

RÉDACTION N° 346

COTE : PCR 040

TITRE : Algèbre commutative
 Chapitre II : Localisation
 § 5.- Modules projectifs de type fini,
 idéaux fractionnaires inversibles

FONDS PIERRE CARTIER

NOMBRE DE PAGES : 31

NOMBRE DE FEUILLES : 31

ALGÈBRE COMMUTATIVE

Rédaction n° 346

CHAPITRE II : LOCALISATION

§ 5. - Modules projectifs de type fini, idéaux fractionnaires inversibles.

--:--

	n° des pages
1. Généralités	1
2. Modules projectifs de type fini : propriétés générales	2
3. Caractérisation locale des modules projectifs de type fini. Rang	5
4. Modules inversibles	10
5. Sous-modules de l'anneau total des fractions	13
6. Idéaux inversibles	17
7. Ensembles polaires et ensembles divisoriels	23
8. Changement d'anneau	26

--:--

Rédaction

CHAPITRE II par 5 - Modules projectifs

n°346

de type fini, idéaux fractionnairesinversibles

-:-:-:-

1. Généralités sur les modules projectifs.

Rappelons la définition suivante, cas particulier d'une définition valable dans toute catégorie abélienne :

DEFINITION 1.1 - Soit A un anneau, P un A-module à gauche. On dit que P est un module projectif si pour tout homomorphisme surjectif $u : M \rightarrow N$ de A-modules, et pour tout homomorphisme $v : P \rightarrow N$, il existe un homomorphisme $w : P \rightarrow M$ tel que $uw = v$.

Cela signifie aussi que pour toute suite exacte de A-modules

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

la suite correspondante d'homomorphismes de groupes abéliens

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(P, M') \rightarrow \text{Hom}_A(P, M) \rightarrow \text{Hom}_A(P, M'') \rightarrow 0$$

est exacte $\star$ ou encore que le foncteur $M \rightarrow \text{Hom}_A(P, M)$ est exact $\star$.

Nous laissons au lecteur de vérifier les faits suivants, cas particuliers de faits analogues relatifs aux catégories abéliennes, et qui résultent facilement de la définition :

PROPOSITION 1.2 - Pour qu'une somme directe d'une famille de modules M_i soit projectif, il faut et il suffit que chacun des M_i le soit.

COROLLAIRE 1.3 - Tout facteur direct d'un module projectif est projectif.

PROPOSITION 1.4 - Soit P un module. Pour que P soit projectif, il faut et il suffit que pour tout homomorphisme surjectif $u : M \rightarrow P$, il existe une inverse à droite $v : P \rightarrow M$ (ou, ce qui revient au même, que le noyau de u soit un facteur direct).

D'ailleurs, compte tenu de 1.3, s'il existe un homomorphisme surjectif

$u : M \rightarrow P$ admettant un inverse à droite, et si M est projectif, alors P est projectif.

PROPOSITION 1.5 - A_s est un module projectif.

En effet, la donnée d'un homomorphisme $u : A_s \rightarrow M$ équivaut à la donnée d'un élément x de M (savoir $x = u(1)$), et la proposition résulte alors aussitôt de la définition 1.1.

COROLLAIRE 1.6 - Tout module libre est projectif. Pour qu'un module soit projectif, il faut et il suffit qu'il soit isomorphe à un facteur direct d'un module libre.

La première assertion résulte de 1.5 et 1.2. Il s'ensuit qu'un facteur direct d'un module libre est projectif par 1.3. Réciproquement, si P est projectif, considérons un homomorphisme surjectif d'un module libre $L = A^{(I)}$ dans P (défini à l'aide d'un système de générateurs (e_i) de P) ; en vertu de 1.4, il existe un homomorphisme inverse à droite, ce qui prouve que P est isomorphe à un facteur direct de L .

COROLLAIRE 1.7 - Soit M un A -module, et $\varphi : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. Considérons le B -module $B \otimes_A M$. Si M est projectif, il en est de même de $B \otimes_A M$.

COROLLAIRE 1.8 - Tout module projectif est plat.

2. Modules projectifs de type fini : propriétés générales.

PROPOSITION 2.1 - Un module projectif de type fini est de présentation finie.

En effet, soit $u : L \rightarrow M$ un homomorphisme d'un module libre de type fini sur le module projectif M , alors le noyau R de u est facteur direct dans L ; il existe donc un homomorphisme surjectif v de L sur R , d'où une présentation finie $L \xrightarrow{v} L \xrightarrow{u} M \rightarrow 0$ de M .

La proposition qui suit est un remords au paragraphe des modules fidèlement plats :

PROPOSITION 2.2 - Soient $A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux faisant de B un A -module à droite fidèlement plat, M un A -module à gauche. Pour que M soit de type fini (resp. de présentation finie) il faut et il suffit que le B -module $B \otimes_A M$ soit de type fini (resp. de présentation finie).

M est limite inductive de ses sous-modules de type fini M_i , donc $B \otimes_A M$ est limite inductive des modules $B \otimes_A M_i$, qui s'identifient à des sous-modules de $B \otimes_A M$ (puisque B est un A -module à droite plat). Pour que M soit de type fini, il faut et il suffit qu'il existe un indice i tel que $M_i = M$, ou, ce qui revient au même puisque B est fidèlement plat sur A , tel que $B \otimes_A M_i = B \otimes_A M$. Cela signifie donc que $B \otimes_A M$ est de type fini. Reste à prouver que si $B \otimes_A M$ est de présentation finie, il en est de même de M (la réciproque, vraie d'ailleurs sans hypothèse de platitude, a déjà été signalée, réf). On sait déjà par ce qui précède que M est de type fini, donc qu'il existe un homomorphisme surjectif $u : L \rightarrow M$, avec L libre de type fini. Soit R le noyau de u , alors $B \otimes_A R$ s'identifie au noyau de l'homomorphisme surjectif $1_B \otimes u : B \otimes_A L \rightarrow B \otimes_A M$, donc est de type fini (réf). Il s'ensuit d'après ce qui précède que R est de type fini, donc M est de présentation finie.

PROPOSITION 2.3 - Soient $A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux, avec A commutatif, faisant de B un A -module à droite fidèlement plat, M un A -module. Pour que M soit un A -module projectif de type fini, il faut et il suffit que $B \otimes_A M$ soit un B -module projectif de type fini.

La condition est évidemment nécessaire (sans hypothèse de platitude) prouvons qu'elle est suffisante. L'hypothèse entraîne que $B \otimes_A M$ est de présentation finie en vertu de 2.1, donc il en est de même de M en vertu de 2.2 ; par suite (réf) pour tout A -module N on a un isomorphisme canonique

$$B \otimes_A \text{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_B(B \otimes_A M, B \otimes_A N)$$

Il s'ensuit que si $N \rightarrow N'$ est un homomorphisme surjectif de A -module, alors l'homomorphisme correspondant $\text{Hom}_A(M, N) \rightarrow \text{Hom}_A(M, N')$ tensorisé par B est surjectif ($B \otimes_A M$ étant un B -module projectif), donc (B étant fidèlement plat sur A) est lui-même surjectif. Par suite, M est un A -module projectif, d'ailleurs de type fini, cqfd.

PROPOSITION 2.4 - Soit M un A -module à gauche de type fini.

a) Le A -module à droite $M' = \text{Hom}_A(M, A)$ est projectif de type fini, et l'homomorphisme canonique

$$M \rightarrow M''(M')$$

est un isomorphisme.

b) Pour tout A -module à gauche N , l'homomorphisme canonique

$$M' \otimes_A N \rightarrow \text{Hom}_A(M, N)$$

est bijectif.

Comme M est isomorphe à un facteur direct d'un module libre de type fini L , M' est isomorphe à un facteur direct de L' , qui est libre de type fini, donc M' est projectif. Posons pour abréger, pour tout A -module à gauche M ,

$$S(M) = M \quad (\text{sic}) \quad , \quad T(M) = M'' \quad (\text{resic})$$

et notons que L est isomorphe à $M \times P$, donc $S(L)$ est isomorphe à $S(M) \times S(P)$ et $T(L)$ est isomorphe à $T(M) \times T(P)$, l'homomorphisme canonique $S(L) \rightarrow T(L)$ s'identifiant alors à l'homomorphisme

$$S(M) \times S(P) \rightarrow T(M) \times T(P)$$

déduit des homomorphismes canoniques $S(M) \rightarrow T(M)$ et $S(P) \rightarrow T(P)$. Or il est bien connu (réf) que $S(L) \rightarrow T(L)$ est un isomorphisme, d'où on conclut que $S(M) \rightarrow T(M)$ et $S(P) \rightarrow T(P)$ sont aussi des isomorphismes. Cela prouve a). On prouve de la même façon b), en posant maintenant

$$S(M) = M' \otimes_A N \quad , \quad T(M) = \text{Hom}_A(M, N)$$

COROLLAIRE 2.5 - Supposons A commutatif. Soient M et N des A -modules projec-

tifs et de type fini, alors $\text{Hom}_A(M, N)$ est un A -module projectif de type fini.

C'est en effet le produit tensoriel de deux A -modules projectifs de type fini (et on aurait dû dire après 1.6 que le produit tensoriel de deux modules projectifs est projectif ...).

COROLLAIRE 2.7 - Soit M un A -module à gauche. Pour que M soit projectif^{et} de type fini, il faut et il suffit que $1_M \in \text{Hom}_A(M, N)$ soit dans l'image de $M' \otimes_A M$ par l'homomorphisme canonique $M' \otimes_A M \in \text{Hom}_A(M, M)$; i.e. qu'il existe des $x_i \in M$ et des $x'_i \in M'$ ($1 \leq i \leq n$) tels que pour tout $x \in M$, on ait

$$x = \sum_i \langle x'_i, x \rangle x_i$$

La condition est nécessaire en vertu de 2.4. b). Elle est suffisante, car considérons alors l'homomorphisme $u : L \rightarrow M$ de $L = A^n$ dans M défini par les x_i . Soient e_i les éléments de la base canonique de L , et soit v l'homomorphisme de M dans L défini par $v(x) = \sum \langle x'_i, x \rangle e_i$. On voit aussitôt que ce dernier est un inverse à droite de u , donc M est isomorphe à un facteur direct de L , d'où la conclusion.

3. Caractérisation locale des modules projectifs de type fini. Rang.

A partir du présent numéro, les anneaux sont supposés commutatifs. A désignera en particulier un anneau commutatif.

PROPOSITION 3.1 - Soit M un A -module. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) M est projectif de type fini.
- (ii) Il existe une famille $(f_i)_{i \in I}$ d'éléments de A , engendrant l'idéal unité, telle que pour tout $i \in I$, M_{f_i} soit un module libre de type fini sur A_{f_i}
- (iii) Pour tout idéal premier p dans A , il existe un $f \in A - p$ tel que M_f soit un module libre de type fini sur A_f .
- (iv) M est de présentation finie, et pour tout idéal maximal m de A ,

$M_{\underline{m}}$ est un module libre sur $A_{\underline{m}}$.

[J'ai oublié de préciser au début du numéro que M_f désigne le localisé de M par rapport à la partie $\{f\}$ de A .]

Si (f_i) est une famille d'éléments de A , elle engendre l'idéal unité si et seulement si pour tout idéal premier $\underline{p}$ de A (ou aussi pour tout idéal maximal $\underline{m}$ de A), il existe un i tel que f_i ne soit pas dans $\underline{p}$. Cela prouve l'équivalence de (ii) et (iii), et on peut d'ailleurs dans (iii) se borner à considérer des idéaux $\underline{p}$ maximaux. De plus, la condition (ii) n'est pas modifiée en y supposant la famille $(f_i)_{i \in I}$ finie. Comme alors l'anneau $B = \prod A_{f_i}$ est fidèlement plat sur A , et comme (ii) implique que $M \otimes_A B$ est un module projectif de type fini sur B , (un peu sec), il s'ensuit que M est un module projectif de type fini sur A en vertu de 2.3, donc (ii) $\Rightarrow$ (i). Supposons M projectif de type fini, il est donc de présentation finie en vertu de 2.1, d'autre part pour tout idéal premier $\underline{p}$ de A , $M_{\underline{p}}$ est projectif de type fini sur $A_{\underline{p}}$ en vertu de 1.7, donc libre en vertu de ... En particulier (i) $\Rightarrow$ (iv). Reste à prouver que (iv) $\Rightarrow$ (iii), et nous pouvons nous borner à prouver (iii) lorsque $\underline{p}$ est un idéal maximal $\underline{m}$. Soit $u : L \rightarrow M$ un homomorphisme tel que

$$u \otimes k : L \otimes k \rightarrow M \otimes k \quad (k = A/\underline{m})$$

soit bijectif, L étant un A -module libre de type fini. (On obtient par exemple un tel homomorphisme en relevant arbitrairement dans M les éléments d'une base de $M \otimes k = M/\underline{m}M$). Soient R le noyau de u , Q son conoyau (i.e. le quotient de M par l'image de L). La suite exacte

$$0 \rightarrow R \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow Q \rightarrow 0$$

donne par tensorisation avec k

$$L \otimes k \rightarrow M \otimes k \rightarrow Q \otimes k \rightarrow 0$$

ce qui prouve que $Q \otimes k = 0$, donc (puisque $Q_{\underline{m}}$ est un $A_{\underline{m}}$ -module de type fini) $Q_{\underline{m}} = 0$

par le lemme de Nakayama, donc (Q étant de type fini) il existe un $f_1 \in A - \underline{m}$ tel que $Q_{f_1} = 0$. On a donc une suite exacte

$$0 \rightarrow R_{f_1} \rightarrow L_{f_1} \rightarrow M_{f_1} \rightarrow 0$$

et comme M_{f_1} est un A_{f_1} -module de présentation finie (puisque M est un A-module de présentation finie), il s'ensuit (réf) que R_{f_1} est un A_{f_1} -module de type fini. Soit $\underline{m}_1$ l'idéal maximal de A_{f_1} dont l'image inverse dans A est $\underline{m}$; localisant la suite exacte précédente en $\underline{m}_1$, on obtient une suite exacte qui s'identifie à la suite d'homomorphismes de $A_{\underline{m}}$ -modules

$$0 \rightarrow R_{\underline{m}} \rightarrow L_{\underline{m}} \rightarrow M_{\underline{m}} \rightarrow 0$$

déduite, par localisation en $\underline{m}$, de la suite d'homomorphismes de A-modules $0 \rightarrow R \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$. Or comme $M_{\underline{m}}$ est un $A_{\underline{m}}$ -module libre de type fini, ainsi que $L_{\underline{m}}$, et que l'homomorphisme déduit de $L_{\underline{m}} \rightarrow M_{\underline{m}}$ par tensorisation avec k est bijectif par construction, il s'ensuit que $L_{\underline{m}} \rightarrow M_{\underline{m}}$ est bijectif (réf), donc $R_{\underline{m}} = 0$. Comme R_{f_1} est de type fini et $(R_{f_1})_{\underline{m}_1} = 0$, il s'ensuit qu'il existe un élément f_2 de $A_{f_1} - \underline{m}_1$ tel que $(R_{f_1})_{f_2} = 0$. On en conclut facilement qu'il existe un $f_3 \in A - \underline{m}$ tel que $R_{f_1 f_3} = 0$, donc $L_{f_1 f_3} \rightarrow M_{f_1 f_3}$ est un isomorphisme. Posant $f = f_1 f_3$, il s'ensuit que $f \in A - \underline{m}$ et que M_f est un A_f -module libre de type fini, cqfd.

COROLLAIRE 3.2 - Soit M un A-module projectif de type fini. Pour tout $p \in \text{Spec}(A)$, soit $\text{rg}_p(M)$ le rang du A_p -module libre de type fini M_p . Alors la fonction $p \rightarrow \text{rg}_p(M)$ est localement constante sur $\text{Spec}(A)$.

Avec les notations de (ii), cette fonction est en effet constante sur chacun des ouverts $X_{f_i} = X - V(f_i)$ de X.

DEFINITION 3.3 - Sous les conditions et avec les notations de 3. 2, l'entier $\text{rg}_p(M)$ s'appelle le rang du module projectif de type fini M en l'idéal premier p. On dit que M est de rang n si $\text{rg}_p(M) = n$ pour tout p.

Bien entendu, le rang de M (s'il existe) est uniquement déterminé, pourvu que $A \neq 0$. Quant à l'unique module sur l'anneau nul (savoir le module nul) il est non seulement projectif de type fini, mais même libre de type fini, et de rang n quel que soit n .

COROLLAIRE 3.4 - Soient M un A -module, n un entier. Conditions équivalentes :

- (i) M est un A -module projectif de rang n
- (ii) Il existe une famille $(f_i)_{i \in I}$ d'éléments de A , engendrant l'idéal unité, et tel que pour tout i , M_{f_i} soit libre de rang n sur A_{f_i} .
- (iii) Pour tout idéal premier p de A , il existe $f \in A - p$ tel que M_f soit libre de rang n sur A_f .
- (iv) M est de présentation finie, et pour tout idéal maximal m de A , M_m est un module libre de rang n sur A_m .

Cela résulte trivialement de 3.1 et de la définition 3.3.

PROPOSITION 3.5 - Soient M, N deux modules projectifs de rang m et n . Alors $M \times N$ est un module projectif de rang $m+n$, M' est un module projectif de rang m , $M \otimes N$ et $\text{Hom}(M, N)$ sont des modules projectifs de rang mn .

On est en effet ramené aussitôt au cas de modules libres, où la proposition est connue. On prouve de même :

COROLLAIRE 3.6 - Soient M un A -module projectif de rang n , alors pour toute algèbre B sur A , $M \otimes_A B$ est un B -module projectif de rang n .

PROPOSITION 3.7 - Soit A un anneau semi-local, M un A -module. Pour que M soit projectif de rang n , il faut et il suffit qu'il soit libre de rang n .

Il suffit de prouver que si M est projectif de rang n , il est libre de rang n . Soit $\underline{r}$ le radical de A , de sorte que $R = A/\underline{r}$ est le composé d'un nombre fini de corps K_i . Comme $M \otimes_A R$ est projectif de rang n , les espaces vectoriels $M \otimes_{R, K_i} = (M \otimes_A R) \otimes_{R, K_i}$ sont tous de dimension n , d'où résulte

aussitôt que $M \otimes_A R$ est un module libre de rang n sur R . Comme M est plat et de présentation finie, il s'ensuit (réf) que M est libre de rang n .

Exercice 1. Soit M un A -module projectif de type fini. Prouver qu'il existe des anneaux A_i , des A_i -modules de type fini M_i , un isomorphisme d'anneaux $A \rightarrow \prod A_i$ et un isomorphisme (compatible avec le précédent) $M \rightarrow \prod M_i$. Prouver la réciproque. Donner une propriété d'unicité, quand on suppose les $A_i \neq 0$ et les rangs des M_i tous distincts.

Exercice 2. Soit M un A -module projectif de type fini, u un endomorphisme de M . Définir le déterminant de u , et le polynôme en t $\det(1 + ut) = 1 + (\text{tr } u) t + \dots$. Généraliser à cette situation les identités classiques pour les modules libres, en supposant au besoin M de rang donné n .

Exercice 3. Soit M un A -module projectif de type fini. Prouver que les puissances extérieures et symétriques de M sont des modules projectifs de type fini, dont le rang se calcule à partir de celui de M (si ce dernier existe) par les formules habituelles.

Exercice 4. Soit M un A -module projectif de rang n . Prouver qu'il existe une algèbre B de type fini sur A et fidèlement plate sur A telle que $M \otimes_A B$ soit un B -module libre de rang n (la réciproque étant d'ailleurs triviale). [Indication : construire une algèbre B sur A , déterminée à isomorphisme unique près, et une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $M \otimes_A B$, de telle façon que pour toute algèbre C sur A , l'application naturelle déduite de (e_i) de l'ensemble des homomorphismes de A -algèbres $B \rightarrow C$ dans l'ensemble des bases de C -module $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $M \otimes_A C$ soit bijective. Pour faire cette construction, utilisant l'unicité, se ramener au cas où M est déjà libre sur A .] Cet exercice, au point où on en est, mérite le le signe de la difficulté.

Exercice 5. (pouvait venir au n°2). Définition et sorites divers sur l'anneau $K(A)$ des classes de modules projectifs de rang fini sur A , le cas échéant en incluant les opérations λ^i . Peut se développer ad libitum suivant la bonne volonté du rédacteur d'exercices.

4. Modules inversibles.

PROPOSITION 4.1 - Soient A un anneau (commutatif, on le rappelle), M un A -module. Conditions équivalentes :

(i) M est un A -module projectif de rang 1
 (ii) M est de type fini, et il existe un A -module N tel que $M \otimes_A N$ soit isomorphe à A .

(iii) M est de type fini, et pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A , $M_{\mathfrak{m}}$ est libre de rang 1 sur $A_{\mathfrak{m}}$.

Sous les conditions de (ii), N est isomorphe au module dual M' , et l'homomorphisme canonique $M' \otimes_A M \rightarrow A$ est un isomorphisme.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Soit M un A -module projectif de rang 1, M' son dual, on a donc (M étant de présentation finie) $(M')_{\mathfrak{p}} = (M_{\mathfrak{p}})'$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$. Prouvons que l'homomorphisme canonique $M' \otimes_A M \rightarrow A$ est un isomorphisme. Il suffit de prouver que l'homomorphisme localisé en tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ est un isomorphisme ; or cet homomorphisme s'identifie, grâce à la formule précédente, à l'homomorphisme canonique $(M_{\mathfrak{m}})' \otimes_{A_{\mathfrak{m}}} M_{\mathfrak{m}} \rightarrow A_{\mathfrak{m}}$, qui est un isomorphisme puisque $M_{\mathfrak{m}}$ est isomorphe à $A_{\mathfrak{m}}$. Soit d'ailleurs N un A -module et $u : M \otimes_A N \rightarrow A$ un isomorphisme, alors u définit un homomorphisme

$$u' : N \rightarrow M'$$

prouvons qu'il est bijectif. On est ramené encore à prouver que pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A , $u'_{\mathfrak{m}} : N_{\mathfrak{m}} \rightarrow M'_{\mathfrak{m}} = (M_{\mathfrak{m}})'$ est bijectif, ce qui nous ramène comme ci-dessus au cas où M est isomorphe à A , où l'assertion est immédiate. Cela prouve donc la dernière assertion de 4.1.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A , posons $k = A/\mathfrak{m}$. L'isomorphisme $M \otimes_A N \rightarrow A$ définit, par tensorisation par k , un isomorphisme $M_k \otimes_k N_k \rightarrow k$ ce qui prouve que M_k et N_k sont des espaces vectoriels de dimension 1. Soit

x un élément de M dont l'image dans $M \otimes k = M/\underline{m}M$ définit une base de cet espace vectoriel sur k . Comme $M_{\underline{m}}$ est de type fini, il résulte du lemme de Nakayama que x est un générateur de $M_{\underline{m}}$ i.e. que le conoyau Q de l'homomorphisme $A \rightarrow M$ défini par x est nul en $\underline{m}$. Comme Q est un A -module de type fini, il s'ensuit qu'il existe un $f \in A - \underline{m}$ tel que $Q_f = 0$, i.e. tel que l'homomorphisme $A_f \rightarrow M_f$ soit surjectif. Tout élément du noyau de cet homomorphisme annule M_f donc annule $M_f \otimes_{A_f} N_f = (M \otimes_A N)_f$, donc est nul puisque ce dernier module est isomorphe à A_f . Donc M_f est isomorphe à A_f . Cela prouve que M est projectif de rang 1 en vertu de (3.4 (iii)).

(i) et (ii) $\Rightarrow$ (iii). La démonstration de (iii) $\Rightarrow$ (i) est laissée au Congrès.

DEFINITION 4.2 - Un A -module M est dit inversible s'il est projectif et de rang 1.

PROPOSITION 4.3 - Soient M et N des A -modules inversibles. Alors $M \otimes N$, M' , $\text{Hom}(M, N)$ sont des A -modules inversibles. Si B est une A -algèbre, alors $M \otimes_A B$ est un B -module inversible.

C'est un cas particulier de 3.5 et 3.6.

Remarque 4.4 - Soit M un A -module inversible. On pose parfois, pour tout entier $n < 0$:

$$M^{\otimes n} = M' \otimes (-n)$$

où l'exposant $\otimes m$ (avec $m > 0$) désigne le produit tensoriel de m modules identiques au module qu'il affecte. On pose de plus, pour tout A -module M , $M^{\otimes 0} = A$. Avec ces conventions, on a des isomorphismes canoniques, valables pour tout couple d'entiers n, n' :

$$M^{\otimes n} \otimes M^{\otimes n'} \xrightarrow{\sim} M^{\otimes (n + n')}$$

PROPOSITION 4.5 - Soit $\text{Pic}(A)$ l'ensemble des classes (à isomorphisme près) de A -modules inversibles, et pour tout A -module inversible M , soit $\text{cl}(M)$ l'élé-

ment de $\text{Pic}(A)$ qu'il définit. Considérons la loi de composition (notée additivement) dans $\text{Pic}(A)$, définie par la formule

$$\text{cl}(M \otimes N) = \text{cl}(M) + \text{cl}(N)$$

(M et N étant deux A -modules inversibles ; cf. 4.3). Muni de cette loi de composition, $\text{Pic}(A)$ devient un groupe abélien, et on a

$$\text{cl}(A) = 0, \quad \text{cl}(M^{\otimes -1}) = -\text{cl}(M)$$

Démonstration. Il est immédiat (d'après les propriétés d'associativité et commutativité du produit tensoriel) que la formule écrite définit bien une loi de composition associative et commutative dans $\text{Pic}(A)$, et que $\text{cl}(A)$ en est un élément unité (en vertu de l'isomorphisme $M \otimes_A A \xrightarrow{\sim} M$). Le fait que $\text{cl}(M^{\otimes -1})$ soit symétrique de $\text{cl}(M)$ résulte alors de l'isomorphisme $M \otimes M^{\otimes -1} \xrightarrow{\sim} A$.

DEFINITION 4.6 - Le groupe $\text{Pic}(A)$ s'appelle groupe de Picard de A . (ou groupe des classes de modules inversibles si le premier nom est vomi par Bourbaki).

* Remarque. Le critère (3.1 (iii)) pour que le A -module M soit projectif de type fini peut aussi s'exprimer en disant que le faisceau de modules $\widetilde{M}$ sur $\text{Spec}(A)$ associé à M (réf) est localement libre de type fini, et peut par suite s'interpréter comme le faisceau des sections d'un fibré vectoriel sur $\text{Spec}(A)$. Il résulte d'ailleurs de la caractérisation des faisceaux de la forme $\widetilde{M}$ que tout faisceau localement libre de type fini sur $X = \text{Spec}(A)$ est isomorphe à un faisceau de la forme $\widetilde{M}$, où M est déterminé à un isomorphisme unique près. De même, les modules inversibles sur A correspondent aux faisceaux de modules sur X qui sont localement isomorphes à $\mathcal{O}_X$ lui-même. Comme le faisceau des automorphismes de $\mathcal{O}_X$ (considéré comme faisceau de modules) est isomorphe au faisceau $\mathcal{O}_X^*$ des unités de $\mathcal{O}_X$, (dont les sections sur un ouvert U de X sont les éléments inversibles de l'anneau des sections de $\mathcal{O}_X$ sur U) il s'ensuit que le groupe $\text{Pic}(A)$ des classes de A -modules inversibles, ou encore l'ensemble des classes de faisceaux de modules inversibles sur X , s'identifie au premier groupe de cohomologie $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$. *

5. Sous-modules de l'anneau total des fractions.

Soit A un anneau (commutatif, on le rappelle), S l'ensemble des éléments réguliers de A , c'est une partie multiplicative de A . Rappelons que l'anneau

$$K = S^{-1}A$$

est appelé anneau total des fractions de A . S est d'ailleurs la plus grande partie multiplicative T de A telle que l'homomorphisme canonique $A \rightarrow T^{-1}A$ soit injectif.

Remarque 5.1 - Pour que A soit intègre, il faut et il suffit que K soit un corps. Supposons plus généralement qu'il existe un nombre fini d'idéaux premiers p_i dans A tels que S soit le complémentaire de $\bigcup_i p_i$ (i.e. tel que les diviseurs de 0 dans A soient exactement les éléments de A qui sont contenus dans un au moins des p_i ; nous verrons plus tard qu'il en est ainsi en particulier si A est noethérien). Alors K est un anneau semi-local dont les idéaux maximaux sont parmi les $p_i K$ (réf.)

PROPOSITION 5.2 - Soit R un K -module isomorphe à K , x un élément de R . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) x est une base de R sur K .
- (ii) x est un générateur de R sur K .
- (iii) L'homomorphisme $f \rightarrow fx$ de K dans R est injectif (i.e. x est libre sur K).
- (iv) L'homomorphisme $f \rightarrow fx$ de A dans R est injectif (i.e. x est libre sur A).

Si $R = K$, ces conditions équivalent aussi aux suivantes :

- (v) x est un élément inversible de K
- (vi) x est un élément de la forme f/g , avec $f, g \in S$.

On peut évidemment supposer $R = K$, ce qui montre immédiatement l'équivalence de (i), (ii), (v). De plus on a trivialement (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv).

D'autre part x est de la forme f/g , avec $g \in S$, donc g est inversible dans K . Si (iv) est vérifié, alors $h \in A - (0)$ implique que $hx = (hf)/g \neq 0$, donc $hf \neq 0$, il s'ensuit que f est non diviseur de 0 dans A donc $f \in S$, d'où (iv) $\Rightarrow$ (vi). Enfin (vi) $\Rightarrow$ (v) car si $f, g \in S$, alors f/g admet l'inverse g/f , cqfd.

COROLLAIRE 5.3 - Tout élément régulier de K est inversible.

(C'est d'ailleurs là une condition nécessaire et suffisante sur un anneau pour que l'homomorphisme canonique de l'anneau dans l'anneau total des fractions soit un isomorphisme).

PROPOSITION 5.3 - Soit M un sous- A -module de K . L'homomorphisme canonique

$$S^{-1}M = M \otimes_A K \rightarrow K$$

déduit de l'homomorphisme d'injection $M \rightarrow K$ est injectif, et il est bijectif si et seulement si M rencontre S , ou encore si et seulement si M rencontre l'ensemble K^* des éléments inversibles de K .

Comme l'homomorphisme $M \rightarrow K$ est injectif, il en est de même de l'homomorphisme $S^{-1}M \rightarrow S^{-1}K = K$. Pour qu'il soit surjectif, il faut et il suffit que l'idéal engendré par M dans K soit l'idéal unité, il suffit donc que M rencontre K^* et à fortiori qu'il rencontre S . Inversement, si $S^{-1}M = K$, alors il existe $x \in M$ et $f \in S$ tel que $x/f = 1$, d'où $x = f$, donc M rencontre S .

DEFINITION 5.4 - Un sous- A -module M de K est dit non dégénéré s'il engendre dans K l'idéal unité, i.e. s'il rencontre S .

Evidemment tout sous-module de K qui contient un sous-module non dégénéré est non dégénéré. Si M et N sont deux sous-modules non dégénérés de K alors $M.N$ et $M \cap N$ sont des sous-modules non dégénérés : en effet, si $f \in M$, $g \in N$, sont dans S , alors fg est dans S et dans $M.N$ et dans $M \cap N$. De même, $M + N$ sera un sous-module non dégénéré, puisqu'il contient M .

Soient M et N deux sous-modules de K (par quoi nous entendrons toujours :

sous-A-modules). On appelle transporteur de M dans N, et on note $(N : M)$, l'ensemble des $f \in K$ tels que $fM \subset N$. C'est évidemment un sous-module de K.

PROPOSITION 5.5 - Soient M, N deux sous-modules de K, considérons l'application naturelle

$$(N : M) \longrightarrow \text{Hom}_A(M, N)$$

qui fait correspondre à tout $f \in (N : M)$ l'homomorphisme $g \rightarrow fg$ de M dans N. Si M est non dégénéré, c'est un isomorphisme.

Comme $N \subset K$, on a $\text{Hom}_A(M, N) \subset \text{Hom}_A(M, K) = \text{Hom}_K(M \otimes_A K, K)$; or si M est non dégénéré, on a $M \otimes_A K = K$, donc $\text{Hom}_K(M \otimes_A K, K)$ s'identifie à K. Cela signifie que tout homomorphisme $u : M \rightarrow N$ est défini de façon unique par un $f \in K$, comme induit par l'homomorphisme $g \rightarrow fg$ de K dans K. La proposition en résulte.

N.B. - En plus de la condition de non dégénérescence sur M (qui signifie que M n'est pas trop petit) on pourrait introduire la condition habituelle que M est contenu dans un $(1/f)A$ avec $f \in S$ (qu'on exprime parfois en disant que M est un idéal fractionnaire de A) ; on pourrait dire aussi que M est modéré si il satisfait aux deux conditions symétriques précédentes, i.e. si il existe $f \in S$ tel que $A.f \subset M \subset (1/f)A$. Cela obligerait moralement à dérouler un sorite de stabilité de ces notions pour les opérations $M.N$, $(N:M)$, $M \cap N$ et $M + N$, dont la nécessité ne semble pas s'imposer ici. On pourrait en faire un exercice tout au moins.

Désignons par A^* (resp. K^*) le groupe des éléments inversibles de A (resp. K), donc A^* est un sous-groupe de K^* . Désignons par G l'ensemble des sous-modules non dégénérés de K. Il est immédiat que la loi de composition $(M, N) \rightarrow M.N$ fait de G un monoïde unitaire, l'élément unité étant le sous-module A de K. D'autre part, l'application $f \rightarrow A.f$ de K^* dans G est un homomorphisme unitaire, dit canonique :

$$K^* \longrightarrow G$$

Le noyau de cet homomorphisme est évidemment A, donc son image est un sous-

groupe de G contenant l'unité, isomorphe à K^*/A^* . Etendant une terminologie introduite plus haut, on peut résumer cette situation en disant qu'on a une suite exacte canonique d'homomorphismes

$$0 \rightarrow A^* \rightarrow K^* \rightarrow G$$

PROPOSITION 5.6 - Soient M et N des sous-modules de K , avec M non dégénéré. Pour que M et N soient isomorphes, il faut et il suffit qu'il existe un $x \in K^*$ tel que $xM = N$. L'isomorphisme défini dans 5.5 induit une bijection de l'ensemble des $x \in K$ tels que $xM = N$ sur l'ensemble des isomorphismes de M sur N .

Il suffit de prouver la dernière assertion. Si $x \in K^*$ est tel que $xM = N$, l'homomorphisme $M \rightarrow N$ défini par x est injectif (car $x \in K^*$) et surjectif, donc bijectif. Réciproquement, soit $x \in (N:M)$ tel que l'homomorphisme $M \rightarrow N$ qu'il définit soit bijectif, on a donc $xM = N$, prouvons que $x \in K^*$. Soit, en effet, $f \in S \cap M$, alors l'homomorphisme composé $A \rightarrow M \rightarrow N$, où le premier homomorphisme est donné par f et de deuxième par x , est injectif, donc fx définit un homomorphisme injectif $A \rightarrow K$, donc est inversible en vertu de 5.2, donc f étant inversible, il en est de même de x , cqfd.

COROLLAIRE 5.7 - Soit $M \in G$. Les sous-modules de K isomorphes à M sont les éléments de la classe $\text{Im}(K^*).M$, où $\text{Im}(K^*)$ désigne le sous-groupe de G image de K^* par l'homomorphisme canonique $K^* \rightarrow G$.

Par suite :

COROLLAIRE 5.8 - Le monoïde quotient $G/\text{Im}(K^*)$ s'identifie à l'ensemble des classes (à isomorphisme près) de A -modules M tels que $M \otimes_A K$ soit isomorphe à K et que $M \rightarrow S^{-1}M = M \otimes_A K$ soit injectif, la loi de composition dans ce dernier ensemble étant défini par la formule

$$\text{cl}(M)\text{cl}(N) = \text{cl}(M \otimes_A N)$$

[N.B. - Si Bourbaki ne se sent pas tenu par d'éventuelles définitions antérieures inopportunes, il pourrait saisir l'occasion pour donner une définition en forme : un module M sur un anneau commutatif A (non nécessairement intègre) est dit sans torsion si $M \rightarrow S^{-1}M$ est injectif, i.e. si tout élément régulier de A est non diviseur de 0 dans M .]

Remarque 5.9 - Lorsque K est un corps i.e. A intègre, les modules M dont il est question dans 5.8 sont exactement les A -modules sans torsion de rang 1. (Il ne semble pas qu'il vaille la peine de s'évertuer à élargir la notion de rang de telle façon que l'énoncé soit encore vrai sans supposer A intègre).

6. Idéaux inversibles.

PROPOSITION 6.1 - Soit M un sous-module non dégénéré de K . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) Il existe un sous-module N de K tel que $M.N = A$.
- (ii) M définit un élément inversible du monoïde G des sous-modules inversibles non dégénérés de K .
- (iii) M est un A -module projectif.
- (iv) M est un A -module inversible.
- (v) M est un A -module de type fini, et pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A , $M_{\mathfrak{m}}$ est un $A_{\mathfrak{m}}$ -module monogène.

Sous ces conditions, il existe un seul sous-module N de K tel que $M.N = A$, c'est l'inverse de M dans G , égal à $(A:M)$ et canoniquement isomorphe à $\text{Hom}_A(M, A)$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) si on note qu'il résulte de la relation $M.N = A$ que le sous- K -module de K engendré par N est K , donc que N est non dégénéré. Cela prouve en même temps que N est uniquement déterminé comme l'inverse de M dans G . Posons de plus $M' = (A:M)$, on a donc $N \subset M'$ d'où $M.N = A \subset M.M' \subset A$, d'où $M.M' = A$, d'où $N = M'$ par le résultat d'unicité précédent ; enfin on a un

isomorphisme canonique $M' \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_A(M, A)$ en vertu de 5.5, ce qui prouve la dernière partie de la proposition. D'ailleurs en vertu de 5.5, on a pour tout sous-module P de K un isomorphisme $(P:M) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_A(M, P) \subset M' \cdot P$, d'où en faisant $P = M$ une inclusion

$$(M:M) = \text{Hom}_A(M, M) \subset M \cdot M' = A$$

ce qui prouve que l'application identique $1_M \in \text{Hom}_A(M, M)$ est contenue dans l'image canonique de $M' \otimes_A M$, donc en vertu de 2.7 il s'ensuit que M est un A -module projectif de type fini. Donc (ii) $\Rightarrow$ (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Soit S l'ensemble des éléments réguliers de A . Par définition, on est ramené à prouver que pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A , $M_{\mathfrak{p}}$ est un $A_{\mathfrak{p}}$ -module libre de rang 1. Or soit S' l'image de S dans $A_{\mathfrak{p}}$; comme $A_{\mathfrak{p}}$ est plat sur A , S' est formé d'éléments réguliers de $A_{\mathfrak{p}}$ (car les $f \in S$ sont non diviseurs de 0 dans $A_{\mathfrak{p}}$, réf), donc $S'^{-1}A_{\mathfrak{p}}$ n'est pas nul. Comme $S'^{-1}M$ est isomorphe à $S'^{-1}A$, il s'ensuit par localisation que $S'^{-1}M_{\mathfrak{p}}$ est isomorphe à $S'^{-1}A_{\mathfrak{p}}$ donc est libre de rang 1. Or on sait que $M_{\mathfrak{p}}$ est libre de rang n pour n convenable. On en conclut $n = 1$, ce qui prouve (iv).

(iv) $\Rightarrow$ (v) est trivial, il reste donc à prouver (v) $\Rightarrow$ (i). Soit J l'annulateur de M , comme M est de type fini il s'ensuit que pour toute partie multiplicative T de A , $T^{-1}J$ est l'annulateur de $T^{-1}A$ -module $T^{-1}M$. Or $J = 0$ puisque M est non dégénéré, donc pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A , l'annulateur du $A_{\mathfrak{m}}$ -module $M_{\mathfrak{m}}$ est nul, et comme ce module est monogène il est libre de rang 1. On conclut alors de 4.1 que M est un A -module inversible. A fortiori M est de présentation finie, donc pour toute partie multiplicative T de A , on a $T^{-1}(A:M) = (T^{-1}A : T^{-1}M)$, où dans le deuxième membre le transporteur est pris dans $T^{-1}K$. Par suite, pour prouver que $M \cdot (A:M) = A$ (ce qui impliquera (i)) il suffit de prouver que pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A , on a $M_{\mathfrak{m}} \cdot (A_{\mathfrak{m}}:M_{\mathfrak{m}}) = A_{\mathfrak{m}}$, où le transporteur est calculé dans $K_{\mathfrak{m}}$. Or comme M est non

dégénéré on a $M.K = M$ d'où en localisant $M_{\underline{m}}.K_{\underline{m}} = K_{\underline{m}}$. Soit x un générateur du $A_{\underline{m}}$ -module $M_{\underline{m}}$, on a donc $xK_{\underline{m}} = K_{\underline{m}}$ i.e. x est un élément inversible de $K_{\underline{m}}$, donc $(A_{\underline{m}} : M_{\underline{m}}) = A_{\underline{m}} x^{-1}$ et par suite $M_{\underline{m}}.(A_{\underline{m}} : M_{\underline{m}}) = (A_{\underline{m}} x).(A_{\underline{m}} x^{-1}) = A_{\underline{m}}$, cqfd.

COROLLAIRE 6.2 - Supposons que K soit un anneau semi-local. Soit M un sous-module de K . Conditions équivalentes :

(i) (ii) Comme avant

(iii) (iv) Comme avant, mais en exigeant M non dégénéré.

(v) M est un A -module de type fini, et pour tout idéal maximal $\underline{m}$ de A , $M_{\underline{m}}$ est un $A_{\underline{m}}$ -module libre de rang 1.

Il est immédiat que (i) implique que M est non dégénéré, donc (i), (ii), (iii), (iv) sont équivalents, et impliquent évidemment (v), tout revient à que prouver (v) implique également que M est non dégénéré. On sait par 4.1 que M est un A -module inversible, donc $M \otimes_A K$ est un K -module inversible, et comme K est semi-local, il s'ensuit que c'est un K -module libre de rang 1 en vertu de 3.7. On achève grâce au

Remords 6.3 - (qui aurait dû figurer dans l'énoncé de 5.3) Pour que le sous-module M de K soit non dégénéré, il faut et il suffit que $M \otimes_A K$ soit un K -module libre de rang 1.

En effet, il n'y a qu'à prouver la suffisance, or soit x une base de $M \otimes_A K$ sur K ; considéré comme élément de K il est régulier, donc un élément inversible par 5.2, donc M engendre l'idéal unité dans K .

Remarque 6.4 - On peut construire des exemples (K n'étant pas semi-local) d'un idéal M de A qui est un A -module inversible, mais un sous-module dégénéré de K (cf. exercice).

DEFINITION 6.5 - Soit A un anneau commutatif, K son anneau total des fractions. On appelle idéal fractionnaire inversible de A tout sous- A -module M de K tel qu'il existe un sous-module N de K tel que $M.N = A$, i.e. un sous-module M non

dégénéré de K satisfaisant aux conditions équivalentes de 6.1.

On notera qu'un idéal fractionnaire inversible de A n'est pas nécessairement un idéal de A (puisque'il n'est pas nécessairement contenu dans A), et qu'un idéal M de A peut fort bien être un A -module inversible, sans être un idéal fractionnaire inversible (cf. 6.4), lorsque K n'est pas semi-local.

Il résulte aussitôt de la définition :

PROPOSITION 6.6 - L'ensemble des idéaux fractionnaires inversibles de A est l'ensemble G^* des éléments inversibles du monoïde G des sous-modules non dégénérés de K , et est par suite muni d'une structure de groupe.

Ce groupe contient évidemment l'image canonique de K^* , formant un sous-groupe isomorphe à K^*/A^* . Les éléments de ce sous-groupe, i.e. les sous-modules de K de la forme $A.x$, avec $x \in K^*$, sont appelés les idéaux fractionnaires inversibles principaux, ou simplement (par abus de langage) idéaux inversibles principaux.

DEFINITION 6.7 - Une classe du groupe G^* des idéaux fractionnaires inversibles de A modulo le sous-groupe des idéaux inversibles principaux s'appelle une classe d'idéaux de A , et le groupe quotient $G^*/\text{Im}(K^*)$ s'appelle le groupe des classes d'idéaux de A .

[N.B. - Il n'est pas absolument certain s'il y a lieu de conserver cette terminologie, car a) il y a des gens qui étudient des classes d'idéaux non inversibles, et b) pour des relations d'équivalence distinctes de celle introduite ici. Bourbaki jugera.]

Désignons par P le groupe des classes d'idéaux de A , on a donc une mirifique suite exacte :

$$0 \rightarrow A^* \rightarrow K^* \rightarrow G^* \rightarrow P \rightarrow 0$$

PROPOSITION 6.8 - Avec les notations précédentes, l'application $M \rightarrow \text{cl}(M)$ définit par passage au quotient une application injective du groupe P des classes d'idéaux de A dans le groupe de Picard $\text{Pic}(A)$, dont l'image est l'en-

semble des classes de A-modules inversibles M tels que $M \otimes_A K$ soit isomorphe à K.

Cela résulte aussitôt des définitions et de 5.8.

COROLLAIRE 6.9 - Supposons que K soit un anneau semi-local. Alors l'homomorphisme précédent est un isomorphisme du groupe des classes d'idéaux sur le groupe de Picard.

- Exercice 1 - a) Soient A un anneau, I un A-module. Montrer qu'il existe sur $B = A + I$ une structure d'anneau unique pour laquelle A soit un sous-anneau, et I un idéal de carré nul, dont la structure de A-module induite soit la structure donnée.
- b) Supposons que tout élément non inversible de A soit diviseur de 0 dans I. Montrer que les éléments réguliers de B sont inversibles, i.e. que B est identique à son anneau total des fractions.
- c) Soit $(\underline{m}_i)$ une famille d'idéaux maximaux de A telle que tout élément non inversible de A soit contenu dans un des $\underline{m}_i$, et soit I la somme directe des $k_i = A/\underline{m}_i$. Prouver que la condition de b) est satisfaite.
- d) Soit M un A-module. Pour que M soit libre (resp. projectif, resp. de type fini, etc) il faut et il suffit que le B-module $M \otimes_A B$ le soit. Conclure de ceci et de c) que s'il existe un module inversible non libre sur A, alors on peut construire B de telle façon que B soit identique à son anneau total des fractions et admette un module inversible non libre. (A fortiori, l'application canonique du groupe des classes d'idéaux de B dans son groupe de Picard n'est pas surjective).
- e) Utilisant c), construire un anneau B identique à son anneau total des fractions, mais dont un localisé $B_{\underline{m}}$ convenable soit un anneau local intègre qui n'est pas un corps - donc distinct de son anneau total des fractions. (Partir d'un anneau A et d'un idéal maximal $\underline{m}$ de A tel que pour tout $x \in \underline{m}$, il existe au moins un idéal maximal $\underline{m}'$ de A distinct de $\underline{m}$ contenant x. Prendre alors pour I la somme directe des $A/\underline{m}$, avec $\underline{m}' \neq \underline{m}$).
- f) Dans la construction précédente, supposons que $\underline{m}A_{\underline{m}}$ soit un idéal principal et $A_{\underline{m}}$ intègre. Montrer qu'on peut alors dans d) prendre pour B-module contrariant l'idéal $\underline{m} \otimes_A B = \underline{m}B$ de B. * On peut construire des

anneaux de Dedekind A dans lequel il existe un idéal maximal $\underline{m}$ dont aucune puissance n'est un idéal principal, et qui satisfait donc aux hypothèses envisagées ici. $\times$

Exercice 2 - Si possible un exemple d'un anneau de Dedekind non principal, pour montrer que le groupe des classes d'idéaux n'est pas toujours nul !

PROPOSITION 6.10 - Soit M un idéal fractionnaire inversible de A , et soit N un sous-module quelconque de K .

a) L'homomorphisme canonique

$$M \otimes_A N \rightarrow M.N$$

est un isomorphisme.

b) $M' = (A:M)$ est inversible, et on a

$$M'.N = (N:M) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_A(M, N)$$

Soit $\underline{m}$ un idéal maximal de A , et x un élément base de $M_{\underline{m}}$; alors l'application $y \rightarrow x \otimes y$ est un isomorphisme de $N_{\underline{m}}$ sur $M_{\underline{m}} \otimes_A N_{\underline{m}} = (M \otimes_A N)_{\underline{m}}$, dont le composé avec l'homomorphisme canonique de ce dernier dans $(M.N)_{\underline{m}} = M_{\underline{m}}.N_{\underline{m}}$ est induite par l'application $y \rightarrow xy$ de $K_{\underline{m}}$ dans $K_{\underline{m}}$. Or $K_{\underline{m}}$ est contenu dans l'anneau total des fractions de $A_{\underline{m}}$ et l'application $y \rightarrow xy$ de $A_{\underline{m}}$ dans $K_{\underline{m}}$ est injective, d'où il résulte en vertu de 5.2 que x est un élément régulier de $K_{\underline{m}}$, à fortiori l'application $M_{\underline{m}} \otimes_A N_{\underline{m}} \rightarrow M_{\underline{m}}.N_{\underline{m}}$ est injective. Comme ceci est vrai pour tout $\underline{m}$, il en résulte que l'application $M \otimes_A N \rightarrow M.N$ est injective donc bijective, ce qui prouve a). [N.B. on ne s'est servi que du fait que M est un A -module inversible.]

On sait déjà que M' est inversible, puisque $M.M' = A$ par 6.1. Evidemment $M'.N \subset (N:M)$, d'autre part de $M.(N:M) \subset N$ on tire $M'.M.(N:M) \subset M'.N$ d'où $(N:M) \subset M'.N$ puisque $M'.M = A$, d'où b).

COROLLAIRE 6.11 - Soient M, N des idéaux fractionnaires inversibles de A , alors $M.N$ et $(M:N)$ sont des idéaux fractionnaires inversibles, et sont iso-

morphes respectivement à $M \otimes_A N$ et $\text{Hom}_A(M, N)$.

7. Ensembles polaires et ensembles divisoriels.

DEFINITION 7.1 - Soit M un A -module, et soit x un élément de $S^{-1}M = M \otimes_A K$, (où S est l'ensemble des éléments réguliers de A , et $K = S^{-1}A$). On définit alors trois parties de $X = \text{Spec}(A)$:

a) L'ensemble $P(x)$ des $p \in X$ tels que l'image x_p de x dans $M_p \otimes_A K_p = (M \otimes_A K)_p$ ne soit pas dans le sous-module M_p est appelé l'ensemble polaire de x .

b) L'ensemble $Z(x)$ des $p \in X$ tels que $x_p \in pM_p$ i.e. tels que l'image $x(p)$ de x dans $M \otimes_A K(p)$ ($K(p) = A_p/pA_p$) existe (i.e. $p \notin P(x)$) et soit nulle, est appelé l'ensemble des zéros de x .

c) L'ensemble $D(x) = Z(x) \cup P(x)$ s'appelle l'ensemble divisoriel de x .

[J'ai oublié de préciser qu'on suppose que M soit "sans torsion" i.e. que l'homomorphisme $M \rightarrow M \otimes_A K$ soit injectif ; sinon, il faut dans a) et b) remplacer M_p et pM_p par leurs images dans $(M \otimes_A K)_p$, ce qui semble plus raisonnable.]

Il résulte aussitôt de la définition que $D(x)$ est réunion disjointe de $P(x)$ et $Z(x)$, que l'on a

$$P(x + y) \subset P(x) \cup P(y) \quad P(fx) \subset P(f) \cup P(x)$$

où dans la deuxième formule, f est un élément de K et où l'ensemble polaire de f est pris relativement au module de départ A . En particulier $P(x) = P(-x)$. On a plus généralement la formule

$$P(x.x') \subset P(x) \cup P(x')$$

$$Z(x.x') \subset Z(x) \cup Z(x')$$

d'où

$$D(x.x') \subset D(x) \cup D(x')$$

chaque fois qu'on a un accouplement de A -modules $M \times M' \rightarrow N$, et $x \in M \otimes_A K$,

$x' \in M' \otimes_A K$. En particulier, on a aussi

$$Z(fx) \subset Z(f) \cup Z(x)$$

$$D(fx) \subset D(f) \cup D(x)$$

Pour que l'ensemble polaire $P(x)$ soit vide, il faut et il suffit que x appartienne à $\text{Im}(M \rightarrow M \otimes_A K)$.

PROPOSITION 7.2 - Supposons M de type fini. Alors l'ensemble polaire d'un $x \in M \otimes_A K$ est fermé. Si M est de plus projectif, l'ensemble divisoriel $D(x)$ est également fermé, et $X - D(x)$ est l'ensemble des $p \in X$ tels que l'élément x_p fasse partie d'une base du module M_p sur A_p , i.e. tels qu'il existe un $f \in A_p$ tel que x définisse un isomorphisme de A_f sur un facteur direct du A_f -module M_f .

Comme $P(x)$ est le support de $(\text{Im } M + A.x)/\text{Im}(M)$, la première assertion est un cas particulier de ... La caractérisation donnée de $X - D(x)$ résulte de par.3, prop.7 (un peu sec). Il en résulte aussitôt que $D(x)$ est fermé comme complémentaire d'un ensemble ouvert.

COROLLAIRE 7.3 - Supposons M projectif de type fini. Alors l'ensemble $Z(x)$ des zéros de x est une partie localement fermée de $X = \text{Spec}(A)$. Elle est fermée si $x \in M$.

COROLLAIRE 7.4 - Supposons M inversible. Alors $X - D(x)$ est l'ensemble des $p \in X$ tels que x_p définisse un isomorphisme de A_p sur M_p , ou encore tels qu'il existe un $f \in A_p$ tel que x définisse une base de M_f sur A_f .

PROPOSITION 7.5. - Soit M un sous-module type fini de K . Alors l'ensemble^U des $p \in \text{Spec}(A)$ tels que $M_p \neq A_p$ est ouvert. Si M est non dégénéré, il existe un $f \in S$ tel que $M_f = A_f$; à fortiori, l'ouvert précédent contient l'ensemble $X_f = X - V(f)$, et est dense dans X .

L'ensemble U considéré n'est autre que le support de $(M + A.x)/A$, donc fermé puisque ce module est de type fini. Si M est non dégénéré il existe un

$f \in M \cap S$; d'autre part, M étant de type fini, il existe un $g \in S$ tel que $gh \in A$, soit $h = gf$; on voit aussitôt que $M_h = A_h$, avec $h \in S$. Il reste à prouver le

COROLLAIRE 7.6 - Soit $f \in S$, alors $X_f = X - Z(f)$ est dense dans $X = \text{Spec}(A)$.

Soit en effet $\underline{a}$ un idéal de A tel que $V(\underline{a})$ contienne X_f , i.e. tel que tout idéal premier $\underline{p}$ de A ne contenant pas f contienne $\underline{a}$; alors $\underline{a}$ est contenu dans le nilradical de A_f , dans (comme A est contenu dans A_f) formé d'éléments nilpotents, i.e. $Z(\underline{a}) = X$, d'où la conclusion.

DEFINITION 7.7 - Soit M un sous-module de K . L'ensemble des $\underline{p} \in \text{Spec}(A)$ tels que $M_{\underline{p}} \neq A_{\underline{p}}$ s'appelle le cosupport de M .

C'est donc une partie fermée de X si M est de type fini, dont le complémentaire est dense si de plus M est non dégénéré.

PROPOSITION 7.8 - Soit M un sous-module inversible de K , φ l'isomorphisme canonique $M \otimes_A K \rightarrow K$, et $x = \varphi^{-1}(1_K)$. Alors le cosupport de M est égal à l'ensemble divisoriel de x .

Cela résulte aussitôt de 7.4 et des définitions.

Remarques 7.9 - a) Soient L un A -module inversible, et x une base de $L \otimes_A K$ sur K . Soit $\psi : K \rightarrow L \otimes_A K$ l'isomorphisme défini par x , et $i : L \rightarrow L \otimes_A K$ l'homomorphisme canonique (évidemment injectif, puisque L est plat sur A). Alors $u = \psi^{-1}i$ est un isomorphisme (bien déterminé par L "muni de x ") de L sur un sous-module M de K , évidemment non dégénéré, et qui est par suite un idéal fractionnaire inversible de A . Soit L' un deuxième A -module inversible muni d'une base x' de $L' \otimes_A K$ sur K , $u' : L' \rightarrow M'$ l'isomorphisme correspondant de L' sur un idéal fractionnaire inversible de A . Alors $\text{Hom}_A(L, L')$ est canoniquement isomorphe à $(M' : M)$.

b) Inversement, partons d'un idéal fractionnaire inversible M de A , soit

φ l'isomorphisme canonique de $M \otimes_A K$ sur K et soit $x = \varphi^{-1}(1_K)$. L'idéal inversible associé dans a) à (M, x) n'est autre que M lui-même.

* On peut donc dire que la catégorie $\underline{C}$ des couples (L, x) , où L est un A -module inversible et x une base de $L \otimes_A K$ sur K , et où on définit $\text{Hom}_{\underline{C}}((L, x), (L', x'))$ comme étant $\text{Hom}_A(L, L')$ (la composition des morphismes dans $\underline{C}$ étant la composition habituelle des homomorphismes de modules) est équivalente à la catégorie $\underline{C}'$ des idéaux fractionnaires inversibles M de A , où on définit $\text{Hom}_{\underline{C}'}(M, M')$ comme étant $(M' : M)$, la composition des homomorphismes étant définie par la multiplication d'éléments de K . Dans cette équivalence, le produit d'idéaux inversibles s'interprète en termes de produit tensoriel de modules inversibles L, L' , muni de l'élément $x \otimes x'$ de $(L \otimes L') \otimes_A K = (L \otimes_A K) \otimes_K (L' \otimes_A K)$. La proposition 7.8 donne une interprétation du cosupport d'un idéal fractionnaire inversible en termes d'ensemble divisoriel du couple (L, x) correspondant. De même, l'ensemble polaire $P(x)$ est l'ensemble des $p \in \text{Spec}(A)$ tels que M_p soit non contenu dans A_p ; il est donc vide si et seulement si $M \subset A$, i.e. si et seulement si M est un idéal entier de A . *

8. Changement d'anneau.

Si A est un anneau (commutatif), nous dénoterons par S_A l'ensemble de ses éléments réguliers, par K_A son anneau total des fractions, par G_A le monoïde des sous-modules non dégénérés de K_A .

PROPOSITION 8.1 - Soit $u : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. Désignons par K_u l'ensemble des $x \in K_A$ tels qu'il existe un $f \in A$, avec $fx \in A$ et $u(f) \in S_B$. Alors K_u est un sous-anneau de K_A contenant A . Il existe un unique homomorphisme de A -modules

$$\bar{u} : K_u \rightarrow K_B$$

prolongeant u , et cet homomorphisme est un homomorphisme d'anneaux.

- 27 -

n°346

Il est trivial que $K_u \supset A$; soient d'autre part $x, y \in K_u$, et soient $f, g \in A$ tels que $fx, gy \in A$, $u(f), u(g) \in S_B$, alors on a

$$(fg)(xy) = (fx)(gy) \in A, \quad fg(x+y) = g(fx) + f(gy) \in A$$

et d'autre part $u(fg) = u(f)u(g) \in S_B$, ce qui prouve que $x+y$ et xy sont dans K_u . Donc K_u est un sous-anneau de K_A . Soit $\bar{u} : K_u \rightarrow K_B$ un homomorphisme de A -modules prolongeant u ; soit $x \in K_u$, et soit $f \in A$ tel que $fx \in A$, $u(f) \in S_B$. On a donc $\bar{u}(fx) = \bar{u}(f)\bar{u}(x) = u(f)\bar{u}(x)$ d'où $\bar{u}(x) = u(fx)/u(f)$, ce qui prouve l'unicité de $\bar{u}$. Prouvons l'existence. Soit f' un deuxième élément de A tel que $f'x \in A$, $u(f') \in S_B$, on a alors

$$u(fx)/u(f) = u(f'x)/u(f')$$

car cette relation est équivalente à la relation $u(f')u(fx) = u(f)u(f'x)$, qui est vraie car les deux membres sont identiques à $u(ff'x)$. On définit ainsi une application bien déterminée $\bar{u}$ de K_u dans K_B par $\bar{u}(x) = u(fx)/u(f)$ qui prolonge évidemment u . On vérifie facilement que cette application est un homomorphisme d'anneaux, à fortiori elle est A -linéaire. Cela prouve la proposition.

Soit maintenant M un sous-module de K_A . Si M est contenu dans K_u , alors on peut poser

$$u'(M) = B.\bar{u}(M)$$

qui est un sous-module de K_B . On aura évidemment, avec cette notation :

$$u'(M+N) = u'(M) + u'(N), \quad u'(M.N) = u'(M).u'(N)$$

D'ailleurs si $M \subset A$, on aura aussi

$$u'(M) = B.u(M)$$

i.e. $u'(M)$ est l'idéal de B engendré par $u(M)$. On fera attention que si M est un sous-module non dégénéré de K_A contenu dans K_u , on ne peut affirmer en général que $u'(M)$ soit un sous-module non dégénéré de K_B . Par exemple si $x \in S_A$, $M = A.x$, il se peut que $u(x)$ soit diviseur de 0 dans B donc que

$u'(A.x)$ soit un sous-module dégénéré de K_B .

Si M est un sous-module de K_u , $\bar{u}$ induit un homomorphisme A -linéaire $M \rightarrow u'(M)$, d'où un homomorphisme canonique surjectif

$$M \otimes_A B \rightarrow u'(M)$$

COROLLAIRE 8.2 - Supposons que M soit un idéal fractionnaire inversible de A contenu dans K_u . Pour que le sous-module $u'(M)$ de K_B soit un B -module inversible, il faut et il suffit que l'homomorphisme canonique précédent soit injectif (donc un isomorphisme) ; pour que $u'(M)$ soit un idéal fractionnaire inversible de B , il faut et il suffit que ce soit un sous-module non dégénéré de K_B .

Comme $M \otimes_A B$ est un B -module inversible, la première assertion résulte du fait qu'un homomorphisme surjectif de modules projectifs de type fini est un isomorphisme (comme on voit en localisant, ce qui ramène au cas de modules libres de type fini où cela a été vu). La deuxième assertion résulte du critère 6.1 (v). [N.B. de l'éditeur : cette démonstration semble surprenante].

COROLLAIRE 8.3 - Supposons $u(S_A) \subset S_B$ (i.e. que B soit un A -module sans torsion, si on a introduit cette notion). Alors il existe un unique homomorphisme de A -modules $\bar{u} : K_A \rightarrow K_B$ prolongeant u , et c'est un homomorphisme d'anneaux. Pour tout sous-module non dégénéré M de K_A , $u'(M) = \bar{u}u(M)$ est un sous-module non dégénéré de K_B , et on obtient ainsi un homomorphisme u' du monoïde G_A^* dans le monoïde G_B^* , induisant par suite un homomorphisme du groupe G_A^* des idéaux fractionnaires inversibles de A dans le groupe G_B^* des idéaux fractionnaires inversibles de B .

N.B. On rencontre en théorie des schémas, notamment à l'occasion des changements de base, des cas importants où on n'est pas sous les conditions triviales de 8.3. Il est vrai qu'il y a intérêt d'étudier alors la situation directement sans passer par le cas affine, et que même dans le

- 29 -

sur K n° 346

cas affine (si on ne fait pas d'hypothèse noethérienne) le formalisme qu'on obtient est plus général que celui développé ici, du fait qu'on peut fausseautiser d'emblée. Néanmoins, le cas des anneaux noethériens ou intègres me semble suffisant pour justifier ce petit numéro, qui a le mérite par surcroît de ne pas cacher au lecteur que l'image inverse d'un diviseur n'est pas toujours définie ...

-:-:-