap (A/\bar{\mathfrak{p}})$ es $\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$. Luego I es \mathfrak{p} -primario.

Teorema: El haz \tilde{I} asociado a un módulo inyectivo I es flasco.

Demostración: Como $X = \text{Spec } A$ es noetheriano, las sumas directas de haces flascos son flascos (p. 244), y basta verlo cuando $I = E(A/\mathfrak{p})$.

Si un ideal primo \mathfrak{p}' no contiene a \mathfrak{p} , por el lema $I_{\mathfrak{p}'} = 0$, y si lo contiene $I = I_{\mathfrak{p}'}$, porque el núcleo del epimorfismo (los módulos inyectivos son divisibles) $I \rightarrow I_{\mathfrak{p}'}$ corta a A/\mathfrak{p} en 0.

Luego \tilde{I} es el haz constante I soportado en el cerrado $(\mathfrak{p})_0$, que tiene un punto denso, y por tanto \tilde{I} es un haz flasco. q.e.d.

1. Este teorema da una nueva demostración de que los haces \tilde{M} son acíclicos (p. 231) porque si $0 \rightarrow M \rightarrow I^\bullet$ es una resolución inyectiva, la cohomología de \tilde{M} se puede calcular con la resolución flasca $0 \rightarrow \tilde{M} \rightarrow \tilde{I}^\bullet$, y $\Gamma(\text{Spec } A, \tilde{I}^\bullet) = I^\bullet$.
2. Si A es un dominio de ideales principales y Σ su cuerpo de fracciones, $E(A) = \Sigma$, y $E(A/\mathfrak{m}) \simeq \Sigma/A_{\mathfrak{m}}$, donde $A/\mathfrak{m} \simeq \mathfrak{m}^{-1}/A \hookrightarrow \Sigma/A_{\mathfrak{m}}$.

Así, la envolvente inyectiva del $k[x]$ -módulo $k[x]/(x)$ es $kx^{-1} \oplus \dots \oplus kx^{-n} \oplus \dots$

12.2. Álgebra Local

En esta sección \mathcal{O} será un anillo local noetheriano, \mathfrak{m} su ideal maximal, $X = \text{Spec } \mathcal{O}$, $x \in X$ el punto cerrado, $k = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ su cuerpo residual y M un \mathcal{O} -módulo finito generado.

12.2.1. Sucesiones Regulares

Si $a \in \mathfrak{m}$, el complejo $K_1 = \mathcal{O}e \xrightarrow{d} \mathcal{O} = K_0$, $d(e) = a$, se denota $K(a)$.

Si M_\bullet es un complejo, ponemos $M_\bullet(a) = M_\bullet \otimes_{\mathcal{O}} K(a)$, y la sucesión exacta

$$0 \rightarrow M_\bullet \rightarrow M_\bullet(a) \xrightarrow{\pi} M_\bullet[1] \rightarrow 0, \quad \pi(m + m' \otimes e) = m',$$

induce una sucesión exacta

$$(*) \quad \dots \rightarrow H_{p+1}(M_\bullet(a)) \rightarrow H_p(M_\bullet) \xrightarrow{a} H_p(M_\bullet) \rightarrow H_p(M_\bullet(a)) \rightarrow \dots$$

El **complejo de Koszul** de M y una sucesión $a_1, \dots, a_r \in \mathfrak{m}$ es

$$K_M(a_1, \dots, a_r) = M \otimes_{\mathcal{O}} K(a_1) \otimes_{\mathcal{O}} \dots \otimes_{\mathcal{O}} K(a_r),$$

y $H_0(K_M(a_1, \dots, a_r)) = M/(a_1, \dots, a_r)M$.

Si L es un \mathcal{O} -módulo libre de base $\omega_1, \dots, \omega_r$, puede verse como el complejo $\bigoplus_p \Lambda^p L \otimes_{\mathcal{O}} M$, con la diferencial

$$d(\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p} \otimes m) = \sum_j (-1)^{j-1} a_{i_j} \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{\omega}_{i_j} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p} \otimes m.$$

La sucesión es **M -regular** (regular si $M = \mathcal{O}$) si a_i no divide a 0 en $M/(a_1, \dots, a_{i-1})M$, en el sentido de que $0 \rightarrow M/(a_1, \dots, a_{i-1})M \xrightarrow{a_i} M/(a_1, \dots, a_{i-1})M$ es exacta para todo i .

Por ejemplo, si \mathcal{O} es regular y $df_1, \dots, df_r \in \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ son linealmente independientes, entonces $\mathcal{O}/(f_1, \dots, f_i)$ es regular; luego íntegro, y la sucesión f_1, \dots, f_r es regular.

Teorema: Las siguientes condiciones son equivalentes,

1. a_1, \dots, a_r es una sucesión M -regular.
2. $K_M(a_1, \dots, a_r)$ es una resolución libre de $M/(a_1, \dots, a_r)M$.
3. $H_1(K_M(a_1, \dots, a_r)) = 0$.

Demostración: (1 \Rightarrow 2). Por inducción sobre r .

Cuando $p > 1$, la sucesión exacta (*)

$$0 = H_p(K_M(a_1, \dots, a_{r-1})) \longrightarrow H_p(K_M(a_1, \dots, a_r)) \longrightarrow H_{p-1}(K_M(a_1, \dots, a_{r-1})) = 0$$

muestra que $H_p(K_M(a_1, \dots, a_r)) = 0$.

Si $p = 1$, porque a_r no divide a 0 en $M/(a_1, \dots, a_{r-1})M$ y tenemos una sucesión exacta

$$(**) \quad 0 \longrightarrow H_1(K_M(a_1, \dots, a_r)) \longrightarrow M/(a_1, \dots, a_{r-1})M \xrightarrow{-a_r} M/(a_1, \dots, a_{r-1})M$$

(3 \Rightarrow 1). Por el lema de Nakayama y la sucesión exacta (*)

$$H_1(K_M(a_1, \dots, a_{r-1})) \xrightarrow{-a_r} H_1(K_M(a_1, \dots, a_{r-1})) \longrightarrow H_1(K_M(a_1, \dots, a_r)) = 0$$

tenemos que $H_1(K_M(a_1, \dots, a_{r-1})) = 0$, y a_1, \dots, a_{r-1} es M -regular por inducción sobre r .

Ahora la sucesión exacta (**) permite concluir que la sucesión a_1, \dots, a_r es M -regular.

Corolario: Si un ideal está generado por una sucesión regular, $I = (a_1, \dots, a_r)$, entonces I/I^2 es un \mathcal{O}/I -módulo libre de rango r .

Demostración: Aplicando $\otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/I$ a la sucesión exacta $\Lambda^2 L \rightarrow L \rightarrow I \rightarrow 0$ vemos que $L \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/I \simeq I/I^2$, porque la diferencial $(\Lambda^2 L) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/I \rightarrow L \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/I$ es nula.

Teorema: Si un ideal está generado por una sucesión regular, $I = (a_1, \dots, a_r)$, entonces el anillo $\mathcal{O}[I] = \bigoplus_n I^n$ es el álgebra simétrica de I , y el graduado $G_I \mathcal{O} = \bigoplus_n I^n / I^{n+1}$ es el álgebra simétrica del \mathcal{O}/I -módulo libre I/I^2 ,

$$(\mathcal{O}/I)[x_1, \dots, x_r] \simeq S_{\mathcal{O}/I}^{\bullet}(I/I^2) = G_I \mathcal{O}.$$

Demostración: El complejo de Koszul prueba que I es el cociente de $\mathcal{O}x_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}x_r$ por el submódulo que generan los elementos $y_{ij} = a_i x_j - a_j x_i$; luego $S^{\bullet} I$ es el cociente del anillo de polinomios $A[x_1, \dots, x_r]$ por el ideal $J = (y_{ij})$ que generan, y hemos de probar que J coincide con el núcleo del morfismo homogéneo $A[x_1, \dots, x_r] \rightarrow \bigoplus_n I^n$, $x_i \mapsto a_i$.

Sea $P_n(x_1, \dots, x_r)$ un polinomio homogéneo de grado n tal que $P_n(a_1, \dots, a_r) = 0$.

Para ver que $P_n \in J$, procedemos por inducción sobre r y n . Sea $\bar{\mathcal{O}} = \mathcal{O}/a_1 \mathcal{O}$.

La reducción $\bar{P}_n(0, x_2, \dots, x_r) \in \bar{\mathcal{O}}[x_2, \dots, x_r]$ cumple que $\bar{P}_n(\bar{a}_2, \dots, \bar{a}_r) = 0$; luego está en el ideal que generan los polinomios $\bar{a}_i x_j - \bar{a}_j x_i$. Como $\bar{\mathcal{O}}[x_2, \dots, x_r] = \mathcal{O}[x_1, \dots, x_r]/(a_1, x_1)$,

$$P_n(x_1, \dots, x_r) \equiv a_1 S_n(x_1, \dots, x_r) + x_1 T_{n-1}(x_1, \dots, x_r) \pmod{J}.$$

Como $a_1 x_i \equiv a_i x_1 \pmod{J}$, vemos que $P_n \equiv x_1 Q_{n-1} \pmod{J}$.

Ahora bien, a_1 no es divisor de cero y $0 = P_n(a_1, \dots, a_r) = a_1 Q_{n-1}(a_1, \dots, a_r)$.

Luego $Q_{n-1}(a_1, \dots, a_r) = 0$, y $Q_{n-1} \in J$ por inducción sobre el grado.

Concluimos que $P_n \in J$.

Por último, el álgebra simétrica cambia de base, así que

$$G_I \mathcal{O} = \mathcal{O}[I] \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}/I) = (S_{\mathcal{O}}^{\bullet} I)_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/I) = S_{\mathcal{O}/I}^{\bullet}(I/I^2).$$

12.2.2. Anillos Regulares

Lema: M es libre si y sólo si $\text{Tor}_1^{\mathcal{O}}(M, k) = 0$.

Demostración: Consideremos un epimorfismo $L \rightarrow M$, donde L es libre y $L \otimes_{\mathcal{O}} k \xrightarrow{\sim} M \otimes_{\mathcal{O}} k$. La sucesión exacta $0 \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$ induce una sucesión exacta

$$0 = \text{Tor}_1(M, k) \longrightarrow N \otimes_{\mathcal{O}} k \longrightarrow L \otimes_{\mathcal{O}} k \xrightarrow{\sim} M \otimes_{\mathcal{O}} k \longrightarrow 0$$

y $N \otimes_{\mathcal{O}} k = 0$. Por Nakayama $N = 0$, y M es libre.

q.e.d.

En general, si $0 \rightarrow N \rightarrow L_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow L_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ es una resolución, donde los módulos L_i son libres de rango finito, y $\text{Tor}_{n+1}(M, k) = 0$, entonces (p. 277) $0 = \text{Tor}_1(N, k)$ y N es libre.

La **dimensión proyectiva** de M es la menor longitud de las resoluciones proyectivas de M , y coincide con el menor número n tal que $\text{Tor}_p(M, N) = 0$, $p > n$, para todo módulo N , ó bien $\text{Tor}_{n+1}(M, k) = 0$. La **dimensión global** de \mathcal{O} es el supremo de las dimensiones proyectivas de los \mathcal{O} -módulos finitos generados, y coincide con el primer número n tal que $\text{Tor}_{n+1}(k, k) = 0$, ó bien $\text{Tor}_p(M, N) = 0$, $p > n$, para cualesquiera módulos finitos generados.

Lema: Si $f \in \mathcal{O}$ no divide a 0 ni en \mathcal{O} ni en M , para todo $\mathcal{O}/f\mathcal{O}$ -módulo N ,

$$\text{Tor}_p^{\mathcal{O}}(M, N) = \text{Tor}_p^{\mathcal{O}/f\mathcal{O}}(M/fM, N), \quad p \geq 0.$$

Demostración: Las sucesiones $0 \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{f} \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}/f\mathcal{O} \rightarrow 0$ y $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} M \rightarrow M/fM \rightarrow 0$ son exactas por hipótesis; luego $\text{Tor}_p^{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/f\mathcal{O}, M) = 0$, $p \geq 1$.

Ahora, si $L_{\bullet} \rightarrow M \rightarrow 0$ es una resolución libre, $L_{\bullet}/fL_{\bullet} \rightarrow M/fM \rightarrow 0$ es una resolución por $\mathcal{O}/f\mathcal{O}$ -módulos libres, y

$$\text{Tor}_p^{\mathcal{O}}(M, N) = H_p(L_{\bullet} \otimes_{\mathcal{O}} N) = H_p[(L_{\bullet}/fL_{\bullet}) \otimes_{\mathcal{O}/f\mathcal{O}} N] = \text{Tor}_p^{\mathcal{O}/f\mathcal{O}}(M/fM, N).$$

Teorema de Serre: \mathcal{O} es regular si y sólo si tiene dimensión global finita.

Demostración: Sea \mathcal{O} un anillo regular de dimensión n , y $\mathfrak{m} = (f_1, \dots, f_n)$.

El complejo $K(f_1, \dots, f_n)$ es una resolución libre de k , y la diferencial de $K(f_1, \dots, f_n) \otimes_{\mathcal{O}} k$ es nula. Luego $\text{Tor}_n(k, k) \simeq k$ y $\text{Tor}_{n+1}(k, k) = 0$, y la dimensión global de \mathcal{O} es n .

Veamos el recíproco por inducción sobre $n = \dim \mathcal{O}$.

No existe $0 \neq f \in \mathfrak{m}$ tal que $f\mathfrak{m} = 0$, porque si $0 \rightarrow L_d \rightarrow \dots \rightarrow L_0 \rightarrow k \rightarrow 0$ es una resolución libre, siempre podemos suponer que $L_d \subseteq \mathfrak{m}L_{d-1}$, y $0 \neq fL_d \subseteq f\mathfrak{m}L_{d-1} = 0$.

Luego \mathfrak{m} no es uno de los primos $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ asociados al 0, y existe $f \in \mathfrak{m} - (\mathfrak{p}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{p}_r \cup \mathfrak{m}^2)$, pues si $f_1 \in \mathfrak{m} - (\mathfrak{p}_2 \cup \dots \cup \mathfrak{p}_r \cup \mathfrak{m}^2)$ y $f_1 \in \mathfrak{p}_1$, tomamos $f_2 \in (\mathfrak{p}_2 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_r \cap \mathfrak{m}^2) - \mathfrak{p}_1$, y $f = f_1 + f_2$ sirve.

Ahora $f \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$ y $\dim(\mathcal{O}/f\mathcal{O}) = n - 1$, y basta ver que $\mathcal{O}/f\mathcal{O}$ es regular, que tiene dimensión global finita.

Por la sucesión exacta $0 \rightarrow \mathfrak{m}/f\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}/f\mathcal{O} \rightarrow k \rightarrow 0$, basta ver que la dimensión proyectiva de $\mathfrak{m}/f\mathcal{O}$ es finita.

Como la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \langle \bar{f} \rangle \longrightarrow \mathfrak{m}/f\mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{m}/f\mathcal{O} \longrightarrow 0$$

escinde (un retracts es la composición $\mathfrak{m}/f\mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \rightarrow \langle \bar{f} \rangle$ que define cualquier suplementario de $\langle \bar{f} \rangle$ en $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$), basta ver que $\mathfrak{m}/f\mathfrak{m}$ tiene dimensión proyectiva finita, lo que se sigue del lema al no ser f divisor de cero,

$$\text{Tor}_p^{\mathcal{O}/f\mathcal{O}}(\mathfrak{m}/f\mathfrak{m}, k) = \text{Tor}_p^{\mathcal{O}}(\mathfrak{m}, k).$$

Corolario: Si \mathcal{O} es regular, $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ es regular para todo ideal primo \mathfrak{p} .

Demostración: Los tores localizan, $\mathrm{Tor}_n^{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/\mathfrak{p}, \mathcal{O}/\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Tor}_n^{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}, \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$.

Definición: Un anillo noetheriano A es regular si lo son todos sus anillos locales $A_{\mathfrak{p}}$.

Si su dimensión es finita, por el teorema de Serre esto equivale a la existencia de un número n tal que $\mathrm{Tor}_p^A(M, N) = 0$, $p > n$, para todo par de A -módulos finitos generados M, N .

Corolario: Sea A una k -álgebra de tipo finito. Si A_L es regular para alguna extensión $k \rightarrow L$, entonces A es regular.

Demostración: $\mathrm{Tor}_p^A(M, N)_L = \mathrm{Tor}_p^{A_L}(M_L, N_L)$.

Definición: La **altura** de un ideal primo \mathfrak{p} de un anillo A es la dimensión del anillo $A_{\mathfrak{p}}$.

Lema: Un anillo íntegro y noetheriano A es un dominio de factorización única si y sólo si todo ideal primo \mathfrak{p} de altura 1 es principal.

Demostración: Si A es DFU y $p \in \mathfrak{p}$ es irreducible, el ideal $pA \subseteq \mathfrak{p}$ es primo, y $pA = \mathfrak{p}$.

Recíprocamente, por noetherianidad todo elemento es producto de irreducibles, y para la unicidad basta ver que todo irreducible p genera un ideal primo.

Si \mathfrak{p} es un primo minimal entre los que contienen a pA , es de altura 1 porque $\dim A_{\mathfrak{p}}/pA_{\mathfrak{p}} = 0$.

Luego $\mathfrak{p} = aA$, y $p = ab$. Al ser p irreducible, b es invertible, y $pA = \mathfrak{p}$ es primo.

Teorema: Todo anillo local regular \mathcal{O} es un dominio de factorización única.

Demostración: Por inducción sobre la dimensión n de \mathcal{O} .

Tomamos $f \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$, de modo que $\mathcal{O}/f\mathcal{O}$ es regular, y $f\mathcal{O}$ es primo.

1. \mathcal{O}_f es DFU. Si $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}$ es un primo de altura 1 y $f \notin \mathfrak{p}$, como \mathcal{O}_f es un anillo regular de dimensión $< n$, por inducción \mathfrak{p}_f es un \mathcal{O}_f -módulo de línea.

Como \mathfrak{p} admite una resolución finita por \mathcal{O} -módulos libres, \mathfrak{p}_f admite una resolución finita por \mathcal{O}_f -módulos libres, y $\mathfrak{p}_f = \mathcal{O}_f$ en el grupo K de los \mathcal{O}_f -módulos localmente libres.

Como $L \mapsto \Lambda^{\mathrm{rg} L} L$ es una función aditiva con valores en $\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_f)$, $\mathfrak{p}_f \simeq \mathcal{O}_f$ es principal.

2. \mathcal{O} es DFU. Sea $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}$ un primo de altura 1. Si $f \in \mathfrak{p}$, entonces $f\mathcal{O} = \mathfrak{p}$.

Si $f \notin \mathfrak{p}$, entonces \mathfrak{p}_f es principal, $\mathfrak{p}_f = p\mathcal{O}_f$, y por noetherianidad podemos suponer que $p \in \mathfrak{p}$ no es múltiplo de f .

Si $a \in \mathfrak{p}$ no es múltiplo de p , tenemos $a f^r = pb$, con $r > 0$, $b \notin f\mathcal{O}$, lo que contradice que $f\mathcal{O}$ es primo. Luego $\mathfrak{p} = p\mathcal{O}$ es principal.

12.2.3. Profundidad

Lema: M admite un parámetro regular si y sólo si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(k, M) = 0$.

Demostración: La descomposición primaria de ideales se extiende sin problemas a los módulos finitos sobre un anillo noetheriano. Un submódulo $N \subset M$ es primario si toda homotecia $M/N \xrightarrow{a} M/N$ es inyectiva o nilpotente, en cuyo caso $\mathrm{Ann}(M/N)$ es un ideal \mathfrak{p} -primario. Todo submódulo es intersección de primarios, $N = \bigcap_i N_i$, los primos asociados $\mathfrak{p}_i = \mathrm{Ann}(M/N_i)$ son los primos que coinciden con el anulador de algún elemento de M/N , y su unión está formada por las funciones que dividen a 0 en M/N .

La existencia de un elemento M -regular significa que \mathfrak{m} no es un primo asociado al 0 , que no hay elementos de M de anulador \mathfrak{m} ; es decir, $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/\mathfrak{m}, M) = 0$.

Teorema: Existe una sucesión M -regular f_1, \dots, f_r si y sólo si $\text{Ext}_{\mathcal{O}}^p(k, M) = 0$, $p < r$.

Demostración: Por inducción sobre r .

Si la sucesión f_1, \dots, f_r es regular, tenemos sucesiones exactas

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow M \xrightarrow{f_1} M \longrightarrow M/f_1M \longrightarrow 0 \\ 0 = \text{Ext}^{p-1}(k, M/f_1M) \longrightarrow \text{Ext}^p(k, M) \xrightarrow{f_1} \text{Ext}^p(k, M), \quad p < r. \end{aligned}$$

Como $\text{Ext}^p(k, M)$ está anulado por \mathfrak{m} (basta resolver M por inyectivos), es nulo.

En cuanto al recíproco, si $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(k, M) = 0$, por el lema existe un elemento M -regular f_1 , y las sucesiones exactas

$$0 = \text{Ext}^p(k, M) \longrightarrow \text{Ext}^p(k, M/f_1M) \longrightarrow \text{Ext}^{p+1}(k, M) = 0$$

muestran que $\text{Ext}^p(k, M/f_1M) = 0$, $p < r - 1$.

Luego existe una sucesión (M/f_1M) -regular f_2, \dots, f_r ; y f_1, f_2, \dots, f_r es M -regular.

Definición: La **profundidad** de M es el primer entero p tal que $\text{Ext}^p(k, M) \neq 0$, y por lo anterior, toda sucesión M -regular se amplía hasta una de longitud p . Diremos que M es **Cohen-Macaulay** si su profundidad coincide con la dimensión de su soporte.

Así, \mathcal{O} es un anillo Cohen-Macaulay cuando $\text{Ext}^p(k, \mathcal{O}) = 0$, $p < \dim \mathcal{O}$.

Por ejemplo, los anillos regulares son Cohen-Macaulay.

Si f_1, \dots, f_r es una sucesión regular, \mathcal{O} es Cohen-Macaulay $\Leftrightarrow \mathcal{O}/(f_1, \dots, f_r)$ lo es.

\mathcal{O} es Cohen-Macaulay si y sólo si $\widehat{\mathcal{O}}$ lo es, porque $\text{Ext}_{\mathcal{O}}^p(k, \mathcal{O}) \otimes_{\mathcal{O}} \widehat{\mathcal{O}} = \text{Ext}_{\widehat{\mathcal{O}}}^p(k, \widehat{\mathcal{O}})$.

Teorema de Ischebeck: Si M es un módulo finito generado de profundidad p y N es un módulo finito generado con soporte de dimensión d , entonces

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}}^n(N, M) = 0, \quad n < p - d.$$

Demostración: Por inducción sobre d . Tomando una filtración de N con cocientes $\simeq \mathcal{O}/\mathfrak{p}_i$ (p. 132) nos reducimos al caso $N = \mathcal{O}/\mathfrak{p}$, y cuando $d = 0$ es parte del teorema anterior.

Si $d = \dim \mathcal{O}/\mathfrak{p} > 0$, y tomamos $f \in \mathfrak{m} - \mathfrak{p}$, entonces $\dim \mathcal{O}/(\mathfrak{p}, f) < d$, y por inducción

$$\text{Ext}^n(\mathcal{O}/(\mathfrak{p}, f), M) = 0, \quad n < p - d + 1.$$

La sucesión exacta $0 \rightarrow \mathcal{O}/\mathfrak{p} \xrightarrow{f} \mathcal{O}/\mathfrak{p} \rightarrow \mathcal{O}/(\mathfrak{p}, f) \rightarrow 0$ induce una sucesión exacta

$$0 = \text{Ext}^n(\mathcal{O}/(\mathfrak{p}, f), M) \longrightarrow \text{Ext}^n(\mathcal{O}/\mathfrak{p}, M) \xrightarrow{f} \text{Ext}^n(\mathcal{O}/\mathfrak{p}, M) \longrightarrow \text{Ext}^{n+1}(\mathcal{O}/(\mathfrak{p}, f), M) = 0$$

cuando $n < p - d$. Ahora $\text{Ext}^n(\mathcal{O}/\mathfrak{p}, M) = 0$ por Nakayama. q.e.d.

1. Si \mathcal{O} es Cohen-Macaulay, y \mathfrak{p} es un primo asociado al cero, $\dim \mathcal{O} = \dim \mathcal{O}/\mathfrak{p}$.

$\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/\mathfrak{p}, \mathcal{O}) \neq 0$; luego $0 \geq \text{prof } \mathcal{O} - \dim \mathcal{O}/\mathfrak{p} = \dim \mathcal{O} - \dim \mathcal{O}/\mathfrak{p}$.

2. Si \mathcal{O} es Cohen-Macaulay, $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ es Cohen-Macaulay para todo ideal primo \mathfrak{p} .

Si \mathfrak{p} es minimal, $\dim \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} = 0$, y es Cohen-Macaulay. Si \mathfrak{p} no es minimal, por (1) existe $f_1 \in \mathfrak{p}$ que no divide a 0 . Por inducción $(\mathcal{O}/f_1\mathcal{O})_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/f_1\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ es Cohen-Macaulay; luego $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ es Cohen-Macaulay.

3. Si \mathcal{O} es Cohen-Macaulay de dimensión n , y $\dim \mathcal{O}/(f_1, \dots, f_n) = 0$, entonces la sucesión f_1, \dots, f_n es regular.

Como $\dim \mathcal{O}/(f_1, \dots, f_i) = n - i$, f_1 no divide a 0 y $\mathcal{O}/f_1\mathcal{O}$ es Cohen-Macaulay. Se acaba por inducción sobre n .

4. Sea $A \rightarrow B$ un morfismo finito e inyectivo entre anillos íntegros. Si A es regular y B es Cohen-Macaulay, entonces el morfismo es plano.

Podemos suponer que A es local de dimensión n , y $\mathfrak{m} = (f_1, \dots, f_n)$. Como el morfismo es finito, $\dim B/(f_1, \dots, f_n) = 0$, y f_1, \dots, f_n es una sucesión regular en todo punto cerrado y de $\text{Spec } B$, al ser B_y Cohen-Macaulay de dimensión n (p.141), y B es un A -módulo libre, $\text{Tor}_1^A(A/\mathfrak{m}, B) = H_1[K_B(f_1, \dots, f_n)] = 0$.

12.2.4. Cohomología Local

Lema: $H_x^p(X, N) = \varinjlim \text{Ext}_{\mathcal{O}}^p(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n, N)$, para todo \mathcal{O} -módulo N .

Demostración: La cohomología local se calcula con una resolución inyectiva $0 \rightarrow N \rightarrow I^\bullet$, porque los haces \tilde{I}^p son flascos (p. 311), y $\Gamma_x(X, \tilde{N}) = \varinjlim \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n, N)$,

$$H_x^p(X, \tilde{N}) = H^p[\Gamma_x(X, \tilde{I}^\bullet)] = \varinjlim H^p[\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n, I^\bullet)] = \varinjlim \text{Ext}_{\mathcal{O}}^p(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n, N).$$

Teorema: La profundidad de M es el primer entero p tal que $H_x^p(X, M) \neq 0$, en cuyo caso se cumple que $\text{Ext}_{\mathcal{O}}^p(k, M) \hookrightarrow H_x^p(X, M)$.

Demostración: Si $\text{Ext}^i(k, M) = 0$, entonces $\text{Ext}^i(\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}, M) = 0$.

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} \longrightarrow \mathcal{O}/\mathfrak{m}^{n+1} \longrightarrow \mathcal{O}/\mathfrak{m}^n \rightarrow 0$$

y de la sucesión exacta de extens se sigue que $\text{Ext}^i(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n, M) = 0$, y $H_x^i(X, M) = 0$.

Además, $\text{Ext}^{i+1}(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n, M) \hookrightarrow \text{Ext}^{i+1}(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^{n+1}, M)$, y $\text{Ext}^{i+1}(\mathcal{O}/\mathfrak{m}, M) \hookrightarrow H_x^{i+1}(X, M)$.

Corolario: \mathcal{O} es Cohen-Macaulay si y sólo si $H_x^p(X, \mathcal{O}) = 0$, $p < \dim \mathcal{O}$.

Demostración: Como $H^p(X, M) = 0$, $p \geq 1$, y $H^p(X - x, M) = 0$, $p \geq \dim(X - x) = \dim \mathcal{O} - 1$, siempre se tiene que $H_x^p(X, M) = 0$, $p > \dim \mathcal{O}$.

Lema: Sea \mathbf{C}_{fl} la categoría de \mathcal{O} -módulos de longitud finita. Un funtor contravariante A -lineal¹ $\mathbf{C}_{\text{fl}} \rightsquigarrow \mathbf{C}_{\text{fl}}$, $M \rightsquigarrow M^*$, es exacto y $k^* \simeq k$ si y sólo si $M^* = \text{Hom}_{\mathcal{O}}(-, Q)$ para alguna envolvente inyectiva Q del cuerpo residual k ; a saber

$$Q = \varinjlim (\mathcal{O}/\mathfrak{m}^r)^*.$$

Además, en tal caso el morfismo natural $M \rightarrow M^{**}$ es un isomorfismo para todo \mathcal{O} -módulo M de longitud finita, y

$$\mathcal{O}^{**} = \hat{\mathcal{O}}.$$

Demostración: Si M^* es exacto, por el teorema de representabilidad de Grothendieck, es representable por un límite inductivo Q de módulos de longitud finita, $Q = \varinjlim \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^r, Q)$. Veamos, usando el criterio del ideal que Q es inyectivo.

¹En el sentido de que conserva las combinaciones A -lineales de morfismos, $(a_1 f_1 + a_2 f_2)^* = a_1 f_1^* + a_2 f_2^*$; ver la nota 3 en p. 73.

Si I es un ideal, todo morfismo $I \rightarrow Q$ factoriza por $I/\mathfrak{m}^r I$; luego a través de $I/\mathfrak{m}^s \cap I$ por Artin-Rees. Como el funtor es exacto sobre los módulos de longitud finita, este morfismo puede extenderse a $\mathcal{O}/\mathfrak{m}^s$, luego a \mathcal{O} .

Ahora, como $\text{sop } Q = x$, es suma directa de envolventes inyectivas de k , y tal suma tiene un único término cuando $k^* \simeq k$.

Recíprocamente, si Q es una envolvente inyectiva de k , es claro que $M^* = \text{Hom}_{\mathcal{O}}(M, Q)$ es un funtor exacto y $k^* \simeq k$. Luego $k = k^{**}$ y, por inducción sobre la longitud, $M = M^{**}$ para todo módulo de longitud finita. Finalmente,

$$\mathcal{O}^{**} = Q^* = (\varinjlim \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^r, Q))^* = \varinjlim (\mathcal{O}/\mathfrak{m}^r)^{**} = \varinjlim \mathcal{O}/\mathfrak{m}^r = \widehat{\mathcal{O}}.$$

Ejemplo: Si \mathcal{O} es un anillo local, no hay ninguna envolvente inyectiva canónica del cuerpo residual \mathcal{O}/\mathfrak{m} . Pero cuando \mathcal{O} es una k -álgebra local y la extensión $k \rightarrow \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ es finita, $M^* = \text{Hom}_k(M, k)$ es un funtor exacto sobre los módulos de longitud finita, y tenemos un isomorfismo $\mathcal{O}/\mathfrak{m} \simeq (\mathcal{O}/\mathfrak{m})^*$ porque el \mathcal{O} -módulo $(\mathcal{O}/\mathfrak{m})^*$ está anulado por \mathfrak{m} ; luego se corresponde con una envolvente inyectiva de \mathcal{O}/\mathfrak{m} ,

$$D = \varinjlim (\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)^*.$$

Así, si A es una k -álgebra finita local, la envolvente inyectiva de A/\mathfrak{m} es $A^* = \text{Hom}_k(A, k)$.

Teorema: Si \mathcal{O} es un anillo local regular de dimensión n , entonces $H_x^n(X, \mathcal{O})$ es una envolvente inyectiva del cuerpo residual k .

Demostración: El complejo de Koszul muestra que

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}}^p(k, \mathcal{O}) = \begin{cases} k & p = n \\ 0 & p \neq n \end{cases}$$

y, por inducción sobre la longitud, tenemos que $\text{Ext}_{\mathcal{O}}^p(M, \mathcal{O}) = 0$, $p \neq n$, para todo módulo de longitud finita M . Luego el funtor $F(-) = \text{Ext}_{\mathcal{O}}^n(-, \mathcal{O})$ es exacto sobre los \mathcal{O} -módulos de longitud finita y $F(k) \simeq k$; luego se corresponde con una envolvente inyectiva de k ,

$$Q = \varinjlim \text{Ext}_{\mathcal{O}}^n(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^r, \mathcal{O}) = H_x^n(\mathcal{O}).$$

12.3. Haces Casicoherentes

Si $j: U \rightarrow X$ es un abierto y \mathcal{F} es un haz sobre X , pondremos $\mathcal{F}^U = j_* j^* \mathcal{F}$.

Sea $\mathfrak{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ una familia de abiertos de X , y $U = U_1 \cup \dots \cup U_n$.

Vamos a construir una resolución $0 \rightarrow \mathcal{F}^U \rightarrow \check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ de longitud n .

Si $n = 1$, ponemos $\check{C}^\bullet(U_1, \mathcal{F}) = \mathcal{F}^{U_1}$.

En general, poniendo $\mathfrak{U}' = \{U_2, \dots, U_n\}$, el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}^U & \longrightarrow & \mathcal{F}^{U_1} \oplus \mathcal{F}^{U'} & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{F}^{U_1 \cap U'} \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & \check{C}^\bullet(U_1, \mathcal{F}) \oplus \check{C}^\bullet(\mathfrak{U}', \mathcal{F}) & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \check{C}^\bullet(U_1 \cap \mathfrak{U}', \mathcal{F}) \end{array}$$

donde los morfismos verticales son casi-isomorfismos, muestra que tenemos casi-isomorfismos

$$\mathcal{F}^U \xrightarrow{\sim} \text{Cono}(\pi) \xrightarrow{\sim} \text{Cono}(\tilde{\pi})$$

y definimos $\check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \text{Cono}(\tilde{\pi})$. Cuando \mathfrak{U} es un recubrimiento de X , decimos que es el **complejo de Čech** de \mathcal{F} asociado a \mathfrak{U} .

Tenemos que $\check{C}^0 \mathcal{F} = \prod_i \mathcal{F}^{U_i}$, y en general

$$\check{C}^p \mathcal{F} = \prod_{i_1 < \dots < i_p} \mathcal{F}^{U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_p}},$$

$$d: \check{C}^p \mathcal{F} \longrightarrow \check{C}^{p+1} \mathcal{F}, \quad (ds)_{i_1 \dots i_{p+1}} = \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^k s_{i_1 \dots \widehat{i}_k \dots i_{p+1}} |_{U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_{p+1}}}.$$

Definición: Un morfismo de esquemas $X \rightarrow S$ es **separado** cuando el morfismo diagonal $X \rightarrow X \times_S X$ es una inmersión cerrada, y un esquema X es separado cuando lo es el morfismo $X \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$. En tal caso, la intersección $U \cap V$ de dos abiertos afines es afín, porque es un subsquema cerrado del esquema afín $U \times_{\mathbb{Z}} V$.

Por ejemplo, los esquemas $\text{Spec } A$ y $\text{Proj } A$ siempre son separados.

Teorema: Si \mathcal{M} es un haz casicoherente sobre un esquema noetheriano y separado X , y $X = U_1 \cup \dots \cup U_n$ es un recubrimiento por abiertos afines, el complejo de Čech

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \check{C}^0 \mathcal{M} \longrightarrow \dots \longrightarrow \check{C}^n \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

es una resolución finita de \mathcal{M} por haces casicoherentes acíclicos.

Además, si $0 \rightarrow \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'' \rightarrow 0$ es una sucesión exacta de haces casicoherentes, la sucesión $0 \rightarrow \check{C}^\bullet \mathcal{M}' \rightarrow \check{C}^\bullet \mathcal{M} \rightarrow \check{C}^\bullet \mathcal{M}'' \rightarrow 0$ también es exacta.

Demostración: Cuando $i: U \rightarrow X$ es un abierto afín, i_* conserva la cohomología de los haces casicoherentes (pp. 231, 232), así que \mathcal{M}^U es acíclico, y el funtor $\mathcal{M} \rightsquigarrow \mathcal{M}^U$ es exacto.

Además \mathcal{M}^U es casicoherente, porque su restricción a cualquier abierto afín V coincide con $j_*(\mathcal{M}|_{U \cap V})$, donde $j: U \cap V \rightarrow V$ es la inclusión, y $U \cap V$ es afín.

Corolario: Si $f: X \rightarrow S$ es un morfismo entre esquemas noetherianos separados, y \mathcal{M} es un haz casicoherente en X , los haces $R^i f_* \mathcal{M}$ son casicoherentes.

Demostración: Podemos suponer que $S = \text{Spec } A$.

Si $i: U \rightarrow X$ es un abierto afín, el haz $f_* \mathcal{M}^U = (fi)_*(\mathcal{M}|_U)$ es casicoherente (porque fi es un morfismo entre esquemas afines), y \mathcal{M}^U es f_* -acíclico.

Luego $f_*(\check{C}^\bullet \mathcal{M})$ es un complejo de haces casicoherentes, y los haces $R^i f_* \mathcal{M} = \mathcal{H}^i[f_*(\check{C}^\bullet \mathcal{M})]$ son casicoherentes.

Definición: Un morfismo de esquemas $\phi: T \rightarrow S$ es **plano** si lo son los morfismos $\mathcal{O}_{S,s} \rightarrow \mathcal{O}_{T,t}$, donde $s = \phi(t)$.

En tal caso, el funtor $\phi^*: \mathcal{O}_S$ -módulos $\rightsquigarrow \mathcal{O}_T$ -módulos conserva sucesiones exactas.

Teorema: Dado un producto fibrado de morfismos entre esquemas noetherianos separados

$$\begin{array}{ccc} X_T & \xrightarrow{\bar{\phi}} & X \\ \downarrow \bar{f} & & \downarrow f \\ T & \xrightarrow{\phi} & S \end{array}$$

y un haz casicoherente \mathcal{M} en X , si el cambio de base ϕ es plano,

$$\phi^*(R^i f_* \mathcal{M}) = R^i \bar{f}_*(\bar{\phi}^* \mathcal{M}).$$

Demostración: Para ver que el morfismo natural $\phi^*(R^i f_* \mathcal{M}) \rightarrow R^i \bar{f}_*(\bar{\phi}^* \mathcal{M})$ que define la imagen inversa es un isomorfismo, podemos suponer que $S = \text{Spec } A$ y $T = \text{Spec } B$ son afines, y hemos de probar que $H^i(X, \mathcal{M}) \otimes_A B = H^i(X_B, \bar{\phi}^* \mathcal{M})$.

Si $\{U_i\}$ es un recubrimiento finito de X por abiertos afines, los abiertos $\bar{\phi}^{-1}(U_i)$ son afines y recubren X_B , y

$$\Gamma(X, \check{C}^\bullet \mathcal{M}) \otimes_A B = \Gamma(X_B, \check{C}^\bullet \bar{\phi}^* \mathcal{M}).$$

Tomando cohomología se concluye, porque B es un A -módulo plano.

Fórmula de Deligne: Sea \mathfrak{p} un haz coherente de ideales en un esquema noetheriano X . Si \mathcal{N} es coherente y \mathcal{M} es casicoherente se cumple

$$\varinjlim \text{Hom}_X(\mathfrak{p}^n \mathcal{N}, \mathcal{M}) = \text{Hom}_U(\mathcal{N}|_U, \mathcal{M}|_U), \quad U = X - (\mathfrak{p})_0.$$

Demostración: Supongamos que $X = \text{Spec } A$, $\mathcal{M} = \widetilde{M}$, $\mathcal{N} = \widetilde{N}$, y $\mathfrak{p} = fA$.

Si $N = A$, los anuladores de f^n estabilizan a partir de un exponente r , y cada elemento $\frac{m}{f^i} = \frac{f^r m}{f^{i+r}} \in M_f$ proviene del morfismo $\frac{m}{f^i}: f^{i+r} A \rightarrow M$, que está bien definido.

Luego $\varinjlim \text{Hom}_A(f^n A, M) = M_f$, y la fórmula es cierta cuando N es libre.

Si N no es libre, $N = L/K$ donde L es un libre finito. Por Artin-Rees, existe un exponente r tal que $K \cap f^{n+r} L = f^n(K \cap f^r L)$, y sustituyendo N por $f^r N$ podemos suponer que existe una presentación $L' \rightarrow L \rightarrow N \rightarrow 0$ tal que $f^n L' \rightarrow f^n L \rightarrow f^n N \rightarrow 0$ sigue siendo exacta.

Tomando $\text{Hom}_A(-, M)$ y \varinjlim , concluimos.

Si $\mathfrak{p} = (f_1, \dots, f_r)$, ponemos $\mathfrak{p}_1 = (f_1)$, $\mathfrak{p}_2 = (f_2, \dots, f_r)$.

La filtración $\mathfrak{p}_1^n N + \mathfrak{p}_2^n N$ es equivalente a $\mathfrak{p}^n N$, y tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathfrak{p}_1^n N \cap \mathfrak{p}_2^n N \longrightarrow \mathfrak{p}_1^n N \oplus \mathfrak{p}_2^n N \longrightarrow \mathfrak{p}_1^n N + \mathfrak{p}_2^n N \longrightarrow 0$$

Además, por Artin-Rees $\mathfrak{p}_1^n \mathfrak{p}_2^n N \supseteq \mathfrak{p}_1^{n+r} N \cap \mathfrak{p}_2^n N \supseteq \mathfrak{p}_1^{n+r} N \cap \mathfrak{p}_2^{n+r} N$, y la filtración $\mathfrak{p}_1^n N \cap \mathfrak{p}_2^n N$ es equivalente a $(\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2)^n N$.

Tomando $\text{Hom}_A(-, M)$ y \varinjlim , por inducción sobre r obtenemos una sucesión exacta que permite concluir, donde $U_i = X - (\mathfrak{p}_i)_0$,

$$0 \longrightarrow \varinjlim \text{Hom}_A(\mathfrak{p}^n N, M) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^2 \text{Hom}_{U_i}(\mathcal{N}|_{U_i}, \mathcal{M}|_{U_i}) \longrightarrow \text{Hom}_{U_1 \cap U_2}(\mathcal{N}|_{U_1 \cap U_2}, \mathcal{M}|_{U_1 \cap U_2})$$

En general, cuando X no es afín, el morfismo de haces

$$\varinjlim \underline{\text{Hom}}_X(\mathfrak{p}^n \mathcal{N}, \mathcal{M}) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_X(\mathcal{N}, \mathcal{M})^U$$

induce un isomorfismo al tomar secciones en cualquier abierto afín; luego es un isomorfismo de haces, y se concluye al tomar secciones globales. q.e.d.

Si X es un esquema, todo \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{M} admite un morfismo inyectivo $0 \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{I}$ en un \mathcal{O}_X -módulo inyectivo (p. 277). Ahora, el funtor $\text{Hom}_X(-, \mathcal{I})$ es representable en la categoría de haces casicoherentes, así que existe un haz casicoherente \mathcal{I}_{qc} tal que

$$\text{Hom}_X(\mathcal{N}, \mathcal{I}_{\text{qc}}) = \text{Hom}_X(\mathcal{N}, \mathcal{I})$$

para todo haz casicoherente \mathcal{N} . Por tanto, \mathcal{I}_{qc} es inyectivo en la categoría de haces casicoherentes.

Cuando \mathcal{M} es casicoherente, el morfismo $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{I}_{\text{qc}}$ es inyectivo, y vemos que \mathcal{M} admite una resolución por haces casicoherentes inyectivos.

Lema: Si X es noetheriano, todo haz casicoherente e inyectivo I es flasco. Más aún, para todo haz casicoherente \mathcal{M} , el haz $\underline{\text{Hom}}_X(\mathcal{M}, I)$ es flasco.

Demostración: Sea U un abierto de X . Si \mathcal{M} es coherente, es epiyectivo el morfismo

$$\text{Hom}_X(\mathcal{M}, I) \longrightarrow \varinjlim \text{Hom}_X(\mathfrak{p}^n \mathcal{M}, I) = \text{Hom}_U(\mathcal{M}|_U, I|_U).$$

En general, dado $s: \mathcal{M}|_U \rightarrow I|_U$, sea $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ máximo, de modo que existe $t: \mathcal{N} \rightarrow I$ tal que $t|_U = s|_{\mathcal{N}|_U}$ (existe por el lema de Zorn).

Si $\mathcal{N} \neq \mathcal{M}$, tomamos $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}'$ tal que \mathcal{N}'/\mathcal{N} es coherente, y una extensión $t': \mathcal{N}' \rightarrow I$ de t .

Como $s - t': \mathcal{N}'|_U \rightarrow I|_U$ se anula en $\mathcal{N}|_U$, y \mathcal{N}'/\mathcal{N} es coherente, existe $\bar{t}: \mathcal{N}' \rightarrow I$ tal que $\bar{t}|_U = s - t'$. Ahora $t' + \bar{t}: \mathcal{N}' \rightarrow I$ coincide con s en U , contra el carácter maximal de \mathcal{N} .

12.4. Teoría K

En este apartado supondremos que los esquemas son noetherianos y separados.

El grupo K (p.117) de los haces coherentes sobre un esquema noetheriano X se denota $K_\bullet(X)$, y el de los haces coherentes localmente libres $K^\bullet(X)$.

Cada cerrado Y de X define un elemento $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X/\mathfrak{p}_Y$ de $K_\bullet(X)$, que denotaremos Y .

Si \mathcal{L} es localmente libre, la función $\mathcal{L}' \mapsto \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}' \in K^\bullet(X)$ es aditiva, así que \mathcal{L} define un endomorfismo $h_{\mathcal{L}}: K^\bullet(X) \rightarrow K^\bullet(X)$, $h_{\mathcal{L}}(\mathcal{L}') = \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}'$. La función $\mathcal{L} \mapsto h_{\mathcal{L}} \in \text{End}(K^\bullet(X))$ es aditiva; luego $K^\bullet(X)$ es un anillo con el producto (la unidad es \mathcal{O}_X)

$$\mathcal{L} \cdot \mathcal{L}' = \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}'.$$

Igualmente, $K_\bullet(X)$ es un $K^\bullet(X)$ -módulo: $\mathcal{L} \cdot \mathcal{M} = \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$.

Si $f: X \rightarrow S$ es un morfismo de esquemas, la función $\mathcal{L} \mapsto f^* \mathcal{L} \in K^\bullet(X)$ es aditiva, y define un morfismo de anillos $f^!: K^\bullet(S) \rightarrow K^\bullet(X)$, $f^!(\mathcal{L}) = f^* \mathcal{L}$.

Igualmente, cuando f es plano, define un morfismo de grupos $f^!: K_\bullet(S) \rightarrow K_\bullet(X)$.

Si $f: X \rightarrow S$ es un **morfismo proyectivo** (factoriza $X \xrightarrow{i} \mathbb{P}_n \times S \rightarrow S$, donde i es una inmersión cerrada) y \mathcal{M} es un \mathcal{O}_X -módulo coherente, los haces $R^p f_* \mathcal{M}$ son coherentes, y nulos cuando $p \gg 0$ (p. 245). La función $\mathcal{M} \mapsto \sum_p (-1)^p R^p f_* \mathcal{M} \in K_\bullet(S)$ es aditiva, y define la **imagen directa admirable** de Grothendieck

$$f_!: K_\bullet(X) \longrightarrow K_\bullet(S), \quad f_!(\mathcal{M}) = \sum_p (-1)^p R^p f_* \mathcal{M}.$$

Teorema: $(f \circ g)_! = f_! \circ g_!$.

Demostración: En teoría K , todo objeto filtrado $\mathcal{M} = \bigcup_n \mathcal{M}_n$ coincide con su graduado, $\mathcal{M} = \sum_n \mathcal{M}_n / \mathcal{M}_{n+1}$, y la suma alternada de los términos de un complejo acotado \mathcal{M}^\bullet coincide con la de su homología, $\sum_p (-1)^p \mathcal{M}^p = \sum_p (-1)^p \mathcal{H}^p(\mathcal{M}^\bullet)$.

Ahora el teorema se sigue de la sucesión espectral de Leray,

$$\begin{aligned} E_2^{p,q} &= R^p f_* (R^q g_* \mathcal{M}) \Rightarrow R^{p+q} (fg)_* \mathcal{M}, \\ f_!(g_! \mathcal{M}) &= \sum_{p,q} (-1)^{p+q} R^p f_* (R^q g_* \mathcal{M}) = \sum_n (-1)^n R^n (fg)_* \mathcal{M} = (fg)_! \mathcal{M}. \end{aligned}$$

Fórmula de Proyección: $f_!(f^!(s) \cdot x) = s \cdot f_!(x)$.

Demostración: El morfismo natural $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_S} R^p f_* \mathcal{M} \rightarrow R^p f_* (f^* \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M})$ es un isomorfismo cuando \mathcal{L} es localmente libre; pues el problema es local, y el caso $\mathcal{L} = \mathcal{O}_S$ es obvio.

Teorema: $\phi^! f_! = \bar{\phi}_! \bar{f}^! : K_\bullet(X) \rightarrow K_\bullet(T)$, para todo cambio de base plano $\phi: T \rightarrow S$.

Demostración: $\phi^*(R^p f_* \mathcal{M}) = R^p \bar{f}_*(\bar{\phi}^* \mathcal{M})$, (p. 319).

Teorema: Si X es regular y de dimensión finita, el morfismo natural $K^\bullet(X) \rightarrow K_\bullet(X)$ es un isomorfismo, y pondremos $K(X) = K^\bullet(X) = K_\bullet(X)$.

Demostración: Veamos que todo haz coherente \mathcal{M} es cociente de uno localmente libre.

Si \mathcal{O} es el anillo local de X en un punto genérico y del complementario Y de un abierto U afín, $\text{Spec } \mathcal{O} - y = U \cap \text{Spec } \mathcal{O} = \text{Spec } A$ es afín porque X es separado.

De la sucesión exacta de cohomología local

$$0 \rightarrow \mathcal{O} = H^0(\text{Spec } \mathcal{O}, \tilde{\mathcal{O}}) \rightarrow A = H^0(\text{Spec } \mathcal{O} - y, \tilde{\mathcal{O}}) \rightarrow H_y^1(\text{Spec } \mathcal{O}, \tilde{\mathcal{O}})$$

se sigue que $H_y^1(\text{Spec } \mathcal{O}, \tilde{\mathcal{O}}) \neq 0$, y \mathcal{O} es un anillo local regular de profundidad ≤ 1 .

Luego $\dim \mathcal{O} \leq 1$, y el ideal \mathfrak{p} de Y es de línea (donde no sea nulo). Como

$$\mathcal{M}(U) = \varinjlim \text{Hom}_X(\mathfrak{p}^n, \mathcal{M})$$

y $\mathcal{M}(U)$ genera la fibra de \mathcal{M} en todo punto de U , existe un morfismo $\oplus_i \mathfrak{p}^{n_i} \rightarrow \mathcal{M}$ que es epiyectivo en U . Recubriendo X por abiertos afines terminamos.

Ahora, por el teorema de Serre, \mathcal{M} admite una resolución finita $\mathcal{L}_\bullet \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow 0$ por haces localmente libres, y el elemento $\sum_p (-1)^p \mathcal{L}_p$ de $K^\bullet(X)$ no depende de la resolución.

En efecto, si $\mathcal{L}'_\bullet \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow 0$ es otra resolución, y existe un epimorfismo $\mathcal{L}'_\bullet \rightarrow \mathcal{L}_\bullet$ (que induce la identidad en \mathcal{M}), su núcleo \mathcal{N}_\bullet es una sucesión exacta; luego $\sum_p (-1)^p \mathcal{N}_p = 0$ y

$$\sum_p (-1)^p \mathcal{L}'_p = \sum_p (-1)^p \mathcal{L}_p + \sum_p (-1)^p \mathcal{N}_p = \sum_p (-1)^p \mathcal{L}_p.$$

En el caso general se toma una resolución finita \mathcal{L}''_\bullet que se epiecte en \mathcal{L}_\bullet y \mathcal{L}'_\bullet .

Construida la etapa $p - 1$, la siguiente es (tomando $Z''_p \rightarrow Z_p$ y $Z'_p \rightarrow Z''_p$ epiyectivos)

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathcal{L}_p & \longrightarrow & Z_p & \longrightarrow & \mathcal{L}_{p-1} & \xrightarrow{d} & \mathcal{L}_{p-2} & & Z_p = \text{Ker } d \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \mathcal{L}''_p & \xrightarrow{\text{epi}} & Z''_p & \longrightarrow & \mathcal{L}''_{p-1} & \xrightarrow{d''} & \mathcal{L}''_{p-2} & & Z''_p = \text{Ker } d'' \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \mathcal{L}'_p & \longrightarrow & Z'_p & \longrightarrow & \mathcal{L}'_{p-1} & \xrightarrow{d'} & \mathcal{L}'_{p-2} & & Z'_p = \text{Ker } d'
 \end{array}$$

Ahora, dada una sucesión exacta $0 \rightarrow \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'' \rightarrow 0$, tomamos epimorfismos $\mathcal{L}'_0 \rightarrow \mathcal{M}'$, $\mathcal{L}''_0 \rightarrow \mathcal{M}$, y tenemos un diagrama conmutativo de filas exactas,

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{L}'_0 & \longrightarrow & \mathcal{L}'_0 \oplus \mathcal{L}''_0 & \longrightarrow & \mathcal{L}''_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}' & \longrightarrow & \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M}'' & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Procediendo igualmente con los núcleos de los morfismos verticales obtenemos resoluciones $\mathcal{L}'_\bullet, \mathcal{L}_\bullet, \mathcal{L}''_\bullet$ tales que $\mathcal{L}_p = \mathcal{L}'_p \oplus \mathcal{L}''_p$. Luego la función $\mathcal{M} \mapsto \sum_p (-1)^p \mathcal{L}_p \in K^\bullet(X)$ es aditiva, y define el morfismo $K_\bullet(X) \rightarrow K^\bullet(X)$ inverso del natural $K^\bullet(X) \rightarrow K_\bullet(X)$. q.e.d.

Si $\mathcal{M} = \sum_p (-1)^p \mathcal{L}_p$ y $\mathcal{N} = \sum_q (-1)^q \mathcal{L}'_q$, entonces $\mathcal{M} \cdot \mathcal{N} = \sum_{p,q} (-1)^{p+q} \mathcal{L}_p \otimes \mathcal{L}'_q$.

Como en teoría K el complejo $\mathcal{L}_\bullet \otimes \mathcal{L}'_\bullet$ es igual a su homología, cuando X es regular y de dimensión finita, el producto de haces coherentes viene dado por la fórmula

$$\mathcal{M} \cdot \mathcal{N} = \sum_p (-1)^p \underline{\mathrm{Tor}}_p^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}),$$

donde $\underline{\mathrm{Tor}}_p^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ es el haz asociado al prehaz $U \rightsquigarrow \mathrm{Tor}_p^{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{M}(U), \mathcal{N}(U))$, y en cada abierto afín $U = \mathrm{Spec} A$ es el haz asociado al módulo $\mathrm{Tor}_p^A(\mathcal{M}(U), \mathcal{N}(U))$.

Igualmente $f^! \mathcal{M} = \sum_p (-1)^p \mathcal{L}_p \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_X$, y la imagen inversa de haces coherentes es

$$f^! \mathcal{M} = \sum_p (-1)^p \underline{\mathrm{Tor}}_p^{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M}),$$

y esta misma fórmula permite definir la imagen inversa $j^! : K_\bullet(S) \rightarrow K_\bullet(X)$ para toda inmersión cerrada regular $j : X \rightarrow S$.

1. Si $S = \mathrm{Spec} k$, donde k es cuerpo, la dimensión define un isomorfismo $K(S) = \mathbb{Z}$.

Si $\pi : X \rightarrow S$ es una variedad proyectiva, $\pi_! : K(X) \rightarrow K(S) = \mathbb{Z}$ coincide con la característica de Euler-Poincaré, $\pi_!(\mathcal{M}) = \sum_p (-1)^p \dim H^p(X, \mathcal{M}) = \chi(X, \mathcal{M})$.

Dados subesquemas cerrados Y, Z , su número global de intersección es

$$(Y \cap Z) = \pi_!(\mathcal{O}_Y \cdot \mathcal{O}_Z) = \sum_p (-1)^p \chi(X, \underline{\mathrm{Tor}}_p^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Z)),$$

y cuando se cortan en dimensión 0, coincide con el número de puntos de corte, contando cada punto x con su grado y la **multiplicidad de intersección** de Serre

$$(Y \cap Z)_x = \sum_p (-1)^p l(\mathrm{Tor}_p^{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}_{Y,x}, \mathcal{O}_{Z,x})).$$

2. El ideal de una curva proyectiva plana C_n de grado n es $\simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-n)$; luego en $K(\mathbb{P}_2)$ se cumple que $C_n = 1 - \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-n)$, y obtenemos el **teorema de Bézout** (p. 245):

$$\begin{aligned} (C_n \cap C_m) &= \pi_!(C_n \cdot C_m) = \pi_!(1 - \mathcal{O}(-n) - \mathcal{O}(-m) + \mathcal{O}(-n - m)) \\ &= 1 - \binom{n-1}{2} - \binom{m-1}{2} + \binom{n+m-1}{2} = nm. \end{aligned}$$

3. Si C es una curva proyectiva y lisa de género g , en $K(C \times C)$ tenemos que $\mathcal{O}_C = 1 - L_{-\Delta}$ y $\Omega_C = L_{-\Delta} - L_{-2\Delta}$, donde Δ es la diagonal; luego

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_\Delta \cdot \mathcal{O}_\Delta &= (1 - L_{-\Delta})^2 = 1 - 2L_{-\Delta} + L_{-2\Delta} = \mathcal{O}_C - \Omega_C, \\ (\Delta \cap \Delta) &= \chi(\mathcal{O}_C) - \chi(\Omega_C) = 2 - 2g. \end{aligned}$$

En dimensión mayor, usando el complejo de Koszul se puede ver que

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{Tor}}_p^{\mathcal{O}_{X \times X}}(\mathcal{O}_\Delta, \mathcal{O}_\Delta) &= \Lambda^p \underline{\mathrm{Tor}}_1^{\mathcal{O}_{X \times X}}(\mathcal{O}_\Delta, \mathcal{O}_\Delta) = \Lambda^p(\mathfrak{p}_\Delta / \mathfrak{p}_\Delta^2) = \Omega_X^p, \\ \mathcal{O}_\Delta \cdot \mathcal{O}_\Delta &= \sum_p (-1)^p \Omega_X^p, \\ (\Delta \cap \Delta) &= \sum_p (-1)^p \chi(\Omega_X^p) = \sum_{p,q} (-1)^{p+q} \dim_k H^p(X, \Omega_X^q). \end{aligned}$$

4. Cuando $\dim X = 1$, el morfismo $K(X) \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Pic}(X)$, $\mathcal{L} \mapsto (r, \Lambda^r \mathcal{L})$, donde $r = \mathrm{rg} \mathcal{L}$, es un isomorfismo, y en particular $K(\mathbb{Z}) = K(k[t]) = \mathbb{Z}$, $K(\mathbb{P}_{1,k}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

En efecto, el morfismo $\mathbb{Z} \oplus \mathrm{Pic}(X) \rightarrow K(X)$, $(n, D) \mapsto n + D$ está bien definido porque $D = L_D - 1$, y es inverso del anterior porque (p. 322) los haces de línea siempre generan el grupo $K(X)$. Esta igualdad $D = L_D - 1$ es obvia cuando $D = 0$, y si es cierta para D también lo es para $D \pm x$, en virtud de la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow L_D \longrightarrow L_{D+x} \longrightarrow \mathcal{O}_X / \mathfrak{m}_x \longrightarrow 0$$

Lema: *Los haces \mathcal{O}_Y , con Y un cerrado irreducible, generan el grupo $K_\bullet(X)$.*

Demostración: Si \mathcal{M} es un haz coherente, procedemos por inducción sobre su soporte y sobre las longitudes de sus fibras en los puntos genéricos de $Z = \text{sop } \mathcal{M}$.

Sea \mathfrak{p} el ideal de un punto genérico x de Z . Si éste tiene más puntos genéricos, por inducción el teorema es cierto para $\mathcal{M}/\mathfrak{p}\mathcal{M}$ y para $\mathfrak{p}\mathcal{M}$ (porque $\mathfrak{p}_x\mathcal{M}_x \neq \mathcal{M}_x$); luego también para \mathcal{M} .

Si $Z = \bar{x}$, entonces \mathcal{M} está anulado por una potencia de \mathfrak{p} , y basta probar el teorema para los cocientes $\mathfrak{p}^i\mathcal{M}/\mathfrak{p}^{i+1}\mathcal{M}$.

Ahora, cuando $\mathfrak{p}\mathcal{M} = 0$, podemos suponer que $X = \bar{x}$ es íntegro.

Si \mathcal{M}_x es el haz constante de fibra \mathcal{M}_x , el núcleo del morfismo $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_x$ está en la hipótesis de inducción, así que podemos suponer que \mathcal{M} carece de torsión.

En tal caso una sección racional $s \in \mathcal{M}_x$ no nula define una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}/IM \longrightarrow 0, \quad I(U) = \{f \in \mathcal{O}_X(U) : fs \in \mathcal{M}(U)\},$$

donde \mathcal{M}/IM y \mathcal{O}_X/I están en la hipótesis de inducción.

Como el teorema es cierto para \mathcal{O}_X , también lo es para I y para \mathcal{M} .

Teorema (Gysin): *Si $j: Y \rightarrow X$ es un subesquema cerrado, e $i: U \rightarrow X$ es el abierto complementario, tenemos una sucesión exacta*

$$K_\bullet(Y) \xrightarrow{j!} K_\bullet(X) \xrightarrow{i!} K_\bullet(U) \longrightarrow 0$$

Demostración: Es obvio que $i^!j_! = 0$, y $i^!$ es epiyectivo porque todo haz coherente \mathcal{M} en U es restricción de un haz coherente $\widetilde{\mathcal{M}}$ en X (si $i_*\mathcal{M} = \bigcup_k \mathcal{M}_k$, con \mathcal{M}_k coherente, $\mathcal{M} = (i_*\mathcal{M})|_U = \bigcup_k \mathcal{M}_k|_U$, y $\mathcal{M} = \mathcal{M}_k|_U$ para algún índice k). Veamos que $\text{Ker } i^! \subseteq \text{Im } j_!$.

Dos extensiones coherentes $\widetilde{\mathcal{M}}$ y $\widetilde{\mathcal{M}}'$ de \mathcal{M} difieren en $K_\bullet(X)$ en haces concentrados en Y .

En efecto, los núcleos de $\widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow i_*\mathcal{M}$ y $\widetilde{\mathcal{M}}' \rightarrow i_*\mathcal{M}$ están concentrados en Y , y sus imágenes difieren de la suma en haces concentrados en Y .

Ahora, si $K_Y(X)$ es el subgrupo de $K_\bullet(X)$ generado por los haces concentrados en Y , el morfismo $s: K_\bullet(U) \rightarrow K_\bullet(X)/K_Y(X)$, $\mathcal{M} \mapsto \widetilde{\mathcal{M}}$, está bien definido, y por tanto $\text{Ker } i^! \subseteq K_Y(X)$.

Por último, $\text{Im } j_! = K_Y(X)$, porque si un haz coherente \mathcal{N} está concentrado en Y , en teoría K coincide con su graduado por la filtración finita $\{\mathfrak{p}_Y^n \mathcal{N}\}$, que es un \mathcal{O}_Y -módulo.

Definición: Si E es un \mathcal{O}_X -módulo localmente libre, el **fibrado vectorial** $\pi: E \rightarrow X$ y el **fibrado proyectivo** $\pi: \mathbb{P}(E) \rightarrow X$ asociados a E son

$$E = \text{Spec } S^\bullet E^*, \\ \mathbb{P}(E) = \text{Proj } S^\bullet E^*,$$

y la propiedad universal (ver p. 243) del fibrado proyectivo $\mathbb{P}(E)$ es

$$\text{Hom}_X(T, \mathbb{P}(E)) = \left[\begin{array}{c} \text{Cocientes de línea} \\ \text{de } E^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_T \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{Subfibrados de línea} \\ \text{de } E \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_T \end{array} \right]$$

Teorema: *Si $E \rightarrow X$ es un fibrado vectorial, $\pi^!: K_\bullet(X) \rightarrow K_\bullet(E)$ es un isomorfismo.*

Demostración: El morfismo $\pi^!$ es inyectivo porque la sección nula $s: X \rightarrow E$ induce un morfismo $s^!: K_\bullet(E) \rightarrow K_\bullet(X)$, y $s^!\pi^! = \text{Id}$ al ser (basta tomar una resolución de M por A -módulos libres)

$$\text{Tor}_p^{A[t_1, \dots, t_n]}(M \otimes_A A[t_1, \dots, t_n], A) = 0, \quad p \geq 1.$$

La epiyectividad, por inducción noetheriana y Gysin, se reduce al caso afín $X = \text{Spec } A$ y trivial $E = \mathbb{A}_X^n$, y podemos suponer que $n = 1$.

Sea Z un cerrado irreducible de \mathbb{A}_X^1 , \mathfrak{q} el ideal primo de $A[t]$ que lo define y $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$.

Si $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}A[t]$, terminamos, $A[t]/\mathfrak{q} = \pi^1(A/\mathfrak{p})$.

Si no, \mathfrak{q} define un ideal primo no nulo de $(A/\mathfrak{p})[t]$, que será principal al localizar por alguna función no nula $\bar{f} \in A/\mathfrak{p}$, de modo que $\mathfrak{q} = (\mathfrak{p}, Q(t))$ en $A_f[t]$.

Se sigue que $A_f[t]/\mathfrak{q} = 0$ en teoría K, como muestra la sucesión exacta (donde $B = A_f/\mathfrak{p}A_f$)

$$0 \longrightarrow B[t] \xrightarrow{\cdot Q(t)} B[t] \longrightarrow A_f[t]/\mathfrak{q} \longrightarrow 0$$

Es decir, $Z = 0$ en $K_\bullet(\mathbb{A}^1 \times U_f)$.

Por Gysin, Z proviene de $K_\bullet(\mathbb{A}_Y^1)$, donde $Y = (f)_0$.

Por inducción noetheriana $K_\bullet(Y) \rightarrow K_\bullet(\mathbb{A}_Y^1)$ es epiyectivo, y terminamos.

Teorema de Periodicidad: Si E es un \mathcal{O}_X -módulo localmente libre de rango $r+1$, y ponemos $x = 1 - \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1) \in K^\bullet(\mathbb{P}(E))$, tenemos un isomorfismo

$$K_\bullet(X)^{r+1} \xrightarrow{\sim} K_\bullet(\mathbb{P}(E)), (a_0, \dots, a_r) \mapsto \sum_i \pi^1(a_i)x^i.$$

Demostración: Si \mathcal{M} es un \mathcal{O}_X -módulo coherente, el cálculo (p. 245) de la cohomología de los $\mathcal{O}(n)$ prueba también que $R^p\pi_*(\pi^*\mathcal{M} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(n)) = \mathcal{M} \otimes R^p\pi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(n))$.

Por tanto tenemos que $\pi_!(\pi^1(a)) = a$, y $\pi_!(\pi^1(a)t^n) = 0$, $1 \leq n \leq r$, donde $t = \mathcal{O}(-1)$.

$1, x, \dots, x^r$ son independientes: Como $x = 1 - t$, basta ver que $1, t, \dots, t^r$ lo son.

Si $\pi^1(a_0) + \pi^1(a_1)t + \dots + \pi^1(a_r)t^r = 0$, aplicando $\pi_!$ vemos que $a_0 = 0$.

Ahora, multiplicando por t^{-1} y aplicando $\pi_!$, vemos que $a_1 = 0$, y así sucesivamente.

Veamos ahora que $1, x, \dots, x^r$ son generadores:

Por inducción noetheriana y Gysin basta probarlo en un abierto en que E sea trivial.

Cuando $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}_r \times X$, la clase de un hiperplano $j: \mathbb{P}_{r-1} \times X \rightarrow \mathbb{P}_r \times X$ es $x_r = x$, y procedemos por inducción sobre r . Por Gysin tenemos una sucesión exacta

$$K_\bullet(\mathbb{P}_{r-1} \times X) \xrightarrow{j_!} K_\bullet(\mathbb{P}_r \times X) \longrightarrow K_\bullet(\mathbb{A}^r \times X) \longrightarrow 0,$$

y $x_{r-1} = j^!x_r$. Por la fórmula de proyección $j_!(x_{r-1}^d) = x_r^{d+1}$, y la imagen de $j_!$ está generada por x_r, \dots, x_r^r . Como $K_\bullet(\mathbb{A}^r \times X) = K_\bullet(X)$, concluimos.

Corolario: Si $\pi: P \rightarrow X$ es un fibrado afín, $\pi^1: K(X) \rightarrow K(P)$ es un isomorfismo.

Demostración: Si V es el fibrado vectorial asociado, la construcción del cierre proyectivo de un espacio afín (p. 98, y nótese que la función constante 1 define una 1-forma sobre E que se anula en V) muestra que tenemos una sucesión exacta de \mathcal{O}_X -módulos localmente libres $0 \rightarrow V \rightarrow E \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$ tal que P es el complementario de la inmersión cerrada $i: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(E)$.

El morfismo natural $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1) \rightarrow E \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}$ identifica $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1)$ con el ideal de $\mathbb{P}(V)$. Luego $i_!(1) = x_E$, y la fórmula de proyección prueba que

$$i_!(1) = x_E, i_!(x_V) = x_E^2, \dots, i_!(x_V^{r-1}) = x_E^r.$$

Ahora la sucesión exacta de Gysin $K(\mathbb{P}(V)) \xrightarrow{j_!} K(\mathbb{P}(E)) \xrightarrow{i^!} K(P) \rightarrow 0$ y el teorema de Periodicidad permiten concluir.

Corolario: $K(\mathbb{P}_r) = \mathbb{Z}[x]/(x^{r+1})$, donde $x^d = \mathbb{P}_{n-d}$.

Demostración: Por inducción sobre r , porque $j_!(j^!x^d) = j_!(j^!x^d) = x^{d+1}$.

q.e.d.

1. Si C es una curva plana de grado d , se cumple $C = 1 - (1 - x)^d = dx - \binom{d}{2}x^2$.
2. En \mathbb{P}_n tenemos que $\chi(x^r) = 1$, $0 \leq r \leq n$. Ahora, si C es una curva de grado d en \mathbb{P}_3 , tenemos que $\chi(C \cdot x) = d$, $\chi(C \cdot x^2) = \chi(C \cdot x^3) = 0$; luego $C = dx^2 + ax^3$. Como $d + a = \chi(C) = 1 - \pi$, vemos que $C = dx^2 + (1 - d - \pi)x^3$.

Si S es una superficie de grado d en \mathbb{P}_3 , tenemos que $\chi(S \cdot x^2) = d$, $\chi(S \cdot x^3) = 0$; luego $S = dx + ax^2 + bx^3$. Como $1 - \pi = \chi(S \cdot x) = d + a$, donde π es el género aritmético de las secciones hiperplanas, y $1 - p_a = \chi(S) = d + a + b$, donde p_a es el género aritmético de la superficie, vemos que $S = dx + (1 - d - \pi)x^2 + (\pi - p_a)x^3$.

3. Sea ω una 1-forma racional en \mathbb{P}_2 . El haz $(\omega)(U) = \{f\omega \in \Omega_{\mathbb{P}_2}(U) : f \in k(x, y)\}$ es de línea, y si $(\omega) \simeq \mathcal{O}(-n)$, tenemos una sucesión exacta

$$(*) \quad 0 \longrightarrow (\omega) \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}_2}^1 \xrightarrow{\wedge \omega} \Omega_{\mathbb{P}_2}^2 \otimes \mathcal{O}(n) \longrightarrow \mathfrak{C} \longrightarrow 0$$

Si la ecuación local en un punto p es $(\omega) = (fdx + gdy)$, donde $f, g \in \mathcal{O}_p$ no tienen factores comunes, entonces $\mathfrak{C}_p = \mathcal{O}_p/(f, g)$. En $K(\mathbb{P}_2)$ se cumple

$$\begin{aligned} \mathfrak{C} &= \delta x^2, \text{ donde } \delta = \sum_p \dim_k \mathfrak{C}_p, \\ \Omega_{\mathbb{P}_2}^1 &= 3t - 1 = 3(1 - x) - 1 = 2 - 3x, \\ \Omega_{\mathbb{P}_2}^2 \otimes \mathcal{O}(n) &= \mathcal{O}(n - 3) = (1 - x)^{3-n}, \end{aligned}$$

porque hay una sucesión exacta $0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}_2}^1 \rightarrow \mathcal{O}(-1)^3 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow 0$. Ahora $(*)$ da

$$\begin{aligned} 2 - 3x + \delta x^2 &= (1 - x)^n + (1 - x)^{3-n}2 - 3x + (n^2 - 3n + 3)x^2, \\ 3 &= \delta - n^2 + 3n. \end{aligned}$$

12.4.1. Graduado de la Teoría K

En este apartado supondremos que los esquemas son variedades algebraicas sobre un cuerpo (k -esquemas de tipo finito y separados).

Sea $F^p(X)$ el subgrupo de $K_\bullet(X)$ generado por los haces coherentes con soporte en puntos x de codimensión $\dim \mathcal{O}_{X,x} \geq p$. Tenemos así una filtración de $K_\bullet(X)$ cuyo graduado se denota

$$GK(X) = \bigoplus_p F^p(X)/F^{p+1}(X),$$

y cada cerrado irreducible Y de codimensión p define una clase $Y = [\mathcal{O}_Y] \in GK^p(X)$.

La clase en $GK^p(X)$ de un haz coherente $\mathcal{M} \in F^p(X)$ es $(Y$ es el cierre del punto $y)$

$$[\mathcal{M}] = \sum_{\text{cod } y=p} l_{\mathcal{O}_{X,y}}(\mathcal{M}_y) Y.$$

Si $f: X \rightarrow S$ es un morfismo proyectivo y X, S son irreducibles, entonces $f_! F^p(X) \subseteq F^{p+d}(S)$, $d = \dim S - \dim X$, e induce un morfismo $f_*: GK(X) \rightarrow GK(S)$ de grado d .

Vamos a estudiar la compatibilidad de la filtración con la imagen inversa (siendo evidente en el caso de las inmersiones abiertas y los fibrados vectoriales y proyectivos).

Lema: Si $i: U \rightarrow X$ es una inmersión abierta, entonces $i^! F^p(X) = F^p(U)$; luego $i^!$ induce un epimorfismo $i^*: GK^\bullet(X) \rightarrow GK^\bullet(U)$.

Demostración: En el argumento de la p. 324, si un haz coherente \mathcal{M} en U tiene soporte de codimensión $\geq p$, entonces su extensión coherente $\widetilde{\mathcal{M}} \subset i_* \mathcal{M}$ tiene soporte $\text{sop}(\widetilde{\mathcal{M}}) \subseteq \text{sop}(i_* \mathcal{M}) \subseteq \overline{\text{sop} \mathcal{M}}$ de codimensión $\geq p$, y se concluye.

Lema: Si L es un haz de línea, $\delta(L) = 1 - L \in F^1(X)$ y $\delta(L) \cdot F^p(X) \subseteq F^{p+1}(X)$, de modo que induce un morfismo homogéneo $\delta(L) \cdot : GK(X) \rightarrow GK(X)$ de grado 1.

Demostración: Si $\mathcal{M} \in F^p(X)$, entonces \mathcal{M} y $L \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ coinciden en $GK^p(X)$ al tener igual longitud en los puntos genéricos de su soporte.

Definición: Diremos que $\delta(L) = [1 - L] \in GK^1(X)$ es la **clase de obstrucción** de L , y es aditiva, $\delta(L' \otimes L) = \delta(L') + \delta(L)$, porque

$$(1 - L') + (1 - L) - (1 - L' \otimes L) = (1 - L') \cdot (1 - L) \in F^2(X).$$

Lema: Si $H \xrightarrow{i} X$ es una hipersuperficie de ideal \mathfrak{p} localmente principal, $i^!F^p(X) \subseteq F^p(H)$, e induce un morfismo $i^* : GK(X) \rightarrow GK(H)$. Además, $i_*i^*(x) = \delta(\mathfrak{p}) \cdot x$.

Demostración: Sea Y un cerrado irreducible de X de codimensión $\geq p$.

Por definición $i^!(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_H - \underline{\text{Tor}}_1^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_H)$, y la resolución localmente libre

$$0 \longrightarrow \mathfrak{p} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_H \longrightarrow 0$$

muestra que $i^!(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_{Y \cap H} \in F^p(H)$ cuando H no contiene a Y .

Además, $i_!(i^!\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_{Y \cap H} = \mathcal{O}_Y - \mathfrak{p} \otimes \mathcal{O}_Y = \delta(\mathfrak{p}) \cdot \mathcal{O}_Y$.

Si H contiene a Y ,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_H &= \mathcal{O}_Y, \\ \underline{\text{Tor}}_1^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_H) &= \mathfrak{p} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y, \end{aligned}$$

y $i^!(\mathcal{O}_Y) = (1 - \mathfrak{p}|_H) \cdot \mathcal{O}_Y \in F^p(H)$. También $i_!(i^!\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_Y - \mathfrak{p} \otimes \mathcal{O}_Y = \delta(\mathfrak{p}) \cdot \mathcal{O}_Y$.

Teorema de Periodicidad: Si E es un \mathcal{O}_X -módulo localmente libre de rango $r + 1$, y $x_E = \delta(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1)) \in GK^1(\mathbb{P}(E))$, tenemos un isomorfismo

$$GK(X)^{r+1} \xrightarrow{\sim} GK(\mathbb{P}(E)), (a_0, \dots, a_r) \mapsto \sum_i \pi^*(a_i) x_E^i.$$

Demostración: Pongamos $x = 1 - \mathcal{O}(-1) \in K^\bullet(\mathbb{P}(E))$.

Si $a \in F^p(X)$, como $\pi_1(x^i) = 1$ cuando $0 \leq i \leq r$, tenemos que $\pi_*(\pi^*(a) \cdot x_E^i)$ es la clase de $\pi_1(\pi^1(a)x^i) = a\pi_1(x^i) = a$ módulo $F^{p+i-r+1}(X)$, que es nula si $r > i$,

$$\pi_*(\pi^*(a) \cdot x_E^i) = \begin{cases} a & i = r \\ 0 & i < r \end{cases}$$

Razonando como en la p. 325 vemos que $1, x_E, \dots, x_E^r$ son independientes.

Tomemos ahora $[\mathcal{M}] \in GK^p(\mathbb{P}(E))$ no nulo. Sabemos que $\mathcal{M} = \pi^1(a_0) + \dots + \pi^1(a_r)x^r$.

Si $0 \neq a_i \in GK^{n_i}(X)$, y $m = \min\{n_i - i\} < p$, entonces la clase de \mathcal{M} en $GK^m(\mathbb{P}(E))$ no es nula, absurdo. Luego $m \geq p$, y $\mathcal{M} = \sum_i \pi^*(a_i) \cdot x_E^i$, con $a_i \in GK^{p-i}(X)$.

Corolario: Si $P \rightarrow X$ es un fibrado afín, $\pi^* : GK^\bullet(X) \rightarrow GK^\bullet(P)$ es un isomorfismo.

Demostración: Como $\pi^1 : K(X) \rightarrow K(P)$ es un isomorfismo compatible con las filtraciones, basta ver que $\pi^* : GK^\bullet(X) \rightarrow GK^\bullet(P)$ es epiyectivo.

El cierre proyectivo $i : P \rightarrow \mathbb{P}(E)$ es una inmersión abierta, así que

$$i^* : GK^\bullet(\mathbb{P}(E)) = GK^\bullet(X) \oplus GK^\bullet(X)x_E \oplus \dots \oplus GK^\bullet(X)x_E^r \longrightarrow GK^\bullet(P)$$

es epiyectivo. Como $i^*(x_E) = \dots = i^*(x_E^r) = 0$, porque $i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1)$ es trivial, concluimos.

Lema: Si $s: X \rightarrow E$ es la sección nula de un fibrado vectorial, $s^!(F^p(E)) = F^p(X)$.

Demostración: Por el corolario anterior, $\pi^!F^p(X) = F^p(E)$, y $s^!$ es el inverso de $\pi^!$.

Deformación al Cono Normal: Sea $Y \rightarrow X$ una inmersión cerrada de ideal \mathfrak{p} , y $\mathcal{O}_X[\mathfrak{p}] = \bigoplus_n \mathfrak{p}^n$, $G_{\mathfrak{p}}\mathcal{O}_X = \bigoplus_n \mathfrak{p}^n/\mathfrak{p}^{n+1}$. El **cono normal** de Y en X es $C = \text{Spec } G_{\mathfrak{p}}\mathcal{O}_X$, y el morfismo natural $G_{\mathfrak{p}}\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X/\mathfrak{p}$ define la sección nula $Y \rightarrow C$. Cuando la inmersión es regular, $G_{\mathfrak{p}}\mathcal{O}_X = S^\bullet(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2)$, y C es el **fibrado normal** $N_{Y/X} \rightarrow Y$ asociado a $(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2)^*$ (p. 313).

La **explosión** $\tilde{X} = \text{Proj } \mathcal{O}_X[\mathfrak{p}] \rightarrow X$ de X en Y es un isomorfismo sobre $X - Y$, y su fibra sobre Y es $\text{Proj } \mathcal{O}_X[\mathfrak{p}]/\mathfrak{p}\mathcal{O}_X[\mathfrak{p}] = \text{Proj } G_{\mathfrak{p}}\mathcal{O}_X = \mathbb{P}(C)$. El **cierre proyectivo** del cono normal C es $\mathbb{P}(1 \oplus C) = \text{Proj } (G_{\mathfrak{p}}\mathcal{O}_X)[x_0]$, y el morfismo natural $(G_{\mathfrak{p}}\mathcal{O}_X)[x_0] \rightarrow G_{\mathfrak{p}}\mathcal{O}_X$ define una inmersión cerrada $\mathbb{P}(C) \rightarrow \mathbb{P}(1 \oplus C)$, cuyo complementario es el abierto $U_{x_0} = C$.

Sea \tilde{Z} la explosión de $X \times_k \mathbb{A}_1$ en $Y \times 0$, y $\pi: \tilde{Z} \rightarrow \mathbb{A}_1$ el morfismo natural. Como $\tilde{Z} \rightarrow X \times_k \mathbb{A}_1$ es un isomorfismo fuera de $Y \times 0$,

$$\pi^{-1}(\mathbb{A}_1 - 0) = X \times_k (\mathbb{A}_1 - 0).$$

Por otra parte, la fibra de π sobre el punto $t = 0$ de \mathbb{A}_1 es

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(0) &= \text{Proj } \mathcal{O}_{X \times \mathbb{A}_1}[\mathfrak{p} + (t)]/t\mathcal{O}_{X \times \mathbb{A}_1}[\mathfrak{p} + (t)] = \text{Proj } (\mathcal{O}_X[\mathfrak{p}] \otimes_{\mathcal{O}_X} [t])/(t) \\ &= \text{Proj } (\mathcal{O}_X[\mathfrak{p}] \otimes_{\mathcal{O}_X} [t])/(\mathfrak{p}) \cup \text{Proj } (\mathcal{O}_X[\mathfrak{p}] \otimes_{\mathcal{O}_X} [t])/(t) \\ &= \text{Proj } (G_{\mathfrak{p}}\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Y[t] \cup \text{Proj } \mathcal{O}_X[\mathfrak{p}] = \mathbb{P}(1 \oplus C) \cup \tilde{X}. \end{aligned}$$

Además, $\mathbb{P}(1 \oplus C) \cap \tilde{X} = \mathbb{P}(C)$, de modo que si quitamos \tilde{X} , la fibra sobre 0 es el cono normal C . Por tanto, si ponemos $Z = \tilde{Z} - \tilde{X}$, tenemos un triángulo conmutativo (donde π es plano y j es una inmersión cerrada), variante algebraica del Lema del Entorno Tubular,

$$\begin{array}{ccc} Y \times \mathbb{A}_1 & \xrightarrow{j} & Z \\ & \searrow & \swarrow \pi \\ & & \mathbb{A}_1 \end{array}$$

1. $\pi^{-1}(\mathbb{A}_1 - 0) = X \times (\mathbb{A}_1 - 0)$, y $j: Y \times (\mathbb{A}_1 - 0) \rightarrow X \times (\mathbb{A}_1 - 0)$ es el morfismo obvio.
2. $\pi^{-1}(0) = C$, y la inmersión $j: Y \times 0 \rightarrow C$ es la sección nula.

Lema: Si $i: Y \rightarrow X$ es una inmersión cerrada regular, $i^!F^p(X) \subseteq F^p(Y)$.

Demostración: El morfismo $j_1: Y \rightarrow Z$ es la composición de $Y \rightarrow X$, la sección $X \times 1 \rightarrow X \times (\mathbb{A}_1 - 0)$ y la inmersión abierta $X \times (\mathbb{A}_1 - 0) \rightarrow Z$.

Como $F^p(Z) \rightarrow F^p(X \times (\mathbb{A}_1 - 0)) \rightarrow F^p(X)$ son epiyectivos, basta ver el lema para $j_1^!: K_\bullet(Z) \rightarrow K_\bullet(Y)$.

Pero los morfismos $j_1^!, j_0^!: K_\bullet(Z) \rightarrow K_\bullet(\mathbb{P}_Y^1) \cong K_\bullet(Y)$ coinciden, porque ambos morfismos $K_\bullet(Y \times \mathbb{A}_1) \cong K_\bullet(Y)$ son el inverso del isomorfismo $\pi^!: K_\bullet(Y) \xrightarrow{\sim} K_\bullet(Y \times \mathbb{A}_1)$

Luego basta probar el lema para $j_0^!: K_\bullet(Z) \rightarrow K_\bullet(Y)$; pero $j_0: Y \rightarrow Z$ es la composición de la sección nula $Y \rightarrow N_{Y/X}$ con la inmersión cerrada $N_{Y/X} \rightarrow Z$, definida por un ideal localmente principal, y para ambos morfismos se cumple el lema.

Teorema: Si X es una k -variedad lisa, el producto de $K(X)$ es compatible con la filtración, $F^p(X) \cdot F^q(X) \subseteq F^{p+q}(X)$, e induce una estructura de anillo en $GK(X)$.

Si $f: Y \rightarrow X$ es un morfismo entre variedades lisas, entonces $f^!(F^p(X)) \subseteq F^p(Y)$, e induce un morfismo de anillos $f^*: GK(X) \rightarrow GK(Y)$.

Demostración: Si Y, Z son subvariedades íntegras de codimensiones p y q , hemos de ver que $Y \cdot Z \in F^{p+q}(X)$. Si $\Delta: X \rightarrow X \times_k X$ es el morfismo diagonal, $Y \cdot Z = \Delta^!(Y \times_k Z)$, pues la igualdad $\mathcal{L}' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L} = \Delta^*(\mathcal{L}' \otimes_k \mathcal{L})$ es inmediata para haces localmente libres, y estos generan $K(X)$. Ahora bien, $Y \times_k Z$ es de codimensión $p + q$, y Δ es una inmersión regular, y el lema anterior permite concluir.

Por último, $f: Y \rightarrow X$ es la composición de su gráfica $1 \times f: Y \rightarrow Y \times_k X$ con la proyección $\pi: Y \times_k X \rightarrow X$, y tanto $(1 \times f)^!$ como $\pi^!$ son compatibles con las filtraciones.

El primero porque $1 \times f$ es una inmersión cerrada regular, y el segundo porque la codimensión de $Y \times_k Z$ en $Y \times_k X$ coincide con la de Z en X .

12.4.2. Clases de Chern

En adelante las variedades algebraicas se suponen lisas, luego regulares, de modo que toda inmersión cerrada $Y \rightarrow X$ es regular: Si \mathfrak{p} es el ideal de Y , en cada punto y la sucesión exacta

$$\mathfrak{p}_y / \mathfrak{m}_{X,y} \mathfrak{p}_y \longrightarrow \mathfrak{m}_{X,y} / \mathfrak{m}_{X,y}^2 \longrightarrow \mathfrak{m}_{Y,y} / \mathfrak{m}_{Y,y}^2 \longrightarrow 0$$

prueba que \mathfrak{p}_y contiene una sucesión de parámetros de longitud igual a la codimensión de Y , que necesariamente genera \mathfrak{p}_y .

Definición: Si E es un \mathcal{O}_X -módulo localmente libre de rango r , sus **clases de Chern** $c_i(E) \in GK^i(X)$ son los coeficientes de la relación que se da en $GK(\mathbb{P}(E))$,

$$x_E^r + c_1(E)x_E^{r-1} + \dots + c_r(E) = 0,$$

y las clases de Chern de una variedad X son las de su fibrado tangente $T_X = (\Omega_X^1)^*$.

Las demostraciones dadas en el caso topológico (p. 302), donde ahora $\xi_E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1)$, prueban que la primera clase de Chern de un haz de línea es el opuesto de la clase de obstrucción, $c_1(L) = -\delta(L)$, que son funtoriales, $c_i(f^*E) = f^*c_i(E)$, que la última clase de Chern coincide con los ceros de cualquier sección global $s: X \rightarrow E$,

$$c_r(E) = s^*[s_{0*}(1)],$$

y que la clase total $c(E) = 1 + c_1(E) + \dots + c_r(E)$ verifica la fórmula de Cartan.

Como las clases de Chern son nilpotentes, la clase total es una función aditiva con valores en el grupo multiplicativo de los invertibles de $GK(X)$, e induce un morfismo de grupos

$$c: K(X) \longrightarrow GK(X)^*$$

que permite definir las clases de Chern de los haces coherentes, $c(\mathcal{M}) = \sum_i c_i(\mathcal{M})$.

1. Si $d = \dim X$, la proyección $\pi: X \rightarrow \text{Spec } k$ define un morfismo **grado**

$$\text{gr} = \pi_*: GK^d(X) = F^d(X) \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad \text{gr}[\mathcal{M}] = \chi(X, \mathcal{M}),$$

y al componer con el producto, un acoplamiento $\langle, \rangle: GK^p(X) \otimes_{\mathbb{Z}} GK^{d-p}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ que ha de entenderse como números globales de intersección de ciclos de codimensión p con ciclos de codimensión $d - p$. Por definición

$$\langle \mathcal{M}, \mathcal{N} \rangle = \sum_i (-1)^i \chi(X, \underline{\text{Tor}}_i^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})).$$

2. Sea $\pi: X' \rightarrow X$ la explosión de X en un punto racional x , de ideal maximal \mathfrak{m} , y sea $E = \pi^{-1}(x)$ la fibra excepcional. Como $\mathfrak{m}\mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_{X'}(1)$, para $n \gg 0$ tenemos que

$$\begin{aligned}\pi_*(\mathfrak{m}^n \mathcal{O}_{X'}) &= \mathfrak{m}^n, \\ R^i \pi_*(\mathfrak{m}^n \mathcal{O}_{X'}) &= 0, \quad i \geq 1.\end{aligned}$$

y $\chi(X, \mathfrak{m}^n) = \chi(X', \mathfrak{m}^n \mathcal{O}_{X'})$ por la sucesión espectral de Leray.

En $K(X')$ tenemos que $E^i = 0$ cuando $i > d = \dim X'$, y por tanto

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}^n \mathcal{O}_{X'} &= (\mathfrak{m} \mathcal{O}_{X'})^n = (1 - E)^n = 1 + \sum_{i=1}^d (-1)^i \binom{n}{i} E^i, \\ \binom{n+d-1}{d} &= \chi(X, \mathcal{O}_X / \mathfrak{m}^n) = \chi(X, \mathcal{O}_X) - \chi(X, \mathfrak{m}^n) = \chi(X, \mathcal{O}_X) - \chi(X', \mathfrak{m}^n \mathcal{O}_{X'}) \\ &= \chi(X, \mathcal{O}_X) - \chi(X', \mathcal{O}_{X'}) - \sum_{i=1}^d (-1)^i \binom{n}{i} \chi(X', E^i).\end{aligned}$$

Vemos que la variación $\chi(X, \mathcal{O}_X) - \chi(X', \mathcal{O}_{X'})$ coincide con el término independiente del polinomio $\binom{n+d-1}{d}$, que es nulo.

Igualando los coeficientes de n^d vemos que $\chi(X', E^d) = (-1)^{d+1}$. Por ejemplo, en el caso $d = 2$, la auto-intersección de la fibra excepcional es $\langle E, E \rangle = -1$.

3. $c(\mathbb{P}_n) = (1 + x)^{n+1}$, $x = c_1(\mathcal{O}(1))$,

porque tenemos una sucesión exacta $0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}_n}^1 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(-1)^{n+1} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n} \rightarrow 0$.

4. $c_i(E^*) = (-1)^i c_i(E)$.

Si $E = L_{\alpha_1} + \dots + L_{\alpha_r}$, $E^* = L_{-\alpha_1} + \dots + L_{-\alpha_r}$, y $c(E^*) = (1 - \alpha_1) \dots (1 - \alpha_r)$.

5. Si $0 \rightarrow \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'' \rightarrow 0$ es una sucesión exacta de \mathcal{O}_X -módulos localmente libres, $\Lambda^n \mathcal{L} = \sum_i (\Lambda^i \mathcal{L}') (\Lambda^{n-i} \mathcal{L}'')$ en $K(X)$, porque los morfismos $\Lambda^i \mathcal{L}' \otimes \Lambda^{n-i} \mathcal{L}'' \rightarrow \Lambda^n \mathcal{L}$ definen una filtración de $\Lambda^n \mathcal{L}$ cuyo graduado es $\bigoplus_i (\Lambda^i \mathcal{L}' \otimes \Lambda^{n-i} \mathcal{L}'')$.

Pongamos $\lambda^i(\mathcal{L}) = \Lambda^i \mathcal{L} \in K(X)$. La función $\lambda_t(\mathcal{L}) = \sum_i \lambda^i(\mathcal{L}) t^i$, valorada en el grupo multiplicativo de las series formales con coeficientes en $K(X)$ y término constante 1, es aditiva, y permite definir $\lambda_t(x) = \sum_i \lambda^i(x) t^i$ para todo $x \in K(X)$.

6. Si L es un haz de línea, $\lambda_t(-L) = (1 + Lt)^{-1} = \sum_i (-1)^i L^i t^i$, y $\lambda^i(-L) = (-1)^i L^i$. En particular, $\lambda^i(-1) = (-1)^i$.

7. Si un haz localmente libre E de rango r tiene una sección que no se anula en ningún punto, $E - \mathcal{O}$ es un fibrado de rango $r - 1$ en $K(X)$; luego $0 = \lambda^r(E - 1) = \sum_i \lambda^i(E) \lambda^{r-i}(-1)$, y vemos que $0 = \sum_i (-1)^i \lambda^i E$ en teoría K .

8. Sea $t = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1)$, y expresemos t^r como combinación lineal de $1, t, \dots, t^{r-1}$ en $K(\mathbb{P}(E))$. Por la sucesión exacta $0 \rightarrow \mathcal{O}(-1) \rightarrow \pi^* E \rightarrow \bar{E} \rightarrow 0$, donde $\text{rg } \bar{E} < r$,

$$0 = \lambda^r(E - t) = \sum_{i=0}^r \lambda^i(E) \lambda^{r-i}(-t) = \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} \lambda^i(E) t^{r-i}.$$

9. $c_1(E) = c_1(\Lambda^r E)$, $r = \text{rg } E$.

Si $E = L_{\alpha_1} + \dots + L_{\alpha_r}$, $\Lambda^r E = L_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes L_{\alpha_r} = L_{\alpha_1 + \dots + \alpha_r}$.

10. $c_r(E) = [\sum_i (-1)^i \lambda^i E^*]$, $r = \text{rg } E$.

$[\lambda_{-1}(E)] = [\lambda_{-1}(L_1) \dots \lambda_{-1}(L_r)] = [1 - L_1] \dots [1 - L_r] = c_1(L_1^*) \dots c_1(L_r^*) = c_r(E^*)$.

11. Si X es proyectiva de dimensión n , $\text{gr } c_n(X) = \sum_{p,q} (-1)^{p+q} \dim H^p(X, \Omega_X^q)$.

12. $c_d(N_{Y/X}) = i^*(i_*(1))$, donde $i: Y \rightarrow X$ es una subvariedad lisa de codimensión d .

Si $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X/\mathfrak{p}$, el complejo de Koszul permite ver que $\underline{\text{Tor}}_i^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Y) = \Lambda^i(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2)$,

$$i^*(i_*(1)) = \sum_i (-1)^i \underline{\text{Tor}}_i^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Y) = \sum_i (-1)^i \Lambda^i(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2) = c_d((\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2)^*).$$

12.4.3. Teorías Cohomológicas

Lema de Jouanolou: Sea X una k -variedad **casi-proyectiva** (un subesquema abierto de un k -esquema proyectivo). Existe un fibrado afín $\pi: P \rightarrow X$ tal que P es un esquema afín. Luego, para cada haz de línea L en X tenemos que $\pi^*L \simeq f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ para algún k -morfismo $f: P \rightarrow \mathbb{P}^n$.

Demostración: Los endomorfismos de rango 1 idempotentes, $T^2 = T$ y $c_T(x) = x^n(x-1)$, definen un subesquema cerrado P de $\text{End}_k E$ (luego P es un esquema afín) tal que el morfismo $\pi: P \rightarrow \mathbb{P}(E)$, $\pi(T) = \text{Im } T$, es un fibrado afín asociado al fibrado vectorial $\underline{\text{Hom}}(E/\mathcal{O}(-1), \mathcal{O}(-1))$.

Si $X \rightarrow \mathbb{P}(E)$ es un subesquema cerrado, entonces $P_X = \pi^{-1}(X) \rightarrow X$ es el fibrado afín en cuestión.

Si $U \rightarrow X$ es un subesquema abierto, explotando el complementario podemos suponer que el ideal de $Y = X - U$ es localmente principal; luego también lo es el ideal de P_Y en P_X , así que $P_U \rightarrow P_X$ es un morfismo afín, y vemos que P_U es un esquema afín.

Finalmente, π^*L está generado (como todo haz coherente sobre un esquema afín) por un número finito de secciones globales, de modo que $\pi^*L \simeq f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ por la propiedad universal de \mathbb{P}^n .

Definición: Una **teoría cohomológica** es un funtor contravariante A de la categoría de k -variedades lisas en la de anillos conmutativos tal que

$$i_1^* + i_2^*: A(X_1 \oplus X_2) \xrightarrow{\sim} A(X_1) \oplus A(X_2) \text{ es un isomorfismo; luego } A(\emptyset) = 0,$$

$$\pi^*: A(X) \xrightarrow{\sim} A(E) \text{ cuando } \pi: E \rightarrow X \text{ es un fibrado vectorial,}$$

con un morfismo de $A(X)$ -módulos $f_*: A(Y) \rightarrow A(X)$ funtorial (es decir, $f_*(f^*(x)y) = xf_*(y)$, $\text{Id}_* = \text{Id}$, $(fg)_* = f_*g_*$), para cada morfismo proyectivo $f: Y \rightarrow X$; y por tanto una clase de cohomología $p_X(Y) = i_*(1)$ para cada subvariedad cerrada lisa $i: Y \rightarrow X$, y una clase de Chern $c_1(L) = s^*(s_{0*}(1))$ para cada haz de línea L (donde s es cualquier sección y s_0 es la sección nula), tal que

1. $A(Y) \xrightarrow{i_*} A(X) \xrightarrow{j^*} A(U)$ es una sucesión exacta para toda subvariedad cerrada lisa $i: Y \rightarrow X$, donde $j: U = X - Y \rightarrow X$.

2. Si $E \rightarrow X$ es un fibrado vectorial de rango $r + 1$ y $x_E = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))$,

$$A(\mathbb{P}(E)) = A(X) \oplus A(X)x_E \oplus \dots \oplus A(X)x_E^r.$$

3. Para todo fibrado proyectivo $\pi: \mathbb{P}(E) \rightarrow X$ y todo morfismo $f: Y \rightarrow X$, el siguiente cuadrado es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A(\mathbb{P}(E)) & \xrightarrow{f^*} & A(\mathbb{P}(f^*E)) \\ \downarrow \pi_* & & \downarrow \pi_* \\ A(X) & \xrightarrow{f_*} & A(Y) \end{array}$$

4. Si $f: \bar{X} \rightarrow X$ es transversal a una subvariedad cerrada lisa $i: Y \rightarrow X$, en el sentido de que $\bar{Y} = Y \times_X \bar{X}$ es lisa y el morfismo natural $f^*N_{Y/X} \rightarrow N_{\bar{Y}/\bar{X}}$ es isomorfismo, el siguiente cuadrado es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A(Y) & \xrightarrow{f^*} & A(\bar{Y}) \\ \downarrow i_* & & \downarrow i_* \\ A(X) & \xrightarrow{f^*} & A(\bar{X}) \end{array}$$

El isomorfismo inverso de $i_1^* + i_2^*: A(X_1 \oplus X_2) \xrightarrow{\sim} A(X_1) \oplus A(X_2)$ es $i_{1*} + i_{2*}$ porque $i_1^* i_{1*} = \text{Id}$, $i_2^* i_{1*} = 0$ (al ser i_1 e i_2 transversales a i_1). Luego, si $f = f_1 \oplus f_2: X_1 \oplus X_2 \rightarrow S$ es proyectivo, entonces $f_* = f_{1*} + f_{2*}: A(X_1) \oplus A(X_2) \rightarrow A(S)$.

Además, dada una hipersuperficie lisa cerrada $i: H \rightarrow X$, el haz de línea L_H admite una sección que se anula en H y es transversal a la sección nula, y concluimos que

$$c_1(L_H) = i_*(1) = p_X(H).$$

Definición: Un **morfismo** de teorías cohomológicas $\text{ch}: A \rightarrow \bar{A}$ es una transformación natural que conserva imágenes directas. Es decir, $\text{ch}: A(X) \rightarrow \bar{A}(X)$ es un morfismo de anillos que conserva imágenes directas, $\text{ch}(f^*(a)) = f^*(\text{ch}(a))$, e imágenes directas, $\text{ch}(f_*(a)) = f_*(\text{ch}(a))$.

Ejemplos: (1) $A(X) = K(X)$ es una teoría cohomológica. La condición 4 se debe a que, al estar Y localmente definido por una sucesión regular que es sucesión regular en \bar{X} , para todo \mathcal{O}_Y -módulo localmente libre \mathcal{L} se cumple $\text{Tor}_n^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_{\bar{X}}, \mathcal{L}) = 0$, $n \geq 1$.

La clase de cohomología de una subvariedad cerrada lisa $i: Y \rightarrow X$ es $p_X(Y) = i_*(1) = \mathcal{O}_Y$, y la clase de Chern de un haz de línea L es $c_1(L) = s_0^*(s_{0*}(1)) = 1 - L^*$.

Sin embargo, nótese que $c_1(L' \otimes L) \neq c_1(L') + c_1(L)$, y $c_1(L^*) \neq -c_1(L)$. De hecho, como $1 - (\bar{L} \otimes L)^* = (1 - \bar{L}^*) + (1 - L^*) - (1 - \bar{L}^*)(1 - L^*)$, la teoría K sigue la ley multiplicativa

$$c_1(\bar{L} \otimes L) = c_1(\bar{L}) + c_1(L) - c_1(\bar{L})c_1(L).$$

(2) También $GK(X)_{\mathbb{Q}} = GK(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ es una teoría cohomológica, aunque no lo demostraremos en estos apuntes. La clase de cohomología de una subvariedad cerrada $i: Y \rightarrow X$ de codimensión p es $Y = [\mathcal{O}_Y] \in GK^p(X)$, y la clase de Chern de un haz de línea L es $c_1(L) = [1 - L^*] = [L - 1] \in GK^1(X)$. Luego el graduado de la teoría K sigue la ley aditiva $c_1(\bar{L} \otimes L) = c_1(\bar{L}) + c_1(L)$.

(3) En el caso complejo, $A(X) = H^{2\bullet}(X_{\text{an}}, \mathbb{Q}) = \bigoplus_p H^{2p}(X_{\text{an}}, \mathbb{Q})$ define una teoría cohomológica (donde X_{an} denota los puntos cerrados de X , con la topología menos fina que hace continuas las funciones $f: U_{\text{an}} \rightarrow \mathbb{C}$, donde $f \in \mathcal{O}_X(U)$ y U recorre los abiertos de X), aunque en el curso de Topología Algebraica sólo hemos definido i_* cuando i es una inmersión cerrada.

En general, para un morfismo proyectivo arbitrario, $f: Y \rightarrow X$, la fórmula de proyección establece que la imagen directa f_* puede definirse como adjunta de la imagen inversa $f^*: H_c^{2\bullet}(X_{\text{an}}, \mathbb{Q}) \rightarrow H_c^{2\bullet}(Y_{\text{an}}, \mathbb{Q})$ por la dualidad de Poincaré. La condición 4 se debe a que en tal caso el morfismo $f^*: f^*\mathbb{T}_{Y/X} \rightarrow \mathbb{T}_{\bar{Y}/\bar{X}}$ que define la imagen inversa es un isomorfismo, como puede verse con un argumento análogo al usado (p. 292) para ver que el producto cup define un isomorfismo $\mathbb{T}_{Y/X} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{T}_{Z/X} \rightarrow \mathbb{T}_{Y \cap Z/X}$ cuando Y, Z se cortan transversalmente.

(4) Si A es una teoría cohomológica definida sobre las k -variedades, también lo es $X \rightsquigarrow A(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, y se denota $A \otimes \mathbb{Q}$. Además para toda extensión de cuerpos $k_0 \rightarrow k$ tenemos que $X \rightsquigarrow A(X_k)$ es una teoría cohomológica sobre las k_0 -variedades.

Definición: Las **clases de Chern** de un \mathcal{O}_X -módulo localmente libre E rango r son los coeficientes $c_i^A(E)$, o simplemente $c_i(E)$, del polinomio característico $c_E(y)$ del endomorfismo del $A(X)$ -módulo libre $A(\mathbb{P}(E))$ definido por el producto con $y_E = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1))$,

$$c_E(t) = y^r - c_1^A(E)y^{r-1} + \dots + (-1)^r c_r^A(E) \in A(X)[t],$$

salvo un signo que se introduce para que la primera clase de Chern de un haz de línea L coincida con la anterior. De hecho, $\mathbb{P}(L) = X$ y $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(L)}(-1) = L$.

Functorialidad: $c_i(f^*E) = f^*(c_i(E))$ para todo morfismo $f: \bar{X} \rightarrow X$.

Demostración: Tenemos que $f^*c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1)) = c_1(f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1)) = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(f^*E)}(-1))$.

Aditividad: Para toda sucesión exacta $0 \rightarrow E_1 \rightarrow E \rightarrow E_2 \rightarrow 0$ de \mathcal{O}_X -módulos localmente libres,

$$c_n(E) = \sum_{i+j=n} c_i(E_1) \cdot c_j(E_2).$$

Demostración: Si $\text{rg } E_1 = 1$, entonces $i: X = \mathbb{P}(E_1) \rightarrow \mathbb{P}(E)$ es una sección de $\mathbb{P}(E) \rightarrow X$ e i_* es inyectiva.

Consideremos el complementario $j: U \rightarrow \mathbb{P}(E)$ de $\mathbb{P}(E_1)$. El morfismo $U \rightarrow \mathbb{P}(E_2)$ es un fibrado afín asociado al fibrado vectorial $\text{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E_2)}(-1), E_1)$, así que $j^*: A(\mathbb{P}(E)) \rightarrow A(U) = A(\mathbb{P}(E_2))$ es epiyectivo (de hecho $j^*(y_E^n) = y_{E_2}^n$). Luego tenemos un diagrama conmutativo de filas exactas (como $y_{E_1} = i^*y_E$, el primer cuadrado conmuta por la fórmula de proyección)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A(\mathbb{P}(E_1)) & \xrightarrow{i_*} & A(\mathbb{P}(E)) & \xrightarrow{j^*} & A(\mathbb{P}(E_2)) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow y_{E_1} & & \downarrow y_E & & \downarrow y_{E_2} \\ 0 & \longrightarrow & A(\mathbb{P}(E_1)) & \xrightarrow{i_*} & A(\mathbb{P}(E)) & \xrightarrow{j^*} & A(\mathbb{P}(E_2)) \longrightarrow 0 \end{array}$$

y la aditividad del polinomio característico prueba que $c_E(y) = c_{E_1}(y)c_{E_2}(y)$.

Ahora procedemos por inducción sobre $\text{rg } E_1$, y podemos suponer la existencia de un haz de línea $L \subset E_1$ tal que $\bar{E}_1 = E_1/L$ y $\bar{E} = E/L$ son localmente libres.

Tenemos una sucesión exacta $0 \rightarrow \bar{E}_1 \rightarrow \bar{E} \rightarrow E_2 \rightarrow 0$ que permite concluir,

$$c_E(y) = c_L(y)c_{\bar{E}}(y) = c_L(y)c_{\bar{E}_1}(y)c_{E_2}(y) = c_{E_1}(y)c_{E_2}(y).$$

Definición: Como $1 + c_1(E)t + \dots + c_r(E)t^r$ es una función aditiva con valores en el grupo multiplicativo de las series formales invertibles con coeficientes en $A(X)$, induce un morfismo de grupos sobre $K(X)$, y obtenemos **clases de Chern** $c_i(x) \in A(X)$ para todo $x \in K(X)$.

Corolario: El anillo de cohomología del espacio proyectivo es $A(\mathbb{P}_d) = A(\text{Spec } k)[x]/(x^{d+1})$, donde x se corresponde con la clase de cohomología $x_d = [\mathbb{P}_{d-1}]$ de cualquier hiperplano.

Demostración: Pongamos $y_d = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_d}(-1))$. Por aditividad, los fibrados triviales tienen clases de Chern nulas.

Luego en $A(\mathbb{P}_d) = A(\text{Spec } k) \oplus A(\text{Spec } k)y_d \oplus \dots \oplus A(\text{Spec } k)y_d^d$ tenemos que $y_d^{d+1} = 0$.

En $A(\mathbb{P}_1)$, la sucesión exacta $0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}^2 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(1) \rightarrow 0$ prueba que $x_1 = -y_1$.

Considerando una recta en \mathbb{P}_d , vemos que $x_d = -y_d + a_2y_d^2 + \dots + a_dy_d^d$ en $A(\mathbb{P}_d)$.

Concluimos que $x_d^{d+1} = 0$ en $A(\mathbb{P}_d)$.

Corolario: Las clases de Chern siempre son nilpotentes.

Demostración: Sea $L \rightarrow X$ un haz de línea. Por el lema de Jouanolou existe un fibrado afín $\pi: P \rightarrow X$ tal que $\pi^*L = f^*(\mathcal{O}(1))$ para algún morfismo $f: P \rightarrow \mathbb{P}_d$. Luego $\pi^*c_1(L) = f^*(x_d)$ es nilpotente, porque x_d lo es, y $c_1(L)$ es nilpotente porque π^* es un isomorfismo.

Concluimos porque toda clase de Chern después de un cambio de base inyectivo en cohomología, es una suma de productos de clases de Chern de haces de línea. q.e.d.

Ejemplo: Para calcular las clases de Chern en teoría K de un \mathcal{O}_X -módulo libre E de rango r , podemos suponer que es suma de haces de línea, $E = L_1 + \dots + L_r \in K(X)$; luego,

$$\begin{aligned} c_1^K(E) &= \sum_i c_1^K(L_i) = \sum_i (1 - L_i^*) = \text{rg } E - E^*, \\ c_r^K(E) &= \prod_i c_1^K(L_i) = \prod_i (1 - L_i^*) = 1 - E^* + \Lambda^2 E^* + \dots + (-1)^r \Lambda^r E^*. \end{aligned} \quad (12.1)$$

Definición: Dado un \mathcal{O}_X -módulo localmente libre E , hay un cambio de base $\pi: \bar{X} \rightarrow X$ tal que $\pi^*: A(X) \rightarrow A(\bar{X})$ es inyectivo y $\pi^*E = L_{\alpha_1} + \dots + L_{\alpha_r}$ es suma de haces de línea en $K(\bar{X})$, así que $c_i(E)$ es la i -ésima función simétrica elemental de las “raíces” $\alpha_1, \dots, \alpha_r$. Para cada serie formal $F(t) = \sum_n a_n t^n$ con coeficientes en $A(\text{Spec } k)$ ponemos

$$F_+(E) = F(\alpha_1) + \dots + F(\alpha_r) \in A(X),$$

(donde vemos la suma como serie de potencias en las funciones simétricas elementales $c_i(E)$, y la suma es finita porque las clases de Chern son nilpotentes) y F_+ es una función aditiva, de modo que define un morfismo de grupos functorial $F_+: K(X) \rightarrow A(X)$ llamado **extensión aditiva** de F . Igualmente, cuando a_0 es invertible, tenemos una **extensión multiplicativa** $F_\times: K(X) \rightarrow A(X)^*$ tal que

$$F_\times(E) = F(\alpha_1) \cdot \dots \cdot F(\alpha_r) \in A(X)^*.$$

12.4.4. Teorema de Riemann-Roch-Grothendieck

Propiedad Universal: Si una teoría cohomológica A sigue la ley multiplicativa $c_1(\bar{L} \otimes L) = c_1(\bar{L}) + c_1(L) - c_1(\bar{L})c_1(L)$ de la teoría K , entonces existe un único morfismo de teorías cohomológicas $\text{ch}: K \rightarrow A$.

Demostración: Si E es un \mathcal{O}_X -módulo localmente libre, por 12.1 tenemos que $E = \text{rg } E - c_1^K(E^*)$ en $K(X)$.

Luego el único morfismo de teorías cohomológicas $\text{ch}: K(X) \rightarrow A(X)$ posible es

$$\text{ch}(E) = \text{rg } E - c_1^A(E^*). \quad (12.2)$$

Esta función ch es aditiva sobre los \mathcal{O}_X -módulos localmente libres, porque lo son el rango y c_1^A ; luego define un morfismo de grupos $\text{ch}: K(X) \rightarrow A(X)$, y es compatible con imágenes inversas porque lo son el rango y c_1^A .

Conserva productos de haces de línea porque A sigue la ley multiplicativa:

$$\begin{aligned} \text{ch}(L_1 \cdot L_2) &= 1 - c_1^A(L_1^* \otimes L_2^*) = 1 - c_1^A(L_1^*) - c_1^A(L_2^*) + c_1^A(L_1^*)c_1^A(L_2^*) \\ &= (1 - c_1^A(L_1^*)) (1 - c_1^A(L_2^*)) = \text{ch}(L_1) \cdot \text{ch}(L_2). \end{aligned}$$

Luego ch es morfismo de anillos porque todo elemento de $K(X)$, después de un cambio de base inyectivo en cohomología, es suma y diferencia de haces de línea.

Sólo queda probar que ch conserva imágenes directas, y terminamos por el siguiente lema, ya que ch conserva clases de Chern de haces de línea,

$$\text{ch}(c_1^K(L)) = \text{ch}(1 - L^*) = 1 - \text{ch}(L^*) = 1 - (1 - c_1^A(L)) = c_1^A(L).$$

Lema de Panin: Si un morfismo de anillos functorial $\text{ch}: A \rightarrow \bar{A}$ entre teorías cohomológicas conserva la clase de cohomología de los hiperplanos, $\text{ch}[c_1^A(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(1))] = c_1^{\bar{A}}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(1))$, entonces conserva imágenes directas; es decir, para todo morfismo proyectivo $f: Y \rightarrow X$,

$$\text{ch}(f_*(a)) = f_*(\text{ch}(a)), \quad a \in A(Y).$$

Demostración: Por el lema de Jouanolou ch conserva clases de Chern de haces de línea; luego conserva la clase de cohomología de las hipersuperficies lisas.

Por definición todo morfismo proyectivo $f: Y \rightarrow X$ es composición de una inmersión cerrada $Y \rightarrow \mathbb{P}_n \times X$ con la proyección natural $\pi: \mathbb{P}_n \times X \rightarrow X$. Si el teorema es cierto para dos morfismos, también lo es para su composición; luego basta probarlo para las inmersiones cerradas $i: Y \rightarrow X$ y las proyecciones naturales $\pi: \mathbb{P}_n \times X \rightarrow X$.

1. El teorema es cierto para una inmersión cerrada $i: Y \rightarrow X$ si es cierto para la sección nula $s: Y \rightarrow \bar{N} = \mathbb{P}(1 \oplus N_{Y/X})$ del cierre proyectivo del fibrado normal.

La deformación al cono normal \tilde{Z} , sin remover la explosión \tilde{X} de X (p. 313) da un diagrama (conmutativo por la condición 4), donde $U = \tilde{Z} - (Y \times \mathbb{A}_1)$,

$$\begin{array}{ccc} & & \bar{A}(U) \\ & & \uparrow j^* \\ \bar{A}(\bar{N}) & \xleftarrow{i_0^*} & \bar{A}(\tilde{Z}) \\ \uparrow s_* & & \uparrow i_* \\ \bar{A}(Y) & \xleftarrow{\sim i_0^*} & \bar{A}(Y \times \mathbb{A}_1) \end{array}$$

Luego $(\text{Ker } i_0^*) \cap (\text{Ker } j^*) = 0$, porque la columna es exacta y s_* es inyectivo (ya que $p_*s_* = \text{Id}$, donde $p: \bar{N} \rightarrow Y$ es la proyección natural).

Ahora tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} & & \bar{A}(U) & & \\ & & \uparrow j^* & & \\ \bar{A}(\bar{N}) & \xleftarrow{i_0^*} & \bar{A}(\tilde{Z}) & \xrightarrow{i_1^*} & \bar{A}(X) \\ \uparrow \uparrow & & \uparrow \uparrow & & \uparrow \uparrow \\ A(Y) & = & A(Y \times \mathbb{A}_1) & = & A(Y) \end{array}$$

donde los pares verticales son los morfismos que el teorema afirma coincidir.

La diferencia del primer par es nula por hipótesis; luego la diferencia del par central también es nula por lo anterior, y concluimos que la diferencia del último par es nula.

2. Si L es un haz de línea en Y , el teorema es cierto para la sección nula $s: Y \rightarrow \bar{L} = \mathbb{P}(1 \oplus L)$; luego es cierto para toda inmersión cerrada de codimensión 1.

$s^*: A(\bar{L}) \rightarrow A(Y)$ es epiyectivo, y $\text{ch}(s_*(1)) = s_*(1)$ al ser Y una hipersuperficie en \bar{L} . Ahora, poniendo $a = s^*b \in A(Y)$,

$$\text{ch}(s_*s^*b) = \text{ch}(bs_*(1)) = \text{ch}(b)s_*(1) = s_*(s^*\text{ch}(b)) = s_*(\text{ch}(s^*b)).$$

3. El teorema es cierto para la sección nula $s: Y \rightarrow \bar{E} = \mathbb{P}(1 \oplus E)$ del cierre proyectivo de cualquier fibrado vectorial E ; luego es cierto para toda inmersión cerrada.

Si E admite una filtración $\{E_i\}$ con cocientes E_i/E_{i-1} de línea, el teorema es cierto para la sección nula $X \rightarrow \bar{E}_1$ y los morfismos $\bar{E}_1 \rightarrow \bar{E}_2 \rightarrow \dots \rightarrow \bar{E}_r = \bar{E}$; luego para la composición $s: X \rightarrow \bar{E}$. En general, tenemos un morfismo $\pi: Y' \rightarrow Y$ tal que π^* es inyectivo y $E' = \pi^*E$ admite tal filtración. El teorema es cierto para la sección nula $s': Y' \rightarrow \bar{E}'$, y concluimos aplicando la condición 4 a los morfismos $\pi: \bar{E}' \rightarrow \bar{E}$ y $s: Y \rightarrow \bar{E}$,

$$\pi^*s_*(\text{ch}(a)) = s'_*\pi^*\text{ch}(a) = s'_*\text{ch}(\pi^*a) = \text{ch}(s'_*\pi^*a) = \text{ch}(\pi^*s_*a) = \pi^*\text{ch}(s_*a).$$

4. Si el teorema es cierto para la proyección $p: \mathbb{P}_n \rightarrow p$ sobre un punto, también es cierto para $\pi: \mathbb{P}_n \times X \rightarrow X$, por la condición 3 impuesta a las teorías cohomológicas.
5. El teorema es cierto para la proyección $p: \mathbb{P}_n \rightarrow p$ sobre un punto.

Consideremos la inmersión $i: \mathbb{P}_{n-1} \rightarrow \mathbb{P}_n$, y pongamos

$$\begin{aligned} A &= A(p), \quad x_n = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1)) = i_*(1) \in A(\mathbb{P}_n) \\ \bar{A} &= \bar{A}(p), \quad \bar{x}_n = \bar{c}_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1)) = \bar{i}_*(1) \in \bar{A}(\mathbb{P}_n) \end{aligned}$$

Por hipótesis $\text{ch}(x_n) = \bar{x}_n$, y por tanto $\text{ch}(x_n^r) = \bar{x}_n^r$, de modo que el morfismo de anillos $\text{ch}: A(\mathbb{P}_n) \rightarrow \bar{A}(\mathbb{P}_n)$ induce un isomorfismo de \bar{A} -álgebras $A(\mathbb{P}_n) \otimes_A \bar{A} = \bar{A}(\mathbb{P}_n)$, y hemos de ver que la 1-forma $\bar{p}_*: \bar{A}(\mathbb{P}_n) \rightarrow \bar{A}$ se obtiene por cambio de base de la 1-forma $p_*: A(\mathbb{P}_n) \rightarrow A$.

Ahora bien, si consideramos la clase de cohomología $\Delta_n = \Delta_*(1) \in A(\mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n) = A(\mathbb{P}_n) \otimes_A A(\mathbb{P}_n)$ de la inmersión diagonal $\Delta: \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n$, tendremos

$$(p_* \otimes 1)(\Delta_n) = \pi_*\Delta_*(1) = \text{Id}_*(1) = 1,$$

donde $\pi: \mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}_n$ es la segunda proyección. Es decir, mediante la polaridad $\omega \mapsto (\omega \otimes 1)(\Delta_n)$ que define la diagonal, p_* se corresponde con la unidad.

De acuerdo con el siguiente lema, esta igualdad determina totalmente la 1-forma p_* , y como la clase de cohomología de la diagonal cambia de base (porque el teorema es cierto para la inmersión diagonal), concluimos que también p_* cambia de base.

Lema: La polaridad $A(\mathbb{P}_n)^* \rightarrow A(\mathbb{P}_n)$, $\omega \mapsto (\omega \otimes 1)(\Delta_n)$, de la diagonal es un isomorfismo.

Demostración: De hecho, por inducción sobre n vamos a ver que

$$\Delta_n = \sum_{r,s=0}^n a_{rs}x_n^r \otimes x_n^s = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \bullet \\ 0 & & & \vdots \\ 1 & \bullet & \dots & \bullet \end{pmatrix}$$

donde $a_{rs} = 0$ cuando $r + s < n$, y $a_{rs} = 1$ cuando $r + s = n$. En efecto,

$$i_*(x_{n-1}^r) = i_*i^*(x_n^r) = x_n^r \cdot i_*(1) = x_n^{r+1},$$

y por la condición 4 tenemos que $(i^* \otimes 1)(\Delta_n)$ es la clase de cohomología de la diagonal de \mathbb{P}_{n-1} en $\mathbb{P}_{n-1} \times \mathbb{P}_n$. Como

$$\begin{aligned} (i^* \otimes 1)(\Delta_n) &= \sum_{r,s} a_{rs}x_{n-1}^r \otimes x_n^s \\ (1 \otimes i_*)(\Delta_{n-1}) &= \sum_{r,s} a'_{rs}x_{n-1}^r \otimes x_n^{s+1} \end{aligned}$$

donde $\Delta_{n-1} = \sum_{rs} a'_{rs} x_{n-1}^r \otimes x_{n-1}^s$, por inducción sobre n obtenemos el resultado para los coeficientes a_{rs} , $r < n$.

Por simetría también se tiene para a_{rs} , $s < n$, y terminamos. q.e.d.

Ahora bien, *dado el funtor A , la imagen directa puede modificarse*: Sea F_\times la extensión multiplicativa de una serie formal invertible $F = a_0 + a_1 t + \dots$. Para todo morfismo proyectivo $f: Y \rightarrow X$ consideramos el **fibrado tangente relativo** virtual $T_f = T_Y - f^! T_X \in K(Y)$ y ponemos

$$f_*^{\text{new}}(a) = f_*(F_\times(-T_f) a) = F_\times(T_X) f_*(F_\times(T_Y)^{-1} a) \in A(X) \tag{12.3}$$

de modo que la nueva clase de cohomología de una hipersuperficie cerrada lisa $i: Y \rightarrow X$ es

$$[Y]^{\text{new}} = i_*^{\text{new}}(1) = i_*(F_\times(N_{Y/X})) = i_*(F_\times(i^* L_Y)) = F_\times(L_Y) i_*(1) = F([Y]) \cdot [Y].$$

Lema: (A, f_*^{new}) también es una teoría cohomológica y $c_1^{\text{new}}(L_x) = xF(x)$.

Demostración: Todas las condiciones son de comprobación sencilla, salvo la condición 2.

Pongamos $y = y_E \in A(\mathbb{P}(E))$ y $z = y_E^{\text{new}} = yF(y) = a_0 y + a_1 y^2 + \dots \in A(\mathbb{P}(E))$.

Tenemos que $z^n = a_0^n y^n + \dots$ y que $z^d = a_0^d y^d$ cuando $y^{d+1} = 0$.

Como las potencias de y generan el $A(X)$ -módulo $A(\mathbb{P}(E))$, también lo generan las potencias de z .

Como $A(\mathbb{P}(E))$ es un $A(X)$ -módulo libre de rango $r+1$, tenemos que $1, z, \dots, z^r$ forman una base (basta considerar el polinomio característico del endomorfismo de $A(\mathbb{P}(E))$ definido por z).

Finalmente, $c_1^{\text{new}}(L_x) = s_0^*(s_{0*}^{\text{new}}(1)) = s_0^*[F(s_{0*}(1)) \cdot s_{0*}(1)] = F(x) \cdot x$. q.e.d.

Ahora, si una teoría cohomológica A sigue la ley aditiva $c_1(L \otimes L') = c_1(L) + c_1(L')$, podemos modificar la imagen directa de $A \otimes \mathbb{Q}$ con una exponencial de modo que siga la ley multiplicativa de la teoría K .

Como $e^{ax} = 1 - (1 - e^{ax})$ y $1 - e^{ax} = -ax + \dots$, fijamos $a = -1$.

Por tanto modificamos la imagen directa de $A \otimes \mathbb{Q}$ con la serie invertible

$$F(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t} = \left(1 - \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} - \frac{t^3}{4!} + \frac{t^4}{5!} - \dots \right)$$

$$c_1^{\text{new}}(L_x) = xF(x) = 1 - e^{-x}.$$

Por la propiedad universal de la teoría K tenemos un morfismo de teorías cohomológicas $\text{ch}: K \rightarrow A \otimes \mathbb{Q}$ y, según 12.2 (p. 334) es precisamente la extensión aditiva de la serie e^t , llamada **carácter de Chern**,

$$\text{ch}(L_x) = 1 - c_1^{\text{new}}(L_x^*) = 1 - c_1^{\text{new}}(L_{-x}) = 1 - (1 - e^x) = e^x.$$

Teorema de Riemann-Roch-Grothendieck: *Si una teoría cohomológica A sobre las variedades lisas y casi-proyectivas sobre un cuerpo sigue la ley aditiva $c_1(L \otimes L') = c_1(L) + c_1(L')$, entonces para todo morfismo proyectivo $f: Y \rightarrow X$ tenemos el siguiente cuadrado conmutativo, donde la **clase de Todd** Td es la extensión multiplicativa de la serie formal $F(t)^{-1} = \frac{t}{1-e^{-t}} = 1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{12} - \frac{t^4}{720} + \dots$,*

$$\begin{array}{ccc} K(Y) & \xrightarrow{f!} & K(X) \\ \text{Td}(T_Y) \cdot \text{ch} \downarrow & & \downarrow \text{Td}(T_X) \cdot \text{ch} \\ GK(Y)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{f_*} & GK(X)_{\mathbb{Q}} \\ f_*[\text{Td}(T_Y) \cdot \text{ch}(y)] & = & \text{Td}(T_X) \cdot \text{ch}(f!(y)) \end{array}$$

Demostración: $\text{ch}(f_!(y)) = f_*^{\text{new}}(\text{ch}(y)) \stackrel{12,3}{=} F_{\times}(T_X)f_*[F_{\times}(T_Y)^{-1}\text{ch}(y)]$.

Definición: Una **teoría cohomológica graduada** A^\bullet es una teoría cohomológica que valora en la categoría de anillos graduados conmutativos, $A^\bullet(X) = \bigoplus_{n \geq 0} A^n(X)$, y tal que para todo morfismo proyectivo $f: Y \rightarrow X$ entre variedades conexas, la imagen directa $f_*: A^n(Y) \rightarrow A^{n+d}(X)$ aumenta el grado en la **codimensión** $d = \dim X - \dim Y$.

Nótese que los elementos de grado negativo se suponen nulos, y que la clase de cohomología de cualquier hipersuperficie es de grado 1, así que $c_i(x) \in A^i(X)$ para todo $x \in K(X)$.

Por ejemplo, $GK^\bullet(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ y $H^{2\bullet}(X_{\text{an}}, \mathbb{Z})$ son teorías cohomológicas graduadas.

Lema: *Toda teoría cohomológica graduada A^\bullet sigue la ley aditiva $c_1(L_x \otimes L_y) = x + y$.*

Demostración: Como $A^\bullet(\mathbb{P}_m \times \mathbb{P}_n) = A^\bullet(\text{Spec } k)[x_m, x_n]/(x_m^{m+1}, x_n^{n+1})$, existen $a, b \in A^0(\text{Spec } k)$ tales que $c_1(\pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_m}(1) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_m \times \mathbb{P}_n}} \pi_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1)) = a(\pi_1^* x_m) + b(\pi_2^* x_n)$.

Restringiendo a $\mathbb{P}_m \times \text{pt}$ y $\text{pt} \times \mathbb{P}_n$ vemos que $a = b = 1$.

Por el lema de Jouanolou hay un fibrado afín $\pi: P \rightarrow X$ y un morfismo $f: P \rightarrow \mathbb{P}_m \times \mathbb{P}_n$ tal que $\pi^* L_x = f^* \pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_m}(1)$ y $\pi^* L_y = f^* \pi_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1)$.

Luego $c_1(\pi^* L_x \otimes \pi^* L_y) = c_1(\pi^* L_x) + c_1(\pi^* L_y)$, de modo que $\pi^*(c_1(L_x \otimes L_y)) = \pi^* x + \pi^* y$.

Terminamos porque $\pi^*: A^\bullet(X) \rightarrow A^\bullet(P)$ es un isomorfismo.

Teorema: *Sea A^\bullet una teoría cohomológica graduada sobre las variedades lisas y casi-proyectivas sobre un cuerpo perfecto. Existe un morfismo de anillos natural y homogéneo $GK^\bullet(X) \rightarrow A^\bullet(X) \otimes \mathbb{Q}$ que conserva imágenes inversas y directas (luego clases de Chern).*

Demostración: Sea $i: Y \rightarrow X$ una subvariedad cerrada de codimensión d .

Si Y es lisa, $\text{ch}(\mathcal{O}_Y) = [Y] + \dots \in \bigoplus_{p \geq d} A^p(X) \otimes \mathbb{Q}$ por el teorema de Riemann-Roch.

En general Y es lisa fuera de un cerrado Y_{sing} de codimensión $> d$ cuando el cuerpo base es perfecto, y si ponemos $j: U = X - Y_{\text{sing}} \rightarrow X$, aplicando reiteradamente la condición 1 vemos que tenemos un morfismo inyectivo (recuérdese que $A^i(Z) = 0$ cuando $i < 0$)

$$j^*: A^p(X) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow A^p(U) \otimes \mathbb{Q}, \quad p \leq d.$$

Como $j^*(\text{ch}(\mathcal{O}_Y)) = \text{ch}(j^! \mathcal{O}_Y) = [Y \cap U] + \dots$, vemos que $\text{ch}: K(X) \rightarrow A^\bullet(X) \otimes \mathbb{Q}$ conserva las filtraciones; luego induce un morfismo de anillos $\varphi: GK^\bullet(X) \rightarrow A^\bullet(X) \otimes \mathbb{Q}$, $\varphi([x]_d) = [\text{ch}(x)]_d$ cuando $[x]_d \in GK^d(X)$, y es compatible con imágenes inversas porque lo es ch .

Por el teorema de Riemann-Roch conserva imágenes directas, pues para todo morfismo proyectivo $f: Y \rightarrow X$ de codimensión d y todo elemento $y \in F^n(Y)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi f_*([y]_n) &= \varphi[f_!(y)]_{n+d} = [\text{ch}(f_!(y))]_{n+d} = [f_*(\text{Td}(T_f)\text{ch}(y))]_{n+d} \\ &= f_*[(1 + \dots)\text{ch}(y)]_n = f_*[\text{ch}(y)]_n = f_*\varphi([y]_n). \end{aligned}$$

1. Las clases de Chern y Todd de un haz localmente libre $E = L_{\alpha_1} + \dots + L_{\alpha_r}$ son

$$\begin{aligned} \text{ch}(E) &= \sum_i e^{\alpha_i} = r + c_1 + \frac{1}{2}(c_1^2 - 2c_2) + \frac{1}{6}(c_1^3 - 3c_1c_2 + 3c_3) \dots \\ \text{Td}(E) &= \prod_i (1 + \frac{1}{2}\alpha_i + \frac{1}{12}\alpha_i^2 + \dots) = 1 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2) + \frac{1}{24}c_1c_2 + \dots \end{aligned}$$

2. Si C es una curva proyectiva lisa, $K = c_1(\Omega_C)$ es la clase de los divisores canónicos, y el teorema de Riemann-Roch para la proyección $C \rightarrow p$ sobre un punto da, para todo haz localmente libre E de rango r ,

$$\begin{aligned} \text{Td}(T_C) &= \text{Td}(L_{-K}) = 1 - \frac{1}{2}K, \\ \text{ch}(E) &= r + c_1(E), \\ \chi(C, E) &= \text{gr } c_1 - \frac{r}{2} \text{gr } K. \end{aligned}$$

3. Si S es una superficie proyectiva lisa, si $K = c_1(\Omega_S^1) = c_1(\Omega_S^2)$, tenemos

$$\begin{aligned} \text{Td}(T_S) &= 1 - \frac{1}{2}K + \frac{1}{12}(K^2 + c_2(S)), \\ \text{ch}(E) &= r + c_1(E) + \frac{1}{2}(c_1(E)^2 - 2c_2(E)), \\ \chi(S, E) &= \frac{1}{12}r(K^2 + \chi_{\text{top}}) - \frac{1}{2}K \cdot c_1 + \frac{1}{2}c_1^2 - \text{gr } c_2. \end{aligned}$$

donde $\chi_{\text{top}} = \text{gr } c_2(S)$. Cuando $E = \mathcal{O}_S$, se obtiene la **igualdad de Noether**

$$\chi(S, \mathcal{O}_S) = \frac{1}{12}(K^2 + \chi_{\text{top}}).$$

4. Para una hipersuperficie $i: Y \rightarrow X$ el teorema de Riemann-Roch da

$$\begin{aligned} i_*(\text{Td}(T_Y)) &= \text{ch}(\mathcal{O}_Y) \cdot \text{Td}(T_X) = \text{ch}(1 - L_{-Y}) \cdot \text{Td}(T_X) \\ Y - \frac{1}{2}i_*K_Y + \dots &= (Y - \frac{1}{2}Y^2 + \dots)(1 - \frac{1}{2}K_X + \dots) \end{aligned}$$

e igualando los términos de grado 2, vemos que $i_*K_Y = Y(K_X + Y)$.

5. Si ω una 1-forma racional en una superficie proyectiva lisa S , vamos a determinar $c_2(S)$, módulo torsión, en función de las singularidades de ω .

El haz $(\omega)(U) = \{f\omega \in \Omega_S(U) : f \in \Sigma_S\}$ es de línea, y $(\omega) \simeq L_D$, donde D es el divisor de ceros y polos de ω . Tenemos una sucesión exacta

$$(*) \quad 0 \longrightarrow (\omega) \longrightarrow \Omega_S^1 \xrightarrow{\wedge \omega} \Omega_S^2 \otimes L_{-D} \longrightarrow \mathfrak{C} \longrightarrow 0$$

Si x, y son parámetros en un punto p , y $\omega = h(fdx + gdy)$, donde $f, g \in \mathcal{O}_p$ no tienen factores comunes, una ecuación local de D es $h = 0$, y $\mathfrak{C}_p = \mathcal{O}_p/(f, g)$.

$\text{ch}(\mathcal{O}_S/\mathfrak{m}_p) = p$ por el teorema de Riemann-Roch para la inmersión $p \hookrightarrow S$; luego

$$\text{ch}(\mathfrak{C}) = \sum_p l(\mathfrak{C}_p) \cdot p.$$

Si $K = c_1(\Omega_S^2)$ denota el divisor canónico de S , la sucesión exacta $(*)$ permite obtener el llamado **invariante de Zeuthen-Segre**:

$$\begin{aligned} \text{ch}(L_D) + \text{ch}(L_{K-D}) &= \text{ch}(\Omega_S^1) + \text{ch}(\mathfrak{C}), \\ e^D + e^{K-D} &= 2 + K + \frac{1}{2}K^2 - c_2(S) + \text{ch}(\mathfrak{C}), \\ c_2(S) &= D(K - D) + \sum_p l(\mathfrak{C}_p) p. \end{aligned}$$

6. El último teorema da la coincidencia de los invariantes numéricos asociados a las variedades complejas en Geometría Algebraica y Topología Algebraica.

Así, en toda variedad proyectiva compleja lisa X se cumple $\langle \Delta, \Delta \rangle_{\text{top}} = \langle \Delta, \Delta \rangle_{\text{alg}}$,

$$\sum_i (-1)^i \dim_{\mathbb{Q}} H^i(X_{\text{an}}, \mathbb{Q}) = \sum_{p,q} (-1)^{p+q} \dim_{\mathbb{C}} H^p(X, \Omega_X^q).$$

En particular, en toda curva proyectiva lisa C se tiene la coincidencia del género topológico con el algebraico, $\frac{1}{2} \dim_{\mathbb{Q}} H^1(C_{\text{an}}, \mathbb{Q}) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(C, \Omega_C)$.

12.5. Teoría de la Dualidad

En esta sección supondremos que los esquemas son noetherianos y separados.

Sea $f: X \rightarrow S$ un morfismo proyectivo, de modo que si \mathcal{M} es un \mathcal{O}_X -módulo coherente, los haces $R^p f_* \mathcal{M}$ son coherentes (p. 245), y fijemos un recubrimiento finito de X por abiertos afines, afines sobre S (es decir, con imágenes contenidas en abiertos afines de S).

En la categoría de \mathcal{O}_X -módulos casicoherentes, el funtor $\mathcal{M} \rightsquigarrow f_* \check{C}^p \mathcal{M}$ es exacto y conmuta con límites inductivos porque las secciones globales conmutan con límites inductivos (p. 244). El teorema de representabilidad² de Grothendieck prueba sin más (p. 294) el

Teorema de Dualidad: *Para cada complejo inferiormente acotado I de \mathcal{O}_S -módulos casicoherentes inyectivos existe un complejo inferiormente acotado $f^! I$ de \mathcal{O}_X -módulos casicoherentes inyectivos tal que, para todo \mathcal{O}_X -módulo casicoherente \mathcal{M} tenemos que*

$$\mathrm{Hom}_X^\bullet(\mathcal{M}, f^! I) = \mathrm{Hom}_S^\bullet(f_*(\check{C}^\bullet \mathcal{M}), I).$$

Cuando I es una resolución inyectiva de \mathcal{O}_S , diremos que $D_{X/S} = f^! I$ es el **complejo dualizante** de f y, salvo casi-isomorfismos, no depende ni del recubrimiento afín de X (dos recubrimientos afines admiten un refinamiento afín común) ni de la resolución inyectiva de \mathcal{O}_S (el cono de un casi-isomorfismo $I \simeq J$ es una sucesión exacta escindida).

Teorema: $D_{X/S}|_{f^{-1}U} \xrightarrow{\sim} D_{f^{-1}U/U}$, donde U es un abierto de S , y para todo \mathcal{O}_X -módulo coherente \mathcal{M} tenemos un casi-isomorfismo

$$f_* \underline{\mathrm{Hom}}_X(\mathcal{M}, D_{X/S}) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_S(f_* \check{C}^\bullet \mathcal{M}, I).$$

Demostración: Sea U un abierto afín de S , y \mathfrak{p} el haz de ideales de $S - U$.

Como el recubrimiento de X es afín sobre S , tenemos que $f_* \check{C}^\bullet(f^* \mathfrak{p}^n \otimes \mathcal{M}) = \mathfrak{p}^n \otimes f_* \check{C}^\bullet \mathcal{M}$, y por la fórmula de Deligne (el casi-isomorfismo se debe al siguiente lema)

$$\begin{aligned} \Gamma(U, f_* \underline{\mathrm{Hom}}_X(\mathcal{M}, D_{X/S})) &= \varinjlim \mathrm{Hom}_X(\mathfrak{p}^n, f_* \underline{\mathrm{Hom}}_X(\mathcal{M}, D_{X/S})) \\ &= \varinjlim \mathrm{Hom}_X(f^* \mathfrak{p}^n \otimes \mathcal{M}, D_{X/S}) = \varinjlim \mathrm{Hom}_S^\bullet(f_* \check{C}^\bullet(f^* \mathfrak{p}^n \otimes \mathcal{M}), I) \\ &= \varinjlim \mathrm{Hom}_S^\bullet(\mathfrak{p}^n \otimes f_* \check{C}^\bullet \mathcal{M}, I) \xrightarrow{\sim} \Gamma(U, \underline{\mathrm{Hom}}_S^\bullet(f_* \check{C}^\bullet \mathcal{M}, I)). \end{aligned}$$

Luego $f_* \underline{\mathrm{Hom}}_X(\mathcal{M}, D_{X/S}) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_S^\bullet(f_* \check{C}^\bullet \mathcal{M}, I)$. Además, poniendo $V = f^{-1}U$,

$$\mathrm{Hom}_V(\mathcal{M}|_V, D_{X/S}|_V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_S^\bullet((f|_V)_* \check{C}^\bullet(\mathcal{M}|_V), I|_U) = \mathrm{Hom}_V(\mathcal{M}|_V, D_{V/U}).$$

porque $I|_U$ es una resolución inyectiva de \mathcal{O}_U . Ahora, si \mathfrak{q} es el haz de ideales de un cerrado de V , poniendo $\mathcal{M}|_V = \mathfrak{q}^n$, y tomando límite inductivo, vemos que $D_{X/S}|_V \xrightarrow{\sim} D_{V/U}$.

Lema: *Si K es un complejo acotado casicoherente de homología coherente, entonces el morfismo $\varinjlim \mathrm{Hom}^\bullet(\mathfrak{p}^n, \underline{\mathrm{Hom}}^\bullet(K, I)) \rightarrow \mathrm{Hom}^\bullet(K|_U, I|_U)$ es un casi-isomorfismo.*

Demostración: Veamos que existe un subcomplejo coherente $K' \hookrightarrow K$ casi-isomorfo.

Si K^i ya es coherente cuando $i > p$, tomamos $\mathcal{M} \subset K^p$ coherente tal que $d_p(\mathcal{M}) = d_p(K^p)$, y $\mathcal{N} \subset \mathrm{Ker} d_p$ coherente tal que $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{H}^p(K) \rightarrow 0$. Reemplazando K^p y K^{p-1} por $\mathcal{M} + \mathcal{N}$ y $d_{p-1}^{-1}(\mathcal{M} + \mathcal{N})$, conseguimos que también sea coherente en grado p .

²En el caso de un funtor contravariante F sobre la categoría de haces casicoherentes, las parejas mínimas Q_ξ forman un conjunto porque, por la fórmula de Deligne, cada una está determinada por los elementos $\eta \in F(\mathfrak{p}^n)$ que admitan un morfismo de parejas $(\mathfrak{p}^n)_\eta \rightarrow Q_\xi$.

Poniendo $R = \underline{\text{Hom}}^\bullet(K, I)$, $R' = \underline{\text{Hom}}^\bullet(K', I)$, tenemos un cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim \text{Hom}(\mathfrak{p}^n, R) & \longrightarrow & \Gamma(U, R) \\ \downarrow & & \downarrow \text{qis} \\ \varinjlim \text{Hom}(\mathfrak{p}^n, R') & \xrightarrow{\text{iso}} & \Gamma(U, R') \end{array}$$

donde el casi-isomorfismo se debe a que $R \rightarrow R'$ es un casi-isomorfismo entre complejos de haces flascos (luego su cono es un complejo acíclico y flasco).

Para concluir, basta ver que $\varinjlim \text{Hom}(\mathfrak{p}^n, R) \rightarrow \varinjlim \text{Hom}(\mathfrak{p}^n, R')$ es un casi-isomorfismo.

Si S es afín, $R(S) \simeq R'(S)$ induce un casi-isomorfismo (U es afín)

$$\varinjlim \text{Hom}(\mathfrak{p}^n, R) = \varinjlim \text{Hom}(\mathfrak{p}^n, \widetilde{R(S)}) = \Gamma(U, \widetilde{R(S)}) \xrightarrow{\simeq} \Gamma(U, \widetilde{R'(S)}) = \varinjlim \text{Hom}(\mathfrak{p}^n, R').$$

En general, el morfismo $\varinjlim \underline{\text{Hom}}(\mathfrak{p}^n, R) \rightarrow \varinjlim \underline{\text{Hom}}(\mathfrak{p}^n, R')$ es un casi-isomorfismo, porque acabamos de ver que lo es al tomar secciones en todo abierto afín de S .

Como ambos complejos son de haces flascos, se concluye al tomar secciones globales.

Teorema: Si $\phi: T \rightarrow S$ es plano, tenemos un casi-isomorfismo $\bar{\phi}^* D_{X/S} \simeq D_{X_T/T}$.

Demostración: Si $\phi^* I \rightarrow J$ es una resolución por haces casicoherentes inyectivos, J es una resolución de \mathcal{O}_T porque ϕ es plano, y para todo \mathcal{O}_X -módulo coherente \mathcal{M}

$$\begin{aligned} \bar{f}_* \underline{\text{Hom}}_{X_T}(\bar{\phi}^* \mathcal{M}, \bar{\phi}^* D_{X/S}) &= \bar{f}_* \bar{\phi}^* \underline{\text{Hom}}_X(\mathcal{M}, D_{X/S}) && \text{porque } \phi \text{ es plano} \\ &= \phi^* f_* \underline{\text{Hom}}_X(\mathcal{M}, D_{X/S}) && \text{(p. 319)} \\ &\simeq \phi^* \underline{\text{Hom}}_S(f_* \check{\mathcal{C}}^\bullet \mathcal{M}, I) && \text{por el teorema anterior} \\ &\simeq \underline{\text{Hom}}_S(\phi^* f_* \check{\mathcal{C}}^\bullet \mathcal{M}, J) && \text{por el siguiente lema} \\ &= \underline{\text{Hom}}_S(\bar{f}_* \bar{\phi}^* \check{\mathcal{C}}^\bullet \mathcal{M}, J) = \underline{\text{Hom}}_S(\bar{f}_* \check{\mathcal{C}}^\bullet(\bar{\phi}^* \mathcal{M}), J) && \text{(p. 319)} \\ &\simeq \bar{f}_* \underline{\text{Hom}}_{X_T}(\bar{\phi}^* \mathcal{M}, D_{X_T/T}) && \text{por el teorema anterior} \end{aligned}$$

Lema: Si K es un complejo acotado casicoherente de homología coherente, y ϕ es plano, $\phi^* \underline{\text{Hom}}^\bullet(K, I) \xrightarrow{\simeq} \underline{\text{Hom}}^\bullet(\phi^* K, J)$; es decir,

$$\phi^* \mathbf{R}\underline{\text{Hom}}(K, I) = \mathbf{R}\underline{\text{Hom}}(\phi^* K, \phi^* I).$$

Demostración: Sea $K' \subset K$ un subcomplejo coherente casi-isomorfo.

Como I es inyectivo, $\underline{\text{Hom}}^\bullet(K, I) \simeq \underline{\text{Hom}}^\bullet(K', I)$, y como la cuestión es local, podemos suponer que tenemos una resolución $L \rightarrow K'$ por libres finitos.

Ahora, usando que ϕ es plano y la sucesión espectral del bicomplejo, tenemos que

$$\begin{aligned} \phi^* \underline{\text{Hom}}^\bullet(K, I) &\simeq \phi^* \underline{\text{Hom}}^\bullet(K', I) \simeq \phi^* \underline{\text{Hom}}^\bullet(L, I) = \underline{\text{Hom}}^\bullet(\phi^* L, \phi^* I) \\ &\simeq \underline{\text{Hom}}^\bullet(\phi^* L, J) \simeq \underline{\text{Hom}}^\bullet(\phi^* K', J) \simeq \underline{\text{Hom}}^\bullet(\phi^* K, J). \end{aligned}$$

12.5.1. Cálculo del Dualizante

Teorema: El dualizante de una inmersión cerrada $i: Y \rightarrow X$ es, $D_{Y/S} = \underline{\text{Hom}}_X(\mathcal{O}_Y, D_{X/S})$.

Demostración: Si usamos en Y la restricción del recubrimiento afín usado en X , tendremos que $i_* \check{\mathcal{C}}^\bullet(i^* \mathcal{M}) = \check{\mathcal{C}}^\bullet(i_* i^* \mathcal{M})$, y concluimos,

$$\begin{aligned} \text{Hom}_X(\mathcal{M}, i_* D_{Y/S}) &= \text{Hom}_Y(i^* \mathcal{M}, D_{Y/S}) = \text{Hom}_S(f_* \check{\mathcal{C}}^\bullet(i_* i^* \mathcal{M}), I) \\ &= \text{Hom}_X(i_* i^* \mathcal{M}, D_{X/S}) = \text{Hom}_X(\mathcal{M}, \underline{\text{Hom}}_X(i_* \mathcal{O}_Y, D_{X/S})). \end{aligned}$$

Lema: Si $B = A/I$, donde el ideal está generado por una sucesión regular, $I = (f_1, \dots, f_d)$, entonces $\text{Ext}_A^p(B, A) = 0$, $p \neq d$, y se tiene un isomorfismo canónico

$$\text{Ext}_A^d(B, A) = \text{Hom}_B(\Lambda^d(I/I^2), B),$$

y si además $\text{Tor}_p^A(B, M) = 0$, $p > 0$, entonces

$$\text{Ext}_A^p(B, M) = \text{Ext}_A^p(B, A) \otimes_A M.$$

Demostración: El complejo de Koszul K de f_1, \dots, f_d es una resolución libre de B , y el complejo dual sólo tiene un grupo de cohomología, $H^d[\text{Hom}_A(K, A)] \simeq B$.

Si el ideal I está generado por otra sucesión regular $g_i = \sum_j a_{ij} f_j$, hay un isomorfismo

$$K(f_1, \dots, f_d) \simeq K(g_1, \dots, g_d),$$

dado en grado p por $\Lambda^p(a_{ij})$, y tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & \text{Ext}_A^d(B, A) & \\ f_1, \dots, f_d \swarrow & & \searrow g_1, \dots, g_d \\ B & \xrightarrow{\det(a_{ij})} & B \end{array}$$

Lo mismo ocurre con las bases duales de $f_1 \wedge \dots \wedge f_d$ y $g_1 \wedge \dots \wedge g_d$ en $\Lambda^d(I/I^2)^*$, así que el isomorfismo $\text{Ext}_A^d(A/I, A) = \Lambda^d(I/I^2)^*$ es canónico.

Además, $\text{Hom}_A(K, A) \otimes_A M = \text{Hom}_A(K, M)$.

Como $\text{Hom}_A(K, A)$ es una resolución libre de B , tenemos que

$$H^p[\text{Hom}_A(K, A)] \otimes_A M = H^p[\text{Hom}_A(K, M)].$$

Definición: Una inmersión cerrada $Y \rightarrow X$ es una **inmersión regular** de codimensión d si su haz de ideales $\mathfrak{p}_{Y/X}$ está localmente generado por sucesiones regulares de longitud d .

Teorema: Si \mathfrak{p} es el ideal de una inmersión regular $i: Y \rightarrow X$ de codimensión d , los haces de homología de $D_{Y/X}$ son nulos, salvo

$$\omega_{Y/X} = \mathcal{H}^d(D_{Y/X}) = \Lambda^d(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2)^*,$$

y si además los haces $\mathcal{H}^p(D_{X/S})$ son i^* -acíclicos, tenemos que

$$\mathcal{H}^{p+d}(D_{Y/S}) = \omega_{Y/X} \otimes_{\mathcal{O}_Y} i^* \mathcal{H}^p(D_{X/S}).$$

Demostración: La primera afirmación se sigue directamente del lema porque

$$\mathcal{H}^p(D_{Y/X}) = \mathcal{H}^p[\underline{\mathbf{R}}\text{Hom}_X(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X)] = \underline{\text{Ext}}_X^p(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X).$$

Además, $D_{Y/S} = \underline{\text{Hom}}_X(\mathcal{O}_Y, D_{X/S})$, y tenemos una sucesión espectral (p. 307)

$$E_2^{p,q} = \underline{\text{Ext}}_X^p(\mathcal{O}_Y, \mathcal{H}^q(D_{X/S})) \Rightarrow \mathcal{H}^{p+q}(D_{Y/S}).$$

Si los haces $\mathcal{H}^q(D_{X/S})$ son i^* -acíclicos, por el lema $E_2^{p,q} = 0$, $p \neq d$, y

$$\mathcal{H}^{d+q}(D_{Y/S}) = \underline{\text{Ext}}_X^d(\mathcal{O}_Y, \mathcal{H}^q(D_{X/S})) = \underline{\text{Ext}}_X^p(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{H}^q(D_{X/S}).$$

Definición: Un morfismo plano de tipo finito $X \rightarrow S$ es **liso** de dimensión d si la diagonal $\Delta: X \rightarrow X \times_S X$ es una inmersión regular de codimensión d .

Teorema: Si $X \rightarrow S$ es un morfismo proyectivo y liso de dimensión d , entonces $D_{X/S}$ tiene un único haz de homología no nulo $\mathcal{H}^{-d}(D_{X/S}) = \Lambda^d \Omega_{X/S}$.

Demostración: Como el morfismo $X \rightarrow S$ es plano,

$$\mathcal{H}^p(D_{X \times_S X/X}) = \mathcal{H}^p(\pi_1^* D_{X/S}) = \pi_1^* \mathcal{H}^p(D_{X/S}) = \mathcal{H}^p(D_{X/S}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X \times_S X},$$

y estos haces son Δ^* -acíclicos porque si A es el anillo local de $X \times_S X$ en un punto de la diagonal, con las notaciones del lema

$$\mathrm{Tor}_p^A(B, M \otimes_B A) = H^p[(M \otimes_B A) \otimes_A K] = H^p(M \otimes_B K) = \mathrm{Tor}_p^B(M, B)$$

al ser K un complejo de B -módulos planos. Por el teorema anterior,

$$\mathcal{H}^{p+d}(D_{X/X}) = \omega_\Delta \otimes \Delta^* \mathcal{H}^p(D_{X \times_S X/X}) = (\Lambda^d \Omega_{X/S})^* \otimes \mathcal{H}^p(D_{X/S}),$$

y terminamos porque obviamente todos los haces $\mathcal{H}^p(D_{X/X})$ son nulos, salvo $\mathcal{H}^0(D_{X/X}) = \mathcal{O}_X$.

Teorema: Si un abierto $U \rightarrow X$ admite una inmersión cerrada en \mathbb{A}_S^n ,

$$\mathcal{H}^p(D_{X/S})|_U \simeq \underline{\mathrm{Ext}}_{\mathbb{A}_S^n}^{p+n}(\mathcal{O}_U, \mathcal{O}_{\mathbb{A}_S^n}).$$

Demostración: El ideal de la inmersión cerrada $i: U \rightarrow \mathbb{A}_S^n \times_S X = \mathbb{A}_X^n$ está definido en el abierto \mathbb{A}_U^n por una sucesión regular de longitud n , así que $\omega_{U/\mathbb{A}_X^n} \simeq \mathcal{O}_U$ es trivial.

Igual que antes (ahora A es el anillo local de \mathbb{A}_X^n en un punto de U) los haces

$$\mathcal{H}^p(D_{\mathbb{A}_X^n/\mathbb{A}_S^n}) = \mathcal{H}^p(\pi_2^* D_{X/S}) = \pi_2^* \mathcal{H}^p(D_{X/S}) = \mathcal{H}^p(D_{X/S}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{\mathbb{A}_X^n}$$

son i^* -acíclicos, y el lema permite concluir,

$$i^* \pi_2^* \mathcal{H}^p(D_{X/S}) \simeq \omega_{U/\mathbb{A}_X^n} \otimes i^* \mathcal{H}^p(D_{\mathbb{A}_X^n/\mathbb{A}_S^n}) = \mathcal{H}^{p+n}(D_{U/\mathbb{A}_S^n}) = \underline{\mathrm{Ext}}_{\mathbb{A}_S^n}^{p+n}(\mathcal{O}_U, \mathcal{O}_{\mathbb{A}_S^n}).$$

1. Si X es un esquema proyectivo sobre un cuerpo, $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{M}, D_X) = \Gamma(X, \check{\mathcal{C}}^\bullet \mathcal{M})^*$; luego $\mathrm{Ext}_X^{-p}(\mathcal{M}, D_X) = H^p(X, \mathcal{M})^*$, y si D_X tiene un único haz de homología no nulo $\omega_X = \mathcal{H}^{-d}(D_X)$, entonces $\mathrm{Ext}_X^{d-p}(\mathcal{M}, \omega_X) = H^p(X, \mathcal{M})^*$.
2. En el caso de una k -álgebra finita A , tenemos que $\mathrm{Hom}_A(M, \omega_A) = M^*$ para todo A -módulo finito generado M . Poniendo $M = A$, vemos que el módulo dualizante es $\omega_A = A^*$.
3. El dualizante del espacio proyectivo \mathbb{P}_d es un haz de línea, $\omega_{\mathbb{P}_d} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}_d}(r)$, y tenemos que $H^d(\mathbb{P}_d, \mathcal{O}(n))^* = \mathrm{Hom}(\mathcal{O}(n), \omega_{\mathbb{P}_d}) = \Gamma(\mathbb{P}_d, \mathcal{O}(r-n))$; luego $\omega_{\mathbb{P}_d} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}_d}(-d-1)$.
4. Si Y es una hipersuperficie de una variedad proyectiva regular X , definida por un ideal localmente principal $\mathfrak{p} = L_{-Y}$, entonces $\omega_Y = (\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2)^* \otimes \omega_X$, y los divisores canónicos de Y vienen dados por la **fórmula de adjunción**, $K_Y = Y \cdot (K_X + Y)$.
5. Si \mathcal{L} es un haz localmente libre sobre una variedad proyectiva lisa X de dimensión n , $H^p(X, \mathcal{L})^* = \mathrm{Ext}^{n-p}(\mathcal{L}, \Omega_X^n) = H^{n-p}(X, \mathcal{L}^* \otimes \Omega_X^n)$, y como $(\Omega_X^q)^* \otimes \Omega_X^n = \Omega_X^{n-q}$,

$$H^p(X, \Omega_X^q)^* = H^{n-p}(X, \Omega_X^{n-q}).$$

6. Si K es el divisor canónico de una superficie proyectiva irreducible y lisa S , por dualidad $h^2(D) = h^0(K - D)$ para todo divisor D , y por el teorema de Riemann-Roch (p. 339)

$$h^0(nD) + h^0(K - nD) \geq \chi(L_{nD}) = \frac{1}{2}(D \cdot D)n^2 - \frac{1}{2}(K \cdot D)n + \chi(\mathcal{O}_S).$$

Cuando $D^2 > 0$, si $n \gg 0$ vemos que $h^0(nD) \gg 0$ ó $h^0(K - nD) \gg 0$, en cuyo caso será $h^0(K + nD) = 0$ (y por tanto $h^0(-nD) \gg 0$) porque una sección no nula de L_{K+nD} daría que $h^0(K - nD) \leq h^0(K - nD + K + nD) = h^0(L_{2K})$. Luego $h^0(nD) > 1$ para algún $n \in \mathbb{Z}$ y, al ser S irreducible, nD es linealmente equivalente a un divisor efectivo, de modo que $D \cdot H > 0$ para toda sección hiperplana H .

Es decir, la forma bilineal simétrica $\text{Pic}(S) \times \text{Pic}(S) \rightarrow \mathbb{Z}$, $(D', D) \mapsto D' \cdot D$, es de índice 1 (**teorema del índice de Hodge**): $H \cdot H > 0$, y si $D \cdot H = 0$, entonces $D^2 \leq 0$ (y $D^2 = 0$ sólo si D es **numéricamente equivalente** a 0, en el sentido de que $D \cdot E = 0$ para todo divisor E ; es decir, D está en el radical de la métrica).

7. Cuando la superficie es producto directo, $S = C' \times C$, de dos curvas proyectivas lisas con algún punto racional, los divisores $p' \times C$ y $C' \times p$ forman claramente un par hiperbólico, al que es ortogonal $\Gamma = D - d(p' \times C) - d'(C' \times p)$, donde d', d son los grados del divisor D sobre ambos factores. Luego $\Gamma^2 \leq 0$, y obtenemos la **desigualdad de Castelnuovo**,

$$D \cdot D \leq 2d'd,$$

y sólo es igualdad cuando D es numéricamente equivalente³ a un divisor con componentes horizontales y verticales.

8. En el caso particular de la gráfica Γ de un morfismo $C \rightarrow C$ de grado d , la fórmula de adjunción $\Gamma \cdot (K_S + \Gamma) = 2g - 2$, donde g es el género de C , afirma que $\Gamma^2 = (2 - 2g)d$. Ahora la desigualdad de Castelnuovo $(n\Gamma + m\Delta)^2 \leq 2(n + m)(dn + m)$ da

$$q(n, m) = gdn^2 + (1 + d - \Gamma \cdot \Delta)nm + gm^2 \geq 0$$

porque $\Delta^2 = 2 - 2g$. El discriminante de $q(n, m)$ es ≤ 0 , y obtenemos una estimación del número $\Gamma \cdot \Delta$ de puntos fijos, contados con su multiplicidad,

$$|1 + d - \Gamma \cdot \Delta| \leq 2g\sqrt{d}.$$

9. Si además $k = \mathbb{F}_q$ es un cuerpo finito, tenemos un k -morfismo $C \rightarrow C$, que es la identidad en el espacio topológico subyacente y $\mathcal{O}_C(U) \rightarrow \mathcal{O}_C(U)$, $f \mapsto f^q$, en cada abierto U . Por cambio de base a un cierre algebraico $k \rightarrow \bar{k}$, obtenemos una curva $\bar{C} = C \times_k \bar{k}$ sobre \bar{k} y un **morfismo de Frobenius** $F: \bar{C} \rightarrow \bar{C}$, cuyos puntos fijos son los puntos racionales de C . Este morfismo de Frobenius es de grado q y es puramente inseparable, así que corta transversalmente a la diagonal, y obtenemos una estimación⁴ del número N de puntos racionales de C ,

$$|1 + q^n - N| \leq 2g\sqrt{q}.$$

³y de hecho linealmente equivalente; pero no lo probaremos.

⁴equivalente a la hipótesis de Riemann para la función zeta de la curva C .

12.5.2. Dualidad Local

Sea $\widehat{\mathcal{O}}$ un anillo local noetheriano completo y sea x el punto cerrado de $X = \text{Spec } \widehat{\mathcal{O}}$. Pongamos $U = X - x$, y para todo $\widehat{\mathcal{O}}$ -módulo M pongamos $M^* = \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{O}}}(M, I)$, donde I es una envolvente inyectiva fijada de \mathcal{O}/\mathfrak{m} . Determinemos ahora el dual $H_x^p(X, M)^*$ de los grupos de cohomología local en términos de los morfismos a un complejo dualizante local \widehat{D} .

Tenemos una sucesión exacta $0 \rightarrow H_x^0(X, M) \rightarrow M \rightarrow \widetilde{M}(U) \rightarrow H_x^1(X, M) \rightarrow 0$, y $H_x^p(X, M) = H^{p-1}(U, M)$, $p \geq 2$. Luego si consideramos un recubrimiento finito de U por abiertos básicos, el correspondiente complejo de Čech $\check{C}^\bullet(\widetilde{M}|_U)$ es una resolución acíclica de $\widetilde{M}|_U$, y los grupos de cohomología del siguiente complejo $K^\bullet(M)$:

$$K^0(M) = M \rightarrow K^1(M) = \Gamma(U, \check{C}^0 \widetilde{M}|_U) \rightarrow \dots \rightarrow K^p(M) = \Gamma(U, \check{C}^{p-1} \widetilde{M}|_U) \rightarrow \dots$$

son los grupos de cohomología local $H_x^p(X, M)$. Además, $K^p(M)$ es un funtor exacto y conmuta con límites inductivos (p. 244); luego por el teorema de representabilidad de Grothendieck, $K^p(M)^*$ es representable por un $\widehat{\mathcal{O}}$ -módulo inyectivo \widehat{D}^{-p} .

Teorema de Dualidad Local: *Existe un complejo acotado de $\widehat{\mathcal{O}}$ -módulos inyectivos \widehat{D} , llamado **complejo dualizante local** de $\widehat{\mathcal{O}}$, tal que para todo $\widehat{\mathcal{O}}$ -módulo M ,*

$$(K^\bullet M)^* = \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{O}}}^\bullet(M, \widehat{D}).$$

Corolario: $H_x^p(M)^* = \text{Ext}_{\widehat{\mathcal{O}}}^{-p}(M, \widehat{D})$.

Teorema: *El complejo dualizante local de un anillo regular completo de dimensión n tiene un único módulo de cohomología no nulo, $H^{-n} \widehat{D} \simeq \widehat{\mathcal{O}}$.*

Demostración: $H^{-p} \widehat{D} = \text{Ext}_{\widehat{\mathcal{O}}}^{-p}(\widehat{\mathcal{O}}, \widehat{D}) = H_x^p(\widehat{\mathcal{O}})^* = 0$ cuando $p \neq n$, y $H_x^n(\widehat{\mathcal{O}})$ es una envolvente inyectiva de \mathcal{O}/\mathfrak{m} , así que $H_x^n(\widehat{\mathcal{O}})^* \simeq \widehat{\mathcal{O}}^{**} = \widehat{\mathcal{O}}$ (p. 317).

Lema: *Si $\widehat{\mathcal{O}}'$ es un cociente de $\widehat{\mathcal{O}}$, entonces $\text{Hom}_{\widehat{\mathcal{O}}}(\widehat{\mathcal{O}}', I)$ es una envolvente inyectiva del cuerpo residual de $\widehat{\mathcal{O}}'$.*

Demostración: Sobre la categoría de $\widehat{\mathcal{O}}'$ -módulos de longitud finita, $F(M) = \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{O}}}(M, I)$ es exacto y $F(k) \simeq k$; luego se corresponde con una envolvente inyectiva del cuerpo residual,

$$\varinjlim \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{O}}}(\widehat{\mathcal{O}}'/\mathfrak{m}'^r, I) = \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{O}}}(\widehat{\mathcal{O}}', I).$$

Teorema: *Si $\widehat{\mathcal{O}}'$ es un cociente de $\widehat{\mathcal{O}}$, entonces el complejo dualizante local \widehat{D}' de $\widehat{\mathcal{O}}'$ es*

$$\widehat{D}' \simeq \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{O}}}(\widehat{\mathcal{O}}', \widehat{D}).$$

Demostración: Consideremos el recubrimiento de $\text{Spec } \widehat{\mathcal{O}}' - x$ por abiertos básicos inducido por el recubrimiento fijado de $U = \text{Spec } \widehat{\mathcal{O}} - x$, y la envolvente inyectiva $\text{Hom}_{\widehat{\mathcal{O}}}(\widehat{\mathcal{O}}', I)$ del cuerpo residual de $\widehat{\mathcal{O}}'$. Para todo $\widehat{\mathcal{O}}$ -módulo M , ponemos $M' = M \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}} \widehat{\mathcal{O}}'$. Entonces,

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{O}}}(M, \widehat{D}') &= \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{O}}'}(M', \widehat{D}') = \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{O}}'}(K^\bullet(M'), \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{O}}}(\widehat{\mathcal{O}}', I)) \\ &= \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{O}}}(K^\bullet(M'), I) = \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{O}}}(M', \widehat{D}) = \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{O}}}(M, \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{O}}}(\widehat{\mathcal{O}}', \widehat{D})). \end{aligned}$$

Corolario: *Sea \mathcal{D}_X el complejo dualizante de una variedad proyectiva X sobre un cuerpo. En cada punto $x \in X$, la completación de la fibra $\mathcal{D}_{X,x}$ es casi-isomorfa al complejo dualizante local \widehat{D}_x del anillo local completo $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$.*

Demostración: Si X es un subesquema cerrado de un espacio proyectivo \mathbb{P}_d , entonces tenemos que $\mathcal{D}_X = \mathbf{RHom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_d}}(\mathcal{O}_X, \Omega_{\mathbb{P}_d}^d)$ y

$$\mathcal{D}_{X,x} = \mathbf{RHom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_d,x}}(\mathcal{O}_{X,x}, \Omega_{\mathbb{P}_d,x}^d) \simeq \mathbf{RHom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_d,x}}(\mathcal{O}_{X,x}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_d,x}),$$

porque \mathcal{D}_x es una resolución inyectiva de $\Omega_{\mathbb{P}_d,x}^d \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}_d,x}$ cuando \mathcal{D} es una resolución inyectiva de $\Omega_{\mathbb{P}_d}^d$.

Luego la completación de $\mathcal{D}_{X,x}$ es $\mathbf{RHom}_{\widehat{\mathcal{O}}_{\mathbb{P}_d,x}}(\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}, \widehat{\mathcal{O}}_{\mathbb{P}_d,x}) = \widehat{\mathcal{D}}_x$.

Corolario: Si $\widehat{\mathcal{O}}'$ es un cociente de un anillo regular completo $\widehat{\mathcal{O}}$, entonces el complejo dualizante local $\widehat{\mathcal{D}}'$ es un complejo acotado de módulos inyectivos, con módulos de cohomología finito generados.

Demostración: Los $\widehat{\mathcal{O}}'$ -módulos $\text{Ext}_{\widehat{\mathcal{O}}}^p(\widehat{\mathcal{O}}', \widehat{\mathcal{D}}) = \text{Ext}_{\widehat{\mathcal{O}}}^p(\widehat{\mathcal{O}}', \widehat{\mathcal{O}})$ son finito generados.

12.5.3. Bidualidad

Definición: Sea \mathcal{O} un anillo local noetheriano y sea D un complejo acotado de \mathcal{O} -módulos inyectivos (o cualquier complejo acotado de \mathcal{O} -módulos casi-isomorfo) con módulos de cohomología $H^p(D)$ finito generados. Pondremos $D(-) = \mathbf{RHom}_{\mathcal{O}}(-, D)$, y decimos que D es un **complejo bidualizante** de \mathcal{O} -módulos si el morfismo natural $M^\bullet \rightarrow DD(M^\bullet)$ es un casi-isomorfismo para todo complejo acotado de \mathcal{O} -módulos M^\bullet con módulos de cohomología $H^p(M^\bullet)$ finito generados.

Teorema: Un complejo acotado D de \mathcal{O} -módulos inyectivos, con módulos de cohomología finito generados, es un complejo bidualizante si y sólo si el morfismo natural $\mathcal{O} \rightarrow DD(\mathcal{O})$ es un casi-isomorfismo, $\mathcal{O} \simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}}^\bullet(D, D)$.

Demostración: Si D es un complejo bidualizante, basta poner $M = \mathcal{O}$ en la definición.

Recíprocamente, si M es un \mathcal{O} -módulo finito generado y $L^\bullet \rightarrow M \rightarrow 0$ es una resolución por módulos libres de rango finito, por hipótesis el morfismo $L^p \rightarrow \text{Hom}^\bullet(\text{Hom}(L^p, D), D)$ es un casi-isomorfismo.

Por el teorema del bicomplejo, también lo es $L^\bullet \rightarrow \text{Hom}^\bullet(\text{Hom}^\bullet(L^\bullet, D), D)$, y $M \simeq DD(M)$.

Finalmente, procedemos por inducción sobre el número de componentes no nulas de M^\bullet y, si M^p es la componente no nula de mayor grado, tenemos un diagrama conmutativo de filas exactas

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M^p & \longrightarrow & M^\bullet & \longrightarrow & \bar{M}^\bullet \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & DD(M^p) & \longrightarrow & DD(M^\bullet) & \longrightarrow & DD(\bar{M}^\bullet) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Como $M^p \rightarrow DD(M^p)$ y $\bar{M}^\bullet \rightarrow DD(\bar{M}^\bullet)$ son casi-isomorfismos, también lo es $M^\bullet \rightarrow DD(M^\bullet)$.

Corolario: Si \mathcal{O} es un anillo local regular, un complejo bidualizante es \mathcal{O} .

Demostración: \mathcal{O} admite una resolución inyectiva finita porque $\text{Ext}_{\mathcal{O}}^n(M, \mathcal{O}) = 0$, $n > \dim \mathcal{O}$, y el casi-isomorfismo $\mathcal{O} \simeq \mathbf{RHom}(\mathbf{RHom}(\mathcal{O}, \mathcal{O}), \mathcal{O})$ es evidente.

Corolario: Todo complejo bidualizante de un cuerpo k es casi-isomorfo a k , salvo cambio de grado y casi-isomorfismos no canónicos.

Demostración: Todo complejo D de espacios vectoriales es casi-isomorfo a su cohomología $H(D) = \bigoplus_p H^p(D)$, y

$$k \simeq \text{Hom}_k^\bullet(D, D) \simeq \text{Hom}_k^\bullet(H(D), H(D)).$$

Teorema: Si D es un complejo bidualizante de \mathcal{O} , entonces un complejo bidualizante de cualquier cociente $\bar{\mathcal{O}}$ es

$$\mathbf{R}\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\bar{\mathcal{O}}, D).$$

Demostración: Si Q es un \mathcal{O} -módulo inyectivo, entonces $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\bar{\mathcal{O}}, Q)$ es un $\bar{\mathcal{O}}$ -módulo inyectivo. Terminamos porque para todo $\bar{\mathcal{O}}$ -módulo \bar{M} tenemos que

$$\text{Hom}_{\bar{\mathcal{O}}}^\bullet(\bar{M}, \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\bar{\mathcal{O}}, D)) = \text{Hom}_{\bar{\mathcal{O}}}^\bullet(\bar{M}, D).$$

Corolario: Todo cociente de un anillo local regular posee un complejo bidualizante.

Corolario: Sea D_X el complejo dualizante de una variedad proyectiva X sobre un cuerpo. En todo punto $x \in X$, su fibra $D_{X,x}$ es un complejo bidualizante de $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulos, y tenemos un casi-isomorfismo natural

$$\mathcal{O}_X \simeq \mathbf{R}\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(D_X, D_X).$$

Demostración: Hemos visto (p. 345) que $D_{X,x} \simeq \mathbf{R}\text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d,x}}(\mathcal{O}_{X,x}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d,x})$; luego es un complejo bidualizante de $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulos.

Finalmente, D_X es casi-isomorfo a un subcomplejo coherente (p. 340), así que

$$(\mathbf{R}\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}^\bullet(D_X, D_X))_x = \mathbf{R}\text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}^\bullet(D_{X,x}, D_{X,x}) = \mathcal{O}_{X,x}.$$

Corolario: El complejo dualizante local \hat{D} de un anillo local completo $\hat{\mathcal{O}}$, cociente de un anillo local regular completo, es un complejo bidualizante de $\hat{\mathcal{O}}$ -módulos.

Nota: Sabemos (p. 345) que la completación de $D = D_{X,x}$ es casi-isomorfa al complejo dualizante local \hat{D} de la completación $\hat{\mathcal{O}}$ del anillo local $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X,x}$; pero ahora, usando que $\mathcal{O}_X = \mathbf{R}\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(D_X, D_X)$, podemos dar un casi-isomorfismo canónico,

$$\begin{aligned} \hat{D} &= \text{Hom}_{\hat{\mathcal{O}}}(\hat{\mathcal{O}}, \hat{D}) = (\mathbf{R}\Gamma_x \hat{\mathcal{O}})^* = \varprojlim (\mathbf{R}\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n, \mathcal{O}))^* \\ &= \varprojlim (\mathbf{R}\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n, \mathbf{R}\text{Hom}_{\mathcal{O}}(D, D)))^* = \varprojlim (\mathbf{R}\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n \otimes D, D))^* \\ &= \varprojlim (D/\mathfrak{m}^n D)^{**} = \varprojlim D/\mathfrak{m}^n D. \end{aligned}$$

Teorema: Un complejo acotado D de \mathcal{O} -módulos inyectivos, con módulos de cohomología finito generados, es un complejo bidualizante si y sólo si el morfismo natural $k \rightarrow DD(k)$ es un casi-isomorfismo, donde $k = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ es el cuerpo residual.

Demostración: Si D es un complejo bidualizante, basta poner $M = k$ en la definición.

Recíprocamente, por inducción sobre la longitud, vemos que $M \rightarrow DD(M)$ es un casi-isomorfismo para todo \mathcal{O} -módulo M de longitud finita, sin más que considerar una sucesión exacta $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ donde $l(M'), l(M'') < l(M)$.

Ahora, por inducción sobre la dimensión de $\text{sop } M$, vemos que $M \rightarrow DD(M)$ es un casi-isomorfismo para todo \mathcal{O} -módulo M finito generado. Si $M' \subset M$ es el submódulo de los elementos con soporte en $(\mathfrak{m})_0$, reemplazando M por M/M' podemos suponer que \mathfrak{m} no es un ideal primo asociado a M , así que existe un elemento M -regular $t \in \mathfrak{m}$, y tenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{t} M \rightarrow M/tM \rightarrow 0$$

Cuando $p \neq 0$, tenemos sucesiones exactas $H^p(DD(M)) \xrightarrow{t} H^p(DD(M)) \rightarrow H^p(DD(M/tM)) = 0$, y el lema de Nakayama muestra que $H^p(DD(M)) = 0$. Ahora tenemos un diagrama conmutativo de filas exactas

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{t} & M & \longrightarrow & M/tM \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha & & \downarrow \bar{\alpha} \\ 0 & \longrightarrow & H^0(DD(M)) & \xrightarrow{t} & H^0(DD(M)) & \longrightarrow & H^0(DD(M/tM)) \longrightarrow 0 \end{array}$$

donde $\bar{\alpha}$ es un isomorphism, así que tenemos epimorfismos $\text{Ker } \alpha \xrightarrow{t} \text{Ker } \alpha$ y $\text{Coker } \alpha \xrightarrow{t} \text{Coker } \alpha$, y de nuevo el lema de Nakayama muestra que α es un isomorfismo.

Corolario: *El complejo dualizante local \widehat{D} de un anillo local completo \widehat{O} es un complejo bidualizante de \widehat{O} -módulos.*

Demostración: Tenemos que $D(k) = \mathbf{R}\text{Hom}_{\widehat{O}}(k, \widehat{D}) \simeq (\mathbf{R}\Gamma_x(k))^* \simeq k^* = k$; luego $DD(k) \simeq D(k) \simeq k$.

Teorema: *Sea $k = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ el cuerpo residual. Un complejo acotado D de \mathcal{O} -módulos, con módulos de cohomología finito generados, es un complejo bidualizante si y sólo si existe un número entero⁵ n tal que*

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}}^p(k, D) = \begin{cases} k & p = n \\ 0 & p \neq n \end{cases}$$

Demostración: Si D es un complejo bidualizante, entonces $\mathbf{R}\text{Hom}_{\mathcal{O}}(k, D)$ es un complejo bidualizante de k ; luego hay un número entero n tal que $\text{Ext}_{\mathcal{O}}^p(k, D) = k$, y $\text{Ext}_{\mathcal{O}}^p(k, D) = 0$ cuando $p \neq n$.

Para el recíproco, es claro que $k \rightarrow DD(k)$ es un casi-isomorfismo, así que sólo hemos de ver que D es casi-isomorfo a un complejo acotado de \mathcal{O} -módulos inyectivos.

Primero probamos, por inducción sobre la dimensión d de $\text{sop } M$, que $\text{Ext}_{\mathcal{O}}^p(M, D) = 0$, $p \notin [n-d, n]$. De nuevo podemos suponer que \mathfrak{m} no es un primo asociado a M , así que tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{t} M \longrightarrow M/tM \longrightarrow 0$$

y una sucesión exacta $\text{Ext}_{\mathcal{O}}^p(M, D) \xrightarrow{t} \text{Ext}_{\mathcal{O}}^p(M, D) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}}^{p-1}(M/tM, D) = 0$ cuando $p \notin [n-d, n]$. Luego $\text{Ext}_{\mathcal{O}}^p(M, D) = 0$ por el lema de Nakayama.

Ahora, si $D \simeq I^\bullet$ es una resolución inyectiva, terminamos si vemos que los ciclos $Z^r = B^r$ son un módulo inyectivo cuando $r \gg 0$. Consideremos los complejos $K^\bullet: \dots I^{r-1} \rightarrow I^r \rightarrow 0 \rightarrow \dots$ y $\bar{K}^\bullet: \dots I^{r-1} \rightarrow B^r \rightarrow 0 \rightarrow \dots$, de modo que tenemos sucesiones exactas

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \bar{K}^\bullet & \longrightarrow & K^\bullet & \longrightarrow & B^{r+1}[-r] \longrightarrow 0 \\ & & & & \text{Ext}_{\mathcal{O}}^{r+1}(M, K^\bullet) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{O}}^{r+1}(M, B^{r+1}[-r]) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}}^{r+2}(M, \bar{K}^\bullet) \end{array}$$

donde M es cualquier \mathcal{O} -módulo. Cuando $r \gg 0$, tenemos que $\text{Ext}_{\mathcal{O}}^{r+2}(M, \bar{K}^\bullet) = \text{Ext}_{\mathcal{O}}^{r+2}(M, D) = 0$ y $\text{Ext}_{\mathcal{O}}^{r+1}(M, K^\bullet) = 0$ porque K^\bullet es un complejo inyectivo sin términos de grado $> r$.

Luego $0 = \text{Ext}_{\mathcal{O}}^{r+1}(M, B^{r+1}[-r]) = \text{Ext}_{\mathcal{O}}^1(M, B^{r+1})$ y B^{r+1} es un módulo inyectivo.

Corolario: *Un complejo acotado D de \mathcal{O} -módulos es un complejo bidualizante si y sólo si $D \otimes_{\mathcal{O}} \widehat{O}$ es un complejo bidualizante de \widehat{O} -módulos.*

⁵y cambiando el grado de D siempre podemos suponer que $n = 0$.

Demostración: $\text{Ext}_{\mathcal{O}}^p(k, D \otimes_{\mathcal{O}} \widehat{\mathcal{O}}) = \text{Ext}_{\mathcal{O}}^p(k, D) \otimes_{\mathcal{O}} \widehat{\mathcal{O}} = \text{Ext}_{\mathcal{O}}^p(k, D)$.

Teorema: Si existe, el complejo bidualizante D de un anillo local noetheriano \mathcal{O} es único salvo isomorfismos (no canónicos) y cambio de graduación.

Demostración: Sea D' otro complejo bidualizante de \mathcal{O} -módulos, y pongamos

$$D'(M^\bullet) = \text{Hom}_{\mathcal{O}}^\bullet(M^\bullet, D').$$

Consideremos el morfismo natural (donde el producto tensorial está derivado)

$$M^\bullet \otimes_{\mathcal{O}} D'(D) = M^\bullet \otimes_{\mathcal{O}} \text{Hom}^\bullet(D, D') \longrightarrow \text{Hom}^\bullet(\text{Hom}^\bullet(M^\bullet, D)D') = D'D(M^\bullet).$$

Como es un casi-isomorfismo cuando M^\bullet es un complejo superiormente acotado de módulos libres de rango finito, también lo es cuando M^\bullet es un complejo acotado de cohomología finita generada, porque M^\bullet es casi-isomorfo a un subcomplejo finito generado (p. 340). Ahora,

$$D(D') \otimes_{\mathcal{O}} D'(D) \simeq D'DD(D') = D'(D') \simeq \mathcal{O},$$

y el siguiente lema afirma que $\text{Hom}^\bullet(D, D') = D'(D) \simeq \mathcal{O}[n]$.

Concluimos que $D' \simeq D'D(D) \simeq D \otimes_{\mathcal{O}} D'(D) \simeq D \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}[n] \simeq D[n]$.

Lema: Sean K, L dos complejos superiormente acotados y de cohomología finita generada. Si $K \otimes_{\mathcal{O}} L \simeq \mathcal{O}$, entonces $K \simeq \mathcal{O}[n]$ para algún entero n .

Demostración: Podemos suponer que $p = 0$ es el mayor entero tal que $H^p(K) \neq 0$, y que $q = 0$ es el mayor entero tal que $H^q(L) \neq 0$. Entonces

$$H^0(K \otimes_{\mathcal{O}} L) = H^0(K) \otimes H^0(L) \neq 0;$$

luego $H^0(K) \otimes H^0(L) = \mathcal{O}$ y vemos que $H^0(K) = H^0(L) = \mathcal{O}$.

Se sigue que $K \simeq K_1 \oplus \mathcal{O}$ y $L \simeq L_1 \oplus \mathcal{O}$.

Como $\mathcal{O} \simeq K \otimes_{\mathcal{O}} L \simeq \mathcal{O} \oplus K_1 \oplus L_1 \oplus K_1 \otimes_{\mathcal{O}} L_1$, concluimos que $K_1 \simeq 0$; luego $K \simeq \mathcal{O}$.

12.5.4. Teorema de las Funciones Formales

En esta última sección omitiremos muchos detalles y no distinguiremos entre funtores derivados $R^n F$ e hiperfuntores derivados $\mathbf{R}^n F$.

Sea $f: X \rightarrow S = \text{Spec } \mathcal{O}$ un morfismo proyectivo, donde \mathcal{O} es un anillo local noetheriano que admite un complejo bidualizante D_S (existe cuando \mathcal{O} es un cociente de un anillo local regular).

En tal caso $D_X = f^! D_S$ es un complejo bidualizante en todo punto cerrado $x \in X$, porque

$$\mathbf{R}\text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\kappa(x), D_{X,x}) = \mathbf{R}\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\kappa(x), D_S) = (\mathbf{R}\Gamma_s \kappa(x))^* \simeq \kappa(x),$$

donde s es el punto cerrado de S . Luego, para todo complejo acotado de \mathcal{O}_X -módulos \mathcal{M}^\bullet , con haces de cohomología $\mathcal{H}^p(\mathcal{M}^\bullet)$ coherentes, tenemos un casi-isomorfismo natural

$$\mathcal{M}^\bullet \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_X^\bullet(\underline{\text{Hom}}_X^\bullet(\mathcal{M}^\bullet, D_X), D_X).$$

Teorema: Si Y es la fibra del punto cerrado s de S , tenemos isomorfismos (el dual $*$ se considera respecto de una envolvente inyectiva del cuerpo residual de s)

$$H_Y^p(X, \mathcal{M}^\bullet)^* = \text{Ext}_X^{-p}(\mathcal{M}^\bullet, D_X)^\wedge.$$

$$\begin{aligned}
\text{Demostración: } H_Y^p(X, \mathcal{M}^\bullet)^* &= H_S^p(S, Rf_*\mathcal{M}^\bullet)^* \\
&= \text{Ext}_{\mathcal{O}}^{-p}(Rf_*\mathcal{M}^\bullet, D_S)^\wedge \quad \text{por dualidad local,} \\
&= \text{Ext}_X^{-p}(\mathcal{M}^\bullet, D_X)^\wedge \quad \text{por dualidad.}
\end{aligned}$$

Corolario: $(R^p f_* \mathcal{M}^\bullet)^\wedge = H_Y^{-p}(X, \underline{\text{Hom}}_X^\bullet(\mathcal{M}^\bullet, D_X))^*$.

$$\text{Demostración: } (R^p f_* \mathcal{M}^\bullet)^\wedge = [R^p f_* \underline{\text{Hom}}_X^\bullet(\underline{\text{Hom}}_X^\bullet(\mathcal{M}^\bullet, D_X), D_X)]^\wedge = H_Y^{-p}(X, \underline{\text{Hom}}_X^\bullet(\mathcal{M}^\bullet, D_X))^*.$$

Corolario: Si $\pi: Z \rightarrow X$ es un morfismo proyectivo y E es la fibra de un punto cerrado $x \in X$,

$$\begin{aligned}
(R^{-p} \pi_* D_Z)_x^\wedge &= H_E^p(Z, \mathcal{O}_Z)^*, \\
(R^p \pi_* \mathcal{O}_Z)_x^\wedge &= H_E^{-p}(Z, D_Z)^*.
\end{aligned}$$

Demostración: Sea $Z_x = Z \times_X \text{Spec } \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_{X,x}$ el morfismo inducido por π .

Como $D_{X,x}$ es un complejo bidualizante del anillo local $\mathcal{O}_{X,x}$,

$$\begin{aligned}
(R^p \pi_* \mathcal{O}_Z)_x^\wedge &= H_E^{-p}(Z_x, D_Z)^* = H_E^{-p}(Z, D_Z)^*, \\
(R^{-p} \pi_* D_Z)_x^\wedge &= H_E^p(Z_x, \underline{\text{Hom}}_Y^\bullet(D_Z, D_Z))^* = H_E^p(Z, \mathcal{O}_Z)^*.
\end{aligned}$$

Teorema de las Funciones Formales: Si $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}\mathcal{O}_X$ es el haz de ideales de la fibra Y de f sobre el punto cerrado, entonces⁶

$$(R^p f_* \mathcal{M}^\bullet)^\wedge = \varprojlim H^p(X, \mathcal{M}^\bullet \otimes_{\underline{\underline{\mathfrak{p}}}} (\mathcal{O}_X/\mathfrak{p}^n)).$$

Demostración: Tomemos un casi-isomorfismo $P \rightarrow \mathcal{M}^\bullet$, donde P es un complejo superiormente acotado de \mathcal{O}_X -módulos planos (por ejemplo sumas directas de haces \mathcal{O}_U),

$$\begin{aligned}
(R^p f_* \mathcal{M}^\bullet)^\wedge &= H_Y^{-p}(X, \underline{\text{Hom}}^\bullet(\mathcal{M}^\bullet, D_X))^* = \varprojlim \text{Ext}^{-p}(\mathcal{O}_X/\mathfrak{p}^n, \underline{\text{Hom}}^\bullet(P, D_X))^* \\
&= \varprojlim \text{Ext}^{-p}(P \otimes (\mathcal{O}_X/\mathfrak{p}^n), D_X)^* = \varprojlim H^p(X, P \otimes (\mathcal{O}_X/\mathfrak{p}^n)).
\end{aligned}$$

Nota: Fijemos $i, n \geq 1$. Si \mathcal{M} es un \mathcal{O}_X -módulo coherente, entonces los morfismos

$$\underline{\text{Tor}}_i(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X/\mathfrak{p}^{n+r}) \longrightarrow \underline{\text{Tor}}_i(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X/\mathfrak{p}^n)$$

son nulos cuando $r \gg 0$ (Artin-Rees). Luego

$$\varprojlim H^p(X, \mathcal{M} \otimes_{\underline{\underline{\mathfrak{p}}}} (\mathcal{O}_X/\mathfrak{p}^n)) = \varprojlim H^p(X, \mathcal{M}/\mathfrak{p}^n \mathcal{M}) = \varprojlim H^p(Y, \mathcal{M}/\mathfrak{p}^n \mathcal{M}),$$

porque los haces $\mathcal{M}/\mathfrak{p}^n \mathcal{M}$ están soportados en Y , y tenemos isomorfismos canónicos

$$(R^p f_* \mathcal{M})^\wedge = \varprojlim H^p(Y, \mathcal{M}/\mathfrak{p}^n \mathcal{M}).$$

1. $R^p f_* \mathcal{M} = 0$ cuando p es mayor que la dimensión de la fibra Y . De hecho $R^p f_* \mathcal{M}$ es un \mathcal{O} -módulo finito generado, y $(R^p f_* \mathcal{M})^\wedge = 0$, porque $H^p(Y, \mathcal{M}/\mathfrak{p}^n \mathcal{M}) = 0$.
2. Si $f_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}$, entonces la fibra Y es conexa, porque en caso contrario el anillo local descompondría en suma directa de dos anillos,

$$\widehat{\mathcal{O}} = (f_* \mathcal{O}_X)^\wedge = \varprojlim H^0(Y_1 \oplus Y_2, \mathcal{O}/\mathfrak{p}^n) = (\varprojlim H^0(Y_1, \mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)) \oplus (\varprojlim H^0(Y_2, \mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)).$$

⁶ donde el producto tensorial está derivado: los factores han de sustituirse por resoluciones planas superiormente acotadas.

3. Supongamos ahora que X y S son íntegros y que el cuerpo Σ_S es algebraicamente cerrado en el cuerpo Σ_X (por ejemplo $\Sigma_S = \Sigma_X$). Si \mathcal{O} es normal, entonces la fibra Y es conexa porque, al ser $f_*\mathcal{O}_X$ una \mathcal{O} -álgebra finita contenida en Σ_X , tenemos que $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}$.
4. Poniendo $X' = \text{Spec } f_*\mathcal{O}_X$, vemos que f factoriza en un morfismo proyectivo $Z \rightarrow X'$ de fibras conexas y un morfismo finito $X' \rightarrow S$, porque $f_*\mathcal{O}_X$ es un \mathcal{O} -módulo finito generado.
5. Sea $X = \text{Spec } \mathcal{O}$, donde \mathcal{O} es un anillo local Cohen-Macaulay de dimensión d con un módulo bidualizante ω_X , de modo que $D_X \simeq \omega_X[-d]$. Si $\pi: \bar{X} = \text{Proj } \bigoplus_n I^n/I^{n+1} \rightarrow X = \text{Spec } \mathcal{O}$ es la explosión a lo largo de un ideal $I \subset \mathcal{O}$, tenemos un cono $C = \text{Spec } G_I\mathcal{O}$ de vértice (el subesquema cerrado definido por el ideal irrelevante) $V = \text{Spec } \mathcal{O}/I$, el centro de explosión, y de directriz $E = \text{Proj } G_I\mathcal{O}$, la fibra excepcional $E = \pi^{-1}(V)$. Sea $Y = \pi^{-1}(x)$ la fibra del punto cerrado $x \in V$.

Tenemos proyecciones naturales $C \rightarrow V$ y $V - C \rightarrow E$, y la fibra Y_0 de C sobre x es un cono de directriz Y . Como V y C son afines, y $C - V$ es el complementario de la sección nula de un fibrado de línea sobre E , tenemos una sucesión exacta de cohomología local (donde λ es de hecho un morfismo homogéneo)

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_x^i(C, \mathcal{O}_C) & \longrightarrow & H_{Y_0}^i(C, \mathcal{O}_C) & \xrightarrow{\lambda} & H_{Y_0}^i(C - x, \mathcal{O}_C) & \longrightarrow & H_x^{i+1}(C, \mathcal{O}_C) \\
 & & \parallel & & \parallel & & \\
 & & \bigoplus_{n \geq 0} H_x^i(V, I^n/I^{n+1}) & & H_{Y_0}^i(C - V, \mathcal{O}_C) & & \\
 & & & & \parallel & & \\
 & & & & \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H_Y^i(E, \mathcal{O}_E(n)) & &
 \end{array}$$

Si $C = \text{Spec } G_I\mathcal{O}$ es Cohen-Macaulay, entonces $H_x^i(C, \mathcal{O}_C) = 0$, $i < \dim_x C = d$, y

$$H_Y^i(E, \mathcal{O}_E(-n)) = 0, \quad n > 0, \quad i < d - 1.$$

Además, si C es Cohen-Macaulay, también lo es E porque $C - V \rightarrow E$ es un fibrado de línea (sin la sección nula) y, al ser E una hipersuperficie de \bar{X} , vemos que \bar{X} también es Cohen-Macaulay, con un haz bidualizante $\omega_{\bar{X}}$ tal que $D_{\bar{X}} \simeq \omega_{\bar{X}}[-d]$. La sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}}(1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}} \longrightarrow \mathcal{O}_E \longrightarrow 0$$

induce sucesiones exactas de cohomología local, donde $n > 0$, $i < d$,

$$0 = H_Y^{i-1}(E, \mathcal{O}_E(-n)) \longrightarrow H_Y^i(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}(-n+1)) \longrightarrow H_Y^i(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}(-n))$$

y $H_Y^i(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}(-n))^* = (R^{d-i}\pi_*\omega_{\bar{X}}(n))^\wedge = 0$, $n \gg 0$, $i < d$ (p. 245). Por inducción descendente sobre n , concluimos que $H_Y^i(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}(-n)) = 0$, $n \geq 0$, $i < d$. En particular

$$\begin{aligned}
 H_Y^i(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}) &= 0, \quad i < d, \\
 R^i\pi_*\omega_{\bar{X}} &= 0, \quad i > 0.
 \end{aligned}$$

6. Cuando el ideal I está generado por una sucesión regular (por ejemplo, si explotamos una variedad regular a lo largo de una subvariedad regular) $G_I\mathcal{O} = (\mathcal{O}/I)[x_1, \dots, x_r]$ es Cohen-Macaulay; luego $R^i\pi_*\omega_{\bar{X}} = 0$, $i > 0$.
7. Sea X una hipersuperficie (definida por un ideal localmente principal) de una variedad ambiente regular Z . Si explotamos X a lo largo de un centro regular C , y denotamos \mathfrak{p} y \mathfrak{p}_0 los ideales de C en X y en Z respectivamente, entonces $\text{Spec } G_{\mathfrak{p}}\mathcal{O}_X$ es una hipersuperficie de la variedad regular $\text{Spec } G_{\mathfrak{p}_0}\mathcal{O}_Z$; luego es Cohen-Macaulay y $R^i\pi_*\omega_{\bar{X}} = 0$, $i > 0$.

Bibliografía

- [1] V. Arnold: *Équations Différentielles Ordinaires*, Ed. Mir, Moscou (1974)
- [2] E. Artin: *Geometric Algebra*, Interscience Publ., New York (1957)
- [3] E. Artin: *Galois Theory*, Univ. of Notre Dame Press, Notre Dame (1942)
- [4] M. Atiyah, I. G. Macdonald: *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, Reading (1969)
- [5] N. Bourbaki: *Éléments de Mathématique*, Ed. Hermann, C.C.L.S., Masson, Paris (1940-1998)
- [6] H. Cartan, S. Eilenberg: *Homological Algebra*, Princeton Univ. Press, Princeton (1956)
- [7] D. Eisenbud, J. Harris: *The Geometry of Schemes*, Graduate Texts in Math. **197**, Springer-Verlag, Heidelberg (2000)
- [8] R. Godement: *Théorie des Faisceaux*, Act. Sci. Ind. **1252**, Ed. Hermann, Paris (1964)
- [9] A. Grothendieck: *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tohoku Mathematical Journal Vol. 9, No. 2-3 (1957), pp. 119–221.
- [10] A. Grothendieck: *Fondements de la Géométrie Algébrique*, Séminaire Bourbaki **149**, **182**, **190**, **195**, **212**, **221**, **232**, **236**, Institut H. Poincaré, Paris (1957-1962)
- [11] A. Grothendieck, J. Dieudonné: *Éléments de Géométrie Algébrique I, II, III, IV*, Publ. Math. I.H.E.S. **4**, **8**, **11**, **17**, **20**, **24**, **28**, **32**, Paris (1960-1967)
- [12] A. Grothendieck et al.: *Revêtements Étales et Groupe Fondamental (SGA 1)*, Lecture Notes in Math. **224**, Springer-Verlag, Heidelberg (1971)
- [13] A. Grothendieck et al.: *Théorie des Intersections et Théorème de Riemann-Roch (SGA 6)*, Lecture Notes in Math. **225**, Springer-Verlag, Heidelberg (1971)
- [14] A. Grothendieck: *Local Cohomology*, Lecture Notes in Math. **41**, Springer-Verlag, Heidelberg (1967)
- [15] R. Hartshorne: *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math. **52**, Springer-Verlag, Heidelberg (1977)
- [16] R. Hartshorne: *Residues and Duality*, Lecture Notes in Math. **20**, Springer-Verlag, Heidelberg (1966)
- [17] N. J. Hicks: *Notes on Differential Geometry*, Van Nostrand, London (1965)
- [18] B. Iversen: *Generic Local Structure in Commutative Algebra*, Lecture Notes in Math. **310**, Springer-Verlag, Heidelberg (1973)

- [19] B. Iversen: *Cohomology of Sheaves*, Universitext, Springer-Verlag, Heidelberg (1986)
- [20] H. Matsumura: *Commutative Algebra*, Benjamin, New York (1970)
- [21] J. Milnor, J. Stasheff: *Characteristic Classes*, Annals Math. Studies **76**, Princeton Univ. Press, Princeton (1974)
- [22] A. Navarro: *On Grothendieck's Riemann-Roch theorem*, Expositiones Mathematicae
- [23] K. Nomizu: *Lie Groups and Differential Geometry*, Math. Soc. Japan, Tokyo (1956)
- [24] M. T. Sancho: *Methods of Commutative Algebra for Topology*, Publ. Dpto. Mat. **17**, Univ. Extremadura, Badajoz (1987)
- [25] F. Sancho, P. Sancho: *Álgebra Conmutativa y Geometría Algebraica*,
<http://matematicas.unex.es/~sancho/LibroGeometriaAlgebraica/geometria0.pdf>
- [26] C. Sancho, P. Sancho: *Álgebra Conmutativa. Geometría Algebraica*,
<http://matematicas.unex.es/~sancho/LibroGeometriaAlgebraica/LibroUnex.pdf>
- [27] J. P. Serre: *Faisceaux Algébriques Cohérents*, Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol. 61, No. 2. (1955), pp. 197-278.
- [28] J. P. Serre: *Algèbre Locale. Multiplicités*, Lecture Notes in Math. **11**, Springer-Verlag, Heidelberg (1965)
- [29] R. Y. Sharp: *Steps in Commutative Algebra*, London Math. Soc. Student Texts **51**, Cambridge Univ. Press., Cambridge (2001)

Índice alfabético

- abierto básico, 73
- acción
 - de un grupo, 57
 - transitiva, 57
- acíclico, 275
- afinidad, 98
- álgebra, 14, 68
 - anticonmutativa, 113
 - de Boole, 204
 - de Lie, 197
 - exterior, 113
 - puramente inseparable, 92
 - racional, 80
 - separable, 81
 - tensorial, 113
 - trivial, 81
- algoritmo de Euclides, 14
- altura, 315
- ángulo, 107
- anillo, 34
 - íntegro, 7
 - cociente, 9
 - euclídeo, 13
 - local, 76
 - noetheriano, 131
 - normal, 140
 - reducido, 74
 - regular, 138
 - semilocal, 148
- anti-isomorfismo, 37
- anulador, 112
- aplicación, 33
 - afín, 98
 - biyectiva, 33
 - epiyectiva, 33
 - exponencial, 198, 263
 - inyectiva, 33
 - lineal, 35
 - lineal tangente, 183
- arco, 218
- argumento, 5
- asíntota, 105
- automorfismo, 34
 - de Frobenius, 87, 88, 155
- bandera, 37
- base, 38, 59
 - , cambio de, 67
 - de cerrados, 202
 - directa, 54
 - ortonormal, 44
 - usual, 38
- bicomplejo, 273
- binormal, 195
- cadena, 40
- campo
 - completo, 163
 - lagrangiano, 257
 - tangente, 184
 - tangente a soporte en una curva, 188
 - tensorial, 185
- carácter de Chern, 337
- característica
 - de Euler-Poincaré, 236, 270
 - de un anillo, 24
- casi-isomorfismo, 273
- categoría, 68
 - opuesta, 69
- centro, 105
- ceros de un ideal, 73
- cerrado básico, 202
- ciclo, 33
- cierre
 - algebraico, 81
 - entero, 139
 - proyectivo, 328
 - separable, 155
- clase
 - de Todd, 337
- clase de
 - Chern, 302, 329, 333
 - cohomología, 290

- equivalencia, 3
- obstrucción, 289, 327
- Stieffel-Whitney, 302
- clasificación de
 - endomorfismos, 115
 - grupos abelianos, 115
 - grupos cíclicos, 7
 - métricas, 102
 - módulos, 113
 - proyectividades, 116
- clasificación local de
 - campos, 164
 - morfismos analíticos, 177
- codimensión, 95, 338
- cohomología
 - de De Rham, 173
 - de haces, 229
- colineación, 99
- compactificación, 212
 - de Stone-Cěch, 212
- complejo, 227, 273
 - , bidualizante, 346
 - de Cech, 319
 - de Koszul, 312
 - dualizante, 294, 340
 - dualizante local, 345
- completado, 133
- composición, 33, 68
- compuesto, 80
- concepto
 - geométrico, 80
 - local, 81
- conductor, 146
- conexión
 - de Levi-Civita, 192
 - lineal, 187, 250
 - localmente euclídea, 190
 - plana, 190
 - simétrica, 190
- congruencia
 - de Euler, 11
 - de Fermat, 11
 - de Wilson, 11
- conjugado, 4, 33, 105
 - armónico, 98
- conjunto cociente, 3
- cono
 - de un morfismo, 275
 - normal, 328
- tangente, 135, 138
- contracción
 - de índices, 49
 - interior, 53, 249
- conúcleo, 71
- coordenadas, 38
 - afines, 99
 - canónicas, 258
 - homogéneas, 96
- coproducto, 70
- coseno, 43
- cota, 40
- criterio
 - de diagonalización, 47
 - de Eisenstein, 12
 - de reducción, 12
 - del ideal, 62
- cuádrlica, 105
 - del absoluto, 107
 - dual, 105
- cuerpo, 35
 - algebraicamente cerrado, 102
 - de descomposición, 80
 - de fracciones, 26
 - perfecto, 82
 - residual, 59, 73
- curva, 233
 - completa, 233
 - hiperelíptica, 244
 - integral, 161
 - lisa, 241
 - no singular, 233
 - racional, 237
- curvatura, 194, 195, 251
 - , líneas de, 196
 - constante, 194
 - geodésica, 195
 - normal, 195
 - principal, 196
 - seccional, 194
- derivación, 76
- derivada, 23
 - covariante, 187
 - de Lie, 165, 250
- desigualdad
 - de Castelnuovo, 344
 - de Cauchy, 176
 - de Cauchy-Schwarz, 43
 - triangular, 43

- determinante, 53
 - de Vandermonde, 27
- diámetro, 105
- difeomorfismo, 181
- diferencial, 77, 183
 - covariante, 188
 - exterior, 185
- dimensión, 37, 182, 214
 - combinatoria, 215
 - de Krull, 129
 - global, 314
 - proyectiva, 314
- dirección, 36
- directriz, 105
- discriminante, 29, 103
- distribución, 166
 - integrable, 166
 - involutiva, 167
- divergencia, 172
- divisor, 118, 234
 - canónico, 238
 - de cero, 7
 - efectivo, 145
 - elemental, 113
- dominio, 7
- dominio de
 - Dedekind, 144
 - factorización única, 27
 - ideales principales, 9
- dual
 - , orden, 96
 - base, 41
 - espacio, 41, 96
- ecuación de
 - Cauchy-Riemann, 175
 - Codazzi-Mainardi, 196
 - estructura, primera, 252
 - estructura, segunda, 253
 - Gauss, 194, 196
- ecuaciones de
 - Euler-Lagrange, 256
 - Hamilton, 258
- ejes, 98
- elemento
 - algebraico, 17
 - entero, 139
 - maximal, 40
 - minimal, 40
 - propio, 7
 - separable, 82
- endomorfismo, 45
 - de Weingarten, 196
 - diagonalizable, 46
 - simétrico, 102
- energía, 258
- enteros de Gauss, 13
- envolvente, 105
 - de Galois, 83
 - inyectiva, 311
- equivalencia
 - afín, 105
 - de categorías, 69
 - de proyectividades, 116
 - homotópica, 173, 219
 - lineal de divisores, 145, 234
 - numérica de divisores, 344
 - proyectiva, 105
- escalar, 35
- espacio
 - σ -compacto, 157
 - afín, 98
 - anillado, 181, 232
 - arco-conexo, 220
 - completamente regular, 212
 - contráctil, 173, 219
 - cotangente, 138, 183
 - elíptico, 100
 - etalé de un prehaz, 266
 - hiperbólico, 101
 - localmente anillado, 232
 - localmente simplemente conexo, 220
 - no singular, 100
 - noetheriano, 209
 - normal, 207
 - proyectivo, 95, 242
 - regular, 207
 - simplemente conexo, 220
 - tangente, 182
 - totalmente isótropo, 100
 - vectorial, 35
 - vectorial cociente, 36
 - vectorial euclídeo, 44
 - vectorial métrico, 100
- especialización, 69, 129
- espectro, 73, 202
 - maximal, 159, 202
 - proyectivo, 241
 - real, 159

- esquema, 233
 - íntegro, 233
 - afín, 233
 - de tipo finito, 233
 - noetheriano, 233
 - separado, 319
- exceso, 22
- explosión, 148, 328
- extensión
 - aditiva, 334
 - multiplicativa, 334
- extensión, 14
 - algebraica, 17
 - de Galois, 83
 - esencial, 311
 - finita, 14
 - normal, 92
 - por radicales, 90
 - por radicales cuadráticos, 18
 - trivial, 14
- factor invariante, 114
- fibra
 - de un prehaz, 265
 - geométrica, 154
- fibrado
 - asociado, 260
 - de línea, 288
 - natural, 258
 - normal, 328
 - principal, 259
 - proyectivo, 324
 - tangente relativo, 337
 - tautológico, 288, 301
 - vectorial, 288, 324
- filtración, 135
 - estable, 136
 - regular, 306
- filtrante, 64
- flujo, 162
- forma
 - de una permutación, 33
 - analítica, 179
 - cerrada, 173
 - cuadrática, 105
 - de estructura, 254
 - de Poincaré-Cartan, 255
 - de volumen, 54, 170
 - exacta, 173
 - fundamental, segunda, 196
 - lineal, 41
 - regular, 168
- fórmula de
 - adjunción, 278, 343
 - Cartan, 186, 251
 - Cauchy, 176
 - Cauchy-Goursat, 177
 - clases, 57
 - conmutación, 20, 22
 - Deligne, 320
 - Gauss-Green, 172
 - Girard, 24
 - Hurwitz, 241
 - la fibra, 74
 - la gráfica, 70
 - Lagrange, 8
 - Lefschetz, 300
 - los coeficientes universales, 282
 - los puntos, 79, 152, 217
 - proyección, 283, 291, 321
 - Weingarten, 194, 196
- fórmulas de
 - Cardano, 15
 - Frénet, 195
 - Newton, 24
- fracción simple, 19
- función, 73, 232
 - aditiva, 117
 - analítica, 175, 177
 - de Hilbert, 136
 - de Samuel, 136
 - diferenciable, 181
 - meromorfa, 178
 - meseta, 158
 - simétrica, 15
 - simétrica elemental, 15
- funtor
 - aditivo, 275
 - contravariante, 69
 - covariante, 68
 - de puntos, 69
 - derivado, 275
 - exacto por la izquierda, 71
 - representable, 71
- G -conjunto, 57
- generador infinitesimal, 164
- generadores, 5
- género, 236
 - aritmético, 247

- geométrico, 247
- geodésica, 189
- geometría
 - elíptica, 108
 - euclídea, 107
 - hiperbólica, 108
- germen, 157, 265
- grado, 14, 297, 329
 - de separabilidad, 92
 - de un divisor, 234
 - de un morfismo, 235
 - de un revestimiento, 152, 217
- graduado por una filtración, 135
- grupo, 34
 - K de Grothendieck, 118
 - abeliano, 34
 - cíclico, 7
 - cociente, 6
 - de Galois, 83
 - de Galois absoluto, 155
 - de Klein, 97
 - de Lie, 197
 - de Picard, 145, 233
 - fundamental, 154, 219
 - resoluble, 90
 - uniparamétrico, 163
 - uniparamétrico local, 164
- hamiltoniano, 258
- haz, 265
 - , restricción de un, 265
 - acíclico, 229
 - asociado a un prehaz, 266
 - casicoherente, 233
 - coherente, 233
 - de cohomología local, 290
 - de diferenciales, 238
 - de funciones, 181
 - de Godement, 277
 - de línea, 249
 - de orientación, 295
 - de orientación normal, 290
 - dualizante, 237
 - flasco, 228
 - localmente libre, 249
 - plano, 282
- hemisimetrización, 50
- hibridar, 207
- hiperplano, 95
 - del infinito, 98
- tangente, 105
- homografía, 97
- homotecia, 99
- homotopía, 173, 218, 219
- ideal, 9, 202
 - anulador, 112
 - de contacto, 254
 - de Fitting, 114
 - de la diagonal, 77
 - irreducible, 131
 - irrelevante, 241
 - maximal, 9
 - primario, 131
 - primo, 9
 - principal, 9
- identidad, 68
 - de Bézout, 13
 - de Bianchi, 191, 253
 - de Jacobi, 165, 166
 - diferencial de Bianchi, 252, 253
- igualdad de Noether, 339
- imagen, 5
 - directa, 267
 - directa admirable, 321
 - directa con soportes propios, 285
 - directa superior, 279, 285
 - inversa, 278
- incidente, 42
- independencia lineal, 38
- indicador de Euler, 10
- índice, 6, 101, 298
- ínfimo, 37
- inmersión, 233
 - local, 186
 - regular, 342
- integral, 171
- invariante
 - de Zeuthen-Segre, 339
 - Noether, 256
- inverso, 34
- invertible, 34
- irracional cuadrático, 18
- irreducible, 7, 129
 - , componente, 129
- isometría, 100
- isomorfismo, 35, 59, 68
 - de álgebras, 14
 - de anillos, 35
 - de conjuntos ordenados, 37

- de funtores, 69
- de grupos, 34
- isótropo, 100
- jet, 253
- lagrangiana, 255
 - regular, 256
- lazo, 219
- lema
 - de Panin, 335
- lema de
 - Artin-Rees, 133
 - el entorno tubular, 263
 - estabilidad, 148
 - Euclides, 10, 13
 - Gauss, 12
 - Jouanolou, 331
 - la serpiente, 228
 - Nakayama, 76
 - normalización, 141
 - Poincaré, 174
 - Uryshon, 211
 - Yoneda, 69
 - Zorn, 40
- límite
 - inductivo, 64
 - proyectivo, 64
- localización
 - de un anillo, 26
 - de un módulo, 63
- longitud, 37
 - de un módulo, 59
- matriz
 - de cambio de base, 40
 - de Jordan, 116
 - acobiana, 183
- máximo común divisor, 13
- método de
 - Jacobi, 170
 - Lagrange-Charpit, 169
- métrica, 100
 - de la traza, 83
 - hemisimétrica, 103
 - hermítica, 104
 - localmente euclídea, 192
- mínimo común múltiplo, 13
- módulo, 59
 - Cohen-Macaulay, 316
- de diferenciales, 77
- de presentación finita, 150
- de torsión, 111
- de un número complejo, 4
- de un vector, 43
- diferencial, 227
- divisible, 62
- fielmente plano, 151
- homogéneo, 119
- inyectivo, 61
- libre, 59
- noetheriano, 131
- plano, 67
- primario, 112
- proyectivo, 61
- morfismo
 - birracional, 142
 - de A -módulos, 59
 - de G -conjuntos, 57
 - de álgebras, 14
 - de anillos, 35
 - de espacios anillados, 181, 232
 - de Frobenius, 344
 - de funtores, 69
 - de grupos, 34
 - de localización, 26, 63
 - de prehaces, 265
 - de semianillos, 201
 - de teorías cohomológicas, 332
 - dominante, 142
 - en una categoría, 68
 - finito, 139
 - liso, 343
 - métrico, 100
 - plano, 319
 - propio, 279
 - proyectivo, 321
- movimiento, 107
- multilineal, 48
- multiplicidad, 15
 - de intersección, 147, 246, 291, 323
 - de un anillo local, 148
- neutro, 34
- normal principal, 195
- normalizador, 58
- núcleo, 5, 71
- número
 - complejo, 4
 - de Lefschetz, 300

- entero, 3
- racional, 4
- objeto de una categoría, 68
- opuesto, 34
- órbita, 57
- orden
 - de un elemento, 7
 - de un grupo, 6
 - de un polo, 178
 - dual, 37
 - total, 40
- orientable, 170, 295
- orientación, 54, 170, 295
 - normal, 290
- origen, 98
- ortogonal, 44, 100
- par hiperbólico, 101
- paraboloide, 105
- paralelo, 36, 99, 188, 189
 - , traslado, 189, 252
- parámetro proyectivo, 97
- pareja mínima, 65
- paréntesis
 - de Lie, 165
 - de Poisson, 170
- partición de la unidad, 157, 268
- permutación, 33
- perpendicularidad, 44, 107
- p -forma, 50
- p -grupo, 58
- polaridad, 44, 100
- poliedro, 211
- polinomio
 - anulador, 46
 - característico, 45
 - ciclotómico, 8
 - de Samuel, 136
 - mínimo, 17
 - separable, 82
- polo, 22, 178
- prehaz, 265
- principio de dualidad, 96
- producto
 - cup, 283
 - de ideales, 9
 - de números complejos, 4
 - de números enteros, 3
 - de números racionales, 4
 - directo, 59, 70
 - escalar, 43
 - exterior, 51, 249
 - fibrado, 70
 - tensorial, 48
- profundidad, 316
- propiedad universal de
 - $T_p^q E$, 49
 - $\Lambda^p E$, 52
 - la localización, 26, 63
 - la suma directa, 62
 - las diferenciales, 77
- propiedad universal de la teoría K , 334
 - teoría K graduada, 338
- propiedad universal del
 - anillo cociente, 9
 - cambio de base de módulos, 67
 - espacio cociente, 36
 - espacio proyectivo, 243
 - grupo cociente, 6
 - haz asociado, 266
 - límite inductivo, 64
 - límite proyectivo, 65
 - producto directo, 62
 - producto fibrado, 70
 - producto tensorial, 66
 - producto tensorial de álgebras, 68
- proyección
 - canónica, 3
 - regular, 186
- proyectable, 100, 166
- proyectividad, 97
- punto, 69, 73, 98
 - conjugados, 105
 - de un álgebra, 79
 - genérico, 69, 73
 - geométrico, 154
 - medio, 99
 - racional, 80
 - simple, 143
 - singular, 105, 143
 - umbílico, 196
 - unidad, 98
- radical de
 - un anillo, 74
 - un ideal, 129
 - una métrica, 100
- raíz, 15

- de la unidad, 8, 88
- de la unidad primitiva, 8
- ramas analíticas, 147
- rango, 100
 - de un módulo, 111
 - de una aplicación, 39
 - de una matriz, 39
- razón
 - de semejanza, 107
 - doble, 96
 - simple, 99
- realización geométrica, 210
- reciprocidad cuadrática, 89
- recta
 - proyectiva, 234
 - tangente, 105
- recubrimiento asociado, 84
- regla de
 - Descartes, 25
 - la cadena, 183
 - Ruffini, 8
- relación
 - de equivalencia, 3
 - de orden, 36
- residuo, 179
- resoluble por radicales, 90
- resolución, 229
 - de Godement, 229
- resultante, 28
 - de Bézout, 29
 - de Euler, 30
- retículo, 37
- retracto, 61
- revestimiento, 152, 216
 - asociado, 153, 218
 - de Galois, 153, 217
 - de orientación, 295
 - principal, 155, 223
 - trivial, 152, 216
 - universal, 218
- sección, 41, 61
 - crítica, 254
- semejanza, 107
- semianillo, 201
 - dual, 201
 - noetheriano, 209
 - normal, 207
- semilineal, 99
- seminorma, 159
- serie de Laurent, 178
- signo de una permutación, 33
- símbolo
 - de Christoffel, 188
 - de Legendre, 11
- simetría, 101
 - infinitesimal, 256
- simple, 37
- singularidad
 - esencial, 178
 - evitable, 178
- sistema
 - característico, 167
 - de coordenadas, 181
 - de coordenadas locales, 181
 - de generadores, 38
 - de parámetros, 137
 - de Pfaff, 166
 - de Pfaff integrable, 166
 - de referencia afín, 98
 - de referencia euclídeo, 107
 - de referencia proyectivo, 96
 - inductivo, 64
 - multiplicativo, 26
 - proyectivo, 64
- soporte, 75, 157, 267
- subanillo, 9
- subdivisión baricéntrica, 210
- subespacio vectorial, 35
- subesquema
 - abierto, 233
 - cerrado, 233
- subgrupo, 5
 - alternado, 7
 - de isotropía, 57
 - de Sylow, 58
 - normal, 6
 - trivial, 5
- subhaz, 265
- submódulo, 59
 - de torsión, 111
 - generado, 59
- subvariedad
 - afín, 99
 - diferenciable, 186
 - lineal, 36, 95
- sucesión espectral
 - convergente, 306
 - de hipercohomología, 306

- de Leray, 307
- del bicomplejo, 306
- sucesión exacta, 37, 71
 - corta, 37
 - de cohomología local, 269
 - de derivaciones, primera, 77
 - de derivaciones, segunda, 77
 - de diferenciales, primera, 78
 - de diferenciales, segunda, 78
 - de funtores derivados, 276
 - de Gysin, 290
 - de haces, 266
 - de Mayer-Vietoris, 269
 - del subespacio cerrado, 269
 - escindida o rota, 61
- sucesión regular, 312
- suma
 - de ideales, 9
 - de números complejos, 4
 - de números enteros, 3
 - de números racionales, 4
 - de subespacios vectoriales, 35
 - directa, 40, 59, 70
 - ortogonal, 100
- superficie
 - de Riemann, 177
- suplementario, 40
- supremo, 37
- tensor, 48
 - alternado, 50
 - contravariante, 48
 - covariante, 48
 - de curvatura, 190
 - de Riemann-Christoffel, 193
 - de torsión, 190
 - hemisimétrico, 50
- teorema
 - chino del resto, 10
 - egregio de Gauss, 197
- teorema de
 - Artin, 86, 153
 - Bézout, 32, 246, 323
 - Borsuk-Ulam, 223, 293
 - Brouwer, 281
 - cambio de base, 280
 - Cartan, 186
 - Cauchy, 58
 - D'Alembert, 17, 90, 176, 180, 221, 298
 - Darboux, 168
 - De Rham, 229, 276
 - Desargues, 96
 - descomposición, 14
 - descomposición, primer, 112, 119, 124
 - descomposición, segundo, 112, 119
 - descomposición, tercer, 120
 - división, 8
 - dualidad, 294, 340
 - dualidad local, 345
 - Euler, 196
 - extensión de Tietze, 214
 - finitud, 144, 281
 - Frobënus, 42, 167
 - Galois, 84, 153, 218, 259
 - Gauss-Bonnet, 263
 - Hamilton-Cayley, 45
 - Hirsch-Leray, 301
 - Hurewicz, 287
 - independencia, 90
 - Ischbeck, 316
 - isomorfía, 7, 10, 36
 - Künneth, 285
 - Kronecker, 16, 80
 - Krull, 138
 - la función inversa, 183
 - la proyección, 167
 - Lagrange, 6
 - las funciones simétricas, 15
 - Liouville, 177
 - los ceros, 142
 - los irracionales naturales, 85
 - los residuos, 179
 - Meusnier, 195
 - monotonía, 215
 - Noether, 256
 - periodicidad, 325, 327
 - reducción, 87
 - reflexividad, 41
 - representabilidad, 72
 - representación espectral, 203
 - Riemann, 178
 - Riemann-Roch, 236, 238
 - Riemann-Roch-Grothendieck, 337
 - Rouché-Frobënus, 39
 - Serre, 245, 314
 - Steiner, 245
 - Stokes, 172
 - Stone-Weierstrass, 213
 - Sturm, 23

- Sylow, primer, 58
- Sylow, segundo, 58
- Sylow, tercer, 58
- Tychonoff, 206
- Van-Kampen, 224
- Weierstrass, 178
- Witt, 101
- teorema de las
 - funciones formales, 350
- teorema del
 - índice de Hodge, 344
 - ascenso, 140
 - bicomplejo, 274
 - descenso, 141
 - elemento primitivo, 82
 - funtor compuesto, 307
 - grado, 17
 - punto fijo de Brouwer, 221
 - rango, 53
 - retracto continuo, 208
- teorema fundamental de
 - la dimensión, 216
 - la Geometría Proyectiva, 99
- teoría cohomológica, 331
- teoría cohomológica
 - graduada, 338
- topología
 - I -ádica, 133
 - de Zariski, 73
- torsión, 195
- transformación
 - infinitesimal de contacto, 254
 - natural, 69
- transversal, 292
- traslación, 99
- trasposición, 33
- traspuesta, 42
- traza, 49
- triangulación, 211
- triángulo exacto, 227

- unidad, 34

- valor
 - de una función, 73
 - propio, 45
- valoración, 142
 - discreta, 142
 - trivial, 142
- variación, 22

- variedad
 - algebraica afín, 141
 - casi-proyectiva, 331
 - con borde, 170
 - de Riemann, 233
 - de soluciones, 257
 - diferenciable, 181
 - polar, 105
 - riemanniana, 192
 - topológica, 272
- vector, 35
 - libre, 98
 - propio, 45
- vértice, 105
- volumen, 54

Índice general

In Memoriam	I
Prólogo	V
I Primer Curso	1
1. Álgebra I	3
1.1. Números Enteros, Racionales y Complejos	3
1.2. El Grupo Cociente	5
1.3. Polinomios con Coeficientes en un Cuerpo	7
1.4. El Anillo Cociente	9
1.4.1. Lema de Gauss	11
1.5. Anillos Euclídeos	13
1.5.1. Extensiones y Raíces	14
1.6. Aplicaciones	17
1.6.1. Irracionales Cuadráticos	17
1.6.2. Fracciones Simples	19
1.6.3. Teoría de Operadores	20
1.6.4. Separación de Raíces	22
1.6.5. Raíces Múltiples	23
1.7. Anillos de Fracciones	26
1.7.1. La Resultante	28
1.7.2. Eliminación	31
2. Geometría I	33
2.1. Grupos y Anillos	33
2.2. Espacios Vectoriales	35
2.2.1. Teoría de la Dimensión	37
2.3. El Espacio Dual	41
2.4. Espacios Vectoriales Euclídeos	43
2.5. Diagonalización de Endomorfismos	45
2.6. Tensores	48
2.6.1. Tensores Hemisimétricos	50
II Segundo Curso	55
3. Álgebra II	57
3.1. G -Conjuntos	57

3.2.	Módulos	59
3.2.1.	Módulos Inyectivos y Proyectivos	61
3.2.2.	Localización de Módulos	63
3.3.	Producto Tensorial	64
3.3.1.	Categorías y Teorema de Representabilidad	68
3.4.	El Espectro de un Anillo	73
3.4.1.	Propiedades Locales	75
3.5.	Cálculo Diferencial	76
3.6.	Álgebras Finitas	79
3.6.1.	Álgebras Separables	81
3.7.	Teoría de Galois	83
3.7.1.	El Automorfismo de Frobenius	87
3.7.2.	Extensiones Ciclotómicas	88
3.7.3.	Irracionales Cuadráticos	89
3.7.4.	Resolución de Ecuaciones	90
3.7.5.	Álgebras Inseparables	92
4.	Geometría II	95
4.1.	El Espacio Proyectivo	95
4.2.	El Espacio Afín	98
4.3.	Métricas	100
4.3.1.	Clasificación de Métricas	102
4.3.2.	Cuádricas	105
4.3.3.	Geometría Euclídea y Geometrías No Euclídeas	107
4.4.	Módulos sobre Dominios de Ideales Principales	111
4.4.1.	Clasificación de Módulos	113
4.4.2.	El Grupo K de Grothendieck	117
4.5.	Pares de Métricas	119
4.5.1.	Métricas Simétrica y Hemisimétrica	124
III	Tercer Curso	127
5.	Álgebra Conmutativa	129
5.1.	El Haz Estructural	129
5.2.	Descomposición Primaria	131
5.3.	Completación	133
5.4.	Teoría de la Dimensión	136
5.5.	Morfismos Finitos	139
5.5.1.	Teorema de los Ceros	141
5.6.	Anillos de Valoración y Dominios de Dedekind	142
5.6.1.	Módulos sobre Dominios de Dedekind	145
5.7.	Morfismos Finitos Birrationales	146
5.7.1.	Transformaciones Cuadráticas	147
5.8.	Morfismos Fielmente Planos	150
5.8.1.	Teoría de Galois de Revestimientos	152
5.8.2.	El Grupo Fundamental	154

6. Análisis III	157
6.1. Anillos de Funciones C^∞	157
6.1.1. Reconstrucción de X a partir de $C^\infty(X)$	159
6.2. Ecuaciones Diferenciales	161
6.2.1. Grupos Uniparamétricos y Derivada de Lie	163
6.3. Sistemas de Pfaff	166
6.4. Integración de Formas	170
6.4.1. Cohomología de De Rham	173
6.5. Funciones de Variable Compleja	175
6.5.1. Funciones Meromorfas	178
7. Geometría Diferencial I	181
7.1. Variedades Diferenciables	181
7.1.1. Campos Tensoriales	184
7.1.2. Subvariedades Diferenciables	186
7.2. Conexiones Lineales	187
7.2.1. Torsión y Curvatura	190
7.3. Métricas Riemannianas	192
7.3.1. Inmersiones Riemannianas	194
7.3.2. Curvas e Hipersuperficies	195
7.4. Grupos de Lie	197
8. Topología	201
8.1. Semianillos	201
8.2. Espacios Compactos	205
8.3. Separación	207
8.4. Espacios Noetherianos	209
8.5. Espacios Finitos	209
8.6. Compactificaciones	212
8.7. Teoría de la Dimensión	214
8.8. Teoría de Galois de Revestimientos	216
8.9. El Grupo Fundamental	218
IV Cuarto Curso	225
9. Geometría Algebraica I	227
9.1. Cohomología de Haces	227
9.2. Esquemas y Haces Coherentes	232
9.3. Curvas y Teorema de Riemann-Roch	236
9.3.1. Cálculo del Dualizante	238
9.4. Inmersiones Proyectivas	241
9.5. Morfismos Proyectivos	244
9.6. Curvas Completas	246
10. Geometría Diferencial II	249
10.1. Cálculo Diferencial Valorado	249
10.1.1. Curvatura	251
10.2. Cálculo de Variaciones	253
10.2.1. Problemas en Dimensión 1	256

10.3. Fibrados Naturales	258
10.4. Clases de Chern y Curvatura	261
11. Topología Algebraica	265
11.1. Haces y Prehaces	265
11.1.1. Cohomología	267
11.1.2. Cohomología y Dimensión	271
11.2. Álgebra Homológica	273
11.2.1. Los Funtores Tor_n^A y Ext_A^n	274
11.2.2. Funtores Derivados	275
11.3. Imagen Inversa	278
11.4. Producto Cup	282
11.5. Clase de Cohomología de una Subvariedad	286
11.5.1. Fibrados de Línea	286
11.5.2. Cohomología Local	290
11.5.3. Teoría Topológica de la Intersección	291
11.6. Teorema de Dualidad	293
11.6.1. Teoría del Grado	296
11.6.2. Teorema de Lefschetz	299
11.7. Clases Características	301
11.8. Sucesiones Espectrales	304
V Quinto Curso	309
12. Geometría Algebraica II	311
12.1. Módulos Inyectivos	311
12.2. Álgebra Local	312
12.2.1. Sucesiones Regulares	312
12.2.2. Anillos Regulares	314
12.2.3. Profundidad	315
12.2.4. Cohomología Local	317
12.3. Haces Casicoherentes	318
12.4. Teoría K	321
12.4.1. Graduado de la Teoría K	326
12.4.2. Clases de Chern	329
12.4.3. Teorías Cohomológicas	331
12.4.4. Teorema de Riemann-Roch-Grothendieck	334
12.5. Teoría de la Dualidad	340
12.5.1. Cálculo del Dualizante	341
12.5.2. Dualidad Local	345
12.5.3. Bidualidad	346
12.5.4. Teorema de las Funciones Formales	349
Bibliografía	353
Índice Alfabético	355