Archives Grothendieck . Juin 57

VARIETES DIFFERENTIABLES

CHAPITRE I

LE FORMALISME DIFFERENTIEL

(ETAT 0)

n° 270

---

§ 1 - Dérivations et formes différentielles ..... P. 6

1. Module $\Omega^1_k(A)$
2. L'algèbre différentielle $\Omega_k(A)$.
3. L'algèbre de Lie $\mathcal{G}_k(A)$.
4. L'algèbre différentielle $\Omega_k(A)$ comme foncteur de A.

§ 2 - θ-Structures et connexions ..... P. 18

1. θ-algèbres de Lie sur A. Dérivations d'un A-module.
2. $\mathcal{G}$-dérivations.
3. Invariants infinitésimaux.
4. Prolongements canoniques de $\mathcal{G}$-dérivations.
5. Différentielle extérieure définie par une $\mathcal{G}$-connexion.
6. Forme courbure d'une connexion. Identité de Bianchi.
7. Différentiations absolues.
8. Différentiation absolue définie par une métrique.

§ 3 - Opérateurs différentiels ..... P. 58

1. Définition des opérateurs différentiels.
2. L'algèbre $P^{(k)}(A)$ et le module $P^{(k)}(M)$.
3. Deuxième caractérisation universelle de $P^{(k)}(A)$.
4. Définition des $P^{\infty}(M)$, $GP^{\infty}(M)$.
5. Structure de $P^{(1)}(A)$ et $P^{(1)}(M)$.

6. Du Faux, du Foncteur.

7. Prolongement canonique des dérivations aux $P^{(k)}(M)$.

8. Prolongements des fibrés infinitésimaux. Le fibré $\mathcal{V}^{(k)}(A)$.

9. Structure de certaines algèbres augmentées.

10. Premiers cas-types où $P^{\infty}(A)$ est une A-algèbre augmentée régulière.

11. Passage aux anneaux de fractions, extension des scalaires.

12. Etude différentielle des localités et des algèbres affines.

13. Dual d'un opérateur différentiel.

14. Primitives d'opérateurs différentiels.

§ 4 - Espaces différentiés..... p. 134

1. Espace muni d'un faisceau d'algèbres.

2. Espaces différentiés : définition et exemples.

3. Où il faut (en principe) tout réexpliquer.

4. Espaces différentiés non singuliers.

5. Espace tangent et espace cotangent.

6. Morphismes d'espaces différentiés, application tangente.

7. Enfin une petite classe de cohomologie.

Commentaires.

La présente rédaction est censée contenir l'essentiel du formalisme algébrique différentiel sur les variétés, à l'exclusion de ce qui se rapporte aux groupes de Lie, ou à la géométrie riemannienne ou kählérienne. Elle se placerait indifféremment avant ou après le dépotoir différentiable. Comparée au "Chapitre 0", où il était question de varictés mais jamais de calcul différentiel, le présent Chapitre I se distingue en ce qu'il n'y est jamais question de variétés. Les Chapitres 0 et I sont donc des préliminaires, qu'on espère nécessaires et suffisants, pour un Chapitre 2 de synthèse, ("Variétés différentiées"), et dont le but très exact serait de dérouler les rouleaux communs aux variétés différentiables, algèbriques, analytiques, etc. Le rédacteur a conscience que c'était précisément un Chapitre de cette nature, et aussi court que possible, qu'il avait pour mission de rédiger. Nous assistons ici, au regrettable phénomène d'enlisement dans les sables fonctoriels, qui sera sans doute le cauchemar quotidien de notre Maitre pour les années à venir.

Le point faible de la rédaction est le par.4. Alors que la faisceautisation des résultats des paragraphes précédents n'est visiblement qu'une question de traduction triviale, il n'a pas été possible, malgré l'escamotage le plus brutal, de la réduire à moins de 20 pages. On espère qu'un prochain rédacteur escamotera avec plus d'élégance.

Le rédacteur n'a pas tenté de mettre au point un formalisme exhaustif qui engloberait les "Pierres". Il a l'intention de faire à ce sujet une rédaction dans le même esprit que le présent rapport. Il pourra le faire d'autant mieux si un rédacteur bénévole veut bien le décharger du Chapitre 2.

Liste des notions algébriques utilisées dans la présente rédaction, et ne figurant pas dans des tomes publiés de Bourbaki :

Notion de dérivation d'un anneau dans un module (cas gradué ou non), crochet de dérivations en est une, notion d'algèbre de Lie. Algèbre différentielle graduée, produit tensoriel gauche de telles algèbres. Notion de machin filtré et de gradué associé à un tel machin. Rabiots d'algèbre linéaire : algèbre symétrique d'un module, caractérisations universelles des algèbres extérieures et symétriques, structures multiplicatives dans les $C^p(M,N)$ (applications multilinéaires alternées en p arguments de M^p dans N), les opérations i_X dans les $C(M,N)$. Notion d'algèbre et d'anneau augmenté, anneau local. Enfin, dans par.3, n°12 (qui sera certainement reporté à un autre endroit) on se sert de la notion de dimension d'une localité, et de la notion d'anneau local régulier. A l'exception de ce dernier point, on ne se sert que des faits soritofonctoriels relatifs aux notions citées. A la rigueur, on pourrait les résumer (ainsi que les autres rabiots dont on aurait besoin dans les Chapitres suivants) dans un petit paragraphe

préliminaire d'une vingtaine de pages. (Si on fait les Pierres, on aura certainement besoin aussi de pas mal de sorites sur les hyperalgèbres).

VARIETES DIFFERENTIABLES

CHAPITRE I

LE FORMALISME DIFFERENTIEL

(ETAT 0)

---

§ 1 - Dérivations et formes différentielles.

Dans tout ce Chapitre, les anneaux ont une unité et les homomorphismes d'anneaux appliquent unité dans unité, les modules sont unitaires. Dans les paragraphes 1,2,3 on désigne par k un anneau commutatif, par A une algèbre commutative sur k. Si M et N sont deux A-modules, nous distinguerons toujours soigneusement, dans la terminologie, entre applications A-linéaires et applications k-linéaires de M dans N.

1. Le module $\Omega^1_{A/k}(A)$.

Rappelons (...) la

DEFINITION 1 - Soit M un module sur la k-algèbre A. On appelle k-dérivation (ou simplement dérivation si aucune confusion n'est à craindre) de A dans M toute application k-linéaire D de A dans M, telle que l'on ait

(1) $\quad D(fg) = fD(g) + gD(f) \qquad (f,g \in A)$

Bien entendu, les dérivations de A dans M forment un module sur A. Si D est une dérivation de A dans M, u une application A-linéaire de M dans un A-module N, alors uD est une dérivation de A dans N. Ceci amène à se poser un problème d'applications universelles, résolu par la

PROPOSITION 1 - Soit A une algèbre commutative sur l'anneau k. On peut trouver un A-module P, et une k-dérivation d de A dans P, tels que pour tout A-module M, l'application $u \longrightarrow u \circ d$ soit un isomorphisme de $L_A(P,M)$ sur le A-module des k-dérivations de A dans M. Le couple (P,d) est unique à isomorphismes près, et on peut prendre pour P le quotient de $A \otimes_k A$, considéré comme A-module par $f(g \otimes h) = (fg) \otimes h$, par le sous-A-module engendré par les éléments de la forme $1 \otimes fg - f \otimes g - g \otimes f$, et pour d l'application composée de $f \longrightarrow 1 \otimes f$ et de l'application canonique de $A \otimes_k A$ sur son quotient P.

L'assertion d'unicité résulte de Ens.Chap.IV. Reste à voir que le couple (P,d) indiqué dans l'énoncé a les conditions voulues. On a bien $d(fg) - fdg - gdf = 0$ pour $f,g \in A$, et d est k-linéaire, donc d est une k-dérivation, de plus d(A) engendre le A-module P, donc l'application $u \longrightarrow u \circ d$ de $L_A(P,M)$ dans le module des dérivations de A dans M est injectif, reste à voir qu'il est surjectif. Or soit D une dérivation de A dans M, considérons l'application k-linéaire de $A \otimes_k A$ dans M dont la valeur pour $f \otimes g$ est fDg (elle existe puisque fDg est k-bilinéaire en (f,g)), l'hypothèse sur D signifie qu'elle s'annule sur les éléments de la forme $1 \otimes fg - f \otimes g - g \otimes f$, comme elle est de plus A-linéaire elle définit par passage au quotient une application A-linéaire u de P dans M, et on a évidemment $D = u \circ d$.

DEFINITION 2 - Le A-module défini dans prop.1 s'appelle le module des k-différentielles (ou simplement module des diffé-

rentielles, si aucune confusion n'est à craindre) de la k-algèbre A, et est noté $\Omega^1_k(A)$ ou simplement $\Omega^1(A)$. Si $f \in A$, son image par la dérivation canonique $A \longrightarrow \Omega^1(A)$ est notée $d_k f$ ou simplement df, et appelée différentielle de f.

Ainsi d est une dérivation de A dans $\Omega^1(A)$, tout élément de $\Omega^1(A)$ est une somme d'éléments de la forme fdg ($f, g \in A$), toute dérivation de A dans un A-module M s'écrit sous la forme $u \circ d$, où u est une application A-linéaire bien déterminée de $\Omega^1(A)$ dans M.

2 - L'algèbre différentielle $\Omega_k(A)$.

DEFINITION 3 - Soit A une algèbre commutative sur k. On appelle algèbre des formes différentielles de A, et on note $\Omega_k(A)$ (ou simplement $\Omega(A)$ si aucune confusion n'est à craindre) l'algèbre extérieure du A-module $\Omega^1_k(A)$. Ses éléments s'appellent formes différentielles de A, ses éléments homogènes de degré p s'appellent p-formes différentielles de A, le module $\bigwedge^p_A \Omega^1_k(A)$ des p-formes différentielles de A se désigne par $\Omega^p_k(A)$.

On a donc $\Omega(A) = \sum_{p=0}^{\infty} \Omega^p(A)$, $\Omega^0(A) = A$

PROPOSITION 2 - Considérons l'algèbre extérieure $\bigwedge_k A$ du k-module A, et le produit tensoriel de k-algèbres $P = A \otimes_k \bigwedge_k A$, considéré comme algèbre sur A grâce au premier facteur. Soit J l'idéal de P engendré par les éléments de la forme $1 \otimes fg - f \otimes g - g \otimes f$ ($f, g \in A = \bigwedge^1_k A$). Alors il existe un homomorphisme de A-algèbres unique u de P dans $\Omega(A)$, appliquant $1 \otimes f$ ($f \in A = \bigwedge^1_k A$) dans df, et cet homomorphisme

définit un isomorphisme d'algèbres graduées de P/J et $\Omega(A)$.

L'unicité de u est évidente. Pour l'existence, on note que $f \to df$ est une application k-linéaire de A dans une k-algèbre, $\Omega(A)$ telle que tout élément de l'image soit de carré nul, elle se prolonge donc (...) en un homomorphisme de k-algèbres $\bigwedge_k A \longrightarrow \Omega(A)$. Comme l'injection de A dans $\Omega(A)$ est un homomorphisme de k-algèbres, et que l'image de A par cet homomorphisme commute à l'image de $\bigwedge_k A$, ces deux homomorphismes définissent un homomorphisme de $A \otimes_k \bigwedge_k A$ dans $\Omega(A)$, qui est manifestement un homomorphisme de A-algèbres, compatible avec les graduations. Comme il s'annule sur les éléments du type $1 \otimes fg - f \otimes g - g \otimes f$ en vertu de $d(fg) - fdg - gdf = 0$, il s'annule sur J. D'ailleurs J est un idéal homogène (engendré par des éléments de degré 1), donc P/J une algèbre graduée sur A, et on obtient ainsi un homomorphisme de A-algèbres graduées $P/J \longrightarrow \Omega(A)$, montrons qu'il est bijectif. Il est évident qu'il est bijectif en degrés 0 et 1. De plus, les éléments de degré 1 de P donc de P/J sont de carré nul, donc (...) l'application naturelle de $\Omega^1(A)$ dans $(P/J)^1$ se prolonge en un homomorphisme v de A-algèbres de l'algèbre extérieure $\Omega(A)$ de $\Omega^1(A)$ dans P/J. On vérifie aussitôt que vu et uv sont l'identité (il suffit de le vérifier sur les générateurs de P/J images des $1 \otimes f$, et sur les générateurs de $\Omega(A)$ de la forme df, pour lesquels c'est immédiat), ce qui achève la démonstration.

THEOREME 1 - Il existe sur l'anneau gradué $\Omega(A)$ une antidérivation et une seule de degré + 1, de carré nul, se ré-

duisant à $f \to df$ sur $A = \Omega^0(A)$. On a (si d désigne l'antidérivation en question) :

(2) $d(gdf_1 \wedge df_2 \wedge \dots \wedge df_p) = dg \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_p \quad (g, f_i \in A)$

Cette dernière formule résulte du fait que d est une antidérivation et, que $ddf_i = 0$. Comme tout élément de $\Omega^p(A)$ est une somme d'éléments de la forme $gdf_1 \wedge \dots \wedge df_p$, l'unicité de d est immédiate. Pour prouver l'existence, on note que le deuxième membre de (2) est un élément de $\Omega^{p+1}(A)$ qui dépend de façon (p+1) fois k-linéaire des arguments $g, f_1, \dots, f_p$ qui y interviennent et est alterné en les f_i, il définit donc une application k-linéaire de $A \otimes_k \wedge^p_k A$ dans $\Omega^{p+1}(A)$. Faisant varier p, on obtient une application k-linéaire D de $P = A \otimes_k \wedge_k A$ dans $\Omega(A)$, de degré + 1. Considérons $\Omega(A)$ comme un P-module à gauche et à droite (grâce à l'homomorphisme envisagé dans prop.2), on vérifie alors aussitôt que l'on a

(2 bis) $D(F^i G^j) = D(F^i) G^j + (-1)^i F^i . D(G^j) \quad (F^i \in P^i, \ G^j \in P^j)$

Il en résulte que l'ensemble des éléments de P dont l'image par l'homomorphisme u de prop.2 et par D est nul, est un idéal homogène de P. Or cet idéal contient les éléments de la forme $1 \otimes fg - f \otimes g - g \otimes f$ $(f, g \in A = \wedge^1_k A)$, donc l'idéal J qu'ils engendrent, donc D passe au quotient en une application d de degré 1 de $\Omega(A)$ en lui-même satisfaisant par construction la formule (2). De (2 bis) résulte que d est une antidérivation, on voit aussitôt sur (2) que $dd = 0$. Cela achève la démonstration.

DEFINITION 4 - L'opérateur introduit dans la proposition 3

s'appelle la différentielle extérieure dans $\Omega(A)$; si F est une forme différentielle de A, dF s'appelle sa dérivée extérieure.

Muni de la différentielle extérieure, $\Omega(A)$ devient une algèbre différentielle graduée, à opérateur de dérivation de degré +1, anticommutative, dont les éléments de degré 1 sont de carré nul, se réduisant à A en degré 0. $\Omega(A)$ est d'ailleurs "universelle" parmi les algèbres ayant les propriétés précédentes, de façon précise :

PROPOSITION 3 - Soit B un anneau différentiel gradué, à opérateur de dérivation de degré + 1, et dont les éléments de degré 1 sont de carré nul et les éléments de degré 0 sont dans le centre. Soit φ un homomorphisme d'anneaux de A dans B^0, alors il existe un homomorphisme d'anneaux différentiels et un seul $\overline{\varphi}$ de $\Omega(A)$ dans B qui prolonge φ ; $\overline{\varphi}$ respecte les graduations.

L'unicité résulte de ce que $A = \Omega^0(A)$ et $d(A) = \Omega^1(A)$ engendrent l'anneau $\Omega(A)$. Pour l'existence, on note que l'application φ définit sur B une structure de A-algèbre, et que l'application $f \longrightarrow d\varphi(f)$ de A dans B^1 est une k-dérivation (B étant considéré comme A-algèbre donc comme k-algèbre grâce à l'homomorphisme $\varphi : A \longrightarrow B^0$), et par suite définit une application A-linéaire $\Omega^1(A) \longrightarrow B^1$, appliquant df dans $d\varphi(f)$. Comme les éléments de B^1 sont de carré nul, on en déduit un homomorphisme de A-algèbres $\Omega(A) \longrightarrow B$, se réduisant à φ en degré 0, et donné en degré > 0 par $\overline{\varphi}(g df_1 \wedge \dots \wedge df_p) = \varphi(g) d\varphi(f_1) \dots d\varphi(f_p)$. Il est alors immédiat que $\overline{\varphi}$ est compatible avec les graduations et les opérateurs différentiels (ce dernier fait se vérifiant par exemple à

l'aide de la formule 2).

3 - L'algèbre de Lie $\mathcal{D}_k(A)$.

DEFINITION 5 - Le A-module dual du A-module $\Omega^1_k(A)$ est noté $\mathcal{D}_k(A)$ ou simplement $\mathcal{D}(A)$. Il est donc canoniquement isomorphe au module des k-dérivations de A dans lui-même ; la dérivation associée à un $X \in \mathcal{D}(A)$ sera notée θ_X.

Comme le crochet de deux dérivations est une dérivation (...), $\mathcal{D}(A)$ se trouve muni par transport de structure d'une structure d'algèbre de Lie sur k, définie par la condition que

(3) $\quad [\theta_X, \theta_Y] = \theta_{[X,Y]} \qquad (X, Y \in \mathcal{D}(A))$

Notons qu'on a évidemment

(4) $\quad \theta_{fX}(g) = (f\,\theta_X)(g) \qquad (X \in \mathcal{D}(A),\ f \in A,\ g \in A)$

Mais on fera attention qu'en général, $\mathcal{D}(A)$ n'est pas une algèbre de Lie sur A, on a en effet les formules

(5) $\quad [fX, Y] = f[X,Y] - \theta_Y(f)X \ , \ [X, fY] = f[X,Y] + \theta_X(f)Y$

dont la première résulte immédiatement de la définition du crochet et des dérivations, et la deuxième se déduit de la première par échange de X et Y.

$\mathcal{D}(A)$ étant le dual du A-module $\Omega^1(A)$, on note comme d'habitude $\langle \omega, X \rangle$ ou mieux $\langle X, \omega \rangle$ le produit scalaire d'un $\omega \in \Omega^1(A)$ et d'un $X \in \mathcal{D}(A)$. Rappelons le fait suivant d'algèbre linéaire (...) :

PROPOSITION 4 - Soit $X \in \mathcal{D}(A)$, alors il existe une anti-dérivation A-linéaire et une seule i_X de $\Omega(A)$, de degré -1, qui en degré 1 soit donné par

(6) $\quad i_X(\omega) = \langle X, \omega \rangle$

L'opération i_X dépend A-linéairement de X, et on a :

(7) $\quad i_X^2 = 0$ d'où $i_X i_Y + i_Y i_X = 0 \quad (X, Y \in \mathcal{D}(A))$

(8) $\quad \langle Y^p \,.\, i_X F^{p+1} \rangle = \langle X \wedge Y^p \,,\, F^{p+1} \rangle$

$(X \in \mathcal{D}(A),\ Y^p \in \wedge^p_A \mathcal{D}(A),\ F^{p+1} \in \wedge^{p+1}_A \Omega^1(A) = \Omega^{p+1}(A))$

Comme par définition, on a

(9) $\quad \langle X, df \rangle = i_X df = \theta_X f$

les propriétés de i_X impliquent que l'on doit avoir

(10) $\quad i_X(g df_1 \wedge \ldots \wedge df_p) = g \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \theta_X(f_i)\, df_1 \wedge \ldots \wedge \hat{df_i} \ldots \wedge df_p$

où le signe $\hat{}$ a la signification usuelle.

THEOREME 2 - Pour tout $X \in \mathcal{D}(A)$, il existe une dérivation et une seule θ_X de $\Omega(A)$, permutant à la différentielle extérieure d, et se réduisant en degré 0 à la dérivation θ_X de A définie par X. La dérivation θ_X est de degré 0, et l'application $X \longrightarrow \theta_X$ de $\mathcal{D}(A)$ dans la k-algèbre de Lie des k-dérivations de degré 0 de $\Omega(A)$ est une représentation d'algèbres de Lie, en particulier $\theta_{[X,Y]} = [\theta_X, \theta_Y]$. Enfin, on a la "formule d'homotopie"

(11) $\quad \theta_X = d i_X + i_X d \qquad (X \in \mathcal{D}(A))$

L'unicité résulte de ce qu'on devra avoir, en vertu des propriétés énoncées pour θ_X :

(12) $\quad \theta_X(g df_1 \wedge \ldots \wedge df_p) = (\theta_X g) df_1 \wedge \ldots \wedge df_p + g \sum_1^p df_1 \wedge \ldots \wedge d(\theta_X f_i) \wedge \ldots \wedge df_p$

Pour l'existence, considérons l'opérateur D_X défini par la formule (11), comme d est une antidérivation de degré + 1 et i_X une antidérivation de degré - 1, il s'ensuit (...) que D_X est bien une dérivation de degré 0. On a évidemment $dD_X = D_X d = d i_X d$ (puisque $dd = 0$),

donc D_X permute à d, enfin comme i_X est nul en degré 0, on a $D_X f = i_X df$ pour $f \in A$, i.e. $D_X f = \theta_X f$, ainsi D_X a toutes les propriétés voulues, on peut l'appeler θ_X. Evidemment θ_X dépend k-linéairement de X, prouvons enfin que $\theta_{[X,Y]} = [\theta_X, \theta_Y]$: en effet, le deuxième membre est bien une dérivation de $\Omega(A)$, permutant à d, et se réduisant à $\theta_{[X,Y]}$ en degré 0. Ceci achève la démonstration.

COROLLAIRE - On a la formule

(13) $[\theta_X, i_Y] = i_{[X,Y]}$

En effet, le premier membre est une antidérivation de degré -1 de $\Omega(A)$ (...), elle s'annule donc sur $A = \Omega^0(A)$, et est donc A-linéaire. Il reste à montrer seulement qu'elle se réduit à $\langle [X,Y], \omega \rangle$ pour ω de degré 1, et on peut se borner à une ω de la forme df. Mais on a

$$\theta_X i_Y df - i_Y \theta_X df = \theta_X \theta_Y f - i_Y d\, \theta_X f = \theta_X \theta_Y f - \theta_Y \theta_X f = \theta_{[X,Y]} f = \langle [X,Y], df \rangle$$

ce qui achève la démonstration.

REMARQUE - Bien entendu, l'inspection de (11) montre que θ_X ne dépend pas en général A-linéairement de X (la formule (4) n'est valable que si on considère θ_X comme une dérivation dans A uniquement). Nous verrons au paragraphe suivant, dans un contexte plus général, comment les opérateurs θ_X peuvent s'étendre à bien d'autres A-modules que $\Omega(A)$. Pour l'instant, bornons nous à noter qu'il convient de poser, suivant l'usage relatif aux algèbres de Lie

(14) $\theta_X Y = [X,Y]$ $(X,Y \in \mathfrak{g}(A))$

Ainsi, pour tout $X \in \mathfrak{g}(A)$, θ_X est une dérivation de la k-algèbre de Lie $\mathfrak{g}(A)$, et $X \longrightarrow \theta_X$ est une représentation de la k-algèbre de Lie $\mathfrak{g}(A)$ dans la k-algèbre de Lie des dérivations de $\mathfrak{g}(A)$ (...). De plus, la définition des opérations θ_X dans $\Omega^1(A)$ et dans son dual $\mathfrak{g}(A)$ sont "compatibles" dans le sens suivant :

(15) $\theta_X \langle Y, \omega \rangle = \langle \theta_X Y, \omega \rangle + \langle Y, \theta_X \omega \rangle$ $(X \in \mathfrak{g}(A)\ ;\ Y \in \mathfrak{g}(A)$ $\omega \in \Omega^1(A))$

Pour vérifier cette formule, on peut supposer ω de la forme gdf $(f,g \in A)$, alors le premier membre est $\theta_X(g\theta_Y f) = (\theta_X g)(\theta_Y f) +$ $+ g\theta_X\theta_Y f$, le deuxième membre est $\langle [X,Y], gdf \rangle + \langle Y, (\theta_X g)df +$ $+ g\theta_X df \rangle = g\theta_{[X,Y]} f + (\theta_X g)(\theta_Y f) + g\theta_Y\theta_X f$, et la formule à démontrer se réduit à $g\theta_{[X,Y]} f = g\theta_X\theta_Y f - g\theta_Y\theta_X f$, elle est donc vraie en vertu de la formule (3).

4 - <u>L'algèbre différentielle $\Omega_{\mathfrak{g}}(A)$ comme foncteur de A.</u>

(Ce numéro pourrait venir avant le numéro 3, car il n'est pas question ici de dérivations). Soient A une k-algèbre, A' une k'-algèbre, on appelle <u>morphisme</u> de A dans A' la donnée de homomorphismes d'anneaux $A \longrightarrow A'$ et $k \longrightarrow k'$, tels que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A' \\ \uparrow & & \uparrow \\ k & \longrightarrow & k' \end{array}$$

où les flèches verticales désignent les homomorphismes définis par les structures d'algèbre de A resp. A'. On convient de désigner par une même lettre un morphisme de A dans A', et les homomorphismes $A \longrightarrow A'$ et $k \longrightarrow k'$ qu'ils définissent. Si $k=k'$ et si on se

borne à considérer les morphismes qui correspondent à l'application identique de k sur k', on retrouve les homomorphismes de k-algèbre. Bien entendu, les morphismes d'algèbres se composent, de telle façon que les algèbres (à anneaux d'opérateurs non précisés) forment une catégorie.

PROPOSITION 5 - Soient A une k-algèbre commutative, A' une k'-algèbre commutative, u un morphisme de A dans A'. Alors il existe un homomorphisme d'anneaux différentiels et un seul $\bar{u}$ de $\Omega_k(A)$ dans $\Omega_{k'}(A')$, se réduisant à u sur $\Omega_k^0(A) = A$, et cet homomorphisme est compatible avec les graduations. Les fonctions $A \longrightarrow \Omega_k(A)$ et $u \longrightarrow \bar{u}$ définissent $\Omega_k(A)$ comme un foncteur de A, défini sur la catégorie des algèbres commutatives, à valeurs dans la catégorie des anneaux différentiels gradués.

L'homomorphisme $\bar{u}$ s'appellera le prolongement canonique de u aux algèbres de formes différentielles. Les propriétés fonctorielles de $\bar{u}$ résultent immédiatement de l'assertion d'unicité. Or, l'existence et l'unicité de $\bar{u}$ sont des cas particuliers de proposition 3.

PROPOSITION 6 - Soient A, A' deux k-algèbres commutatives, considérons les homomorphismes $\Omega(A) \longrightarrow \Omega(A \otimes_k A')$ et $\Omega(A') \longrightarrow \Omega(A \otimes_k A')$ prolongements canoniques des homomorphismes naturels $a \longrightarrow a \otimes 1$ et $a' \longrightarrow 1 \otimes a'$ de A resp. A' dans $A \otimes_k A'$. Alors il existe un homomorphisme du produit tensoriel gauche $\Omega(A) \otimes_k \Omega(A')$ des k-algèbres différentielles $\Omega(A)$ et $\Omega(A')$ (....) dans $\Omega(A \otimes_k A')$, prolongeant les homomorphismes

précédents, et c'est là un isomorphisme de $\Omega(A) \otimes_k \Omega(A')$ sur $\Omega(A \otimes_k A')$.

L'existence de l'homomorphisme en question résulte de (...), compte tenu que toutes les algèbres différentielles qui interviennent ici sont graduées anticommutatives. Pour montrer que c'est là un isomorphisme, nous considérons l'homomorphisme $\Omega(A \otimes A') \longrightarrow \Omega(A) \otimes \Omega(A')$, obtenu en appliquant la proposition 3 à l'algèbre $A \otimes A'$ et l'application identique de cette dernière dans la partie de degré 0 de $\Omega(A) \otimes \Omega(A')$. Il est alors immédiat que les deux homomorphismes construits sont inverses l'un de l'autre.

Bien entendu, le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \Omega(A \otimes A') & \longrightarrow & \Omega(A) \otimes \Omega(A') \\ \downarrow{\scriptstyle s_1} & & \downarrow{\scriptstyle s_2} \\ \Omega(A' \otimes A) & \longrightarrow & \Omega(A') \otimes \Omega(A) \end{array}$$

est commutatif, où les flèches horizontales désignent les homomorphismes canoniques de la proposition 6, où s_1 est déduite de l'homomorphisme de k-algèbres $A \otimes A' \longrightarrow A' \otimes A$ (symétrie du produit tensoriel), et s_2 est défini comme la symétrie dans un produit tensoriel gauche d'algèbres graduées, i.e.
$s_2(F^i \otimes G^j) = (-1)^{ij} G^j \otimes F^i$.

§ 2 - θ-Structures et connexions.

1 - θ-algèbres de Lie sur A. Dérivations d'un A-module.

DEFINITION 1 - Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur k, on dit que $\mathfrak{g}$ opère dans la k-algèbre A si on s'est donné une représentation $X \to \theta_X$ de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre de Lie des k-dérivations de A (ou, ce qui revient au même, dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(A)$, cf. par.1, définition 5) :

(1) $\theta_{\lambda X} = \lambda \theta_X$, $[\theta_X, \theta_Y] = \theta_{[X,Y]}$ $(\lambda \in k, X, Y \in \mathfrak{g})$

On dit que $\mathfrak{g}$ est une θ-algèbre de Lie sur A, si c'est une k-algèbre de Lie opérant sur A, et si elle est munie d'une structure de A-module, satisfaisant aux conditions exprimées dans les formules

(2) $\theta_{fX} = f\theta_X$, $[X, fY] = f[X,Y] + \theta_X(f)Y$ $(f \in A, X, Y \in \mathfrak{g})$

On appelle noyau de $\mathfrak{g}$ l'ensemble des $X \in \mathfrak{g}$ tels que $\theta_X = 0$.

La première formule (2) exprime que $X \to \theta_X$ est une application A-linéaire, ou encore que l'application correspondante $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}(A)$ est A-linéaire. Posant, suivant l'usage, $\theta_X Y = [X,Y]$ $(X, Y \in \mathfrak{g})$, la deuxième formule (2) s'écrit aussi

(2 bis) $\theta_X(fY) = \theta_X(f)Y + f\theta_X(Y)$ $(f \in A, X, Y \in \mathfrak{g})$

On fera attention qu'une θ-algèbre de Lie sur A n'est pas en général une algèbre de Lie sur A : il résulte de la deuxième formule (2) qu'elle l'est si et seulement si les $\theta_X(f)$ $(X \in \mathfrak{g}, f \in A)$ annulent le A-module $\mathfrak{g}$, par exemple si $\mathfrak{g}$ opère trivialement dans A. Mais dans tous les cas, le noyau $\mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{g}$ est une A-algèbre de Lie.

Un homomorphisme d'une θ-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur A dans une autre $\mathfrak{g}'$ est une application A-linéaire u de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}'$ qui est un homomorphisme de k-algèbres de Lie et satisfait à $\theta_{u(X)} = \theta_X$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$. Le composé de deux homomorphismes est un homomorphisme, d'où une catégorie.

Exemple 1. $\mathfrak{g}(A)$ est une θ-algèbre de Lie sur A en vertu de par.2,n°3. Si $\mathfrak{g}$ est une θ-algèbre de Lie sur A, l'application canonique $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}(A)$ est évidemment un homomorphisme de θ-algèbres de Lie sur A.

Exemple 2. Soit M un A-module. Soit $X \in \mathfrak{g}(A)$, on appelle X-dérivation de M tout endomorphisme k-linéaire D de M tel que l'on ait

$$D(fm) = f\,D(m) + \theta_X(f)m \qquad (f \in A,\ m \in M) \tag{3}$$

On constate aussitôt que la somme d'une X-dérivation et d'une Y-dérivation de M est une (X+Y)-dérivation, et que leur crochet est une $[X,Y]$-dérivation, enfin le produit d'une X-dérivation par une $g \in A$ est une gX-dérivation. Soit alors D(M) l'ensemble des couples (D,X), où $X \in \mathfrak{g}(A)$ et où D est une X-dérivation de M, D(M) est donc un sous-A-module $L_k(M,M) \times \mathfrak{g}(A)$ ($L_k(M,M)$ étant considéré comme A-module en posant $(gu)(m) = g(u(m))$, et en même temps une sous-algèbre de Lie, enfin on a une application A-linéaire naturelle, compatible avec le crochet, $(D,X) \longrightarrow X$ de D(M) dans $\mathfrak{g}(A)$. L'application correspondante de D(M) dans l'algèbre des dérivations de A, satisfait à la deuxième condition (2) :

$$[(D,X),f(D',X')] = ([D,fD'],[X,fX']) = (f[D,D'] + \theta_X(f)D' - f[X,X'] + \theta_X(f)X')$$
$$= f[(D,X),(D',X')] + \theta_X(f)(D',X')$$

Par suite, D(M) est une θ-algèbre de Lie sur A, appelée algèbre des dérivations du A-module M. Le noyau de D(M) est l'ensemble des O-dérivations de M, i.e. des endomorphismes A-linéaires de M, muni de sa structure usuelle de A-algèbre de Lie.

Exemple 3. Soient $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ deux θ-algèbres de Lie sur A. Compte tenu de la notion de homomorphisme de θ-algèbres de Lie définie ci-dessus, il s'impose d'appeler produit de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ le sous-ensemble de $\mathcal{G} \times \mathcal{G}'$ formé des couples (X,X') tels que $\theta_X = \theta_{X'}$: c'est là un sous-A-module et une sous-k-algèbre de Lie, et muni de ses structures, et de l'application $(X,X') \longrightarrow \theta_X = \theta_{X'}$, on constate aussitôt que c'est une θ-algèbre de Lie sur A. La donnée d'un homomorphisme d'une θ-algèbre de Lie $\mathcal{U}$ dans le produit de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ est équivalente à la donnée d'un homomorphisme de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{G}$ et d'un homomorphisme de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{G}'$.

Exemple 4. On appelle fibré infinitésimal sur A une θ-algèbre de Lie $\mathcal{G}$ sur A telle que l'application canonique $\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}(X)$ soit surjective. La raison de cette terminologie apparaitra plus tard. Ainsi $\mathcal{G}(A)$ est un fibré infinitésimal. Le produit (exemple 3) de deux fibrés infinitésimaux est un fibré infinitésimal.

Exemple 5. Soient M un A-module, X une k-dérivation de A,

on appelle X-dérivation affine de M une application F de M dans M qui est de la forme $F(m) = D(m) + a$, où D est une X-dérivation de M (cf. exemple précédent) et a un élément fixe de M.
Bien entendu, $a = F(0)$ et D sont bien déterminés par la donnée de F. Définissons le "crochet" de deux applications k-affines F et F' de M dans lui-même soient $F(m) = D(m) + a$ et $F'(m) = D'(m) + a'$ par $[(D,a), (D',a')] = ([D,D'], Da' - D'a)$ i.e. mettons sur l'ensemble A(M) des applications k-affines de M dans M la structure de k-algèbre de Lie, produit semi-direct de la k-algèbre de Lie $L_k(M,M)$ et de la k-algèbre de Lie abélienne M. On constate alors que la partie $\mathcal{U}(M)$ du produit $A(M) \times \mathcal{Y}(A)$ formé des couples (F,X), où F est une X-dérivation affine de M, est une sous-algèbre de Lie et un sous-A-module. Muni de la projection
$\theta : \mathcal{U}(M) \longrightarrow \mathcal{Y}(A)$, $\mathcal{U}(M)$ devient une θ-algèbre de Lie, appelée algèbre des dérivations affines de M. Son noyau s'identifie à la A-algèbre de Lie des applications A-affines de M dans M, produit semi-direct de $L_A(M,M)$ et de l'algèbre de Lie abélienne M.

2 - $\mathcal{Y}$-dérivations.

Dans ce numéro et les suivants, on suppose donnée une θ-algèbre de Lie $\mathcal{Y}$ sur A ; dans les cas les plus importants, on aura $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(A)$.

DEFINITION 2 - Soient A une k-algèbre, $\mathcal{Y}$ une θ-algèbre de Lie sur A. Soit $\mathcal{U}$ une θ-algèbre de Lie sur A, on appelle $\mathcal{Y}$-dérivation sur $\mathcal{U}$ toute application k-linéaire $D : X \longrightarrow D_X$ de $\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{U}$ telle que $\theta_{D_X} = \theta_X$ pour tout $X \in \mathcal{Y}$. On dit que D est une

$\mathfrak{g}$-connexion si D est de plus A-linéaire, que D est une $\mathfrak{g}$-θ-structure (ou une $\mathfrak{g}$-dérivation à courbure nulle) si D est une représentation de k-algèbres de Lie. Soit M un A-module, on appelle par abus de langage $\mathfrak{g}$-dérivation, resp. $\mathfrak{g}$-connexion, resp. $\mathfrak{g}$-θ- structure sur M, une $\mathfrak{g}$-dérivation (resp....) sur la θ-algèbre de Lie D(M) des dérivations du A-module M (cf. n°1, exemple 2). Dans le cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$, on parlera simplement de connexion au lieu de $\mathfrak{g}(A)$-connexion, de θ-structure au lieu de $\mathfrak{g}(A)$-θ- structure.

Bien entendu, les $\mathfrak{g}$-dérivations sur $\mathfrak{A}$ ne forment pas un groupe. Mais si D est une $\mathfrak{g}$-dérivation sur $\mathfrak{A}$ (resp. une $\mathfrak{g}$-connexion sur $\mathfrak{A}$) toute autre $\mathfrak{g}$-dérivation (resp. $\mathfrak{g}$-connexion) se met de façon unique sous la forme D+u, où u est une application k-linéaire (resp. A-linéaire) de $\mathfrak{g}$ dans le noyau $\mathfrak{A}_0$ de $\mathfrak{A}$. Ainsi, l'ensemble des $\mathfrak{g}$-dérivations (resp. des $\mathfrak{A}$-connexions) sur $\mathfrak{A}$, s'il n'est pas vide, est un espace affine sous $L_k(\mathfrak{g}, \mathfrak{A}_0)$ (resp. sous $L_A(\mathfrak{g}, \mathfrak{A}_0)$)

Une $\mathfrak{g}$-connexion sans torsion sur $\mathfrak{A}$ n'est autre chose qu'un homomorphisme de θ-algèbres de Lie sur A de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{A}$.

Explicitons la notion de $\mathfrak{g}$-dérivation sur un A-module M : c'est la donnée pour tout $X \in \mathfrak{g}$ d'un k-endomorphisme D_X de M, dépendant k-linéairement de X, et satisfaisant à la condition

(4) $D_X(fm) = fD_X m + \theta_X(f)m$ $\quad (f \in A,\ m \in M,\ X \in \mathfrak{g})$

Cette $\mathfrak{g}$-dérivation est une $\mathfrak{g}$-connexion (resp. est à courbure nulle) si et seulement si on a $D_{fX} = fD_X$ pour $f \in A$, $X \in \mathfrak{g}$ (resp. si et

seulement si $[D_X, D_Y] = D_{[X,Y]}$ pour $X, Y \in \mathfrak{g}$).

Exemple 1. Soit M un A-module muni d'une $\mathfrak{g}$-dérivation D, N un sous-A-module stable par les opérations D_X ($X \in \mathfrak{g}$). Alors on définit de façon évidente dans N et M/N les $\mathfrak{g}$-dérivations induites. Si D est une $\mathfrak{g}$-connexion (resp. est à courbure nulle) il en est de même de N et M/N. (Nous verrons au n°4 d'autres procédés pour définir des $\mathfrak{g}$-dérivations à partir de $\mathfrak{g}$-dérivations données). Considérons une θ-algèbre de Lie $\mathfrak{R}$ sur A munie d'une $\mathfrak{g}$-dérivation D, pour tout $X \in \mathfrak{g}$ on a donc un $D_X \in \mathfrak{R}$. Soit $D'_X = \mathrm{ad}(D_X)$ le k-endomorphisme de $\mathfrak{R}$ défini par $D'_X(Z) = [D_X, Z]$. On constate aussitôt que D'_X est une θ_X-dérivation du A-module $\mathfrak{R}$, dépendant évidemment k-linéairement de X, de sorte que $\mathfrak{R}$ est muni canoniquement, en tant que A-module, d'une $\mathfrak{g}$-dérivation D' appelée associée à la $\mathfrak{g}$-dérivation donnée D de la θ-algèbre de Lie $\mathfrak{R}$. D'ailleurs, si D est à courbure nulle, il en est de même de D'. Enfin, comme le noyau $\mathfrak{R}_0$ de $\mathfrak{R}$ est un idéal de cette k-algèbre de Lie, il est stable sous les opérations D'_X et est donc muni d'une $\mathfrak{g}$-dérivation induite, appelée encore associée ; on vérifie que cette dernière est une connexion si D est une connexion. Identifiant $\mathfrak{R}/\mathfrak{R}_0$ à une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}(A)$, la $\mathfrak{g}$-dérivation quotient est évidemment induite par la $\mathfrak{g}$-θ-structure de $\mathfrak{g}(A)$ associée à l'homomorphisme canonique $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}(A)$. - Notons qu'une $\mathfrak{g}$-dérivation D' sur le A-module $\mathfrak{R}$, associée à une $\mathfrak{g}$-dérivation de la θ-algèbre de Lie $\mathfrak{R}$, satisfait à la propriété suivante, (due au fait que pour tout

$Z \in \mathfrak{N}$, ad(Z) est une dérivation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{N}$) :

(5) $D_X^1([Z_1,Z_2]) = [D_X^1 Z_1, Z_2] + [Z_1, D_X^1 Z_2]$ $(X \in \mathfrak{g}, Z_1, Z_2 \in \mathfrak{N})$

Exemple 2. Soit $X \in \mathfrak{g}(A)$, alors la k-dérivation θ_X de A associée à X est une X-dérivation de A, considéré comme A-module, de sorte qu'en posant $D_X = \theta_X$, on définit sur le A-module A une $\mathfrak{g}(A)$-dérivation, qui est même une connexion à courbure nulle, appelée la connexion canonique de A. Il en résulte que tout élément de l'algèbre des dérivations D(A) du A-module A se met de façon unique sous la forme $\theta_X + P_f$, où $X \in \mathfrak{g}(A)$ et où P_f est un endomorphisme du A-module A, i.e. une application de la forme $g \longrightarrow P_f g = fg$ (où $f \in A$). Ainsi, en tant que A-module, D(A) s'identifie à $A + \mathfrak{g}(A)$, tandis qu'un calcul immédiat montre que la loi de Lie est donnée par

(6) $[P_f + \theta_X, P_g + \theta_Y] = P_{\theta_X g - \theta_Y f + \theta_{[X,Y]}}$

Bien entendu, la connexion canonique sur A permet de déduire, pour toute θ-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur A, une $\mathfrak{g}$-connexion à courbure nulle sur A, appelée encore canonique.

Exemple 3. Soient M un A-module, V un k-module, considérons $M \otimes_k V$ comme un A-module par $f(m \otimes v) = (fm) \otimes v$. Soit $X \in \mathfrak{g}(A)$, soit D une X-dérivation de M, alors le k-endomorphisme $D \otimes \ell$ de $M \otimes_k V$ est une X-dérivation de $M \otimes_k V$, et l'application $D \longrightarrow D \otimes \ell$ est un homomorphisme de θ-algèbres de Lie de D(M) dans $D(M \otimes_k V)$. Il s'ensuit que toute $\mathfrak{g}$-dérivation sur M définit, par composition avec l'homomorphisme précédent, une $\mathfrak{g}$-dérivation sur $M \otimes_k V$, qui sera même une $\mathfrak{g}$-connexion (resp. à courbure nulle) si

la $\mathcal{G}$-dérivation donnée sur M l'est. En particulier, la connexion canonique de A définit sur tout A-module de la forme $A \otimes_k V$ une connexion D_0 à courbure nulle, appelée encore canonique. Toute $\mathcal{G}$-connexion D sur $A \otimes_k V$ se met donc de façon unique sous la forme $D_0 + u$, où $u \in L_K(\mathcal{G}, L_A(M,M))$.

3 - Invariants infinitésimaux.

DEFINITION 3 - Soit M un A-module muni d'une $\mathcal{G}$-dérivation D. Soient $X \in \mathcal{G}$, $m \in M$, on dit que m est invariant par X (ou encore que X invarie m) si $D_X m = 0$. On dit que m est un invariant de la $\mathcal{G}$-dérivation D, si m est invariant par tout $X \in \mathcal{G}$. Soient $M_1, \ldots, M_n$, N des A-modules munis de $\mathcal{G}$- dérivations, u une application n fois k-linéaire de $\prod_i M_i$ dans N, on dit que u est invariant par un $X \in \mathcal{G}$ si on a

(7) $D_X u(m_1, \ldots, m_n) = \sum_i u(m_1, \ldots, D_X m_i, \ldots, m_n)$ $(m_i \in M_i)$

On dit que u est un invariant pour la $\mathcal{G}$-dérivation, si u est invariant par tout $X \in \mathcal{G}$.

Le mot "covariant" est classique dans le cas d'une application, mais le rédacteur suggère de garder le mot "invariant" pour tous les cas, car sinon on ne sait jamais s'il faut dire invariant ou covariant. La justification de cette terminologie apparaîtra au n° suivant.

Soit par exemple M un A-module muni d'une structure de k-algèbre (non nécessairement associative), et d'une $\mathcal{G}$-dérivation, soit u l'application de multiplication $u : M \times M \longrightarrow M$; alors dire que u est invariant par un $X \in \mathcal{G}$ signifie que D_X est

une dérivation de la k-algèbre M.

PROPOSITION 1 - a) Soient M_i, M, u comme dans la définition 3, soient $X \in \mathcal{D}$, $m_i \in M_i$ $(1 \leq i \leq n)$; si u et les m_i sont invariants par X, il en est de même de $u(m_1, \ldots, m_n)$.

b) Sous les conditions précédentes, supposons de plus donnés des A-modules $M_{i,j}$ $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n_i)$ et pour tout i $(1 \leq i \leq n)$ une application n_i fois k-linéaire v_i de $\prod_{1 \leq j \leq n_i} M_{ij}$ dans M_i. On suppose les M_{ij} munis chacun d'une $\mathcal{D}$-dérivation, et les v_i invariants par X. Alors l'application multilinéaire composée $u(v_1, \ldots, v_n)$ de $\prod_{i,j} M_{ij}$ dans N est invariante par X.

La démonstration ne présente pas de difficultés essentielles.

COROLLAIRE - Si au lieu de dire invariant par X, on dit invariant par la $\mathcal{D}$-dérivation donnée, les conclusions précédentes subsistent.

Si M est muni d'une $\mathcal{D}$-dérivation, les invariants pour cette $\mathcal{D}$-dérivation forment un sous-k-module ; si $m \in M$ est donné, les $X \in \mathcal{D}$ qui invarient m forment un sous-k-module de $\mathcal{D}$, et même un sous-A-module (resp. une sous-algèbre de Lie sur k) s'il s'agit d'une $\mathcal{D}$-connexion (resp. d'une $\mathcal{D}$-θ-structure).

4 - Prolongements canoniques de $\mathcal{D}$-dérivations.

Soit $(M_i)_{i \in I}$ une famille de A-modules, $X \in \mathcal{D}(A)$, et soit, pour tout i, D_i une X-dérivation de M_i. Soit D l'endomorphisme de $M = \coprod_i M_i$ resp. $\prod_i M_i$ défini par la famille des D_i, on vérifie alors immédiatement que D est une X-dérivation de M. Cela permet, si chaque M_i est muni d'une $\mathcal{D}$-dérivation D_i, d'en déduire cano-

niquement sur M une $\mathcal{V}$-dérivation D, définie par $D_X = \coprod_i D_{i,X}$ resp. $D_X = \prod_i D_{i,X}$. Pour que D soit une $\mathcal{V}$-connexion (resp. une $\mathcal{V}$-θ-structure) il faut et il suffit que les D_i le soient.

PROPOSITION 2 - Soient M_i $(0 \leq i \leq n)$ des A-modules, $X \in \mathcal{V}(A)$, L_i $(0 \leq i \leq n)$ une X-dérivation de M_i, considérons les k-endomorphismes de $\bigotimes_{i=1}^{n}{}_k M_i$ (resp. $L_k(M_1,\dots,M_i;N)$) défini par les formules

(8) $$L(m_1 \otimes \dots \otimes m_n) = \sum_{i=1}^{n} m_1 \otimes .. \otimes L_i m_i \ .. \otimes m_n$$

(resp. par la formule :

(9) $$(Lu)(m_1,\dots,m_n) = L_0(u(m_1,\dots,m_n)) - \sum_{i=1}^{n} u(m_1,..,L_i m_i,..,m_n))$$

Choisissons un des indices i, $1 \leq i \leq n$ (resp. $0 \leq i \leq n$) pour définir une structure de A-module sur $\bigotimes_{1 \leq i \leq n}{}_k M_i$ (resp. $L_k(M_1,\dots,M_n;M_0)$). Alors L est une X-dérivation, induisant une X-dérivation de $\bigotimes_{i=1}^{n}{}_A M_i$ (resp. de $L_A(M_1,\dots,M_n;N)$). L'application $(L_1,\dots,L_n) \longrightarrow L$ est une représentation de k-algèbres de Lie du produit (n°1, exemple 3) des θ-algèbres de Lie $D(M_i)$ dans $D(\bigotimes_{i=1}^{n}{}_k M_i)$, et un homomorphisme de θ-algèbres de Lie du produit des $D(M_i)$ dans $D(\bigotimes_{i=1}^{n}{}_A M_i)$. Et l'application $(L_0,L_1,\dots,L_n) \longrightarrow L$ du produit des θ-algèbres de Lie $D(M_i)$ $(0 \leq i \leq n)$ dans $D(L_k(M_1,\dots,M_n;N)$ (resp. $D(L_A(M_1,\dots,M_n,N))$ est une représentation de k-algèbres de Lie (resp. un hom. de θ-algèbres de Lie sur A).

Vérifions par exemple que l'opération L définie par (8) est une X-dérivation, quand on considère $\bigotimes_{i=1}^{n}{}_k M_i$ comme un A-module par $f(m_1 \otimes \dots \otimes m_n) = (fm_1) \otimes \dots \otimes m_n$: on a

$L(f(m_1 \otimes .. \otimes m_n) = L_1(fm_1) \otimes m_2 \otimes .. \otimes m_n + \sum_{i=2}^{n} (fm_1) \otimes m_2 \otimes .. \otimes L_i m_i .. \otimes m_n$

On a $L_1(fm_1) = fL_1 m_1 + \theta_X(f) m_1$, de sorte que le deuxième membre est égal à $f \sum_{i=1}^{n} m_1 \otimes .. L_i m_i \otimes .. m_n + (\theta_X(f)\ m_1) \otimes ... \otimes m_n =$

$= fL(m_1 \ ... \ m_n) + \theta_X(f)(m_1 \otimes .. \otimes m_n)$. Le calcul pour l'opérateur (9) est tout analogue (il faut distinguer deux cas, suivant que la structure de A-module sur $L_k(M_1, ..., M_n, M_0)$ est défini par celle de M_0, ou par un des M_i, $1 \leq i \leq n$). Il faut ensuite montrer que l'opération (8) (resp. 9) laisse stable le noyau de l'application canonique $\bigotimes_{i=1}^{n} {}_k M_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^{n} {}_A M_i$ (resp. laisse stable le sous-A-module $L_A(M_1, ..., M_n; M_0)$ de $L_k(M_1, ..., M_n, M_0)$, vérifions par exemple le deuxième point : supposons que u soit A-linéaire par rapport à m_1, prouvons que Lu l'est aussi. On a

$$(Lu)(fm_1, m_2, ..., m_n) = L_0(fu(m_1, ..., m_n)) - u(L_1(fm_1), m_2, ..., m_n) - f \sum_{i=2}^{n} u(m_1, ..., L_i m_i, ..., m_n)$$

Les deux premiers termes du second membre donnent

$$fL_0(u(m_1, ..., m_n)) - f\ u(L_1 m_1, m_2, ..., m_n) + \theta_X(f) u(m_1, .., m_n) - u(\theta_X(f) m_1, m_2, ..., m_n),$$

on trouve donc

$$(Lu)(fm_1, m_2, ..., m_n) = fL_0(u(m_1, ..., m_n)) - f \sum_{i=1}^{n} u(m_1, .., L_i m_i, .., m_n) = f(Lu)(m_1, ..., m_n)$$

La vérification des dernières assertions de la prop. 2 offre encore moins de difficultés.

COROLLAIRE 1 - Sous les conditions précédentes, supposons les M_i munis chacun d'une $\mathcal{V}$-dérivation, notée D. Alors on définit des $\mathcal{V}$-dérivations sur $\bigotimes_{i=1}^{n} {}_k M_i$, $\bigotimes_{i=1}^{n} {}_A M_i$, $L_k(M_1, ..., M_n; M_0)$, $L_A(M_1, .., M_n; M_0)$

par les formules

(8 bis) $D_X(m_1 \otimes \dots \otimes m_n) = \sum_{i=1}^{n} m_1 \otimes \dots D_X m_i \otimes \dots \otimes m_n$

(9 bis) $(D_X u)(m_1, \dots, m_n) = D_X(u(m_1, \dots, m_n)) - \sum_{i=1}^{n} u(m_1, \dots, D_X m_i, \dots, m_n)$

En particulier, si M est un A-module muni d'une $\mathcal{G}$-dérivation, alors son algèbre tensorielle $T_k(M)$ sur k ou $T_A(M)$ sur A est muni d'une $\mathcal{G}$-dérivation, définie en chaque degré par la formule (8 bis). De plus, cette $\mathcal{G}$-dérivation passe aux algèbres quotients $\Lambda_k M$, $\Lambda_A M$, $S_k(M)$, $S_A(M)$.

Seule la dernière assertion exige une vérification. Il suffit de vérifier les assertions relatives à $\Lambda_A M$ et $S_A M$, car celle relative à $\Lambda_k M$ et $S_k M$ en est un cas particulier, obtenu en prenant $A = k$, et faisant opérer $\mathcal{G}$ trivialement dans k. On sait déjà que les D_X passent au quotient $T_A M$, d'autre part il est immédiat sur (8 bis) que chaque D_X est une dérivation de l'anneau $T_A M$. Soit J l'idéal de $T_A M$, noyau de l'homomorphisme canonique de $T_A M$ sur son quotient $\Lambda_A M$ resp. $S_A M$; il suffit de prouver que $D_X(J) \subset J$. Comme D_X est une dérivation, il suffit de prouver que D_X applique un système convenable de générateurs de l'idéal bilatère J dans J. Or dans le cas de $\Lambda_A M$, on prendra les générateurs de la forme $m \otimes m$, qui sont transformés en $D_X m \otimes m + m \otimes D_X m \in J$, dans le cas de $S_A M$ on prendra les générateurs de la forme $m \otimes m' - m' \otimes m$, qui sont transformés par D_X en $(D_X m \otimes m' - D_X m' \otimes m) + (m \otimes D_X m' - m' \otimes D_X m)$, éléments qui sont encore dans J, ce qui achève la démonstration. On a prouvé en

même temps :

COROLLAIRE 2 - Les opérations D_X dans les anneaux $T_K M$, $T_A M$, $\Lambda_K M$, $\Lambda_A M$, $S_K M$ et $S_A M$ définies dans le cor.1 sont des dérivations de ces anneaux.

DEFINITION 4 - Les $\mathcal{Y}$-dérivations définies dans le cor/1 ci-dessus sont appelés les prolongements canoniques des $\mathcal{Y}$-dérivations données. Quand l'un des M_i est A, il est entendu (sauf spécification du contraire) qu'il est muni de sa connexion canonique (n°2, exemple 2).

PROPOSITION 3 - Les prolongements canoniques de $\mathcal{Y}$-dérivations à courbure nulle est à courbure nulle. Si on a des $\mathcal{Y}$-connexions sur des modules M_i, M, leurs prolongements canoniques aux modules $\bigotimes_{i=1}^{n} {}_A M_i$, $L_A(M_1,\dots,M_n,M)$, $T_A M$, $S_A M$, $\Lambda_A M$ sont encore des connexions.

Cela résulte aussitôt des définitions et de la dernière partie de prop.2.

La proposition suivante assure en particulier que les diverses façons de définir une $\mathcal{Y}$-dérivation prolongée sur un espace tensoriel, compte tenu des isomorphismes canoniques usuels, sont toujours les mêmes.

Notons encore que si D est une X-dérivation dans un A-module M, et si $\overline{D}$ désigne son prolongement canonique à $L_k(M,M)$ on a pour tout $u \in L_k(M)$

(10) $\quad \overline{D}(u) = [D,u]$

PROPOSITION 4 - Considérons des A-modules M_i, $(0 \leq i \leq n)$, munis de $\mathcal{Y}$-dérivations, munissons $\bigotimes_{i=1}^{n} {}_A M_i$ et $L_A(M_1,\dots,M_n;M)$ de la

$\mathcal{V}$-dérivation prolongement canonique. Les applications linéaires et multilinéaires suivantes sont alors invariantes pour les $\mathcal{V}$-dérivations envisagées :

a) $(m_1,\dots,m_n) \longrightarrow m_1 \otimes \dots \otimes m_n$ de $\prod_{i=1}^{n} M_i$ dans $\bigotimes_{i=1}^{n}{}_A M_i$.

b) $(u,m_1,\dots,m_n) \longrightarrow u(m_1,\dots,m_n)$ de $L_A(M_1,\dots,M_n;M_0) \times \prod_{i=1}^{n} M_i$ dans M_0.

c) L'isomorphisme canonique de $L_A(M_1,\dots,M_n,M_0)$ sur $L_A(\bigotimes_{i=1}^{n}{}_A M_i, M_0)$

d) Les opérations de symétrie sur $\bigotimes_{i=1}^{n}{}_A M_i$

e) L'application $L_A(M_1,M_2) \times L_A(M_2,M_3) \longrightarrow L_A(M_1,M_3)$ de composition des applications linéaires.

f) L'homomorphisme canonique $\bigotimes_{i=1}^{n}{}_A M_i' \longrightarrow (\bigotimes_{i=1}^{n}{}_A M_i)'$.

Ces assertions résultent immédiatement des définitions. En les combinant avec la prop.1 b), on voit que n'importe quoi est invariant, (la définition de "n'importe quoi" est laissée au lecteur).

On peut maintenant interpréter la déf.3 d'une application multilinéaire invariante par une $\mathcal{V}$-dérivation : c'est un élément de $L_K(M_1,\dots,M_n;M_0)$ invariant par la $\mathcal{V}$-dérivation prolongement canonique.

Automorphismes infinitésimaux. Soit M un A-module, muni d'une structure algébrique définie par la donnée d'un élément S dans un module P construit à partir de A par une suite d'opérations tensorielles élémentaires du type de celles envisagées dans la prop.3 et ses corollaires. Si D est une X-dérivation de M, on peut considérer son prolongement $\overline{D}$ à P. Si $\overline{D}\,S = 0$, on dit que la structure envisagée est invariante par

la dérivation $\overline{D}$, ou encore que D est un automorphisme infinitésimal de M (muni de S). Si M est muni d'une $\mathcal{Y}$-dérivation, on dit que cette $\mathcal{Y}$-dérivation est compatible avec la structure S, ou encore que la structure S est invariante par cette $\mathcal{Y}$-dérivation, si tous les D_Y ($Y \in \mathcal{Y}$) sont des automorphismes infinitésimaux de M. Notons que les automorphismes infinitésimaux de M forment une k-algèbre de Lie, et, dans le cas où P a été construit par des opérations tensorielles sur A exclusivement (telles que $\otimes_A$, L_A etc), c'est même une θ-algèbre de Lie sur A. L'ensemble des couples (D,X), où $X \in \mathcal{Y}(A)$ et où D est un X-automorphisme infinitésimal de M, est appelée l'algèbre des automorphismes infinitésimaux de M (muni de S). C'est une θ-algèbre de Lie dans le cas particulier envisagé plus haut.

Exemple : si M est muni d'une structure de k-algèbre (resp. de A-algèbre) on a $P = L_k(M \otimes_k M, M)$ (resp. $P = L_A(M \otimes_A M, M)$). Une dérivation D du A-module M est un automorphisme infinitésimal de l'algèbre M si et seulement si c'est une dérivation de l'anneau (non nécessairement associatif) M, i.e. satisfait à $D(mn) = (Dm)n + m(Dn)$.

Les opérations θ_X. Dans par.1, prop.6, nous avons pour tout $X \in A(\mathcal{Y})$ défini une dérivation θ_X de degré 0 de l'algèbre $\Omega(A)$, obtenant ainsi une θ-structure naturelle que $\Omega(A) = \Lambda_A \Omega^1(A)$. Cette dernière n'est autre que le prolongement canonique de la θ-structure sur $\Omega^1(A)$ définie par les θ_X. En vertu de par.1, formule (15), la θ-structure prolongement canonique de la pré-

cédente à $\mathcal{V}(A) = L_A(\Omega^1(A), A)$ est celle donnée par $\theta_X Y = [X, Y]$. De plus, ce qui précède permet de définir des θ-structures sur les algèbres tensorielles, extérieures, symétriques (sur A par exemple) de $\Omega^1(A)$, $\mathcal{V}(A)$ ou $\mathcal{V}(A) + \Omega^1(A)$, les produits tensoriels de telles algèbres etc. Toutes les opérations tensorielles usuelles sur ces espaces (multiplications tensorielles, symétries, compositions d'applications, contractions etc.) sont invariantes par les θ_X, ainsi que les opérations (telles le crochet d'éléments de $\mathcal{V}(A)$, la différentiation extérieure d etc.) se définissant en termes structuraux à partir de la donnée de A.

5 - Différentielle extérieure définie par une $\mathcal{V}$-connexion.

Pour pouvoir énoncer avec toutes les précisions nécessaires les résultats de ce numéro, il importe de rappeler quelques faits élémentaires d'algèbre linéaire.

Soient $\mathcal{V}$, M deux A-modules. Pour abréger, nous désignerons par $C^p(\mathcal{V}, M)$ (ou, si une confusion est à craindre, par $C^p_A(\mathcal{V}, M)$) le A-module des applications p fois A-linéaires alternées de $\mathcal{V}^p$ dans M, par $C(\mathcal{V}, M)$ la somme directe des $C^p(\mathcal{V}, M)$ pour $p \geq 0$ (en convenant que $C^0(\mathcal{V}, M) = M$). Pour tout $X \in \mathcal{V}$, i_X est un endomorphisme de degré -1 du A-module gradué $C(\mathcal{V}, M)$, défini par

(10) $i_X f^p(X_1, .., X_{p-1}) = f^p(X, X_1, .., X_p)$ $(X, X_i \in \mathcal{V}, f^p \in C^p(\mathcal{V}, M)$

Evidemment, si $p > 0$, $f^p = 0$ équivaut à $i_X f^p = 0$ pour tout $X \in \mathcal{V}$.

Soit N un autre A-module, on définit des applications A-

bilinéaires canoniques $(f^p, g^q) \longrightarrow f^p \cup g^q$

(11) $C^p(\mathcal{V}, M) \times C^q(\mathcal{V}, N) \longrightarrow C^{p+q}(\mathcal{V}, M \otimes_A N)$

de façon bien connue, $(f^p \cup g^q)(X_1, \ldots, X_{p+q})$ s'obtenant par antisymétrisation "partielle" à partir de la fonction $(p+q)$-fois linéaire (partiellement alternée) $f^p(X_1, \ldots, X_p) \otimes g^q(X_{p+1}, \ldots, X_{p+q})$. Cette multiplication est "associative" et "anticommutative" dans le sens bien connu expliqué dans le multiplodoque homologique, de plus on a la formule

(12) $i_X(f^p \cup g^q) = (i_X f^p) \cup g^q + (-1)^p f^p \cup i_X g^q$

Si on se donne une application A-bilinéaire $u : M \times N \longrightarrow P$, i.e. une application A-linéaire $M \otimes_A N \longrightarrow P$, l'image de $f^p \cup g^q$ par l'application correspondante $C^{p+q}(\mathcal{V}, M \otimes_A N) \longrightarrow C^{p+q}(\mathcal{V}, P)$ sera notée $f^p \underset{u}{\cup} g^q$ ou simplement $f^p \cup g^q$ si aucune confusion n'est à craindre. En particulier, si M est une A-algèbre commutative, alors $C(\mathcal{V}, M)$ est une A-algèbre graduée anticommutative, et (12) prouve (compte tenu que i_X commute aux applications $C^n(\mathcal{V}, Q) \longrightarrow C^n(\mathcal{V}, P)$ définies par des A-homomorphismes $Q \longrightarrow P$) que i_X est une <u>antidérivation</u> de degré -1 de cette algèbre. En particulier, $C(\mathcal{V}, A)$ est une algèbre graduée anticommutative, qu'on notera simplement $C(\mathcal{V})$ (où $C_A(\mathcal{V})$ s'il y a lieu). Comme cas particulier des accouplements (11), on a une application A-linéaire canonique

(13) $M \otimes_A C(\mathcal{V}) \longrightarrow C(\mathcal{V}, M)$

qui se définit aussi directement de façon évidente, et qui est un isomorphisme si M est un A-module ayant une base finie.

L'homomorphisme (13) est compatible avec les structures multiplicatives, où la multiplication

$$(M\otimes_A C^p(\mathfrak{g}))\times(M\otimes_A C^q(\mathfrak{g}))\longrightarrow(M\otimes_A M)\otimes_A C^{p+q}(\mathfrak{g})$$

est définie par $(m\otimes\varphi)\cup(n\otimes\psi)=(m\otimes n)\otimes(\varphi\cup\psi)$. (Cette assertion est un cas particulier de l'associativité et l'anticommutativité de la multiplication, compte tenu de la définition de (13)). Soit d'ailleurs $\mathfrak{g}'$ le dual du A-module $\mathfrak{g}$, l'application identique $\mathfrak{g}'\longrightarrow C^1(\mathfrak{g})=\mathfrak{g}'$ se prolonge en un homomorphisme de A-algèbres graduées

(14) $$\Lambda_A\mathfrak{g}'\longrightarrow C(\mathfrak{g})$$

d'où, compte tenu de (13), des homomorphismes canoniques

(13 bis) $$M\otimes_A\Lambda_A\mathfrak{g}'\longrightarrow C(\mathfrak{g},M)$$

compatible avec les structures multiplicatives naturelles pour les foncteurs dans les deux membres.

Supposons maintenant que $\mathfrak{g}$ soit une θ-algèbre de Lie sur A. Alors l'application A-linéaire canonique $\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}(A)$ définit par transposition une application A-linéaire canonique $\Omega^1(A)\longrightarrow\mathfrak{g}'$, d'où compte tenu de (13 bis) une application A-linéaire canonique

(13 ter) $$M\otimes_A\Omega(A)\longrightarrow C(\mathfrak{g},M)$$

compatible avec les structures multiplicatives. C'est là un isomorphisme si $\Omega^1(A)$ a une base finie sur A et $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}(A)$. D'autre part, l'application identique de $\mathfrak{g}$ sur lui-même définit sur la θ-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ une $\mathfrak{g}$-dérivation (déf. 2) et on peut considérer la $\mathfrak{g}$-dérivation associée du A-module sous-jacent à $\mathfrak{g}$ (n°2, exemple 1), ainsi le A-module $\mathfrak{g}$ est muni d'une $\mathfrak{g}$-θ-

structure, dont les opérations ne sont autres que $\theta_X Y = [X,Y]$. Cette $\mathfrak{g}$-θ-structure se prolonge donc canoniquement à $\wedge_A \mathfrak{g}$ (déf. 4). Si donc M est muni d'une $\mathfrak{g}$-dérivation D, il en est de même des $C^p(\mathfrak{g},M) = L_A(\wedge^p_A \mathfrak{g}, M)$ (re-déf. 4) ; pour éviter des confusions regrettables dans le cas où D est une "différentiation absolue" (cf. n°7) nous noterons l'opération définie par $X \in \mathfrak{g}$ dans $C(\mathfrak{g},M)$ non par D_X, mais par δ_X.

THEOREME 1 - Soient $\mathfrak{g}$ une θ-algèbre de Lie sur A, M un A-module muni d'une $\mathfrak{g}$-connexion D, munissons $C(\mathfrak{g},M) = L_A(\wedge_A \mathfrak{g}, M)$ de la $\mathfrak{g}$-dérivation définie par les opérateurs δ_X $(X \in \mathfrak{g})$ donnés par

$$(14)\quad (\delta_X f^p)(X_1,\dots,X_p) = D_X(f^p(X_1,\dots,X_p) + \sum_{1\le i\le n} f^p(X_1,\dots,[X,X_i],\dots,X_p)$$

$(f^p \in C^p(\mathfrak{g},M),\ X,X_i \in \mathfrak{g})$. Il existe sur $C(\mathfrak{g},M)$ un opérateur k-linéaire de degré +1 et un seul, satisfaisant à la condition

$$(15)\quad \delta_X = di_X + i_X d$$

Cet opérateur satisfait de plus la relation (si N est un autre A-module muni d'une $\mathfrak{g}$-connexion D)

$$(16)\quad d(f^p \cup g^q) = (df^p)\cup g^q + (-1)^p f^p \cup dg^q \quad (f^p \in C^p(\mathfrak{g},M), g^q \in C^q(\mathfrak{g},M))$$

Il est donné, en degré $p>0$, par la formule

$$(17)\quad (df^p)(X_1,\dots,X_{p+1}) = \sum_{1\le i\le p+1} (-1)^{i+1} D_{X_i} f^p(X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_{n+1}) + \sum_{1\le i<j\le p+1} (-1)^{i+j} f^p([X_i,X_j],X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_{p+1})$$

Notons, en petites dimensions, les cas particuliers suivants de (17) :

$$(18)\quad \begin{cases} (dm)(X) = D_X m \\ df^1(X,Y) = D_X f(Y) - D_Y f(X) - f([X,Y]) \\ df^2(X,Y,Z) = \sum D_X f(Y,Z) - \sum f([X,Y],Z) \end{cases}$$

(dans la dernière formule (18), les signes $\sum$ indiquent une sommation sur les permutations circulaires en les trois lettres X,Y,Z)

Démonstration. Nous prouverons l'existence et unicité de d satisfaisant à (15) par récurrence sur le degré p de l'argument f^p. Pour p=0, la formule (15) se réduit à la première des formules (18), ce qui assure l'unicité en degré 0, et aussi l'existence, puisque $X \to D_X m$ est bien une application A-linéaire de $\mathcal{V}$ dans M, dépendant k-linéairement de $m \in M$. Supposons l'existence et l'unicité de d prouvée pour les degrés $< p$ (où $p > 0$), prouvons le pour p. La formule (15) s'écrit, en degré p :

$$(df^p)(X_1,\dots,X_{p+1}) = (\delta_{X_1} f^p - di_{X_1} f^p)(X_2,\dots,X_{p+1})$$

formule qui détermine sans ambiguité df^p. Il suffit de montrer que la fonction de $(X_1,\dots,X_{p+1})$ définie par le second membre est bien p+1 fois A-linéaire et alternée (il est d'autre part évident qu'elle dépend k-linéairement de f^p). Or elle est déjà p fois A-linéaire et alternée en $X_2,\dots,X_{p+1}$, il suffira alors de prouver qu'elle s'annule si on y remplace X_2 par X_1 (car il s'ensuivra que la fonction envisagée est p+1 fois k-linéaire alternée, et étant A-linéaire en les X_i, $i \geq 2$, elle le sera aussi en X_1). Or, faisant $X_2 = X_1$, on trouve la valeur

$$(i_{X_1}(\delta_{X_1} f^p - di_{X_1} f^p))(X_3,\dots,X_{p+1}).$$

il suffit donc de prouver que $i_{X_1} \delta_{X_1} f^p - i_{X_1} di_{X_1} f^p = 0$. Or

d'après l'hypothèse de récurrence on a

$i_X d(i_X f^p) = (\delta_X - d i_X)(i_X f^p) = \delta_X i_X f^p$ (puisque $i_X i_X = 0$)

Il suffit donc de prouver que $\delta_X i_X - i_X \delta_X = 0$, ce qui résulte de la formule générale (exprimant que l'application bilinéaire $(X, f^p) \longrightarrow i_X f^p$ est invariante par la $\mathfrak{g}$-dérivation δ) :

(19) $\delta_X(i_Y f) = i_{[X,Y]} f + i_Y \delta_X f$ i.e. $[\delta_X, i_Y] = i_{[X,Y]}$

La formule (17) résulte aussitôt de la formule (16) par récurrence sur p, le détail du calcul est laissé au lecteur.

Nous établirons la formule (16) par récurrence sur $(p+q)$, pour $p=q=0$ cette formule n'est autre, compte tenu de la première formule (18), que la définition des opérations D_X dans $M \otimes_A N$ (déduites des opérations D_X dans M et N) : $D_X(m \otimes n) = (D_X m) \otimes n + m \otimes D_X n$. Soit $p+q = n > 0$, supposons la formule (16) établie pour des degrés p', q' tels que $p'+q' < n$. Pour établir (16), il suffit de prouver que pour tout $X \in \mathfrak{g}$, i_X appliqué aux deux membres de cette relation donne la même chose. Or on a

$i_X d(f \cup g) = \delta_X(f \cup g) - d i_X(f \cup g) = \delta_X(f) \cup g + f \cup \delta_X g - d(i_X f \cup g + (-1)^p f \cup i_X g)$

(on utilise (18), et la formule analogue pour δ_X, qui est en principe contenue dans les considérations du n°4) ; appliquant l'hypothèse de récurrence aux deux derniers termes du second membre, on obtient

$\delta_X(f) \cup g + f \cup \delta_X g - d i_X f \cup g - (-1)^{p-1} i_X f \cup dg - (-1)^p df\, i_X g - (-1)^{p+p} f \cup d i_X g$

Un calcul tout analogue montre que i_X appliqué au deuxième membre de (16) est donné par la même expression, ce qui achève la

démonstration.

On se gardera de croire, trompé par une notation abusive, qu'on ait en général $dd = 0$. Ainsi, les formules (18) montrent qu'on a

-19 bis) $\quad (dd\omega)(X,Y) = K(X,Y).\omega$

où on pose

(20) $\quad K(X,Y) = [D_X, D_Y] - D_{[X,Y]}$

Ainsi, pour qu'on ait $dd=0$, il faut que $K(X,Y)=0$ pour $X,Y \in \mathfrak{g}$, i.e. que la connexion D sur M soit "à courbure nulle". Cette condition est d'ailleurs suffisante :

COROLLAIRE 1 - Pour que l'opérateur de différentiation extérieure d défini par la connexion D sur M soit de carré nul, il faut et il suffit que la connexion soit à courbure nulle, ou encore que d permute aux opérateurs δ_X $(X \in \mathfrak{g})$.

On a vu que $dd=0$ implique que D est à courbure nulle, prouvons que si D est à courbure nulle, on a $d\delta_X - \delta_X d = 0$. Tout d'abord, on aura

$$[\delta_X, \delta_Y] = \delta_{[X,Y]}$$

(prop.3), nous prouverons alors la formule $d\delta_X - \delta_X d = 0$ par récurrence sur le degré de l'argument f^p, la relation étant triviale si $p = -1$ (d'où $f^p = 0$). Il suffit de prouver $i_Y(d\delta_X - \delta_X d)f^p = 0$ pour tout $Y \in \mathfrak{g}$, or on a

$$i_Y \delta_X d - i_Y d \delta_X = i_Y \delta_X d + d i_Y \delta_X - \delta_Y \delta_X$$

d'autre part en vertu de (19), on a $i_Y \delta_X = \delta_X i_Y - i_{[X,Y]}$ d'où en substituant dans l'expression ci-dessus, et tenant compte

que $i_Y d = \delta_Y - d i_Y$, $d i_{[X,Y]} = \delta_{[X,Y]} - i_{[X,Y]} d$, l'expression $\delta_X \delta_Y - \delta_X d i_Y - i_{[X,Y]} d - \delta_Y \delta_X + d \delta_X i_Y - \delta_{[X,Y]} + i_{[X,Y]} d =$
$= (d \delta_X - \delta_X d) i_Y$

Or la valeur du dernier membre pour f^p est nulle, en vertu de l'hypothèse de récurrence. Prouvons enfin que si d permute aux δ_X, alors $dd=0$. On procédera encore par récurrence à partir de $p=-1$, il suffit de prouver que $i_X dd(f^p) = 0$ pour $X \in \mathfrak{g}$. Or compte tenu de (15), l'hypothèse de commutation signifie aussi que les i_X permutent à dd, on a donc $i_X ddf^p = dd(i_X f^p)$, qui est nul d'après l'hypothèse de récurrence.

Tenant compte que A est muni d'une connexion canonique à courbure nulle, on trouve :

COROLLAIRE 2 - $C(\mathfrak{g})$ est une algèbre différentielle graduée. L'homomorphisme canonique $\Omega(A) \longrightarrow C(\mathfrak{g})$ est un homomorphisme d'algèbres différentielles, quand $\Omega(A)$ est muni de sa différentielle extérieure (par.1, déf.4).

Pour vérifier cette dernière assertion, il suffit, compte tenu de la formule (2) du par.1, de la vérifier en degré 0, ce qui revient en vertu des définitions à vérifier que si $f \in A$ et si $df \in \Omega^1(A)$ est sa différentielle, on a pour tout $X \in \mathfrak{g}$: $\langle u(X), df \rangle = \theta_X(f)$ (u étant l'homomorphisme canonique de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}(A)$), or cette formule est en effet vraie.

COROLLAIRE 3 - Supposons que $\Omega^1(A)$ admette une base finie sur A et que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$, alors l'homomorphisme canonique (13 ter) $M \otimes_A \Omega(A) \longrightarrow C(\mathfrak{g}, M)$ est un isomorphisme de A-modules, et l'isomorphisme réciproque transforme l'opération d en l'unique

opération d sur $M \otimes_A \Omega^1(A)$ satisfaisant la condition

(21) $d(m \otimes F^p) = (Dm) \otimes F^p + m \otimes dF^p \quad (m \in M,\ F^p \in \Omega^p(A))$

où Dm est l'élément de $M \otimes_A \Omega^1(A)$ correspondant à l'application A-linéaire $X \longrightarrow D_X m$ de $\mathfrak{g}(A)$ dans M, et où dF^p désigne la différentielle extérieure usuelle de F^p).

La formule (21) résulte en effet aussitôt de la première formule (18) et de la formule (16).

Remarque. Nous avons supposé que D était une $\mathfrak{g}$-connexion sur M. Si D était seulement une $\mathfrak{g}$-dérivation, il serait encore vrai qu'on peut définir dans $C_k(\mathfrak{g}, M) = L_k(\Lambda_k \mathfrak{g}, M)$ un opérateur d défini par l'une des formules équivalentes (15) ou (17) (mais cet opérateur ne transforme une cochaine A-multilinéaire en une cochaine A-multilinéaire que si D est une connexion, comme on s'en assure déjà en degré 0 sur la première formule (18)). Pour vérifier cette assertion, il suffit de faire abstraction des structures de A-module sur M et sur $\mathfrak{g}$, ne considérer M que comme k-module et $\mathfrak{g}$ comme Θ-algèbre de Lie sur k, en faisant opérer $\mathfrak{g}$ trivialement sur k. Notons d'ailleurs que le théorème 1 subsiste, sous la forme énoncée, en supposant seulement que $\mathfrak{g}$ est une k-algèbre de Lie munie d'une structure de A-module (compatible avec sa structure de k-module), M un A-module, $X \longrightarrow D_X$ une application A-linéaire de $\mathfrak{g}$ dans $L_k(M, M)$. (Pas nécessaire de faire $\mathfrak{g}$ sur A, et de parler de dérivations dans M). Mais le rédacteur n'a pas envie de réécrire le théorème 1 sous cette forme plus raisonnable.

Pour finir, signalons que si M,N sont deux A-modules munis

d'une $\mathfrak{g}$-connexion D, et si $u : M \to N$ est un A-homomorphisme invariant par $\mathfrak{g}$, alors l'application A-linéaire correspondante de $C(\mathfrak{g}, M)$ dans $C(\mathfrak{g}, N)$ est compatible avec les opérateurs d, comme on voit par exemple aussitôt sur la formule (17).

6 - Forme courbure d'une connexion. Identité de Bianchi.

Dans ce numéro, $\mathfrak{g}$ désigne encore une θ-algèbre de Lie sur A fixée.

DEFINITION 5 - Soit $\mathfrak{a}$ une θ-algèbre de Lie, $\mathfrak{a}_0$ son noyau (déf.1), supposons $\mathfrak{a}$ munie d'une $\mathfrak{g}$-dérivation D. On appelle forme de courbure (ou simplement courbure) de la $\mathfrak{g}$-dérivation D, l'application k-bilinéaire alternée $X, Y \to K(X,Y)$ de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{a}_0$, définie par

$$K(X,Y) = [D_X, D_Y] - D_{[X,Y]} \qquad (X, Y \in \mathfrak{g}) \tag{20}$$

Il est évident sur la formule (20) que K(X,Y) est bien k-bilinéaire alterné en X,Y, d'autre part elle prend bien ses valeurs dans $\mathfrak{g}_0$, puisque (u désignant l'application canonique de $\mathfrak{a}$ ou $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}(A)$) on a

$$u(K(X,Y)) = [u(D_X), u(D_Y)] - u(D_{[X,Y]}) = [u(X), u(Y)] - u([X,Y]) = 0.$$

En particulier, si D est une $\mathfrak{g}$-dérivation sur un A-module M, i.e. une $\mathfrak{g}$-dérivation sur la θ-algèbre de Lie D(M) (n°1, exemple 2), sa courbure est une application k-bilinéaire alternée de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ dans $L_A(M,M)$, donnée par la formule (20). On notera aussi que la terminologie introduite dans la déf.5 est compatible avec la notion de $\mathfrak{g}$-dérivation "à courbure nulle" pour une $\mathfrak{g}$-θ-structure (déf.2).

PROPOSITION 5 - Si D est une $\mathcal{V}$-connexion sur une θ-algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ sur A, sa forme courbure K(X,Y) est A-bilinéaire alternée en X,Y.

Il suffit de prouver qu'elle est A-linéaire en Y, or on a

$$K(X,fY) = [D_X, fD_Y] - D_{f[X,Y]+\theta_X(f)Y} = f[D_X,D_Y]+\theta_X(f)D_Y - fD_{[X,Y]} - \theta_X(f)D_Y$$

$$= f([D_X,D_Y] - D_{[X,Y]}) = fK(X,Y).$$

Compte tenu de la prop.5, on parlera souvent du tenseur courbure d'une connexion, et on identifiera K à un élément de $\mathfrak{a}_0 \otimes \Omega^2(A)$ dans le cas où $\mathcal{V} = \mathcal{V}(A)$ et où $\Omega^1(A)$ et $\mathfrak{a}_0$ ont chacun une base finie sur A.

PROPOSITION 6 - 1) Soient $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ deux θ-algèbres de Lie sur A, u un homomorphisme de θ-algèbres de Lie de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{b}$, D une $\mathcal{V}$-dérivation sur $\mathfrak{a}$, désignons par D' la $\mathcal{V}$-dérivation sur $\mathfrak{b}$ définie par $D'_X = u(D_X)$; soit K (resp. K') la forme courbure pour D (resp. D') alors on a $K'(X,Y) = u(K(X,Y))$ $(X,Y \in \mathcal{V})$.

2) Soient M_i $(0 \leq i \leq n)$ des A-modules munis de $\mathcal{V}$-dérivations D_i, considérons le prolongement canonique D des D_i au A-module $\bigotimes_{i=1}^{n}{}_A M_i$ (resp. $L_A(M_1,\dots,M_n;M_0)$. soient K_i et K les formes courbures des D_i et D, alors on a les formules

(21) $$K(X,Y)(m_1 \otimes \dots \otimes m_n) = \sum_{i=1}^{n} m_1 \otimes \dots \otimes K_i(X,Y)m_i \otimes \dots \otimes m_n$$

(resp.

(21 bis) $$(K(X,Y)u)(m_1,\dots,m_n) = K_0(X,Y)(u(m_1,\dots,m_n)) - \sum_{i=1}^{n} u(m_1,\dots,K_i(X,Y)m_i,\dots,m_n))$$

pour $X,Y \in \mathcal{V}$, $m_i \in M_i$, $u \in L_A(M_1,\dots,M_n,M_0)$.

La première assertion est triviale sur les définitions. La deuxième résulte de la première et de la dernière assertion de la prop.2 ; bien entendu, les formules (21) et (21 bis) restent valables pour des produits tensoriels sur k et des applications u qui sont n fois k-linéaires - au lieu de A-linéaires -.

Soient toujours $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{a}$ deux Θ-algèbres de Lie, $\mathfrak{a}$ étant muni d'une $\mathfrak{g}$-connexion D. Soit P le produit (n°1, exemple 2) des Θ-algèbres de Lie $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{g}$, nous allons maintenant préciser la structure de P en termes de $\mathfrak{g}$, du noyau $\mathfrak{a}_0$ de $\mathfrak{a}$, de la $\mathfrak{g}$-connexion sur $\mathfrak{a}_0$ induite par D (n°2, exemple 1) que nous noterons D', et enfin de la forme de courbure K(X,Y) (à valeurs dans $\mathfrak{a}_0$) de D. Dans le cas important où $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$, d'où $P = \mathfrak{a}$, cela détermine donc la structure d'un fibré infinitésimal $\mathfrak{a}$ muni d'une connexion D, en fonction des données que nous venons d'énumérer. - Il est d'abord évident que l'application $(a,X) \longrightarrow (a+D_X, X)$ est un isomorphisme de A-modules de $\mathfrak{a}_0 \times \mathfrak{g}$ sur P, moyennant lequel nous identifierons maintenant P à $\mathfrak{a}_0 \times \mathfrak{g}$. L'application canonique $P \longrightarrow \mathfrak{g}(A)$ est alors celle qui se déduit de l'application canonique de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}(A)$. Enfin, la loi de Lie dans P est donnée grâce à $\big[(a+D_X, X), (b+D_Y, Y)\big] = \big(\big[(a+D_X), (b+D_Y)\big], [X,Y]\big)$ or

$$\big[(a+D_X), (b+D_Y)\big] = [a,b] + [D_X, b] - [D_Y, a] + [D_X, D_Y] - D_{[X,Y]} + D_{[X,Y]}$$
$$= [a,b] + D'_X b - D'_Y a + K(X,Y) + D_{[X,Y]}$$

d'où la structure de Lie sur P identifié à $\mathfrak{a}_0 \times \mathfrak{g}$:

$$(22) \qquad \big[(a,X), (b,Y)\big] = \big([a,b] + D'_X b - D'_Y a + K(X,Y), [X,Y]\big)$$

D'ailleurs, dans le cas où $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(A)$ d'où $P = \mathcal{R}$, la connexion donnée sur $\mathcal{R}$ correspond à l'application $X \longrightarrow (0,X)$ de $\mathcal{Y}(A)$ dans P, et est donc aussi déterminée dans notre construction. Mais en tous les cas, cette application $X \longrightarrow (0,X)$ est une $\mathcal{Y}$-connexion sur P, ayant K comme forme courbure.

Supposons réciproquement donnés :

a) une A-algèbre de Lie $\mathcal{R}_0$

b) une $\mathcal{Y}$-connexion D' sur $\mathcal{R}_0$

c) une application A-bilinéaire alternée $X,Y \longrightarrow K(X,Y)$ de $\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{R}_0$. Alors la formule (22) définit dans $P = \mathcal{R}_0 \times \mathcal{Y}$ une loi de composition k-bilinéaire, de plus l'application canonique $\mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y}(A)$ définit une application $P \longrightarrow \mathcal{Y}(A)$, enfin on considère l'application $X \longrightarrow (0,X)$ de $\mathcal{Y}$ dans P. Quand ces données définissent elles P comme une θ-algèbre de Lie sur A, muni d'une $\mathcal{Y}$-connexion ? Les conditions suivantes sont manifestement nécessaires :

(i) $\begin{cases} D'_{fX} = f\,D'_X \quad ; \quad D'_X(fa) = fD'_Xa + \theta_X(f)a \\ D'_X([a,b]) = [D'_Xa, b] + [a, D'_Xb] \end{cases}$ $\qquad (f \in A,\ X \in \mathcal{Y},\ a,b \in \mathcal{U}_0)$

(ii) $[D'_X, D'_Y] - D'_{[X,Y]} = \mathrm{ad}(K(X,Y))$

(Les deux premières formules dans (i) signifient simplement que les D'_X définissent une $\mathcal{Y}$-connexion de $\mathcal{R}_0$, la dernière formule (i) signifie que les D'_X sont des dérivations de l'algèbre $\mathcal{R}_0$ - la nécessité de cette condition avait déjà été signalée dans n°2, exemple 1 - ; enfin (ii) peut aussi s'écrire $K'(X,Y) = \mathrm{ad}(K(X,Y))$, sa nécessité est évidente et résulte aussi de la première assertion dans prop. 6).

LEMME - Pour que les données a),b),c) envisagées ci-dessus

définissent sur $P = \mathcal{A}_0 \times \mathcal{G}$ une structure de Θ-algèbre de Lie sur A, muni d'une $\mathcal{G}$-connexion, il faut et il suffit que les conditions (i) et (ii) ci-dessus soient vérifiées, ainsi que la condition

(iii) $\qquad dK = 0$

où dK est la différentielle extérieure définie dans le th.1, c'est-à-dire (formule (18)) est l'application trois fois A-linéaire alternée de $\mathcal{G}^3$ dans $\mathcal{A}_0$ définie par

$$dK(X,Y,Z) = \sum D^1_X(K(Y,Z)) - \sum K([X,Y],Z)$$

Il reste à vérifier la nécessité de (iii), et la suffisance de (i), (ii), (iii). La première formule (2) de la déf.1 est triviale, un calcul immédiat montre que la deuxième formule (2) résulte de (i) ; de même il est trivial que l'application envisagée $P \to \mathcal{G}(A)$ est compatible avec le crochet. Il reste à exprimer que la loi (2) est une loi de Lie, nous allons voir que (compte tenu de (ii)) cela signifie précisément qu'on a (iii). Tout d'abord, on a

$$[(a,X),(a,X)] = ([a,a] + D^1_X a - D^1_X a + K(X,X), [X,X]) = 0$$

(puisque K est alternée), reste à examiner l'identité de Jacobi. Or on a $[[(a,X),(b,Y)],(c,Z)] =$

$$= ([[a,b],c] + [D^1_X b, c] - [D^1_Y a, c] + [K(X,Y),c] + D^1_{[X,Y]} c - D^1_Z([a,b]) -$$
$$- D^1_Z D^1_X b + D^1_Z D^1_Y a - D^1_Z K(X,Y) + K([X,Y],Z), [[X,Y],Z])$$

L'identité de Jacobi signifie que la somme des permutés circulaires du deuxième membre est nulle. Or, d'après l'identité de Jacobi dans $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{G}$, les sommes $\sum [[a,b],c]$ et $\sum [[X,Y],Z]$

sont nulles, il reste donc à exprimer la nullité de la somme suivante $\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3$ dans $\mathfrak{a}_0$, où les Σ_i sont explicités ci-dessous.

$$\Sigma_1 = \sum \left[D'_X b, c\right] - \sum \left[D'_Y a, c\right] - \sum D'_Z\left(\left[a, b\right]\right)$$

Dans le deuxième membre, on peut remplacer la première somme par $\sum \left[D'_Z a, b\right]$ la deuxième somme par $\sum \left[a, D'_Z b\right]$, il s'ensuit que Σ_1 est nul puisque on a $D'_Z\left[a, b\right] = \left[D'_Z a, b\right] + \left[a, D'_Z b\right]$ en vertu de (i)

$$\Sigma_2 = -\sum D'_Z K(X,Y) + \sum K\left(\left[X,Y\right], Z\right) = -dK(X,Y,Z)$$

$$\Sigma_3 = \sum \left[K(X,Y), c\right] + \sum D'_{\left[X,Y\right]} c - \sum D'_Z D'_X b + \sum D'_Z D'_Y a$$

Les deux derniers termes du deuxième membre s'écrivent respectivement $-\sum D'_X D'_Y c$ et $+\sum D'_Y D'_X c$, de sorte qu'il vient

$$\Sigma_3 = \left(\mathrm{ad}(K(X,Y) - \left(\left[D'_X, D'_Y\right] - D'_{\left[X,Y\right]}\right)\right) c = 0$$ en vertu de (ii).

L'identité de Jacobi pour P se réduit donc à la relation $-\Sigma_2 = dK(X,Y,Z) = 0$ ce qui achève la démonstration. On a prouvé en particulier le

THEOREME 2 - Soit K la forme courbure d'une $\mathfrak{g}$-connexion sur une θ-algèbre de Lie $\mathfrak{a}$, alors on a l'Identité de Bianchi $dK = 0$, i.e. on a

$$\sum \left[D_X, K(Y,Z)\right] - \sum K\left(\left[X,Y\right], Z\right) = 0 \qquad (X,Y,Z \in \mathfrak{g}) \tag{23}$$

De plus le lemme ci-dessus montre que l'Identité de Bianchi est la seule relation non triviale vérifiée par le tenseur courbure d'une connexion arbitraire.

Remarque - L'identité de Bianchi est encore vraie si D est une $\mathfrak{g}$-dérivation (et non nécessairement une $\mathfrak{g}$-connexion). Pour

le voir, il suffit de faire abstraction des structures de A-module, et faire opérer $\mathcal{G}$, $\mathcal{R}$ trivialement dans l'anneau d'opérateurs k, puis appliquer l'identité de Bianchi en remplaçant A par k. Mais en fait, on a vu que dans l'identité en question (tout comme dans le th.1), il n'y a pas plus de A, Θ-algèbres etc. que de Tohoku, et qu'on vient simplement d'exprimer la condition pour qu'une application bilinéaire K(X,Y) d'une algèbre de Lie dans une autre définisse une extension d'algèbres de Lie grâce à (22) : ça doit être un "cocycle" alterné comme chacun sait, et satisfaire (ii). Ca aura peut être été fait dans le multiplodoque homologique (où on aurait alors avantage de ne pas se borner de prime abord au cas où le noyau $\mathcal{R}_0$ de l'extension est abélien), ainsi que le th.1.

Exercice 1 - Montrer que la donnée sur un ensemble $\mathcal{G}$ d'une structure de Θ-algèbre de Lie sur A revient à la donnée sur $\mathcal{G}$ de: a) une structure de k-algèbre de Lie b) une structure de A-module compatible avec la structure de k-module c) une dérivation $f \longrightarrow d_{\mathcal{G}} f$ de A dans le dual $\mathcal{G}'$ du A-module $\mathcal{G}$, avec les axiomes suivants :

(i) $[X, fY] = f[X,Y] + \langle X, d_{\mathcal{G}} f \rangle Y \quad (f \in A,\ X, Y \in \mathcal{G})$

(ii) L'opérateur d défini sur $C_A(\mathcal{G})$ à l'aide de la formule (17) (où on fait $D_X f = \langle X, d_{\mathcal{G}} f \rangle$) est de carré nul, ou encore l'application A-linéaire naturelle de $\Omega(A)$ dans $C_A(\mathcal{G})$ définie par l'application A-linéaire $\Omega^1(A) \longrightarrow \mathcal{G}'$ déduite de $d_{\mathcal{G}}$ permute aux opérateurs d.

Exercice 2. Soit $\mathfrak{g}$ une θ-algèbre de Lie sur A, M un A-module. Montrer que si $\mathfrak{g}$ a une base finie sur A, la donnée d'une $\mathfrak{g}$-connexion D sur M est équivalente à la donnée d'une application k-linéaire D : $M \to M \otimes_A \mathfrak{g}'$ telle que $D(fm) = fD(m) + m \otimes_A d_{\mathfrak{g}} f$ ($f \in A$, $m \in M$), où $d_{\mathfrak{g}} f$ est l'élément de $\mathfrak{g}'$ défini par $\langle X, d_{\mathfrak{g}} f \rangle = \theta_X(f)$, (voir exercice 1) ; alors m est invariant par la $\mathfrak{g}$-connexion si et seulement si $D(m) = 0$. Montrer que (sans hypothèse sur $\mathfrak{g}$), une application D : $M \to M \otimes_A \mathfrak{g}'$ comme ci-dessus définit une $\mathfrak{g}$-connexion sur A.

Exercice 3. (Images réciproques de fibrés). Soit $\varphi : A \to B$ un homomorphisme de k-algèbres. Pour tout A-module M, soit $\varphi_M = B \otimes_A M$ le B-module déduit de M par extension des scalaires à M.

a) Définir un B-homomorphisme canonique $\overline{\varphi}$ de $\mathfrak{g}(B)$ dans $\mathrm{Hom}_A(\Omega^1(A), B)$, donc dans $\varphi\mathfrak{g}(A)$ si $\Omega^1(A)$ admet une base finie sur A, ce que nous supposerons dorénavant pour simplifier.

b) Montrer que pour toute connexion D sur le A-module M, défini (exer. 2) par une application D : $M \to M \otimes_A \Omega^1(A)$, il existe une application unique φ_D : $M \to \varphi_M \otimes_B \Omega^1(B)$ ayant la propriété envisagée dans exercice 2 (et définissant donc une connexion sur φ_M), telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M & \to & M \otimes_A \Omega^1(A) \\ \downarrow & & \\ \varphi_M & \to & \varphi_M \otimes_B \Omega^1(B) \end{array} \downarrow$$

soit commutatif. Montrer que l'application canonique $C_A(\mathfrak{g}(A), M)$ $C_B(\mathfrak{g}(B), \varphi_M)$ déduite de l'application canonique

$C_A(\mathfrak{g}(A), M) \longrightarrow C_B({}^{\varphi}\mathfrak{g}(A), {}^{\varphi}M)$ et des applications canoniques $M \longrightarrow {}^{\varphi}M$ et $\mathfrak{g}(B) \longrightarrow {}^{\varphi}\mathfrak{g}(A)$ est compatible avec les opérateurs d définis par les connexions envisagées, et que l'application canonique $C_A(\mathfrak{g}(A), L_A(M)) \longrightarrow C_B(\mathfrak{g}(B), L_B({}^{\varphi}M))$ définie de façon analogue (grâce à l'application $L_A(M) \longrightarrow L_B({}^{\varphi}M)$) transforme forme courbure en forme courbure.

c) Soit $\mathfrak{g}$ un fibré infinitésimal sur A. Définir une application B-linéaire canonique u de ${}^{\varphi}\mathfrak{g}$ dans $\mathrm{Hom}_A(\Omega^1(A), B) = {}^{\varphi}\mathfrak{g}(A)$, soit $\overline{\mathfrak{g}}$ le sous-B-module de ${}^{\varphi}\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}(B)$ formé des couples (X,Z) tels que $uX = \overline{\varphi}(Z)$, (cf. a) pour la définition de $\overline{\varphi}$), $\overline{\mathfrak{g}}$ est une extension de $\mathfrak{g}(B)$ par ${}^{\varphi}\mathfrak{g}_0$, où $\mathfrak{g}_0$ est le noyau de $\mathfrak{g}$. Montrer qu'on peut mettre d'une seule façon sur $\overline{\mathfrak{g}}$ une structure de fibré infinitésimal sur B, de telle façon que pour toute connexion sur $\mathfrak{g}$, identifiant le A-module $\mathfrak{g}$ à $\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}(A)$ donc $\overline{\mathfrak{g}}$ à ${}^{\varphi}\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}(B)$, la loi de Lie dans ce dernier soit donné par la formule (22), où ${}^{\varphi}\mathfrak{g}_0$ est muni de la loi de B-algèbre de Lie prolongeant celle de $\mathfrak{g}_0$, et de la connexion déduite comme dans b) de la connexion sur $\mathfrak{g}_0$ associée à la connexion donnée, et où l'application B-bilinéaire alternée K de $\mathfrak{g}(B) \times \mathfrak{g}(B)$ dans ${}^{\varphi}\mathfrak{g}_0$ est celle déduite de la forme courbure de la connexion donnée. (Le rédacteur a visiblement la flemme de chercher une caractérisation plus jolie). Montrer que $\overline{\mathfrak{g}}$ est un foncteur en $\mathfrak{g}$, compatible avec les produits.

d) En se servant de c), redonner les énoncés de b) en y remplaçant les connexions par des $\mathfrak{g}$-connexions et des $\overline{\mathfrak{g}}$-connexions.

7 - Différentiations absolues.

DÉFINITION 6 - On appelle différentiation absolue sur la k-algèbre A une connexion (déf.2) sur le module $\mathcal{D}(A)$ dual de $\Omega^1(A)$.

C'est donc par définition la donnée, pour tout $X \in \mathcal{D}(A)$, d'une X-dérivation D_X de $\mathcal{D}(A)$, dépendant A-linéairement de X :

(24) $D_X(fY) = fD_XY + \theta_X(f)Y \qquad D_{fX}Y = fD_XY \quad (X,Y \in \mathcal{D}(A), f \in A)$

Conformément à déf.4, il y a lieu de considérer les prolongements canoniques de la connexion D aux divers espaces tensoriels construits sur $\mathcal{D}(A)$, prolongements encore notés D. On se rappellera que $D_X f = \theta_X f$ si $f \in A$. En particulier $L_A(\mathcal{D}(A), A) = \mathcal{D}(A)'$ est muni d'une connexion D, donc dans le cas où $\Omega^1(A)$ a une base finie sur A (et s'identifie par suite au module dual de son dual $\mathcal{D}(A)$) $\Omega^1(A)$ est aussi muni d'une connexion D. (N.B. Il serait peut-être plus indiqué de définir une différentiation absolue comme une connexion sur $\Omega^1(A)$, d'où on déduit alors une connexion sur son dual $\mathcal{D}(A)$, alors que l'inverse n'est pas toujours vrai. Mais alors la définition "naturelle" de la courbure de D diffère par une transposition et le signe de la courbure usuelle). Alors on a une connexion sur l'algèbre $T(\mathcal{D}(A) + \Omega^1(A))$ des "tenseurs mixtes" de A (algèbre tensorielle de $\mathcal{D}(A) + \Omega^1(A)$) compatible avec les opérations de contraction etc. En vertu du n°5, si M est un A-module pour lequel on a pu définir le prolongement canonique de D (par exemple le A-module des tenseurs mixtes) on définit un opérateur d de différentiation

extérieure d (de carré en général non nul si D n'est pas à courbure nulle) de degré +1 dans $M \otimes_A \Omega(A) = C_A(\mathcal{V}(A), M)$, par la formule

(21) $\quad d(m \otimes F^p) = (Dm).F^p + m \otimes dF^p \qquad (m \in M,\ F^p \in \Omega^p(A))$

où $Dm \in M \otimes_A \Omega^1(A)$ est l'élément de ce produit tensoriel correspondant à l'application linéaire $X \longrightarrow D_X m$ de $\mathcal{V}(A)$ dans M. Quand M n'est pas explibité à l'avance et quand $F \in M \otimes_A \Omega^p(A)$ est donné, il y a une ambiguité sur le sens de dF, dont la signification est différente suivant que F est regardé comme ci-dessus comme une p-forme à valeurs dans M, ou comme une 0-forme à valeurs dans $N = M \otimes_A \Omega^p(A)$ (ou quelque A-module plus grand). A moins que le contexte n'indique clairement la signification de ce symbole, il faudra prendre soin de l'expliquer chaque fois. (On peut songer à mettre en exposant $(d^{(p)})$, s'il y a lieu, le degré extérieur de ce qu'on différentie, mais on est baisé quand même si on veut dériver une forme non homogène...). Le rédacteur ajoute qu'il ignore absolument le degré d'utilité de cette opération hydride d, et si Bourbaki se doit d'en codifier la notation.

Rappelons (déf.5) que la <u>forme courbure</u> de la différentiation absolue D est une application A-bilinéaire alternée K de $\mathcal{V}(A) \times \mathcal{V}(A)$ dans $L_A(\mathcal{V}(A), \mathcal{V}(A))$ défini par

(25) $\quad K(X,Y) = [D_X, D_Y] - D_{[X,Y]} \qquad (X,Y \in \mathcal{V}(A))$

Si $\Omega^1(A)$ admet une base finie sur A, K sera aussi identifié, suivant les conventions générales d'algèbre tensorielle (voir

compléments tensoriels) à un élément de $(\mathfrak{D}(A)\otimes_A\Omega^1(A))\otimes_A\Omega^2(A)$, i.e. une 2-forme à valeurs dans $\mathfrak{D}(A)\otimes_A\Omega^1(A)$. La proposition 6 donne la règle pour déterminer les formes courbures des connexions prolongements canoniques de D.

DEFINITION 7 - Soit D une différentiation absolue sur A. On appelle forme de torsion (ou simplement torsion) de T, l'application A-bilinéaire alternée T de $\mathfrak{D}(A)\times\mathfrak{D}(A)$ dans $\mathfrak{D}(A)$ définie par :

(25) $\qquad T(X,Y) = D_XY - D_YX - [X,Y] \qquad (X,Y\in\mathfrak{D}(A))$

Il est évident sur la formule que T est bien k-bilinéaire alternée en X,Y, il suffit de vérifier qu'elle est A-linéaire en X, or on a en effet $T(fX,Y)=fD_XY-YfD_XX-\partial_Y(f)X-f[X,Y]+\partial_Y(f)X=$ $= fT(X,Y)$. - Dans le cas où $\Omega^1(A)$ a une base finie sur A, T sera aussi considéré comme un tenseur élément de $\mathfrak{D}(A)\otimes_A\Omega^2(A)$.

Soit M un A-module pour lequel on puisse définir le prolongement canonique de la connexion donnée, on désigne par K^M la forme courbure de ce prolongement (qui s'exprime donc facilement en fonction de la forme courbure K de D). Comme $m\longrightarrow Dm$ est une application A-linéaire de M dans $L_A(\mathfrak{D}(A),M)$ et que D se prolonge aussi canoniquement au A-module $L_A(\mathfrak{D}(A),M)$, on peut aussi définir l'application $m\longrightarrow DDm$ de M dans $L_A(\mathfrak{D}(A),L_A(\mathfrak{D}(A),M)))$ $= L_A(\mathfrak{D}(A),\mathfrak{D}(A);M)$, ainsi pour $m\in M$, DDm est une application A-bilinéaire de $\mathfrak{D}(A)\times\mathfrak{D}(A)$ dans M, et on a

$DDm(X,Y) = (D(Dm))(X)(Y) = D_X((Dm)(Y))-(Dm)(D_XY) = D_XD_Ym - D_{D_XY}m$

En général, DDm(X,Y) n'est pas symétrique en X,Y, et on a de façon précise $DDm(X,Y)-DDm(Y,X) = (D_XD_Y-D_YD_X)m - D_{D_XY-D_YX}m$

Or de (26) on tire $D_X Y - D_Y X = T(X,Y) + [X,Y]$, d'où on conclut, tenant compte que $(D_X D_Y - D_Y D_X - D_{[X,Y]})m = K^M(X,Y)m$:

(27) $DDm(X,Y) - DDm(Y,X) = K^M(X,Y).m - D_{T(X,Y)}m$ $(X,Y \in \mathcal{Y}(A),\ m \in M)$

Ainsi, l'antisymétrisée de la forme $DDm(X,Y)$ s'exprime simplement en fonction de la courbure et de la torsion de la connexion D. En particulier, si $M = A$, on obtient (puisque $K^A = 0$)

(27 bis) $DDf(X,Y) - DDf(Y,X) = - D_{T(X,Y)} f$

donc $DDf(X,Y)$ est symétrique en X,Y pour toute $f \in A$ si et seulement si la torsion T est nulle ; et pour qu'on ait en plus $DDZ(X,Y)$ symétrique en X,Y pour tout $Z \in \mathcal{Y}(A)$, il faut et il suffit que de plus la courbure K de D soit nulle.

Nous allons maintenant exprimer l'identité de Bianchi (th.2) à l'aide de la torsion. On a (les signes $\sum$ signifiant des sommations sur les permutés circulaires de X,Y,Z) :

$(D_X K)(Y,Z) = \sum D_X(K(Y,Z)) - \sum K(D_X Y, Z) - \sum K(Y, D_X Z)$

La première somme du second membre est égale à $\sum K([X,Y],Z)$ en vertu de Bianchi, la dernière peut aussi s'écrire $- \sum K(Z, D_X Y) = - \sum K(-D_X Y, Z)$, le deuxième membre est donc égal à $\sum K([X,Y] - D_X Y + D_Y X\ ,\ Z)$, d'où

(28) $(D_X K)(Y,Z) = - \sum K(T(X,Y),Z)$ $\qquad (X,Y,Z \in \mathcal{Y}(A))$

(deuxième identité de Bianchi). Notons aussi la formule suivante (première identité de Bianchi) :

(29) $K(X,Y)(Z) = dT(X,Y,Z)$ $\qquad (X,Y,Z \in \mathcal{Y}(A))$

où dans le deuxième membre, on prend la différentielle exté-

rieure de T considérée comme 2-forme à valeurs dans $\mathfrak{M}(A)$. En effet, le premier membre est par définition $\sum D_X D_Y Z - \sum D_Y D_X Z - \sum D_{[X,Y]} Z$, or la deuxième somme peut aussi s'écrire $-\sum D_X D_Z Y$ et la troisième $-\sum D_{[Y,Z]} X$, de sorte qu'on obtient $\sum (D_X(D_Y Z - D_Z Y) - D_{[Y,Z]} X) = \sum (D_X(T(Y,Z)) + D_X([Y,Z]) - D_{[Y,Z]} X) = \sum (D_X(T(Y,Z)) + T(X,[Y,Z]) + [X,[Y,Z]])$. Tenant compte de l'identité de Jacobi, on obtient enfin $\sum D_X(T(Y,Z)) + \sum T(X,[Y,Z])$, i.e. le deuxième membre de (29).

Connexion affine associée à une différentiation absolue. Soit M un A-module, on appelle connexion affine sur M une connexion dans la Θ-algèbre de Lie $\mathfrak{A}(M)$ des dérivations affines de M (n°1, exemple 5). Par définition, une connexion affine sur M est donc donnée par un couple (D,ω) d'une connexion sur M, et d'une application A-linéaire de $\mathfrak{M}(A)$ dans M (un tel couple correspondant à l'application $X \to ((D_X,\omega(X)),X)$ de $\mathfrak{M}(A)$ dans $\mathfrak{A}(M)$). La courbure d'une telle connexion affine est donnée par

(30) $\quad K'(X,Y) = (K(X,Y),T(X,Y))$

où K(X,Y) est la courbure de la connexion D et où T(X,Y) est donnée par

(31) $\quad T(X,Y) = D_X\omega(Y) - D_Y\omega(X) - \omega([X,Y]) = (d\omega)(X,Y)$

comme le montre un calcul immédiat. Si maintenant $M = \mathfrak{M}$ et si on s'est donnée une différentiation absolue dans A, i.e. une connexion D dans $\mathfrak{M}$, on appelle connexion affine associée à la différentiation absolue D, la connexion affine (D,ω) dans $\mathfrak{M}$, où $\omega(X) = X$. Sa courbure K' a pour composantes la courbure et la

torsion de la connexion D. Ecrivant l'identité de Bianchi pour la connexion affine (D, ω), on retrouve les formules (28) et (29).

8 - Différentiation absolue définie par une métrique.

Soit M un A-module, g une forme A-bilinéaire symétrique sur M, faisant donc de M un A-module métrique. Une connexion sur M est dite métrique si elle invarie g, i.e. si on a

(32) $\quad \theta_X g(Y,Z) = g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z)$

THEOREME 3 - Soit g une forme bilinéaire symétrique sur $\mathcal{V}(A) \times \mathcal{V}(A)$, définissant un isomorphisme de $\mathcal{V}(A)$ sur le module dual. Supposons que 2 soit inversible dans A. Alors il existe une différentiation absolue D et une seule sur A, qui soit une connexion métrique sans torsion. Elle est caractérisée par la formule

(33) $\quad 2g(D_X Y, Z) = g([X,Y], Z) - g([Y,Z], X) + g([Z,X], Y)$
$\qquad + \theta_X g(Y,Z) + \theta_Y g(Z,X) - \theta_Z g(X,Y) \qquad (X,Y,Z \in \mathcal{V}(A))$

L'unicité résultera évidemment de (33), qui détermine en effet $g(D_X Y, Z)$ pour tout $Z \in \mathcal{V}(A)$, donc qui détermine $D_X Y$ en vertu de l'hypothèse faite sur g. Pour prouver (33) pour toute D métrique sans torsion, i.e. une D satisfaisant (32) et

(34) $\quad D_X Y - D_Y X = [X,Y] \qquad (X,Y \in \mathcal{V}(A))$

on écrit les formules suivantes (qui résultent alternativement de (32), (34), et des formules qui s'en déduisent par permutations circulaires):

$$g(D_X Y, Z) = \theta_X g(Y,Z) - g(Y, D_X Z)$$

$$-g(Y,D_X Z) = -g(Y,[X,Z]) - g(Y,D_Z X)$$
$$-g(Y,D_Z X) = -\theta_Z g(Y,X) + g(D_Z Y,X)$$
$$g(D_Z Y,X) = g([Z,Y],X) + g(D_Y Z,X)$$
$$\therefore g(D_Y Z,X) = \theta_Y g(Z,X) - g(Z,D_Y X)$$
$$-g(Z,D_Y X) = -g(Z,[Y,X]) - g(Z,D_X Y)$$

Ajoutant toutes ces formules membre à membre, on trouve (33). Pour prouver l'existence de D, il suffit de prouver que le deuxième membre de (33) est A-linéaire en Z (ce qui permet de définir un $D_X Y \in \mathfrak{J}(A)$ pour $X,Y \in \mathfrak{J}(A)$ par la formule (33)) et A-linéaire en X (ce qui prouve que $D_X Y$ est A-linéaire en X), enfin que en y remplaçant Y par fY, il est multiplié par f et augmenté de $2\theta_X(f)g(Y,Z)$ (ce qui prouve que $Y \longrightarrow D_X y$ est une X-dérivation). Le détail des calculs (obtenus en copiant du rapport Borel) est laissé au lecteur, d'autant plus que Bourbaki s'empressera (à tort) de vider le présent numéro.

Exercice. Soit M un A-module muni d'une forme A-bilinéaire symétrique g, Soit $X \in \mathfrak{J}(A)$, une X-dérivation de M est dite métrique si elle invarie g. Soit $D_g(M)$ le sous-ensemble du module D(M) des dérivations de M (n°1, exemple 2) formé des dérivations métriques, montrer que c'est une sous-θ-algèbre de Lie de D(M). Les connexions métriques sur M s'identifient aux connexions de la θ-algèbre de Lie $D_g(M)$. Le noyau de $D_g(M)$ est le module des endomorphismes antihermitiens de M. - Généraliser ces profondes remarques au cas où g n'est plus nécessairement symétrique.

§ 3 - Opérateurs différentiels

1 - Définition des opérateurs différentiels.

DEFINITION 1. Soient M et N deux A-modules. Pour tout entier $k \geq 0$, on définit les opérateurs différentiels d'ordre $\leq k$ de M dans N, de la façon qui suit.

(i) pour $k = 0$, ce sont les applications A-linéaires de M dans N

(ii) Pour $k > 0$, une application D de M dans N est un opérateur différentiel d'ordre $\leq k$, si elle est k-linéaire, et si pour tout $f \in A$, l'application $x \to D(fx) - fD(x)$ de M dans N est un opérateur différentiel d'ordre $\leq k-1$.

L'ensemble des opérateurs différentiels d'ordre $\leq k$ de M dans N sera noté $D^k(M,N)$ ou, s'il y a lieu, $D^k_A(M,N)$ ou $D^k_{A/k}(M,N)$ (car on fera attention que la structure de k-algèbre de A intervient dans la définition 1). On voit immédiatement que $D^k(M,N) \subset D^{k'}(M,N)$ si $k \leq k'$ (récurrence sur k, l'assertion étant triviale pour $k = 0$). On appelle opérateur différentiel de M dans N une application D de M dans N appartenant à l'un des $D^k(M,N)$; le plus petit des entiers k tels que $D \in D^k(M,N)$ est appelé l'ordre de l'opérateur différentiel D. Ainsi D est un opérateur différentiel d'ordre $\leq k$ si et seulement s'il est un opérateur différentiel d'ordre $\leq k$, et Bourbaki triomphe.

Si N est un sous-module d'un A-module N_1, M un module quotient du A-module M_1, D une application de M dans N, D' l'application correspondante de M_1 dans N_1, alors D est un opérateur différentiel d'ordre $\leq k$ si et seulement si D' l'est. Une

application k-linéaire D d'une somme directe $\sum_i M_i$ dans un produit direct $\prod_j N_j$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leq k$ si et seulement si les applications correspondantes $M_i \longrightarrow N_j$ le sont. La somme de deux opérateurs différentiels d'ordre $\leq k$ en est un. (Les démonstrations sont immédiates par récurrence sur k).

PROPOSITION 1 - Soient M,N,P trois A-modules, D (resp. D') un opérateur différentiel d'ordre $\leq k$ (resp. $\leq k'$) de M dans N (resp. de N dans P). Alors D'D est un opérateur différentiel d'ordre $\leq k+k'$ de M dans P.

Soit $f \in A$, et posons $D(fm) - fD(m) = L(m)$, $D'(fn)-fD'(n)=L'(n)$ (donc $L : M \longrightarrow N$ et $L' : N \longrightarrow P$ sont des opérateurs différentiels d'ordre $\leq k$ (resp. d'ordre $\leq k'$)). On a alors

$(D'D)(fm)-f(D'D)(m) = D'(fD(m))+D'(L(m))-fD'D(m) = L'(D(m))+D'(L(m))$

Or la prop. 1 est triviale si $k = k' = 0$, supposons la prouvée pour des couples d'entiers dont la somme est $<n$ (où n est un entier >0) prouvons-là pour un couple d'entiers (k,k') de somme n. Il faut donc prouver que dans ce cas le premier membre de la formule ci-dessus est un opérateur différentiel d'ordre $\leq k+k'-1$, or cela se voit immédiatement sur chacun des deux termes du second membre, ce qui prouve la prop.1 par récurrence sur $k+k'$.

COROLLAIRE - Soit D un opérateur différentiel d'ordre $\leq k$ de M dans N, soit pour tout $f \in A$, fD (resp. Df) l'application de M dans N définie par

(1) $(fD)(m) = f(D(m))$ resp. $(Df)(m) = D(fm)$ $(f \in A, m \in M)$

Alors fD et Df sont des opérateurs différentiels d'ordre $\leq k$.

Il suffit de remarquer que $fD = P_f D$, $Df = DP_f$, où P_f désigne l'application A-linéaire de M dans M, ou de P dans P, définie par $P_f x = fx$: on applique la prop. 1 avec $k = 0$ resp. $k' = 0$.

Ainsi, les opérations $D \longrightarrow fD$ et $D \longrightarrow Df$ (pour $f \in A$) définissent $D^k(M,N)$ comme un bimodule sur A. Quand on considère $D^k(M,N)$ comme un A-module sans autre spécification, il sera sous-entendu qu'il s'agit de sa structure définie par les multiplicateurs à gauche, dont les homothéties sont les $D \longrightarrow fD$. On fera attention qu'en général, si $k > 0$, la composition des opérateurs différentiels n'est bilinéaire pour aucune des deux structures de A-module envisagées (à gauche, ou à droite) ; on a les formules évidentes :

(2) $\quad (fD')D = f(D'D)$, $D'(Df) = (D'D)f$, $(D'f)D = D'(fD)$

mais en général les deux membres de la dernière formule sont différents de $(D'D)f$ et de $f(D'D)$.

8 - L'algèbre $P^k(A)$ et les modules $P^k(M)$.

Rappelons qu'une algèbre augmentée sur A est une A-algèbre B, muni d'un homomorphisme de A-algèbres $B \longrightarrow A$, (appelé l'augmentation, et noté ε). Le noyau de ε est appelé l'idéal d'augmentation, et noté par la suite I(B). B est dite d'ordre $\leq k$ si $I(B)^k = 0$, l'ordre de B est le plus petit entier k ayant cette propriété (ou l'infini, si aucun tel entier n'existe). Un module augmenté P sur une A-algèbre augmentée B est formé d'un couple (P,M) d'un B-module P, d'un A-module M, enfin d'une

application $P \to M$ (appelée encore l'augmentation et notée ε), surjective et telle que $\varepsilon(FX) = \varepsilon(F)\,\varepsilon(X)$ pour $F \in B, X \in P$. Enfin, si B_1 et B_2 sont deux A-algèbres augmentées, on appelle homomorphisme d'algèbres augmentées de B_1 dans B_2 un homomorphisme de A-algèbres de B_1 dans B_2 qui commute aux augmentations, ou ce qui revient au même, qui applique $I(B)$ dans $I(C)$.

DEFINITION 2 - Soit A une k-algèbre commutative. Considérons $A \otimes_k A$ comme une A-algèbre par les opérations définies par $f(g \otimes h) = (fg) \otimes h$, et munissons-la de l'augmentation définie par $\varepsilon(f \otimes g) = fg$, soit I l'idéal de l'augmentation. Soit k un entier ≥ 0. On appelle algèbre des parties principales d'ordre k de la k-algèbre A, et on note $P^{(k)}(A)$ ou le cas échéant $P^{(k)}_k(A)$, la A-algèbre augmentée $A \otimes_k A/I^{k+1}$. Pour toute $f \in A$, on appelle partie principale d'ordre k de f, et on note $d^{(k)}f$ ou le cas échéant $d^{(k)}_k f$, l'image canonique de $1 \otimes f$ dans l'algèbre $P^{(k)}(A)$.

La terminologie adoptée se justifie du fait que $P^{(k)}(A)$ est bien, en tant qu'algèbre augmentée, d'ordre $\leq k$ (et même d'ordre k dans les cas les plus importants, ainsi que nous le verrons par la suite).

DEFINITION 3 - Soit M un module sur la k-algèbre A, considérons $A \otimes_k M$ comme un module sur la A-algèbre $A \otimes_k A$ (considérée dans déf. 2) par la formule $(f \otimes g).(h \otimes m) = (fh) \otimes (gm)$ (d'où une structure sous-jacente de A-module, définie aussi par $f(h \otimes m) = (fh) \otimes m$). Munissons $A \otimes_k M$ de l'augmentation ε, à valeurs dans le A-module M, définie par $\varepsilon(f \otimes m) = fm$, faisant de $A \otimes_k M$

un module augmenté sur la A-algèbre augmentée $A \otimes_k A$. Soit k un entier ≥ 0. On appelle module des parties principales d'ordre k de M et on note $P^{(k)}(M)$, ou le cas échéant $P_A^{(k)}(M)$ ou $P_{A,k}^{(k)}(M)$, le quotient $A \otimes_k M/I^{k+1}$ $(A \otimes_k M)$ (où I est l'idéal d'augmentation de $A \otimes_k A$), considéré comme un module augmenté sur l'algèbre augmentée $P^{(k)}(A)$, grâce à l'augmentation $P^{(k)}(M)$ M déduite par passage au quotient de l'augmentation envisagée sur $A \otimes_k M$. Pour tout $m \in M$, on appelle partie principale d'ordre k de m et on note $d^{(k)}m$ (ou $d_A^{(k)}m$ ou $d_{A,k}^{(k)}m$) l'image canonique de $1 \otimes m$ dans le module $P^{(k)}(M)$.

Il résulte aussitôt des définitions que

(3) $d^k(fg) = d^k f . d^k g$ $\qquad d^k\lambda = \lambda \quad (\lambda \in k; f, g \in A)$

(4) $d^k(fm) = (d^k f)(d^k m)$ $\qquad (f \in A,\ m \in M)$

(5) $\varepsilon(d^k m) = m$ en particulier $\varepsilon(d^k f) = f \quad (m \in M,\ f \in A)$

Bien entendu, il ne faudra pas croire que l'application $d^k : A \longrightarrow P^{(k)}(A)$ soit A-linéaire (ce qui impliquerait $d^k f = d^k(f.1) = f.d^k 1 = f$, ce qui ne peut se produire que si $I = I^{k+1}$ d'où $P^{(k)}(A) = P^{(0)}(A) = A$, cas qui manque d'intérêt).

LEMME 1 - L'idéal I de l'augmentation de $A \otimes_k A$ est le A-module engendré par les éléments de la forme $f \otimes 1 - 1 \otimes f$ $(f \in A)$, c'est donc aussi l'idéal engendré par lesdits éléments.

Il suffit de montrer que tout élément $x = \sum f_i \otimes g_i$ dans I est dans le A-module en question. Or on aura par hypothèse $\sum f_i g_i = 0$ d'où $\sum f_i g_i \otimes 1 = 0$ d'où

$x = \sum (f_i \otimes g_i - (f_i g_i) \otimes 1) = \sum f_i (1 \otimes g_i - g_i \otimes 1)$ ce qui démontre

notre assertion.

THEOREME 1 - Soient M,N deux A-modules, k un entier ≥ 0. Alors l'application $u \to u \circ d^{(k)}$ est un isomorphisme de A-modules de $L_A(P^{(k)}(M),N)$ sur $D^k(M,N)$.

Ce théorème caractérise donc le couple du A-module $P^{(k)}(M)$ et de l'application $d^{(k)} : M \to P^{(k)}(M)$ comme solution d'un problème universel que le lecteur se fera un plaisir de formuler.

Démonstration du théorème 1. A priori, l'application envisagée est une application de $L_A(P^{(k)}(M),N)$ dans $L_k(M,N)$, évidemment A-linéaire (quand on met sur $L_k(M,N)$ la structure de A-module définie par $(fD)(m) = f.D(m)$), et de plus injective, car il est clair par construction que $P^{(k)}(M)$ est engendré, en tant que A-module, par l'ensemble $d^{(k)}(M)$ (puisque le A-module $A \otimes_k M$ est engendré par l'ensemble des $1 \otimes m$, $m \in M$). Il reste à prouver que l'image est formée exactement des opérateurs différentiels d'ordre $\leq k$. Or, pour qu'une application A-linéaire D de M dans N soit de la forme $u \circ d^{(k)}$, il faut et il suffit manifestement que l'application k-linéaire $D' : A \otimes_k M \to N$ qui s'en déduit par la formule $D'(f \otimes m) = fD(m)$ (laquelle D' est d'ailleurs automatiquement A-linéaire), s'annule sur $I^{k+1}(A \otimes_k M)$, ou encore, en vertu du lemme 1, s'annule sur les éléments de la forme

$$(\prod_{i=1}^{k+1} (f_i \otimes 1 - 1 \otimes f_i)).(1 \otimes m)$$

($f_1,\dots,f_{k+1} \in A$, $m \in M$). Posons pour abréger $f=(f_1,\dots,f_{k+1})$, et pour toute partie H de l'ensemble $[1,k+1]$ des entiers $1,\dots,k+1$, soit $f_H = \prod_{i \in H} f_i$; l'élément envisagé ci-dessus

s'écrit aussi $\sum_{H\subset[1,k+1]} (-1)^h f_{\complement H} \circ f_H m$, (où h désigne le nombre d'éléments de H), et la condition envisagée sur D (savoir que D' s'annule sur les éléments en question) s'écrit :

(6) $\sum_{H\subset[1,k+1]} (-1)^h f_{\complement H} D(f_H m) = 0$

pour toute suite $(f_1,\dots,f_{k+1}) = f$ $(f_i \in A)$ et tout $m \in M$. Le th. 1 sera donc une conséquence du

LEMME 2 - Soit D une application k-linéaire d'un A-module M dans un autre N. Pour que D soit un opérateur différentiel d'ordre $\leq k$, il faut et il suffit qu'on ait (6), quels que soient $m \in M$ et la suite $f=(f_1,\dots,f_{k+1})$ de (k+1) éléments de A.

La démonstration se fera par récurrence sur k, l'assertion étant triviale si k=0. Supposons la prouvée pour les $k' < k$, prouvons la pour k. D'après la déf.1, il faut écrire que pour toute $f_{k+1} \in A$, l'application k-linéaire $m \to L_{f_{k+1}}(m) = D(f_{k+1} m) - f_{k+1} D(m)$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leq k-1$, ce qui d'après l'hypothèse de récurrence signifie aussi que pour tout système $f'=(f_1,\dots,f_k)$ de k éléments de A, et tout $m \in M$, on a $\sum_{H'\subset[1,k]} (-1)^{h'} f'_{\complement H'} L_{f_{k+1}}(f'_{H'} m) = 0$. Or un calcul immédiat montre que le premier membre est, au signe près, égal au premier membre de (6), ce qui prouve le lemme 2, et par là le th.1

COROLLAIRE - L'application $d^{(k)} : M \to P^{(k)}(M)$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leq k$.

3 - Deuxième caractérisation universelle de $P^{(k)}(A)$ et $P^{(k)}(M)$, ou : Le Retour des Pierres.

(Dans la rédaction actuelle, ce numéro est isolé et ne

servira guère. Il n'a été conservé que pour inciter certains à traduire les pier-res dans le présent contexte ; le rédacteur est persuadé que c'est la seule façon qui oblige à les dévisser assez pour les comprendre. Voulant, rester dans le cadre élémentaire qui lui était assigné, et d'ailleurs pressé par le temps ; il a renoncé à examiner ces questions ici).

PROPOSITION 2 - Soient B une A-algèbre augmentée d'ordre $\leq k$, ε son homomorphisme d'augmentation, $R(A,B)$ l'ensemble des homomorphismes φ de la k-algèbre A dans la k-algèbre B tels que $\varepsilon\varphi = 1$, $M(P^{(k)}(A),B)$ l'ensemble des homomorphismes ψ de A-algèbres augmentées de $P^{(k)}(A)$ dans B. Alors l'application $\psi \longrightarrow \psi\delta^{(k)}$ est une bijection de $M(P^{(k)}(A),B)$ sur $R(A,B)$.

Cette proposition caractérise la A-algèbre augmentée $P^{(k)}(A)$ d'ordre $\leq k$ comme solution d'un problème d'applications universelles dont l'énoncé est laissé au lecteur, qui trouvera aussi lui même la variante modulée de cette proposition.

Démonstration. Il est immédiat que l'application envisagée est une injection du premier ensemble dans le second. Soit alors $\varphi \in R(A,B)$ un homomorphisme de k'-algèbres de A dans B tel que $\varepsilon\varphi = 1$, tout revient à prouver que φ' provient d'une application A-linéaire ψ de $P^{(k)}(A)$ dans B, car cette dernière s'obtient alors nécessairement par passage au quotient à partir de k-homomorphisme de $A \otimes_k A$ dans B défini par $\varphi_0(f \otimes g) = f\varphi(g)$, et comme c'est là un homomorphisme de A-algèbres augmentées en vertu de l'hypothèse sur φ, il en sera de même de φ'. Or, en vertu du th.1, dire que φ provient d'une application A-linéaire de $P^{(k)}(A)$ dans

B signifie que c'est un opérateur différentiel d'ordre $\leq k$. On le prouvera par récurrence sur l'entier k, l'assertion étant triviale si k=0. Supposons donc $k>0$, et l'assertion prouvée pour $k'<k$. Nous devons montrer que pour toute $f\in A$, l'opérateur $L_f(g) = \varphi(fg) - f\varphi(g)$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leq k-1$, or on a $L_f(g) = (\varphi(f)-f)\varphi(g)$, et comme $\varphi(f) - f$ a une augmentation nulle donc est dans $I(B)$, et que $I(B)^{k+1} = 0$, son produit par $\varphi(g)$ ne dépend que de la classe de $\varphi(g)$ mod $I(B)^k$, soit $\varphi'(g)$. Or φ' est une représentation de k-algèbres de A dans la A-algèbre augmentée $B/I(B)^k$ qui est d'ordre $\leq k-1$, et $\varepsilon\varphi' = 1$; d'après l'hypothèse de récurrence c'est donc un opérateur différentiel d'ordre k-1, il en est donc de même de L_f qui s'obtient en le composant avec une application A-linéaire, cqfd.

4 - Définition des $P^\infty(M)$, $GP^\infty(M)$.

PROPOSITION 3 - Soient M un A-module, k, ℓ deux entiers tels que $0\leq k\leq \ell$. Il existe un homomorphisme de A-modules unique $\varphi_{k\ell} : P^\ell(M) \to P^{(k)}(M)$ tel que $\varphi_{k\ell}(d^{(\ell)}m) = d^{(k)}m$ pour tout $m\in M$. Cet homomorphisme est surjectif, et on a $\varphi_{k\ell}(FX) = \varphi_{k\ell}(F)\,\varphi_{k\ell}(X)$ pour $F\in P^{(\ell)}(A)$, $X\in P^{(\ell)}(M)$, $\varepsilon\varphi_{k\ell}(X) = \varepsilon(X)$ pour $X\in P^{(1)}(M)$. Enfin on a $\varphi_{kk} = 1$, et $\varphi_{k\ell}\varphi_{\ell m} = \varphi_{km}$ pour trois entiers $0\leq k\leq \ell\leq m$.

Cette proposition résulte aussitôt de la déf.3, l'application $\varphi_{k\ell}$ est celle obtenue en notant que $P^{(k)}(M)$ et $P^{(\ell)}(M)$ sont tous les deux des A-modules quotients de $A\otimes_k M$. - On

voit que les φ_{kl} sont des homomorphismes de A-algèbres augmentées $P^{(l)}(A) \longrightarrow P^{(k)}(A)$, et des homomorphismes de modules augmentés sur ces dernières de $P^{(l)}(M)$ dans $P^{(k)}(M)$, compatible avec l'homomorphisme précédent sur les anneaux de scalaires. Enfin, les dernières relations de la proposition montrent que les $P^{(k)}(M)$ $(k \geq 0)$ forment un système projectif de A-modules, on posera alors

$$(7) \qquad P^{\infty}(M) = \varprojlim P^{(k)}(M)$$

ce module sera appelé le module des parties principales d'ordre infini de M, ses homomorphismes canoniques dans les $P^{(k)}(M)$ seront notés ici φ_k, se sont des épimorphismes. En particulier $P^{\infty}(A)$ est une A-algèbre augmentée, et si I désigne encore son idéal maximal, on a

$$(7\text{ bis}) \qquad P^{\infty}(A)/I^{k+1} = P^{(k)}(A)$$

l'homomorphisme φ_k s'identifiant à l'homomorphisme canonique de $P^{\infty}(A)$ sur son algèbre quotient. De plus, $P^{\infty}(M)$ est un module augmenté sur la A-algèbre augmentée $P^{\infty}(A)$, et on a

$$(7\text{ ter}) \qquad P^{\infty}(M)/I^{k+1}P^{\infty}(M) = P^{(k)}(M)$$

Enfin, $P^{\infty}(M)$ est complet et séparé pour la topologie I-adique, dont l système fondamental de voisinages de 0 est formé des sous-modules $I^{k+1}P^{\infty}(M)$.

Soit $m \in M$, alors la famille des $d^{(k)}m$ définit un élément de $P^{\infty}(M)$, appelé partie principale d'ordre infini de m, et noté $d^{\infty}m$

$P^{\infty}(M)$ étant un module filtré complet sur la A-algèbre filtrée complète $P^{\infty}(A)$, il s'impose de considérer les gradués asso-

ciés, notés suivant les conventions générales $G(P^\infty(A))$ et $G(P^\infty(M))$, ou plus simplement $GP^\infty(A)$ et $GP^\infty(M)$. Ainsi

(8) $GP^\infty(M) = \sum_{k=0}^{\infty} G^{(k)}(M)$ avec

(9) $G^{(k)}(A) = I^k/I^{k+1}$

(10) $G^{(k)}(M) = \mathrm{Ker}(P^{(k)}(M) \to P^{(k-1)}(M)) = I^k(A \otimes_k M)/I^{k+1}(A \otimes_k M)$

(Dans la formule (9), I peut s'interpréter indifféremment comme l'idéal d'augmentation de $A \otimes_k A$, ou de $P^\infty(A)$). En particulier, on a

(11) $GP^{(o)}(A) = A$, $GP^{(o)}(M) = M$

$GP^\infty(M)$ est un module gradué sur l'anneau gradué $GP^\infty(A)$.

5 - Structure de $P^{(1)}(A)$ et $P^{(1)}(M)$.

Etant une A-algèbre augmentée d'ordre ≤ 1, $P^{(1)}(A)$ est la somme directe de son idéal d'augmentation $G^1(M)$, qui est de carré nul, et su sous-module des scalaires, ainsi sa structure est connue quand on connait le A-module $G^1(A)$.

THEOREME 2 - L'application $x \to d^{(1)}x - x$ est une k-dérivation de A dans $G^1(A)$, et l'application A-linéaire associée de $\Omega^1(A)$ dans $G^1(A)$ (par.1, n°1, déf.2) est un isomorphisme.

La première assertion résulte du fait que $x \to d^{(1)}x$ est un homomorphisme de k-algèbres de A dans $B = P^{(1)}(A)$, et que $b \to b - \varepsilon(b)$ est une k-dérivation de B dans le B-module I(B), ceci en vertu du résultat général :

LEMME 3 - Soit B une A-algèbre augmentée d'ordre ≤ 1, i.e. dont l'idéal d'augmentation I est de carré nul. Alors l'appli-

cation $b \to b - \varepsilon(b)$ est une A-dérivation de B dans le B-module I

Comme on a évidemment $b - \varepsilon(b) \in I$, il faut seulement vérifier que $bc - \varepsilon(bc) = b(c - \varepsilon(c)) + c(b - \varepsilon(b))$ ce qui s'écrit aussi $bc + \varepsilon(bc) - b\,\varepsilon(c) - c\,\varepsilon(b) = 0$ soit $(b - \varepsilon(b))(c - \varepsilon(c)) = 0$ et résulte donc de $I^2 = 0$.

On obtient donc bien A-homomorphisme u de $\Omega^1(A)$ dans $G^1(A)$ définie par $udf = d^{(1)}f - f$ $(f \in A)$. Notons maintenant que $d : A \to \Omega^1(A)$ est un opérateur différentiel d'ordre ≤ 1, car $d(fg) - fdg = gdf$ est linéaire en g. On a donc, en vertu de th.1, $df = v\,d^{(1)}f$, où v est un A-homomorphisme bien déterminé de $P^{(1)}(A)$ dans $\Omega^1(A)$, d'ailleurs nul sur 1 puisque $v(1) = v(d^{(1)}1) = d(1) = 0$. Soit v' sa restriction à $G^1(A)$, on a $v'u(df) = v'(d^{(1)}f - f) = vd^{(1)}f = df$, et $uv'(d^{(1)}f - f) = uvd^{(1)}f = udf = d^{(1)}f - f$, ce qui prouve que $v'u$ = identité et uv' = identité (compte tenu que les df engendrent le A-module $\Omega^1(A)$, et les $d^{(1)}f - f$ engendrent le A-module $G^1(A)$ en vertu du lemme 1 du n°2). Cela achève la démonstration. Nous identifierons dorénavant $G^1(A)$ à $\Omega^1(A)$. On a par suite

(11) $\qquad df = d^{(1)}f - f \qquad (f \in A)$

COROLLAIRE 1 - Soit D une application de A dans un A-module M. Pour que D soit une dérivation de A dans M, il faut et il suffit que D soit un opérateur différentiel d'ordre ≤ 1, et que $D(1) = 0$.

En effet, il faut et il suffit (par définition de $\Omega^1(A)$) que D puisse se mettre sous la forme $u \circ d$, où u est une application

A-linéaire de $\Omega^1(A) = G^1(A)$ dans M, ou encore d'après (11) que l'on ait $Df = u(d^{(1)}f - f)$. Comme $d^{(1)}f - f = P\,d^{(1)}f$, où P est la projection de $P^{(1)}(A)$ sur $G^{(1)}(A)$, de noyau A.1 ceci signifie aussi que l'on a $Df = v(d^{(1)}f)$, où v est une application A-linéaire de $P^{(1)}(A)$ dans M s'annulant sur 1. Mais en vertu du th.1, cela signifie bien que D est un opérateur différentiel d'ordre ≤ 1, s'annulant sur 1.

COROLLAIRE 2 - On a un homomorphisme canonique surjectif de A-algèbres : $S_A(\Omega^1(A)) \longrightarrow GP^\infty(A)$ (où S_A désigne l'algèbre symétrique).

En effet, comme $GP^\infty(A)$ est l'algèbre graduée associée à une A-algèbre I-adique, il est bien connu que GP^∞ est engendrée par ses éléments de degré 0 et 1, ce qui implique qu'on a un homomorphisme surjectif canonique de $S_A(G^1(A))$ dans $GP^\infty(A)$, se réduisant à l'identité en degrés 0 et 1. Tenant compte de l'identification de $\Omega^1(A)$ avec $G^1(A)$, on trouve l'homomorphisme du corollaire. Nous verrons au n°9 un cas important où cet homomorphisme est un isomorphisme. - Une extension immédiate du corollaire précédent donne le

COROLLAIRE 3 - Soit M un A-module. Il y a un A-homomorphisme canonique surjectif de $S_A(\Omega^1(A)) \otimes_A M$ dans $GP^\infty(M)$.

PROPOSITION 4 - Soit M un A-module. On a une suite exacte

(12) $\quad M \otimes_A \Omega^1(A) \xrightarrow{i} P^{(1)}(M) \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$

où ε est l'homomorphisme d'augmentation, et i l'homomorphisme de A-modules défini par $i(m \otimes \omega) = \omega d^{(1)}m$, où dans le deuxième membre ω est considéré comme un élément de l'idéal d'augmentation

de $P^{(1)}(A)$. Dans le cas où M est libre, i est injectif.

Notons d'abord que comme ω est dans l'idéal d'augmentation I de $P^{(1)}(A)$, son produit par un élément X de $P^{(1)}(M)$ ne dépend que de la classe de ce dernier mod. $IP^{(1)}(M)$, i.e. que de $\varepsilon(X)$, ce qui montre en particulier, puisque $\varepsilon d^{(1)}m = m$, que $\omega d^{(1)}m$ est bien A-linéaire en m (et non seulement en ω), ce qui donne un sens à la définition de i. Comme ε est un épimorphisme, il reste à prouver que le noyau $IP^{(1)}(M)$ de ε est égal à Im(i), ce qui est aussi immédiat, la considération précédente montrant en effet que $IP^{(1)}M$ est égal à l'ensemble des sommes d'éléments $\omega d^{(1)}m$, avec $\omega \in I = \Omega^1(A)$ et $m \in M$. Enfin, prouvons que i est injectif si A est libre. Comme les foncteurs $M \longrightarrow M \otimes_A \Omega^1(A)$ et $M \longrightarrow P^{(1)}(M)$ commutent aux sommes directes (voir numéro suivant pour la définition du deuxième foncteur), on est ramené aussitôt au cas où $M = A$, et alors i n'est autre que l'homomorphisme canonique $\Omega^1(A) \longrightarrow P^{(1)}(A)$ considéré dans le th.2, d'où la conclusion. - Bien entendu, il n'existe pas en général de supplémentaire canonique de $IP^{(1)}(M)$ dans $P^{(1)}(M)$. De façon précise, on a le

COROLLAIRE 1 - *Supposons que $\Omega^1(A)$ soit un A-module ayant une base finie. Soit M un A-module libre, alors l'ensemble des connexions sur A (par.2, n°2, déf.2) s'identifie canoniquement à l'ensemble des projections v du A-module $P^{(1)}(M)$ sur le noyau de son homomorphisme d'augmentation (ou encore, si on préfère, à l'ensemble des A-homomorphismes u de M dans $P^{(1)}(M)$ tels que εu = identité).*

En effet, la donnée d'une application A-linéaire v de $P^{(1)}(M)$ dans $M \otimes_A \Omega^1(A)$ revient, en vertu du th.1, à la donnée d'un opérateur différentiel D d'ordre ≤ 1 de M dans $M \otimes_A \Omega^1(A)$, (défini par $Dm = vd^{(1)}m$), et la condition que v soit une projection i.e. que $v(df.d^{(1)}m) = df.d^{(1)}m$ pour $f \in A$, $m \in M$ s'écrit, compte tenu de $df = d^{(1)}f - f$ d'où $df.d^{(1)}m = d^{(1)}(fm) - fd^{(1)}m$:

$$D(fm) - fD(m) = df.d^{(1)}m$$

et comme le deuxième membre s'identifie à l'élément $m \otimes df$ de $M \otimes_A \Omega^1(A)$, on obtient la condition

(13) $$D(fm) = f.D(m) + m \otimes df$$

D'ailleurs, si une application k-linéaire $D : M \to M \otimes_A \Omega^1(A)$ satisfait cette condition, c'est visiblement un opérateur différentiel d'ordre ≤ 1. Or $\Omega^1(A)$ ayant une base finie sur A peut s'identifier au dual de $\mathcal{Y}(A)$, donc $M \otimes_A \Omega^1(A)$ s'identifie aussi à $L_A(\mathcal{Y}(A), M)$. Une D satisfaisant à (13) peut alors s'interpréter comme une application A-linéaire $X \to D_X$ de $\mathcal{Y}(A)$ dans $L_k(M,M)$, satisfaisant la condition

$$D_X(fm) = fD_X(m) + m\langle X, df\rangle$$

i.e. n'est pas autre chose qu'une connexion sur M (car $\langle X, df\rangle = \theta_X(f)$), cela prouve notre intéressante proposition.

6 - Du Faux, du Fonc, du Foncteur.

Comme malheureusement le terme $P^{(k)}(M) = P^{(k)}_{A/k}(M)$ fait intervenir les trois arguments M, A, k (sans parler de k, qui a été liquidé, si on peut dire, au n°4), on ne peut se dispenser d'en

indiquer les propriétés fonctorielles (quelque déplaisir qu'en aient rédacteur et lecteur), conformément à une règle d'or trop longtemps ignorée de l'âne qui trotte.

Tout d'abord, laissant A, k fixes, on note que $P^{(k)}(M)$ est un foncteur covariant du A-module M, à valeurs dans la catégorie des $P^{(k)}(A)$-modules, à un homomorphisme de A-modules $u : M \longrightarrow M'$ correspondant l'unique A-homomorphisme de $P^{(k)}(M)$ dans $P^{(k)}(M')$, soit $P^{(k)}(u)$, transformant $d^{(k)}m$ en $d^{(k)}u(m)$. Alors les homomorphismes canoniques $P^{(\ell)}(M) \longrightarrow P^{(k)}(M)$ de la proposition 3 sont fonctoriels, ce qui permet de considérer $P^{\infty}(M)$ comme un foncteur de M, à valeurs dans la catégorie des $P^{\infty}(A)$-modules. Par suite, $GP^{\infty}(M)$ est un foncteur de M à valeurs dans la catégorie des modules gradués sur l'anneau gradué $GP^{\infty}(A)$, l'homomorphisme $M \otimes_A S_A(\Omega^1(A)) \longrightarrow GP^{\infty}(M)$ du cor. 3 du th. 2 étant un homomorphisme fonctoriel.

Les homomorphismes fonctoriels précédents peuvent se généraliser (toujours pour A, k fixés). Soit $D : M \longrightarrow N$ un opérateur différentiel d'ordre $\leq k$ de M dans N, alors $d^{(\ell)} \circ D$ est un opérateur différentiel d'ordre $k+\ell$ de M dans $P^{(\ell)}$ en vertu de prop. 1 (puisque $d^{(\ell)}$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leq \ell$ en vertu de th. 1); donc en vertu de th. 1 il existe une application A-linéaire unique de $P^{(k+\ell)}(M)$ dans $P^{(\ell)}(N)$, transformant $d^{(k+\ell)}m$ en $d^{(\ell)}D(m)$. On voit aussitôt que ces applications, pour ℓ variable définissent un homomorphisme de $P^{\infty}(M)$ dans $P^{\infty}(N)$, entièrement déterminé par la condition d'être continu, et de transformer

$d^\infty m$ en $d^\infty D(m)$ (condition qui ne fait plus intervenir l'entier k), on le note $P^\infty(D)$:

(14) $\quad P^\infty(D)(d^\infty m) = d^\infty(D(m))$

Bien entendu, $P^\infty(D)$ est A-linéaire, mais en général plus $P^\infty(A)$-linéaire (si D n'est pas d'ordre 0). On a les formules

(14 bis) $\quad P^\infty(\text{identité}) = \text{identité}, \quad P^\infty(DD') = P^\infty(D)P^\infty(D')$

PROPOSITION 5 - Soient M,N deux A-modules, D un opérateur différentiel d'ordre $\leq k$ de M dans N, alors $P^\infty(D)$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leq k$ de $P^\infty(M)$ dans $P^\infty(N)$, considérés comme modules sur la A-algèbre $P^\infty(A)$.

Démonstration. Avec les notations du lemme 2 du n°2, on a pour tout système $f=(f_1,\dots,f_{k+1})$ de k+1 éléments de A

$$\sum(-1)^h f_{\complement H} D(f_H m) = 0$$

ou encore, en désignant par P_f l'opération de multiplication par f dans M ou N :

$$\sum(-1)^h P_{f_{\complement H}} D P_{f_H} = 0$$

d'où on conclut, en appliquant le foncteur P^∞, et notant que $P^\infty(P_f) = P_{d^\infty f}$ (conséquence immédiate des définitions) :

$$\sum(-1)^h P_{F_{\complement H}} P^\infty(D) P_{F_H} = 0$$

où $F=(d^\infty f_1,\dots,d^\infty f_{k+1})$. Par raison de A-linéarité, cette relation reste vraie si F est remplacée par un système quelconque $(F_1,\dots,F_{k+1})$ d'éléments de $P^\infty(A)$ qui sont combinaisons A-linéaires d'éléments du type $d^\infty g$ ($g \in A$). Comme ces éléments sont denses dans $P^\infty(A)$, et que la valeur du premier membre de la relation précédente pour un $G \in P^\infty(A)$ est une fonction con-

tiaue du système $F=(F_1,\ldots,F_{k+1})$, il s'ensuit qu'il est identiquement nul, ce qui (en vertu du lemme 2) achève la démonstration.

COROLLAIRE - Si X est une k-dérivation de A dans un A-module M, alors $P^\infty(X)$ est une A-dérivation de $P^\infty(A)$ dans le $P^\infty(A)$-module $P^\infty(M)$.

Il suffit en effet d'appliquer la proposition précédente, et la caractérisation des dérivations donnée dans le cor.1 du th.2.

Considérons maintenant un morphisme d'une k-algèbre A dans une k'-algèbre A' :

$$\begin{array}{ccc} k & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \varphi \\ k' & \longrightarrow & A' \end{array}$$

Alors tout A-module M définit un A'-module $M' = A' \otimes_A M$, qui est un foncteur de M.

PROPOSITION 6 - Sous les conditions précédentes, il existe pour tout A-module M et tout entier k, un A-homomorphisme unique de $P^{(k)}_{A/k}(M)$ dans $P^{(k)}_{A'/k'}(M)$, transformant $d^{(k)}_{A/k}(m)$ en $d^{(k)}_{A'/k'}(1 \otimes_A m)$. Si $M = A$, c'est là un homomorphisme de A-algèbres et dans le cas général, l'homomorphisme envisagé est compatible avec l'homomorphisme correspondant pour les anneaux d'opérateurs $P^{(k)}_{k}(A)$ et $P^{(k)}_{k'}(A')$.

L'unicité est immédiate, pour l'existence, on note d'abord que l'homomorphisme $\varphi : A \longrightarrow A'$ définit un diagramme commutatif de A-algèbres

$$\begin{array}{ccc} A \otimes_k A & \longrightarrow & A' \otimes_{k'} A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & A' \end{array}$$

Donc l'idéal d'augmentation I de $A \otimes_{k} A$ sera appliqué dans l'idéal d'augmentation I' de $A' \otimes_{k'} A'$, donc I^{k+1} est appliqué dans I'^{k+1}, d'où par passage au quotient l'homomorphisme cherché $P^{(k)}_{k}(A) \longrightarrow P^{(k)}_{k'}(A')$, qui est bien un homomorphisme de A-algèbres. De même, on a un homomorphisme naturel de $A \otimes_{k} A$-algèbres:

$$A \otimes_{k} M \longrightarrow A' \otimes_{k'} M'$$

appliquant $f \otimes_{k} m$ en $\varphi(f) \otimes_{k'} (1 \otimes_{A} m)$, appliquant donc $I^{k+1}(A \otimes_{k} M)$ dans $I'^{k+1}(A' \otimes_{k'} M')$, d'où par passage au quotient l'homomorphisme cherché de $P^{(k)}_{A/k}(M)$ dans $P^{(k)}_{A'/k'}(M')$.

Il est immédiat que pour k variable, les homomorphismes précédents passent à la limite projective, d'où un homomorphisme canonique

$$P^{\infty}_{A/k}(M) \longrightarrow P^{\infty}_{A'/k'}(M') \tag{15}$$

En particulier, l'homomorphisme $P^{\infty}_{k}(A) \longrightarrow P^{\infty}_{k'}(A')$ est un homomorphisme de A-algèbres, et (15) est compatible avec l'homomorphisme précédent sur les anneaux d'opérateurs. L'homomorphisme (15) donne aussi un homomorphisme pour les gradués associés :

$$GP^{\infty}(M) \longrightarrow GP^{\infty}(M') \tag{16}$$

et les homomorphismes canoniques du th. 2 et de ses cor. 2 et 3, et de prop. 4, donnent lieu à autant de diagrammes de compatibilité que le lecteur écrira sur son papier à lui.

Les homomorphismes précédents satisfont la propriété de transitivité bien connue, quand on se donne deux morphismes

$(A,k) \longrightarrow (A',k') \longrightarrow (A'',k'')$, et un A-module M, et qu'on considère les modules M', M'' obtenus par extension des scalaires à A' resp. A'' : l'homomorphisme canonique $P^{(k)}_{\Omega/k}(M) \longrightarrow P^{(k)}_{\Omega''/k''}(M'')$ est le composé des homomorphismes canoniques

$$P^{(k)}_{A/k}(M) \longrightarrow P^{(k)}_{A'/k'}(M') \longrightarrow P^{(k)}_{A''/k''}(M'').$$

Enfin, considérons un A-homomorphisme u d'un A-module M dans un autre N, soit u' l'homomorphisme correspondant de M' dans N', et considérons les homomorphismes associés $P^{(k)}u$ (resp. $P^{(k)}u'$), on a alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} P^{(k)}_{A/k}(M) & \longrightarrow & P^{(k)}_{A'/k'}(M') \\ \downarrow & & \downarrow \\ P^{(k)}_{A/k}(N) & \longrightarrow & P^{(k)}_{A'/k'}(N') \end{array}$$

PROPOSITION 7 - Soient A et B deux k-algèbres commutatives, I_A (resp. I_B) l'idéal d'augmentation de $P^\infty(A)$ (resp. $P^\infty(B)$), P l'algèbre $P^\infty(A) \otimes_k P^\infty(B)$, I l'idéal $I_A \otimes_k P^\infty(B) + P^\infty(A) \otimes_k I_B$ de P, $\hat{P}$ la k-algèbre complète séparée associée à P muni de la topologie I-adique. Considérons les homomorphismes continus $P^\infty(A) \longrightarrow P^\infty(A \otimes_k B)$ resp. $P^\infty(B) \longrightarrow P^\infty(A \otimes_k B)$ appliquant les éléments $d^\infty f$ (resp. $d^\infty g$) dans $d^\infty(f \otimes 1)$ (resp. dans $d^\infty(1 \otimes g)$) (pour toute $f \in A$, $g \in B$), et l'homomorphisme correspondant de P dans $P^\infty(A \otimes_k B)$. Alors cet homomorphisme est continu (P étant muni de sa topologie I-adique), et définit un isomorphisme de $\hat{P}$ dans $P^\infty(A \otimes_k B)$.

(N.B. Dans le cas où k est un corps, on vérifie facilement que la topologie I-adique sur P est séparée). L'existence des

applications envisagées de $P^\infty(A)$ et $P^\infty(B)$ dans $P^\infty(A\otimes_k B)$ est un cas particulier des lemmes fonctoriels précédents. L'homomorphisme correspondant $P \longrightarrow P^\infty(A\otimes_k B)$ applique évidemment I dans l'idéal d'augmentation, et est par suite continu, Comme $P^\infty(A\otimes_k B)$ est séparé et complet, il en résulte un homomorphisme continu u de $\hat{P}$ dans $P^\infty(A\otimes_k B)$, montrons que c'est un isomorphisme. Pour ceci, nous allons définir un homomorphisme continu v en sens inverse, et il sera immédiat que uv et vu sont les applications identiques, ce qui achèvera la démonstration. On a $\hat{P} = \varprojlim P/I^n$, on doit donc définir des homomorphismes continus $v_n : P^\infty(A\otimes_k B) \longrightarrow P/I^n$, qui satisfont aux conditions de cohérence évidentes. Or P/I^n est une $A\otimes_k B$-algèbre augmentée d'ordre fini n-1, d'autre part on a un homomorphisme naturel de $A\otimes_k B$ dans cette dernière, appliquant $f\otimes g$ dans la classe de $d^\infty f\otimes d^\infty g$, homomorphisme dont le composé avec l'augmentation est l'identité. En vertu de prop.2, cet homomorphisme provient d'un homomorphisme de $A\otimes_k B$-algèbres de $P^{(n-1)}(A\otimes_k B)$ dans P/I^n, d'où un homomorphisme de $A\otimes_k B$-algèbres de $P^\infty(A\otimes_k B)$ dans P/I^n, continu, et appliquant $d^\infty(f\otimes g)$ dans $d^\infty f\otimes d^\infty g$ mod I^n. Appelant cet homomorphisme v_n, on constate aussitôt que les v_n ont les propriétés qu'il faut. - Le lecteur donnera la variante modulée de la prop.7, et le prochain rédacteur (s'il y en a) regardera s'il n'est pas plus court de démontrer la proposition directement à partir de la déf.2.

Bien entendu, l'isomorphisme de la prop.7 a les propriétés fonctorielles désirables, il s'étend au cas de plusieurs facteurs etc.

Exercice 1. a) Soient A une k-algèbre commutative, $\mathfrak{a}$ un idéal de A distinct de A, $B=A/\mathfrak{a}$ l'algèbre quotient. Montrer que l'homomorphisme canonique $P^{(k)}_A(A) \longrightarrow P^{(k)}_A(B)$ est un épimorphisme, dont le noyau est l'idéal de $P^{(k)}_A(A)$ engendré par $Sud^{(k)}S$, où S est une partie de A engendrant l'idéal $\mathfrak{a}$. (Utiliser prop.2 pour définir un homomorphisme de $P^{(k)}(B)$ dans le quotient envisagé de $P^{(k)}(A)$).

b) Faisant k=1, conclure de a) que $\Omega^1(B)$ s'identifie au quotient de $\Omega^1(A)$ par le sous-A-module engendré par $Sud(S)$.

c) Soient M un module sur la k-algèbre A; N un sous-module, montrer que l'homomorphisme canonique de $P^{(k)}(M)$ dans $P^{(k)}(M/N)$ est un épimorphisme dont le noyau est le sous-A-module engendré par $Sud^{(k)}S$, où S est un système de générateurs du A-module N.

Exercice 2. Soient M et N deux A-modules, définir un isomorphisme tant canonique que fonctoriel de $P^{(k)}(A)$-modules :

$$P^{(k)}(M \otimes_A N) \xleftarrow{\sim} P^{(k)}(M) \otimes_{P^{(k)}(A)} P^{(k)}(N)$$

transformant $d^{(k)}(m \otimes_A n)$ en $d^{(k)}m \otimes_{P^{(k)}(A)} d^{(k)}n$. Prouver les propriétés naturelles d'associativité et de commutativité pour ces isomorphismes. En conclure que si M est une A-algèbre (non nécessairement associative) alors $P^{(k)}(M)$ est une $P^{(k)}(A)$-algèbre, qui est associative (resp. commutative, resp. de Lie etc) si M l'est, Donner d'autres exemples de structures qui se prolongent aux $P^{(k)}(M)$. Déduire de ce qui précède un homomorphisme canonique

et fonctoriel

$$P^{(k)}(\mathrm{Hom}_A(M,N)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{P^{(k)}(A)}(P^{(k)}(M), P^{(k)}(N))$$

et montrer que c'est un isomorphisme si M admet une base finie sur A.

7 - Prolongement canonique des dérivations aux $P^{(k)}(M)$.

PROPOSITION 8 - Pour tout k-dérivation de A, définie par un $X \in \mathcal{G}_k(A)$, il existe une dérivation $\theta_X^{(k)}$ et une seule de la k-algèbre $P^{(k)}(A)$, telle qu'on ait

(17) $\theta_X^{(k)}(f.1) = \theta_X(f) = \langle X, df \rangle$, $\theta_X^{(k)} d^{(k)} f = d^{(k)} \theta_X(f)$ $(f \in A)$

L'application $X \longrightarrow \theta_X^{(k)}$ est une représentation de la k-algèbre de Lie $\mathcal{G}_k(A)$ dans la k-algèbre de Lie $\mathcal{G}_k(P^{(k)}(A))$.

(On fera attention qu'on n'a pas en général $\theta_{fX}^{(k)} = f\,\theta_X^{(k)}$ pour $f \in A$).

Comme l'anneau $P^{(k)}(A)$ est engendré par les éléments du type f.1 et $d^{(k)}f$ $(f \in A)$ l'unicité de $\theta_X^{(k)}$ est évidente, et de façon précise, si $\theta_X^{(k)}$ existe elle sera donnée par

(17 bis) $\theta_X^{(k)} f d^{(k)} g = X(f) d^{(k)} g + f d^{(k)} X(g)$

(en écrivant pour simplifier X(h) au lieu de $\theta_X(h)$ si $h \in A$).

Considérons alors l'endomorphisme de k-module de $A \otimes_k A$ défini par

$$\theta_X(f \otimes g) = X(f) \otimes g + f \otimes X(g)$$

c'est là une k-dérivation de l'anneau $A \otimes_k A$, de plus (I désignant l'idéal d'augmentation de cet anneau) on a $\theta_X(I) \subset I$, comme il résulte aussitôt du fait que I est l'idéal engendré par les éléments de la forme $f \otimes 1 - 1 \otimes f$ (n°2, lemme 1), et qu'un tel élément est transformé en $X(f) \otimes 1 - 1 \otimes X(f)$. On en conclut, par

récurrence sur k, que θ_X applique I^{k+1} dans I^{k+1}, d'où résulte que par passage aux quotients θ_X définit une dérivation dans chaque anneau $P^{(k)}(A)$. Enfin, le fait que $X \to \theta_X^{(k)}$ soit une représentation d'algèbres de Lie résulte aussitôt du fait qu'il en est ainsi pour $X \to \theta_X$ (où θ_X est envisagé comme un endomorphisme du k-module $A \otimes_k A$) -par.2,n°4,prop.2).

PROPOSITION 9 - Soit M un A-module. Pour tout $X \in \mathcal{Y}_k(A)$ et toute X-dérivation D de M, il existe une X-dérivation et une seule $D^{(k)}$ de $P^{(k)}(M)$ satisfaisant à la condition

(18) $\quad D^{(k)} d^{(k)} m = d^{(k)} Dm$

C'est même là une θ_X-dérivation du $P^{(k)}(A)$-module $P^{(k)}(M)$, (θ_X étant la dérivation de $P^{(k)}(A)$ définie dans prop.8) :

(19) $\quad D^{(k)}(\varphi\mu) = \varphi D^{(k)}\mu + \theta_X^{(k)}(\varphi)\mu \qquad (\varphi \in P^{(k)}(A), \mu \in P^{(k)}(M))$

Enfin l'application $(D,X) \to D^{(k)}$ est une représentation de la k-algèbre de Lie des k-dérivations du A-module M (par.2,n°1, exemple 2) dans la k-algèbre de Lie sur A des k-dérivations du A-module $P^{(k)}(M)$. Si $X = 0$, on a $D^{(k)} = P^{(k)}D$ (où $P^{(k)}D$ désigne le prolongement canonique à $P^{(k)}(M)$ du A-endomorphisme D de M, cf. n°6).

Démonstration. L'unicité de $D^{(k)}$ résulte aussitôt de la formule

(20) $\quad D^{(k)}(fd^{(k)}m) = X(f)d^{(k)}m + f\,d^{(k)}Dm \qquad (f \in A,\ m \in M)$

Pour l'existence, on procède comme plus haut, en considérant le k-endomorphisme L_D de $A \otimes_k M$ défini par

$$L_D(f \otimes m) = X(f) \otimes m + f \otimes Dm \qquad (f \in A,\ m \in M)$$

c'est là une θ_X-dérivation du $A \otimes_k A$-module $A \otimes_k M$, comme on voit

n'importe comment, et l'application $(D,X) \longrightarrow L_D$ est une représentation de $\mathfrak{h}$-algèbres de Lie, (on peut par exemple invoquer par.2,n°4,prop.2, en prenant pour $\mathcal{G}$ la θ-algèbre de Lie des $\mathfrak{h}$-dérivations du A-module M). Comme $\theta_X I^{k+1} \subset I^{k+1}$, on aura $L_D(I^{k+1}.(A \otimes_{\mathfrak{h}} M)) \subset I^{k+1}.A \otimes_{\mathfrak{h}} M$, donc L_D passe au quotient $P^{(k)}M$, et toutes les assertions de prop.9 deviennent évidentes. On notera que la prop.8 est un cas particulier de prop.9, à condition de modifier légèrement l'énoncé de prop.8, mais il n'a pas semblé opportun de les bloquer ensemble.

COROLLAIRE 1 - Sous les conditions précédentes, l'application $(D,X) \longrightarrow (D^{(k)},X)$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leq k$ du A-module $\mathcal{G}_A(M)$ des $\mathfrak{h}$-dérivations du A-module M, dans le A-module analogue $\mathcal{G}_A(P^{(k)}(M))$. En particulier, l'application $X \to \theta_X^{(k)}$ de prop.8 est un opérateur différentiel d'ordre $\leq k$.

Comme $(D,X) \longrightarrow X$ est A-linéaire, il suffit de prouver que $(D,X) \longrightarrow D^{(k)}$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leq k$, et pour cela, en vertu des scrites du n°1, il suffit de montrer que les applications $(D,X) \longrightarrow D^{(k)}(fs^{(k)}m)$ le sont (pour $f \in A$, $m \in M$ fixés). Or cela résulte aussitôt de (20) et de n°1 prop.1 puisque les applications $(D,X) \longrightarrow X(f)$ et $(D,X) \longrightarrow Dm$ sont A-linéaires, et que $d^{(k)}$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leq k$ (corollaire au th.1).

COROLLAIRE 2 - (Prolongement canonique des $\mathcal{G}$-dérivations) Soient M un A-module, $\mathcal{G}$ une θ-algèbre sur A (par.2,N°1,déf.1).

Supposons M muni d'une $\mathcal{Y}$-dérivation (par.2, n°2, déf.2) D, alors il existe sur $P^{(k)}M$ une $\mathcal{Y}$-dérivation unique $D^{(k)}$ telle que

$$D^{(k)}_X(d^{(k)}m) = d^{(k)}D_X m \qquad (m \in M)$$

et alors on a

$$D^{(k)}_X(\varphi\mu) = \varphi D^{(k)}_X \mu + \theta^{(k)}_X(\varphi)\mu \qquad (\varphi \in P^{(k)}(A), \mu \in P^{(k)}M).$$

Si D est à courbure nulle i.e. $D_{[X,Y]} = [D_X, D_Y]$ pour $X, Y \in \mathcal{Y}$, il en est de même de $D^{(k)}$. Si l'application $X \longrightarrow D_X$ de $\mathcal{Y}$ dans $L_{\mathfrak{k}}(M,M)$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leq \ell$, alors $D \longrightarrow D^{(k)}$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leq k+1$ de $\mathcal{Y}$ dans $L_{\mathfrak{k}}(P^{(k)}M, P^{(k)}M)$.

Sauf la dernière assertion, ce corollaire résulte aussitôt de prop.9 et des définitions ; on fera attention que pour abréger, on a désigné par $\theta^{(k)}_X$ le prolongement canonique à $P^{(k)}(A)$ de la dérivation de A définie par X. Dans la dernière assertion du cor.2, on peut remplacer $L_{\mathfrak{k}}(M,M)$ par le A-module $\mathcal{Y}_A(M)$ des $\mathfrak{k}$-dérivations du A-module M, et alors il suffit d'appliquer le cor.1 et la prop.1 du n°1, au composé des applications $X \longrightarrow (D_X, X')$ et $(D,Z) \longrightarrow D^{(k)}$ (où pour $X \in \mathcal{Y}$, on désigne par X' son image dans $\mathcal{Y}_{\mathfrak{k}}(A)$, et où (D,Z) désigne une Z-dérivation de M, $Z \in \mathcal{Y}_{\mathfrak{k}}(A)$).

Passant à la limite projective des $P^{(k)}M$, on voit que toute X-dérivation D de M définit une X-dérivation D^∞ de $P^\infty(M)$, caractérisée par la condition d'être continue et de satisfaire à la formule

(18 bis) $$D^{(\infty)}(d^{(\infty)}m) = d^\infty(Dm)$$

On se gardera bien entendu de confondre D^∞ avec le prolongement

A-linéaire $P^{\infty}(D)$ défini au n°6, sauf dans le cas où X=0 (où les deux prolongements coincident).

8 - Prolongements des fibrés infinitésimaux.

Le fibré $\mathcal{Y}^{(k)}(A)$.

DEFINITION 4 - Soit A une k-algèbre commutative, k un entier ≥ 1. On appelle fibré infinitésimal canonique d'ordre k de A la k-algèbre de Lie $\mathcal{Y}^{(k)}(A)$ formée des k-dérivations de l'algèbre $P^{(k)}(A)$ qui laissent A.1 et l'idéal d'augmentation invariant, muni en outre de la structure de A-module déduite de la structure de $P^{(k)}(A)$-module sur l'ensemble de toutes les k-dérivations de $P^{(k)}(A)$, et de l'application $D \to \eta(D)$ de $\mathcal{Y}^{(k)}(A)$ dans $\mathcal{Y}(A)$ qui à une dérivation $D \in \mathcal{Y}^{(k)}(A)$ associe la dérivation $X = \eta(D)$ qu'elle induit sur A, identifié à un sous anneau de $P^{(k)}(A)$.

Ces données font de $\mathcal{Y}^{(k)}(A)$ une θ-algèbre de Lie (par.2 n°1,déf.1), et même un fibré infinitésimal (loc.cité, exemple 4), en d'autres termes $\eta : \mathcal{Y}^{(k)}(A) \to \mathcal{Y}(A)$ est surjective. Pour le voir, il suffit d'exhiber une θ-structure sur $\mathcal{Y}^{(k)}(A)$ (par.2, n°2,déf.2), or il suffit de prendre l'application $X \to \theta_X^{(k)}$ définie dans prop.8, appelée la θ-structure canonique sur $\mathcal{Y}^{(k)}(A)$. On conviendra, pour k=0, de poser $\mathcal{Y}^{(0)}(A) = \mathcal{Y}(A)$. On notera qu'en général $\mathcal{Y}^{(k)}(A)$ n'est pas un module sur $P^{(k)}(A)$, car le produit φD pour $\varphi \in P^{(k)}(A)$, $D \in \mathcal{Y}^{(k)}(A)$ est une dérivation qui en général ne laisse pas invariant le sous-anneau A de $P^{(k)}(A)$. Cependant, le noyau $\mathcal{Y}_0^{(k)}(A)$ de $\mathcal{Y}^{(k)}(A)$, formé des k-dérivations de $P^{(k)}(A)$ qui induisent 0 sur A et

appliquant l'idéal d'augmentation dans lui-même, est évidemment un module sur $P^{(k)}(A)$.

(N.B. Heuristiquement, si A est l'anneau des fonctions régulières sur une variété V, donc $\mathfrak{g}(A)$ le A-module des champs de vecteurs sur V, les $\mathfrak{g}^{(k)}(A)$ sont les fibrés infinitésimaux qui correspondent aux fibrés $P^{(k)}(V)$ des repères d'ordre k sur V

THEOREME 3 - Soient $\mathfrak{g}$ une θ-algèbre de Lie sur la k-algèbre A (par.2;n°1,déf.1), k un entier >0.

1) Il existe sur $P^{(k)}(\mathfrak{g})$ une unique structure de θ-algèbre de Lie sur A ayant comme structure de A-module sous-jacente celle de $P^{(k)}(A)$, dont l'application canonique $P^{(k)}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{g}(A)$ est la composée de l'application d'augmentation $\varepsilon : P^{(k)}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{g}$ et de l'application canonique $\eta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}(A)$, en formules

(21) $\theta_{d^{(k)}X}(f) = \theta_X(f)$ $\qquad (X \in \mathfrak{g},\ f \in A)$

et dont la structure de k-algèbre de Lie satisfait à

(22) $[d^{(k)}X,\ d^{(k)}Y] = d^{(k)}[X,Y]$ $\qquad (X,Y \in \mathfrak{g})$

Alors l'homomorphisme d'augmentation ε est un homomorphisme de θ-algèbres de Lie de $P^{(k)}(\mathfrak{g})$ dans $\mathfrak{g}$.

2) Pour $X \in \mathfrak{g}$, soit $\theta_X^{(k)}$ la dérivation de $P^{(k)}(A)$ prolongement canonique de la dérivation θ_X de A (prop.8). Il existe une application A-linéaire et une seule de $P^{(k)}(\mathfrak{g})$ dans $\mathfrak{g}^{(k)}(A)$ (définition 4), notée $\mathfrak{X} \to \theta_{\mathfrak{X}}^{(k)}$, et telle que l'on ait

(23) $\theta^{(k)}_{d^{(k)}X}(\varphi) = \theta_X^{(k)}(\varphi)$ $\qquad (X \in \mathfrak{g},\ \varphi \in P^{(k)}(A))$

ou encore

(23 bis) $\theta^{(k)}_{d^{(k)}X}(d^{(k)}f) = d^{(k)}(\theta_X(f))$ $\qquad (X \in \mathfrak{g},\ f \in A)$

Cette application est un homomorphisme de Θ-algèbres de Lie, en particulier on a

$$(24)\quad \begin{cases} [\theta^{(k)}_{\mathscr{X}}, \theta^{(k)}_{\mathscr{Y}}] = \theta^{(k)}_{[\mathscr{X},\mathscr{Y}]} \\ \theta^{(k)}_{f\mathscr{X}} = f\,\theta^{(k)}_{\mathscr{X}} \end{cases} \qquad (\mathscr{X},\mathscr{Y}\in P^{(k)}(\mathscr{Y}),\ f\in A)$$

Enfin, on a aussi les formules

$$(25)\quad \begin{cases} \theta^{(k)}_{\varphi\mathscr{X}} = \varphi\,\theta^{(k)}_{\mathscr{X}} \\ [\mathscr{Y}, \varphi\mathscr{X}] = \varphi[\mathscr{Y},\mathscr{X}] + \theta^{(k)}_{\mathscr{Y}}(\varphi)\,\mathscr{X} \end{cases}$$

Valables si $\varphi\in P^{(k)}(A)$, $\mathscr{X}, \mathscr{Y}\in P^{(k)}(\mathscr{Y})$ avec $\mathscr{X}$ d'augmentation nulle. (Grâce à quoi le deuxième membre de la première formule (25) est bien dans $\mathscr{Y}^{(k)}(A)$).

La démonstration consiste en des vérifications aussi pénibles que triviales. Les assertions d'unicité étant de toutes façons triviales, on est ramené à l'existence des opérations dans 1) et 2) et leurs propriétés formelles. Pour ceci, on introduit sur $A\otimes_k \mathscr{Y}$ une loi de composition k-bilinéaire définie par

(A) $[f\otimes X, g\otimes Y] = fg\otimes[X,Y] + fX(g)\otimes Y - gY(f)\otimes X$ $(fg\in A, X,Y\in\mathscr{Y})$

et on "fait opérer" $A\otimes_k \mathscr{Y}$ sur $A\otimes_k A$ par la formule

(B) $\theta_{f\otimes X}(u\otimes v) = f(X(u)\otimes v + u\otimes X(v))$ $(u,v,f\in A,\ X\in\mathscr{Y})$

et on vérifie successivement les points suivants :

(i) (Compatibilité avec les augmentations) : $\varepsilon([\mathscr{X},\mathscr{Y}]) = [\varepsilon(\mathscr{X}),\varepsilon(\mathscr{Y})]$, $\varepsilon(\theta_{\mathscr{X}}\varphi) = \theta_{\varepsilon(\mathscr{X})}\varepsilon(\varphi)$, $\theta_{\mathscr{X}}(f.1) = \theta_{\varepsilon(\mathscr{X})}(f).1$ $(\mathscr{X},\mathscr{Y}\in A\otimes\mathscr{Y}, \varphi\in A\otimes A, f\in$

(ii) $[\mathscr{X},\mathscr{Y}]$ est k-bilinéaire et alterné en $\mathscr{X},\mathscr{Y}$.

(iii) La loi $[\mathscr{X},\mathscr{Y}]$ satisfait l'identité de Jacobi.

(iv) $\theta_{f\mathscr{X}} = f\theta_{\mathscr{X}}$ $(f\in A)$, $\theta_{\varphi\mathscr{X}} = \varphi\theta_{\mathscr{X}}$ $(\varphi\in A\otimes_k A, \mathscr{X}\in A\otimes_k\mathscr{Y}$, $\mathscr{X}$ d'augmentation 0).

(v) $[x, fy] = f[x,y] + \theta_x(f)y$ $(f \in A, x, y \in A \otimes_k \mathfrak{g})$

$[x, \varphi y] = \varphi[x,y] + \theta_x(\varphi)y$ $(\varphi \in A \otimes_k A, x \in A \otimes_k y$, x d'augmentation 0)

(vi) $\theta_{[x,y]} = [\theta_x, \theta_y]$ $(x, y \in A \otimes_k y)$

(vii) $\theta_x \varphi$ est dans I^{k+1} si x est dans $I^{k+1}.A \otimes_k y$ ou $\varphi \in I^{k+1}$.

(viii) $[x,y] \in I^{k+1}.A \otimes_k y$ si x ou y est dans $I^{k+1}.A \otimes_k y$.

La vérification de (i) et (ii) est immédiate sur les formules (A) et (B), celle de (iii) est franchement pénible et idiote, (iv), (v) et (vi) se démontrent aussi par des petits calculs directs immédiats. D'ailleurs les θ_x sont évidemment des dérivations de la k-algèbre $A \otimes_k A$, appliquant I dans I en vertu de (i), donc I^{k+1} dans I^{k+1}, ce qui prouve une moitié de (vii), l'autre moitié (relative au cas où $x \in I^{k+1}.A \otimes_k y$) est immédiate pour $k = 0$ grâce à (i), et s'en déduit aussitôt pour k quelconque grâce à la deuxième formule (iv). De même, (viii) est immédiat pour $k=1$ grâce à (i), et s'en déduit facilement dans le cas général par récurrence sur k, en utilisant la deuxième formule (v). Les formules (vii) et (viii) permettent de passer aux quotients les lois (A) et (B), d'où aussitôt les diverses assertions du th.3. Le rédacteur a vainement cherché une démonstration plus sympathique, c'est facile pour la partie 2), mais il ne voit comment faire pour 1).

COROLLAIRE 1 - Soient $\mathfrak{g}, \mathfrak{a}$ deux θ-algèbres de Lie sur A, et soit u un homomorphisme de θ-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{a}$. Alors l'application $P^{(k)}(u)$ de $P^{(k)}(\mathfrak{g})$ dans $P^{(k)}(\mathfrak{a})$ est un ho-

morphisme de θ-algèbres de Lie, et l'application canonique $P^{(k)}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{g}^{(k)}(A)$ définie dans le th.3, 2° est composée de $P^{(k)}(u)$ et de l'application canonique analogue $P^{(k)}(\mathfrak{a}) \longrightarrow \mathfrak{g}^{(k)}(A)$.

Ce corollaire résulte immédiatement des définitions.

COROLLAIRE 2 - Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{a}$ deux θ-algèbres de Lie pour toute $\mathfrak{g}$-dérivation $X \longrightarrow D_X$ sur $\mathfrak{a}$, (par.2,n°2,déf.2), telle que l'application $X \longrightarrow D_X$ soit un opérateur différentiel d'ordre $\leq k$ de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{a}$, considérons l'application A-linéaire $u_D : P^{(k)}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{a}$ telle que $D_X = u_D(d^{(k)}X)$ (n°2, th.2), alors on a $\eta u_D = \eta$ (où η désigne l'application canonique de $P^{(k)}(\mathfrak{g})$ ou $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}(A)$), et inversement, toute application A-linéaire $u : P^{(k)}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{a}$ telle que $\eta u = \eta$ provient d'une unique $\mathfrak{g}$-dérivation D sur $\mathfrak{a}$. Pour que D soit à courbure nulle (i.e. soit une $\mathfrak{g}$-θ-structure) il faut et il suffit que u soit compatible avec le crochet, i.e. que u soit un homomorphisme de θ-algèbres de Lie.

Ce corollaire résulte aussitôt des définitions.

Remarques 1. Le cas le plus intéressant où le cor.2 s'applique est celui où $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$, et où l'homomorphisme canonique $P^{(k)}(\mathfrak{g}(A)) \longrightarrow \mathfrak{g}^{(k)}(A)$ est un isomorphisme (ce qui est vrai comme nous verrons, dans les cas les plus importants). On voit donc alors que pour toute θ-algèbre de Lie $\mathfrak{a}$, la donnée d'une θ-structure d'ordre $\leq k$ sur $\mathfrak{a}$ équivaut à la donnée d'une représentation de θ-algèbres de Lie de fibré infinitésimal

canonique d'ordre k, soit $\mathcal{V}^{(k)}(A)$, dans $\mathfrak{D}$. (Dans le cas d'une variété différentiable V. Cela montrera qu'il revient au même, pour un fibré différentiable E à groupe structural G et de base V, de se donner sur E une structure de fibré <u>associé</u> à un $P^{(k)}(V)$, ou de se donner, pour toute transformation infinitésimale X de V, une transformation infinitésimale D_X de E compatible avec X, de façon que $D_{[X,Y]} = [D_X, D_Y]$ et que $X \longrightarrow D_X$ soit un opérateur différentiel d'ordre $\leq k$).

2. Le lecteur aura deviné que, si $\mathcal{V}$ est le fibré infinitésimal qui correspond à un certain fibré principal E, alors le noyau de $P^{(k)}(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{V}^{(k)}(A)$ est aussi le "noyau" du fibré infinitésimal qui correspond au fibré $E^{(k)}$ des éléments de section d'ordre k de E.

Remarquons aussi (avec les notations du th. 3) que si $l \geq k$, l'homomorphisme canonique $P^{(l)}(\mathcal{V}) \longrightarrow P^{(k)}(\mathcal{V})$ est un homomorphisme de θ-algèbres de Lie, et que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} P^{(l)}(\mathcal{V}) & \longrightarrow & P^{(k)}(\mathcal{V}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{V}^{(l)}(A) & \longrightarrow & \mathcal{V}^{(k)}(A) \end{array}$$

où les homomorphismes verticaux sont ceux définis dans le th. 3 et où le deuxième homomorphisme horizontal est défini en remarquant qu'une $D \in \mathcal{V}^{(l)}(A)$ étant une dérivation de $P^{(l)}(A)$ laissant stable l'idéal d'augmentation I, applique I^{k+1} dans lui même et passe donc au quotient $P^{(k)}(A)$, d'où une dérivation D' de $P^{(k)}(A)$ qui est en fait dans $\mathcal{V}^{(k)}(A)$. - On pourrait donc passer à la limite projective si on voulait, ce qui n'est pas le cas ; l'énoncé d'autres compatibilités, relatives à des homomorphismes de θ-algèbres, est laissé

au lecteur.

9 - Structure de certaines algèbres augmentées.

Nous allons préciser maintenant la structure de $P^{(k)}(A)$ et $\mathcal{J}^{(k)}(A)$, et dans ce but lemme introduisons la

DEFINITION 5 - Soient B une A-algèbre augmentée commutative d'idéal d'augmentation I(B), W un A-module de type W. On appelle repère de B tout isomorphisme de W sur un supplémentaire de $I(B)^2$ dans I(B) ; le repère est dit interne si $W = I(B)/I(B)^2$ (la donnée d'un repère interne équivaut donc à celle d'un supplémentaire de $I(B)^2$ dans I(B)), basique si W est identique à un module du type $A^{(I)}$ où I est un ensemble d'indices convenable, appelé ensemble d'indices du repère basique. (Donc la donnée d'un repère basique d'ensemble d'indices I est équivalent à la donnée d'une base $(e_i)_{i\in I}$ d'un supplémentaire de $I(B)^2$ dans I(B)). Si A est une $\mathbb{Q}$-algèbre, on appelle repère différentiel (resp. repère différentiel interne, resp. repère différentiel basique) d'ordre k de A (k étant un entier $\geqslant 1$) un repère différentiel (resp. ...) de la A-algèbre augmentée $P^{(k)}(A)$.

On notera que la puissance de l'ensemble d'indices d'un repère basique est bien déterminé par B, étant la puissance d'une base de $V = I(B)/I(B)^2$. Quand elle est finie, on prend le plus souvent $I = [1,n]$. Soit $r : W \longrightarrow I(B)$ un repère de B, r définit un homomorphisme de A-algèbres

(27) $\qquad S_A(W) \longrightarrow B$

compatible avec les augmentations, donc aussi avec les filtra-

tions définies par les puissances de l'idéal d'augmentation, d'où en passant aux gradués associés un homomorphisme

(28 $\quad S_A(W) \longrightarrow G(B)$

Supposons que $I(B)^{k+1} = 0$, i.e. que A soit une algèbre augmentée d'ordre $\leq k$, alors les homomorphismes précédents définissent des homomorphismes

(27 bis) $\quad u_r : S_A(W)/I(W)^{k+1} \longrightarrow B$

(28 bis) $\quad S_A(W)/I(W)^{k+1} \longrightarrow G(B)$

(I(W) désignant pour abréger l'idéal d'augmentation dans $S_A(W)$). On notera que si r est un repère interne (d'où $W=I(B)/I(B)^2$) les homomorphismes (28) et (28 bis) sont indépendants du choix de r.

PROPOSITION 10 - Soient B une A-algèbre augmentée commutative d'ordre $\leq k$, et $r : W \longrightarrow I(B)$ un repère de B. Alors l'homomorphisme u_r défini par (27 bis) est un épimorphisme, et c'est un isomorphisme si et seulement si (28 bis) est un isomorphisme, i.e. si l'application canonique $S_A(V)/I(V)^{k+1} \longrightarrow G(B)$ est un isomorphisme (où $V = I(B)/I(B)^2$). S'il en est ainsi, l'application $r \longrightarrow u_r$ établit une bijection de l'ensemble des repères de B de type W, sur l'ensemble des isomorphismes de A-algèbres augmentées de $S_A(W)/I(W)^{k+1}$ de B ; et étant donné un repère $r : W \longrightarrow I(B)$, l'application $D \longrightarrow Dr$ est une bijection de l'ensemble des A-dérivations de la A-algèbre augmentée B (i.e. des A-dérivations laissant stable l'idéal d'augmentation) sur l'ensemble $L_A(W, I(B))$.

Démonstration. Le fait que (28) donc (28 bis) est surjectif est une conséquence bien connue du fait que $I(B)^{k+1}+r(W) = I(B)$, à fortiori (27 bis) est surjectif puisqu'il s'agit de filtrations

finies (Alg.Hom.). Pour la même raison, il revient au même que (27 bis) ou (28 bis) soit bijectif. L'application $x \longrightarrow u_x$ est une application des repères vers les isomorphismes, évidemment injective puisque W engendre l'algèbre $S_A(W)/I(W)^{k+1}$, et aussi surjective puique toute application A-linéaire $W \longrightarrow I(B)$ définit un unique homomorphisme de A-algèbres $S_A(W) \longrightarrow B$, qui est compatible avec les augmentations, et s'annule donc sur $I(W)^{k+1}$ (puisque $I(B)^{k+1} = 0$), et passe donc au quotient. Pour la dernière assertion on peut supposer $B = S_A(W)/I(W)^{k+1}$, l'application $r \longrightarrow Dr$ est une injection pour la même raison ; W engendre la A-algèbre B, c'est une surjection puisqu'une application A-linéaire $u : W \longrightarrow I(B)$ définit (compte tenu que I(B) est un module sur $S_A(W)$) une A-dérivation D de A-algèbres $S_A(W)$ dans le $S_A(W)$-module I(B) (d'après la caractérisation des dérivations d'une algèbre symétrique dans un module sur icelle, dont la place serait probablement au par.1, avec les sorites analogues pour les algèbres extérieures, tensorielles, jordaniennes etc. ; à ceci près que ces dernières ne sont plus commutatives et que cela semble indiquer qu'il faut le mettre avec les sorites non commutatifs sur les dérivations). Alors D applique évidemment $I(W)^p$ dans $I(W)^{p-1}I(B) = I(B)^p$, donc s'annule sur $I(W)^{p+1}$, donc passe au quotient, O.K.

COROLLAIRE - Soient A une k-algèbre commutative, k un entier ≥ 1. Pour que $P^{(k)}(A)$ soit isomorphe, en tant qu'algèbre augmentée sur A, à une algèbre du type $S_A(W)/I(W)^{k+1}$, il faut

et il suffit que l'application canonique $S_A(\Omega^1(A)) \longrightarrow GP^\infty(A)$ (th.2, cor.2) soit un isomorphisme pour les degrés $\leq k$. Dans ce cas, les isomorphismes de $S_A(V)/W^{k+1}$ sur $P^{(k)}(A)$ correspondent canoniquement aux repères différentiels d'ordre k sur A de type V. Si de plus $\Omega^1(A)$ admet une base finie, l'homomorphisme canonique

$$P^{(k)}(\mathcal{Y}(A)) \longrightarrow \mathcal{Y}^{(k)}(A) \tag{29}$$

défini dans th.3, 2° est un isomorphisme.

Sauf la dernière assertion, le corollaire est un cas particulier de prop.10, compte tenu de th.2. Pour prouver la dernière assertion, notons que $\mathcal{Y}^{(k)}(A)$ est filtré par les noyaux des homomorphismes canoniques $\mathcal{Y}^{(k)}(A) \longrightarrow \mathcal{Y}^{(k')}(A)$ $(0 \leq k' \leq k)$, et en vertu de la commutativité de (26), l'homomorphisme (29) est compatible avec les filtrations. Pour prouver que c'est un isomorphisme, il suffit de prouver que l'homomorphisme pour les gradués associés en est un. Or $\mathcal{Y}(A)$ admet une base finie comme dual de $\Omega^1(A)$ qui admet une base finie par hypothèse, et pour tout A-module M admettant une base finie, l'homomorphisme canonique $S_A(\Omega^1(A)) \otimes_A M \longrightarrow GP^\infty M$ est bijectif en degrés $\leq k$, puisqu'il en est ainsi si $M = A$. Donc le gradué associé au premier membre de (29) s'identifie à $B \otimes_A \mathcal{Y}(A)$ où $B = S_A(\Omega^1(A))/I^{k+1}$. D'après la prop.10 donnant la structure de module des dérivations de la A-algèbre augmentée $P^{(k)}(A) \approx S_A(\Omega^1(A))/I^{k+1} = B$, le gradué associé au deuxième membre de (29) s'identifie à $L_A(\Omega^1(A), B)$, (sa composante de degré 0, qui n'était pas envisagée dans l'énoncé de la prop.10, étant bien l'ensemble des k-dérivations de A, i.e.

s'identifiant à $L_A(\Omega^1(A), B^0) = L_A(\Omega^1(A), A) = \mathcal{J}(A)$. Comme $\Omega^1(A)$ admet une base finie, $L_A(\Omega^1(A), B)$ s'identifie à $B \otimes_A \mathcal{J}(A)$. Ainsi les gradués associée à (29) sont isomorphes, et l'isomorphisme qu'on vient d'expliciter est bien l'homomorphisme déduit de (29), car plus généralement on a (sans aucune condition sur A) commutativité dans le mirifique diagramme :

$$\begin{array}{ccc} S_A(\Omega^1(A)) \otimes_A \mathcal{J}(A) & \longrightarrow & L_A(\Omega^1(A), S_A(\Omega^1(A)) \\ \downarrow & & \searrow \\ & & L_A(\Omega^1(A), GP^\infty(A)) \\ & & \uparrow \\ GP^\infty(\mathcal{J}(A)) & \longrightarrow & G\mathcal{J}^\infty(A) \end{array}$$

Il s'impose donc de donner des conditions sur A moyennant quoi les hypothèses du cor.1 sont vérifiées. C'est ce que nous allons faire dans les numéros qui suivent. Posons pour l'instant une définition (qui aurait dû venir avant l'énoncé de prop.10).

DEFINITION 6 - Soient A un anneau commutatif, B un anneau augmenté ayant A pour anneau d'augmentation, I(B) l'idéal d'augmentation de B. On dit que B est un anneau augmenté régulier (resp. régulier tronqué d'ordre k) si $\bigcap I(B)^n = (0)$ et si la A-algèbre graduée associée $G(B) = \sum_{n \geq 0} I(B)^n / I(B)^{n+1}$ est isomorphe à une algèbre du type $S_A(W)$ (resp. à une algèbre du type $S_A(W)/I(W)^{k+1}$), où W est un A-module projectif.

Nous utiliserons cette notion surtout dans le cas où B est une A-algèbre augmentée. Il résulte de prop.10 que dans ce cas, B est régulière tronquée d'ordre k si et seulement si elle est

isomorphe à une algèbre $S_A(W)/I(W)^{k+1}$ où W est un A-module projectif ; si on s'est donné déjà un repère de type W sur B, B est régulière tronquée d'ordre k si et seulement si W est projectif et si (28 bis) est un isomorphisme. Remarquons aussi que pour que l'anneau A-augmenté B soit régulier, il faut et il suffit qu'il soit séparé pour sa topologie I(B)-adique, et que son complété soit régulier, ou encore que B soit séparé et que les anneaux A-augmentés $B/I(B)^{k+1}$ soient réguliers tronqués d'ordre k. Si B est une A-algèbre augmentée séparée complète, il revient aussi au même de dire que B est isomorphe à la A-algèbre $S_A[[W]]$ complétée de $S_A(W)$ pour sa topologie I(W)-adique (la nécessité se voyant en prenant un repère de type $G^1(B)$ sur B, qui existe puisque $G^1(B)$ est un A-module projectif).

10 - Premier cas type où $P^\infty(A)$ est une A-algèbre augmentée régulière.

Dans ce numéro, nous supposons que $\Omega^1(A)$ admette une base de la forme $(dx^i)_{i\in I}$, où $(x^i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de A. Posons

(29) $\qquad e^i = dx^i \quad , \quad \langle e_j, e^i\rangle = \delta_j^{\ i}$ (indice de Kronecker)

e_j désigne donc la forme A-linéaire sur $\Omega^1(A)$ égale à 1 sur $e^j = dx^j$, à 0 sur les e^i avec $i \neq j$. Si I est fini, (e_i) est donc la base duale de la base (e^i) de $\Omega^1(A)$, mais si I est infini les e_i ne forment pas une base de dual $\mathcal{V}_f(A)$ de $\Omega^1(A)$. On pose aussi

(30) $\qquad e_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$

donc par définition $\frac{\partial}{\partial x^i}$ est une k-dérivation de A donnée par

(30 bis) $$\frac{\partial}{\partial x^i} x^j = \delta_i^j$$

Nous identifierons parfois les e_i avec les $\frac{\partial}{\partial x^i}$.

PROPOSITION 11 - Sous les conditions et avec les notations précédentes, on a la formule

(31) $[e_i, e_j] = 0$ i.e. $\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0$ $(i,j \in I)$

en d'autres termes les dérivations $\frac{\partial}{\partial x^i}$ $(i \in I)$ commutent entre elles.

En effet, on a pour tout $k \in I$:

$$\langle [e_i, e_j], e^k \rangle = \langle \theta_{e_i} e_j, dx^k \rangle = \theta_{e_i} \langle e_j, dx^k \rangle - \langle e_j, \theta_{e_i} dx^k \rangle$$

Or le premier terme du dernier membre est nul car $\langle e_j, dx^k \rangle = \delta_j^k$ est annulé par toute dérivation, et de même le deuxième terme est nul car $\theta_{e_i} dx^k = d(\theta_{e_i} x^k) = d(\delta_i^k) = 0$, donc le premier membre est nul, et comme k était arbitraire, (31) en résulte.

Il résulte de prop.11 que pour tout polynôme P en des indéterminées X_i $(i \in I)$ on peut définir l'opérateur $P((\frac{\partial}{\partial x^i})_{i \in I})$ dans A, qu'on note aussi simplement $P(\frac{\partial}{\partial x})$, où on pose

(32) $$\frac{\partial}{\partial x} = (\frac{\partial}{\partial x^i})_{i \in I}, \text{ d'où } P(\frac{\partial}{\partial x}) = P((\frac{\partial}{\partial x^i})_{i \in I})$$

C'est un opérateur différentiel de A dans A d'ordre $\leq$ deg.P, en vertu de n°1, prop.1

Le formalisme suivant sera commode pour la suite. Appelons indice monomial relatif à I un élément $n = (n_i)_{i \in I}$ de $\mathfrak{N}^{(I)}$, appelons ordre de l'indice monomial n l'entier $|n| = \sum n_i$; si

on identifie les indices monomiaux aux monomes correspondants en des indéterminées X_i, l'ordre d'un indice monomial est donc le degré du monome correspondans. Si $(y_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments commutant deux à deux dans un anneau B, on pose

(33) $\quad y^n = \prod_{i\in I} y_i^{n_i} \quad (y = (y_i)_{i\in I}\ ,\ n = (n_i)_{i\in I})$

étant entendu que $y_i^0 = 1$, et que par suite le deuxième membre de (33) a un sens, tous les facteurs sauf un nombre fini étant identiques à 1. Nous poserons aussi, pour deux indices monomiaux $m = (m_i)$ et $n = (n_i)$:

(34) $\quad n! = \prod_{i\in I} n_i!\ ,\ \binom{m}{n} = \prod_{i\in I} \binom{m_i}{n_i}$

(tous les facteurs des seconds membres sauf un nombre fini sont égaux à 1).

Posons, pour $f\in A$ et un entier $k \geqslant 1$ donnés :

(35) $\quad \delta^{(k)} f = d^{(k)} f - f \qquad (f\in A)$

notation qui vaut aussi pour $k = +\infty$; l'image de $\delta^{(k)} f$ dans $P^{(l)}(A)$ (pour $k \geqslant l \geqslant 1$) est $\delta^{(l)} f$, aussi nous écrirons le plus souvent δf au lieu de $\delta^{(k)} f$, quand k est sous-entendu. Nous poserons

(36) $\quad \delta x = (\delta x^i)_{i\in I} = (d^\infty x^i - x^i)_{i\in I}$

c'est donc une famille d'éléments d'augmentation nulle dans $P^\infty(A)$, ou le cas échéant la famille de leurs images dans un même $P^{(k)}(A)$. La notation générale (33) s'applique à cette famille d'éléments, ainsi qu'à la famille $\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{i\in I}$ de dérivations commutant deux à deux dans A, de sorte que pour tout indice monomial n, on a

(37) $\frac{\partial^n}{\partial x^n} = \prod \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^{n_i}$, $(\delta x)^n = \prod (\delta x^i)^{n_i}$, $x^n = \prod (x^i)^{n_i}$

PROPOSITION 12 - Sous les conditions et avec les notations précédentes, on a les formules suivantes, où m et n désignent deux indices monomiaux quelconques relatifs à I :

(38) $\frac{\partial^n}{\partial x^n} x^m = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}$ si $n \leq m$, 0 sinon

(39) $\left\langle \frac{\partial^n}{\partial x^n} , (\delta x)^m \right\rangle = m!\, \delta_n^{\,m}$

Démonstration. On vérifie d'abord la formule (38), qui s'écrit explicitement, en posant $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$:

$$\left(\prod X_i^{n_i}\right).\left(\prod (x^j)^{n_j}\right) = \prod \left(\frac{m_i}{(m_i - n_i)!} (x^i)^{m_i - n_i}\right)$$

si $n_i \leq m_i$ pour tout i, et 0 sinon. Cela résulte aussitôt du fait que les X_i sont des dérivations de l'anneau A, commutant deux à deux, et satisfaisant à $X_i . x^j = \delta_i^{\,j}$ (formule (30 bis)), ce qui nous ramène en effet aussitôt au cas où I est réduit à un seul élément, où la formule est bien connue, ou se démontre par récurrence immédiate sur m. Pour prouver (39), on note que le premier membre est l'augmentation de l'élément $P^\infty\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n}\right).(\delta x)^m$ de $P^\infty(A)$ (cf. n°6, formule), or on a

$$P^\infty\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n}\right) = \left(P^\infty\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)^n = \prod D_i^{\,n_i} \quad (\text{où } D_i = P^\infty\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)).$$

Or les D_i sont des dérivations de l'anneau $B = P^\infty(A)$ (n°6, prop.5, corollaire), commutant deux à deux (puisque les $\frac{\partial}{\partial x^i}$ commutent deux à deux), et satisfaisant à

$$D_i y^j = \delta_i^{\,j}$$

en posant $y^j = \delta x^j$. (En effet, on a $D_i y^j = D_i d^\infty x^j - D_i(x^j . 1)$, dans le dernier membre le premier terme est par définition

$d^\infty(\frac{\partial}{\partial x^i} x^j) = d^\infty \delta_i{}^j = \delta_i{}^j$, le deuxième terme est nul puisque D_i est une A-dérivation). D'après ce qui précède, on en conclut que, posant $D = (D_i)_{i\in I}$, on a

$$D^n . y^m = \frac{m!}{(m-n)!} y^{m-n} \quad \text{si } n \leq m, \ 0 \text{ sinon}$$

d'où résulte (39), en prenant la valeur des deux membres pour l'augmentation $P^\infty(A) \longrightarrow A$, compte tenu que les y^j sont d'augmentation nulle.

Notons maintenant que pour toute $f \in A$, on a

$$\delta^{(1)} f = df \tag{40}$$

(n°5, th.2), donc que les $\delta^{(1)} x^i = dx^i$ forment une base de $\Omega^1(A)$, et par suite que les $\delta^{(k)} x^i$ $(i \in I)$ engendrent la A-algèbre $P^{(k)}(A)$, i.e. que les éléments $(\delta^{(k)} x)^n$, pour $|n| \leq k$, engendrent le A-module $P^{(k)}(A)$. La formule (39) prouve, lorsque les $m!$ pour $m \leq k$ sont inversibles dans A, que les éléments envisagés sont aussi linéairement indépendants sur A. En particulier :

THEOREME 4 - Soit A une $\mathbb{Q}$-algèbre commutative contenant le corps $\mathbb{Q}$, telle que $\Omega^1(A)$ admette une base de la forme (dx^i), où $(x^i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de A. Alors pour tout entier $k \geqslant 1$, les éléments $(\delta x)^n = \prod_{i\in I} (\delta x^i)^{n_i}$, où n parcourt l'ensemble des indices monomiaux d'ordre $\leq k$ relatifs à I, forment une base de $P^{(k)}(A)$, la base duale étant formée des $\frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n}$. En particulier, $P^{(k)}(A)$ est une A-algèbre augmentée régulière tronquée d'ordre k, et $P^\infty(A)$ est une A-algèbre augmentée régulière, (déf.6), isomorphe à l'algèbre $A[[(\delta x^i)_{i\in I}]]$ des séries formelles en les x^i.

COROLLAIRE - Sous les conditions précédentes, tout opérateur différentiel d'ordre $\leq k$ dans A s'écrit de façon unique

sous la forme

(41) $$D = \sum_{|n| \leq k} f_n \frac{\partial^n}{\partial x^n}$$

où les f_n sont des éléments de A.

En effet, les opérateurs différentiels d'ordre $\leq k$ dans A s'identifient aux éléments du dual du A-module $P^{(k)}(A)$ (n°2, th.1). Ainsi, les $\frac{\partial^n}{\partial x^n}$ forment une base du A-module des opérateurs différentiels dans A, l'ordre d'un opérateur différentiel $\sum f_n \frac{\partial^n}{\partial x^n}$ étant le plus grand entier k tel qu'il existe un indice monomial n avec $|n| = k$, $f_n \neq 0$.

La proposition suivante, essentiellement contenue dans le th.4 si A contient le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels, est surtout intéressante lorsque k est un corps de caractéristique $\neq 0$:

THEOREME 5 - Soient A une k-algèbre commutative, $(x^i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de A telle que les dx^i engendrent le A-module $\Omega^1(A)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes (k étant un entier donné ≥ 1) :

(i) Les dx^i forment une base de $\Omega^1(A)$, et $P^{(k)}(A)$ est une A-algèbre augmentée régulière tronquée d'ordre k (déf.6).

(ii) Les $(\delta x)^n = \prod_i (\delta x^i)^{n_i}$ forment une base du A-module $P^{(k)}(A)$, quand $n = (n_i)$ parcourt les indices monomiaux d'ordre $\leq k$ relatifs à I.

(iii) On peut trouver une famille $(D_n)_{|n| \leq k}$ d'applications k-linéaires de A dans A, satisfaisant aux conditions suivantes : D_0 est l'endomorphisme identique de A, et on a les formules

(42) $$D_i x^j = \delta_i{}^j \qquad (i \in I)$$

(43) $D_n(fg) = \sum_{p+q=n} D_p(f) D_q(g)$ $\quad (n \in \mathbb{N}^{(I)}, |n| \leq k, f,g \in A)$

Si ces conditions sont vérifiées, D_n est un opérateur différentiel d'ordre $|n|$, les D_n (identifiés à des éléments du dual du A-module $P^{(k)}(A)$ grâce au th.1 du n°2) forment la "base duale" de la base $((\delta x)^n)$ de $P^{(k)}(A)$, et on a les formules

(44) $D_n x^m = \binom{m}{n} x^{m-n}$ $\quad (|n|, |m| \leq k)$

(45) $n! D_n = \frac{\partial^n}{\partial x^n}$ $\quad (|n| \leq k)$

(46) $D_m D_n = \frac{(m+n)!}{m!\,n!} D_{m+n}$ $\quad (|m| + |n| \leq k)$

(47) $\langle D_n, (\delta x)^m \rangle = \delta_n^m$ $\quad (|n|, |m| \leq k)$

Démonstration Evidemment (ii) implique (i), la réciproque est un cas particulier de prop.10, car la première hypothèse faite dans (i) signifie aussi que les δx^i forment une base d'un supplémentaire de J^2 dans J, J désignant l'idéal d'augmentation de $P^{(k)}(A)$. D'autre part (ii) implique (iii), comme on voit en prenant pour (D_n) la base duale de la base $((\delta x)^n)_{|n| \leq k}$ de $P^{(k)}(A)$: on a bien D_0 = endomorphisme identique de A, vérifions les formules (42) et (43). Par définition, on a (47), qui pour $m = i \in I$ et $n = j \in I$ se réduit à $\langle D_i, d^{(k)} x^j - x^j . 1 \rangle = \delta_i^j$; en notant alors que $\langle D_i, 1 \rangle = 0$ (en vertu de (47) où on fait m=i, n=0) on obtient (42), reste à vérifier (43). Comme les deux membres sont des fonctions k-bilinéaires en f,g qui sont des opérateurs différentiels d'ordre $\leq k$ en chaque argument, et s'identifient par suite (par un argument facile) à des formes A-bilinéaires sur $P^{(k)}(A) \times P^{(k)}(A)$, il suffit de vérifier que ces dernières sont identiques, or ces formes sont respectivement $\langle D_n, \varphi\psi \rangle$ et

$\sum_{p+q=n} \langle D_p, \varphi \rangle \langle D_q, \psi \rangle$ $(\varphi, \psi \in P^{(k)}(A))$. Il suffit de prouver qu'elles prennent les mêmes valeurs pour $(\varphi, \psi) = ((x)^r, (x)^s)$, ce qui est trivial sur la formule (47).

Prouvons que (iii) implique (ii). Tout d'abord, une récurrence immédiate sur l'entier $r \geq 2$ prouve que (43) implique la formule plus générale

(43) $\quad D_n(f_1 f_2 \dots f_r) = \sum_{p_1+\dots+p_r=n} D_{p_1}(f_1) \dots D_{p_r}(f_r)$

$(f_1, \dots, f_r \in A)$. D'ailleurs, la formule (43) prouve aussitôt, par récurrence sur $|n|$, que D_n est un opérateur différentiel d'ordre $\leq |n|$, et peut donc s'envisager comme un élément du dual du A-module $P^{(k)}(A)$. Le raisonnement ci-dessus déduisant (43) de (47) montre que la formule (43 bis) ci-dessus peut aussi s'écrire

(43 ter) $\quad \langle D_n, \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_r \rangle = \sum_{p_1+\dots+p_r=|n|} \langle D_{p_1}, \varphi_1 \rangle \dots \langle D_{p_r}, \varphi_r \rangle$

Appliquant cette formule au produit $(\delta x)^m = \prod_i (\delta x^i)^{m_i}$ (considéré comme un produit de $r = |m|$ termes identiques à certains des δx^i) et utilisant la formule $\langle D_i, \delta x^j \rangle = D_i x^j = \delta_i^j$, on trouve la formule (47). Cela prouve que les $(\delta x)^n$ $(|n| \leq k)$ sont linéairement indépendants sur A, et comme ils engendrent le A-module $P^{(k)}(A)$ (n°5, cor.2 du th.2 en se rappelant que les dx^i engendrent le A-module $\Omega^1(A)$), ils en forment une base. Cela prouve l'équivalence des conditions (i), (ii) et (iii), il reste à prouver les formules (44), (45) (46) pour achever la démonstration. La formule (44) se déduit de (43 bis) en appliquant cette dernière au produit

$x^m = \prod (x^i)^{m_i}$ de $r = |m|$ facteurs identiques à certains des x^i, et utilisant D_0 = identité et $D_i x^j = \delta_i^j$. La formule (45) est une conséquence de (39) et (47). Pour vérifier (46), il suffit de vérifier que les deux membres ont la même valeur sur les éléments x^m ($|m| \leq k$), car les $d^{(k)}(x^m) = (d^{(k)}x)^m$ engendrent le A-module $P^{(k)}(A)$, puisque les $(\delta x)^m = (d^{(k)}x - x)^m$ l'engendrent et s'expriment comme combinaisons A-linéaires en les $(d^{(k)}x)^n$ (formule de Newton). Or la vérification que les deux membres de (46) ont même valeur pour l'argument x^p est immédiate sur la formule (44). Cela achève la démonstration.

COROLLAIRE 1 - Sous les conditions de la prop.13, les opérateurs différentiels D_n ($|n| \leq k$) commutent, et si I est fini tout opérateur différentiel d'ordre $\leq k$ dans A se met de façon unique sous la forme

$$(48) \qquad D = \sum_{|n| \leq k} f_n D_n$$

avec des $f_n \in A$.

La première assertion résulte de la formule (46), la deuxième du fait que (D_n) est, sous les conditions envisagées, une base du dual du A-module $P^{(k)}(A)$. Plus généralement, si M est un A-module, un opérateur différentiel D d'ordre $\leq k$ de A dans M se met alors de façon unique sous la forme

$$(48 \text{ bis}) \qquad D(f) = \sum_{|n| \leq k} a_n D_n(f)$$

pour des $a_n \in M$ convenables.

COROLLAIRE 2 - Soit k un anneau commutatif, $x = (x^i)_{i \in I}$ une famille d'indéterminées, A l'algèbre de polynômes $A = k[(x^i)_{i \in I}] = k[x]$. Alors les conditions de la prop.13

sont vérifiées pour tout entier $k \geq 1$. Les opérateurs différentiels D_n sont caractérisés par la formule

(49) $\quad f(x+y) = \sum D_n f(x) y^n \qquad (f \in A = k[x])$

où y est un autre système $y = (y^i)_{i \in I}$ d'indéterminées, distinctes des x^i.

Comme les x^i engendrent la k-algèbre A, il s'ensuit immédiatement que les dx^i engendrent le A-module $\Omega^1(A)$. D'autre part, en vertu de l'isomorphisme $k[x,y] = k[x][y]$, pour toute $f \in A$ la formule (49) définit bien sans ambiguité des $D_n f \in A$ (nuls sauf un nombre fini). Il est immédiat que les $D_n f$ dépendent k-linéairement de f, que $D_0 f = f$ (comme on voit en faisant la spécialisation $y \longrightarrow 0$) ; et que (42) et (43) sont vrais. Cela prouve le corollaire. On notera que la formule (45) implique en particulier $D_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, ($\frac{\partial}{\partial x^i}$ étant défini par la formule (30) ou (30 bis)), ainsi $D_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ est une k-dérivation de la k-algèbre A, et dans le cas actuel où $A = k[x]$, elle coïncide avec la k-dérivation introduite par Notre Maitre dans Alg. Chap.IV par.3.

11 - Passage aux anneaux de fractions ; extension des scalaires.

Ce numéro et le suivant, qui ne pourront probablement figurer à cet endroit, ont été mis pour l'instruction de Bourbaki qui pourra les exhumer au moment voulu, probablement en Algèbre Commutative. Le rédacteur profite de l'occasion pour suggérer qu'on mette dans les "Structures Fondamentales" un livre de

"Géométrie Algébrique Elémentaire" comprenant essentiellement l'Algèbre Commutative, la Géométrie Algébrique "qualitative" de Chevalley, (et peut-être la théorie des intersections). Il s'agit bien là d'une structure fondamentale au même titre que n'importe quelle autre figurant dans la Première Partie, et la seule raison qu'on n'ait pas envisagé dès le début à lui assigner cette place, était sans doute que la théorie n'en était pas encore au stade bourbachisable. Si, comme tout le monde en convient, on ne peut se dispenser de donner dans la Première Partie un livre d'Algèbre Homologique, (qui traite d'une technique fondamentale, mais non d'une structure fondamentale), il semble bizarre qu'on se permette d'exclure la géométrie algébrique.

Soient A une algèbre commutative sur l'anneau k, S une partie multiplicativement stable de A ne contenant pas 0, on notera AS^{-1} l'anneau des fractions de A relatif à S, et pour tout A-module M, MS^{-1} le AS^{-1}-module $M \otimes_A AS^{-1}$. Les homomorphismes canoniques

$$A \longrightarrow AS^{-1} \quad , \quad M \longrightarrow MS^{-1}$$

définissent des homomorphismes non moins canoniques

$$P^{(k)}(A) \longrightarrow P^{(k)}(AS^{-1}) \qquad P_A^{(k)}(M) \longrightarrow P^{(k)}_{AS^{-1}}(MS^{-1})$$

(n°6, prop.6), compatibles avec les structures de modules sur A resp. AS^{-1} et l'homomorphisme $A \longrightarrow AS^{-1}$. On en déduit, d'après la théorie de l'extension des scalaires, des homomorphismes (toujours canoniques)

(5o) $P^{(k)}(A)S^{-1} \longrightarrow P^{(k)}(AS^{-1})$, $P_A^{(k)}(M)S^{-1} \longrightarrow P^{(k)}_{AS^{-1}}(MS^{-1})$

On notera d'ailleurs que $P^{(k)}(A)S^{-1}$ est en fait une algèbre sur AS^{-1} et le premier homomorphisme (50) est compatible avec cette structure, que $P_A^{(k)}(M)S^{-1}$ est un module sur $P^{(k)}(A)S^{-1}$ et que le deuxième homomorphisme (50) est compatible avec les structures de modules sur les anneaux figurant dans le premier homomorphisme (50).

PROPOSITION 13 - Les homomorphismes (50) sont des isomorphismes.

Il suffit de prouver que le deuxième homomorphisme (50) admet un AS^{-1}-homomorphisme inverse. Or pour se donner un homomorphisme en sens inverse, il revient au même de se donner une application k-linéaire $D : MS^{-1} \longrightarrow P_A^{(k)}(M)S^{-1}$ qui soit un opérateur différentiel d'ordre $\leq k$ (de modules sur la k-algèbre AS^{-1}). On a envie de poser $D(ms^{-1}) = d^{(k)}(m)d^{(k)}(s)^{-1}$, mais il faut vérifier que $d^{(k)}(s)$, considéré comme élément de $P^{(k)}(A)S^{-1}$, est inversible. Or, on a

$$d^{(k)}s = s + \delta^{(k)}s = s(1+s^{-1}\delta^{(k)}s)$$

et $P^{(k)}(A)S^{-1}$ est une AS^{-1}-algèbre augmentée d'ordre fini $\leq k$, $\delta^{(k)}s$ donc $s^{-1}\delta^{(k)}s$ est dans son idéal d'augmentation, donc $1+s^{-1}\delta^{(k)}s$ est inversible, et comme s est aussi inversible, il en est de même de $d^{(k)}s$, et de façon précise on a

$$(51) \qquad d^{(k)}(s)^{-1} = s^{-1}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\delta^{(k)}(s)^i s^{-i}$$

Nous poserons donc

$$D(ms^{-1}) = (d^{(k)}m)(d^{(k)}s)^{-1}$$

Il faut vérifier que le deuxième membre ne dépend que de l'élément ms^{-1} de MS^{-1} et non du choix de m, s, la vérification est très facile grâce à la propriété multiplicative de $d^{(k)}$ (se garder d'utiliser la formule explicite (51) !). Il faut vérifier que D est un opérateur différentiel d'ordre $\leq k$, c'est aisé par récurrence sur k. Ainsi D provient d'un homomorphisme AS^{-1}-linéaire, transformant $d^{(k)}_{AS^{-1}}(ms^{-1})$ en $(d^{(k)}m)(d^{(k)}s)^{-1}$, or ce dernier élément est transformé par le deuxième homomorphisme (50) en $d^{(k)}_{AS^{-1}}(m)d^{(k)}(s)^{-1}$, où maintenant $d^{(k)}(s)^{-1}$ désigne l'inverse de $d^{(k)}(s)$ dans $P^{(k)}(AS^{-1})$, on retrouve donc bien $d^{(k)}_{AS^{-1}}(ms^{-1})$, et on voit de même en composant le deuxième homomorphisme (50) avec D qu'on trouve l'identité. Cela achève la démonstration, qui est un peu embêtante, mais on y voit encore moins en revenant aux définitions du n°2.

COROLLAIRE 1 - $\Omega^1(AS^{-1})$ s'identifie à $\Omega^1(A)S^{-1}$, donc (d'après les propriétés connues de l'opération "S^{-1}")
$\Omega(AS^{-1}) = \bigwedge_A \Omega^1(AS^{-1})$ s'identifie à $\Omega(A)S^{-1}$.

Cela résulte de prop.13 et th.2, n°5.

La proposition 13 est aussi essentiellement équivalente au

COROLLAIRE 2 - Soient M et N deux A-modules, D un opérateur différentiel d'ordre $\leq k$ de M dans N. Alors il existe un opérateur différentiel et un seul D_S de AS^{-1}-modules de MS^{-1} dans NS^{-1}, tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{D} & N \\ \downarrow & & \downarrow \\ MS^{-1} & \xrightarrow{D_S} & NS^{-1} \end{array}$$

(où les homomorphismes verticaux sont les homomorphismes canoniques).

(On notera que la formule explicite pour $D_S(ms^{-1})$ n'est pas très simple, on doit utiliser la formule (51)). Si on applique ce corollaire au cas où D est l'opérateur de différentiation extérieure dans $\Omega(A)$, et si on tient compte de l'identification donnée dans le corollaire 1, on trouve l'opérateur de différentiation extérieure dans $\Omega(AS^{-1})$.

COROLLAIRE 3 - Supposons que $\Omega^1(A)$ soit un A-module de type fini. Alors pour tout A-module de type fini M et tout entier $k \geqslant 0$, le A-module $P^{(k)}(M)$ est de type fini, et cette propriété de la k-algèbre A se conserve par passage aux anneaux de fractions AS^{-1}. Supposons de plus A noethérien, soient M et N deux A-modules, M étant de type fini, soit $D_A^{(k)}(M,N)$ le A-module des opérateurs différentiels d'ordre $\leqslant k$ de M dans N, définissons de façon analogue $D_{AS^{-1}}^{(k)}(MS^{-1},NS^{-1})$, alors on a un isomorphisme canonique

$$(52) \qquad D_A^{(k)}(M,N)S^{-1} \longrightarrow D_{AS^{-1}}^{(k)}(MS^{-1},NS^{-1})$$

Faisant $M = N = A$, cet isomorphisme induit un isomorphisme

$$(53) \qquad \mathcal{D}(A)S^{-1} \longrightarrow \mathcal{D}(AS^{-1})$$

La première assertion résulte aussitôt du cor.3 au th.2, n°5, la deuxième résulte de la prop.13. On a (sans conditions sur A, M, N) un homomorphisme canonique (52), déduit de l'application $D \longrightarrow D_S$ envisagée dans cor.2. D'ailleurs les deux membres de (52) s'identifient respectivement à

$\mathrm{Hom}_A(P_A^{(k)}(M), N)S^{-1}$ et $\mathrm{Hom}_{AS^{-1}}(P_{AS^{-1}}^{(k)}(MS^{-1}), NS^{-1})$, grâce à prop.13 le deuxième membre peut alors s'écrire aussi $\mathrm{Hom}_{AS^{-1}}(P_A^{(k)}(M)S^{-1}, NS^{-1})$, il s'identifie donc bien au premier membre si A est noethérien et $P^{(k)}(M)$ de type fini. Enfin, A étant de nouveau quelconque, l'homomorphisme (52) induit bien, pour M=N=A, un homomorphisme (53), si on se rappelle que les dérivations dans A sont les opérateurs différentiels d'ordre ≤ 1 s'annulant sur 1 (th.2, cor.1), et si (52) est un isomorphisme c'est là un isomorphisme, en vertu de la structure connue de $P^{(1)}(A)$, donc de son dual. (On peut aussi invoquer le cor.1 directement).

COROLLAIRE 4 - Supposons que A soit une algèbre de type fini sur l'anneau k, ou un anneau de fractions AS^{-1} d'une telle algèbre. Alors les A-modules $P^{(k)}(A)$ sont de type fini.

La proposition 13 nous ramène en effet au cas où A est une algèbre de type fini. Pour une telle algèbre, engendrée par des générateurs x^i en nombre fini, les dx^i engendrent manifestement le B-module $\Omega^1(B)$, qui est donc de type fini, d'où résulte immédiatement que les $P^{(k)}(B)$ sont aussi de type fini (th.2, cor.2). Bien entendu, sous les conditions du cor.3, si M est un A-module de type fini, les $P^{(k)}(M)$ sont des A-modules de type fini. Ceci s'applique par exemple à des algèbres affines, et des anneaux de fractions de telles algèbres, en particulier aux localités.

COROLLAIRE 5 - Soient k un corps, $x = (x^i)_{i \in I}$ une famille d'indéterminées, soit $K = k(x)$. Alors les dx^i forment une base

de $\Omega^1_k(K)$, et la K-algèbre augmentée $P^{(k)}_k(K)$ est régulière.

Il suffit d'appliquer th.5, cor.2 à l'anneau $A = k[x]$, et d'appliquer la prop.13.

Soit toujours A une k-algèbre commutative, et considérons un homomorphisme d'anneaux commutatifs $k \longrightarrow k'$, considérons $A' = A \otimes_k k'$, et, pour tout A-module M, le A'-module $M' = M \otimes_A A' = M \otimes_k k'$. On a défini au n°6, prop.6 des homomorphismes

$$P^{(k)}_k(A) \longrightarrow P^{(k)}_{k'}(A') \quad , \quad P^{(k)}_{A/k}(M) \longrightarrow P^{(k)}_{A'/k'}(M')$$

qui donnent naissance à des homomorphismes

(54) $P^{(k)}_k(A) \otimes k' \longrightarrow P^{(k)}_k(A \otimes k')$, $P^{(k)}_{A/k}(M) \otimes_k k' \longrightarrow P^{(k)}_{A \otimes_k k'/k'}(M \otimes_k k')$

donnant lieu aux mêmes remarques générales que les homomorphismes (50) (remarques qui auraient dû figurer au n°6).

PROPOSITION 14 - Les homomorphismes (54) sont des isomorphismes.

La démonstration est immédiate à partir des définitions du n°2.

Bien entendu, les homomorphismes (50) et (52) sont compatibles avec les homomorphismes canoniques $P^{(k)} \longrightarrow P^{(l)}$.

12 - Etude différentielle des localités et des algèbres affines.

THEOREME 6 - Soient k un corps commutatif, K une extension de type finie de k, $\mathfrak{o}$ l'anneau local de l'idéal d'augmentation $\mathfrak{p}$ de $K \otimes_k K$. Alors $\Omega^1_k(K)$ est un espace vectoriel sur K de dimension finie $\geq n = \deg.\mathrm{tr}_k(K)$, et toutes les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\dim_K \Omega^1_{k}(K) = n$

(ii) K est une extension séparable de k

(iii) $P^\infty_k(K)$ est une K-algèbre augmentée régulière

(iv) $\mathcal{O}$ est un anneau local régulier, (i.e. un anneau K-augmenté régulier).

(Pour (iii) et (iv), voir n°9, déf.6).

Que la dimension de $\Omega^1(K)$ soit finie, et majorée par exemple par le nombre d'éléments d'un système de générateurs de l'extension K de k, résulte de cor.4 à prop.13. Le fait que cette dimension soit $\geq n$, et l'équivalence de (i) et (ii) ont été faits dans une rédaction ultérieure de Alg. Chap.V, par.9 (en attendant, voir exposé 13 du séminaire Cartan-Chevalley). Rappelons (n°2, et n°4) que $P^\infty(K)$ est l'algèbre augmentée complétée de $P = K \otimes_k K$, comme K est un corps donc l'idéal d'augmentation $\mathfrak{g}$ est maximal, on sait que $P/\mathfrak{g}^{k+1}$ est isomorphe à $P_{\mathfrak{g}}/(\mathfrak{g}P_{\mathfrak{g}})^{k+1}$ (ne pas l'oublier en Algèbre Commutative !), donc $P^\infty(K)$ s'identifie au complété de $\mathcal{O}$, ou encore les algèbres graduées associées à ces deux anneaux augmentés sont isomorphes, d'où l'équivalence de (iii) et (iv), équivalentes aussi à la condition que l'homomorphisme

(55) $\qquad S_K(G^1(\mathcal{O})) \longrightarrow G(\mathcal{O})$

soit bijectif. Or on a le

LEMME 4 - Soit K une extension de type fini et de degré de transcendance n du corps k, $\mathfrak{g}$ l'idéal d'augmentation de $K \otimes_k K$ et $\mathcal{O} = (K \otimes_k K)_{\mathfrak{g}}$, alors $\mathcal{O}$ est un anneau local de dimension n.

Il s'ensuit que si $\mathcal{O}$ est régulier, on a nécessairement $\dim. G^1(\mathcal{O}) = n$, donc (iv) implique (i), réciproquement si on a (i) i.e. si $\dim. G^1(\mathcal{O}) = n$, (55) est nécessairement injectif (donc bijectif), car si son noyau N était $\neq 0$, le polynôme caractéristique de $G(\mathcal{O}) \approx S_K(G^1(\mathcal{O}))/N$ serait de degré $< n$, contrairement au lemme 4. Il reste à prouver le lemme 4. Pour ceci, on note que K est une extension algébrique d'une extension transcendante pure K_0 de k, et $K \otimes_k K$ est un sur-anneau de $K_0 \otimes_k K_0$ qui est un module de type fini sur ce dernier, et dont l'idéal d'augmentation $\mathfrak{g}$ induit l'idéal d'augmentation $\mathfrak{g}_0$ de $K_0 \otimes_k K_0$. En vertu de Cohen-Seidenberg, les idéaux $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_0$ ont même rang, ce qui nous ramène au cas où K est une extension transcendante pure. Mais alors, en vertu de prop.13, cor.5, $G(\mathcal{O})$ est isomorphe à une algèbre de polynômes à n indéterminées, ce qui prouve le lemme.

COROLLAIRE 1 - Soit A une algèbre d'intégrité sur un corps k, telle que son corps des fractions K soit une extension séparable de type fini de k, de degré de transcendance n. Alors $\Omega^1(A)$ est un A-module de rang n, et le noyau du homomorphisme canonique

(55 bis) $\qquad S_A(\Omega^1(A)) \longrightarrow GP^\infty(A)$

est contenu dans le sous-module de torsion de $S_A(\Omega^1(A))$.

Il suffit de conjuguer le théorème 6 et la prop.13.

COROLLAIRE 2 - Soit A une algèbre intègre sur le corps k, telle que son corps des fractions K soit une extension de type fini de k. Si $S_A(\Omega^1(A))$ est sans torsion, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) K/k est séparable

(ii) l'homomorphisme (55 bis) est bijectif.

En effet (i) entraine (ii) en vertu du cor.1, inversement (ii) implique, en vertu de prop.13, que (55) est aussi bijectif, d'où (i) en vertu de th.6.

COROLLAIRE 3 - Soit A une algèbre intègre sur le corps k, telle que son corps des fractions K soit une extension de type fini de k, de degré de transcendance n. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\Omega^1(A)$ est un A-module projectif de rang n.

(ii) $P^\infty(A)$ est une A-algèbre augmentée régulière.

Ces conditions impliquent que K est une extension séparable de k.

Démonstration. Les conditions (i) et (ii) impliquent chacune que $S_A(\Omega^1(A))$ est sans torsion, (donc le cor.2 s'applique), et que K est une extension séparable de k en vertu de th.6 et prop.13. Donc en vertu de cor.2 (i) implique que (55 bis) est bijectif, d'où (ii) puisque $\Omega^1(A)$ est projectif, et inversement (ii) implique que $\Omega^1(A)$ est projectif, et pour raison de séparabilité que son rang est n (cor.1) ; d'où (i).

LEMME 5 - Soient $\mathcal{O}$ une localité intègre sur un corps k, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, $L = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ son corps résiduel, K son corps des fractions rationnelles, n le degré de transcendance de K sur k. Alors $\Omega^1(\mathcal{O})$ est un $\mathcal{O}$-module de type fini, de rang $\geq n$, on a une suite exacte canonique

$$(56) \qquad \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow L \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1(\mathcal{O}) \longrightarrow \Omega^1(L) \longrightarrow 0$$

et les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $n = \dim_L G^1(\mathcal{O}) + \dim_L \Omega^1(L)$

(ii) L'extension L de k est séparable, et l'anneau local $\mathcal{O}$ est régulier.

(iii) L'extension K de k est séparable, $\Omega^1(\mathcal{O})$ est libre, et le premier homomorphisme dans (56) est injectif.

(iv) L'extension K de k est séparable, $\Omega^1(\mathcal{O})$ est libre, et il existe un sous-corps de complété de $\mathcal{O}$ appliqué sur L par l'homomorphisme canonique.

Démonstration. La première assertion résulte de th.6 et prop.13. Le premier homomorphisme dans (56) est déduit de l'homomorphisme $x \longrightarrow dx$ de $\mathfrak{m}$ dans $\Omega^1(\mathcal{O})$ (appliquant $\mathfrak{m}^2$ dans $\mathfrak{m}\Omega^1(\mathcal{O})$ en vertu de $d(xy) = xdy + ydx$), le deuxième est déduit de l'homomorphisme $\Omega^1(\mathcal{O}) \longrightarrow \Omega^1(L)$ qui correspond à l'homomorphisme d'algèbres $\mathcal{O} \longrightarrow L$. L'exactitude de (56) est triviale (voir p. ex. N°6, exercice 1, a), où procèder directement par dualité, en notant que les k-dérivations de $\mathcal{O}$ dans L qui proviennent de k-dérivations de L sont exactement celle qui s'annulent sur $\mathfrak{m}$!). On a la suite d'inégalités :

$$(57)\quad n \leq \operatorname{rang}_{\mathcal{O}} \Omega^1(\mathcal{O}) \leq \dim_L (L \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1(\mathcal{O})) \leq \dim_L \Omega^1(L) + \dim_L G^1(\mathcal{O})$$

La première résulte de la première assertion du th.6, conjugué avec prop.13, la seconde résulte du lemme de Nakayama (compte tenu que $\Omega^1(\mathcal{O})$ est un $\mathcal{O}$-module de type fini en vertu de prop.13 cor.4), la troisième résulte de la suite

exacte (56). La condition (i) signifie l'égalité des membres extrêmes de (57), et équivaut donc au système d'égalités :

$$n = \text{rang}\,\Omega^1(\mathcal{O}) = \dim_L(L \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1(\mathcal{O})) = \dim_L \Omega^1_{L/k} + \dim_L G^1(\mathcal{O})$$

La première égalité signifie que K est une extension séparable de k (th.6 et prop.13), la deuxième que $\Omega^1(\mathcal{O})$ admet un système de générateurs égal à son rang (Nakayama) donc est libre, la troisième signifie que (56) reste exacte en majoutant 0 à gauche, d'où l'équivalence de (i) et (iii). Soit p la dimension de l'anneau local $\mathcal{O}$, alors le degré de transcendance de L sur k est n-p, et les deux termes du deuxième membre dans l'égalité (i) sont minorés respectivement par p (Alg. Comm.) et n-p (en vertu de th.6), donc (i) équivaut au fait que ces inégalités soient des égalités, ce qui signifie respectivement que $\mathcal{O}$ est un anneau local régulier (Alg.Comm.), et que L est une extension séparable de k (th.6) d'où l'équivalence de (i) et (ii), donc des conditions (i), (ii), (iii). On sait bien que la seule condition que L soit séparable sur k implique déjà que L admet un corps des représentants dans le complété de $\mathcal{O}$ (voir Algèbre Commutative), donc (iv) est impliqué par les autres conditions. Inversement (iv) implique (iii), car il suffit de montrer que L/k séparable implique que le premier homomorphisme dans (56) est injectif. Or l'hypothèse implique qu'il existe un corps de représentants pour L dans $\mathcal{O}/\mathfrak{m}^2$, alors la projection correspondante de $\mathcal{O}/\mathfrak{m}^2$ sur son idéal maximal $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = G^1(\mathcal{O})$ définit une dérivation de $\mathcal{O}$ dans le $\mathcal{O}$-module $G^1(\mathcal{O})$, d'où un homomorphisme

$\Omega^1(\sigma) \longrightarrow G^1(\sigma)$, qui définit par passage au quotient un homomorphisme $L \otimes_\sigma \Omega^1(\sigma) \longrightarrow G^1(\sigma)$, dont on vérifie aussitôt qu'il est inverse à gauche du premier homomorphisme dans (56), qui est bien injectif. La démonstration du lemme 5 est achevée. Nous pouvons maintenant prouver le

THEOREME 7 - Soient σ une localité intègre sur un corps k, K son corps des fractions, n le degré de transcendance de K sur k. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\Omega^1(\sigma)$ est libre de rang n (ou : $\Omega^1(\sigma)$ est libre et K/k est séparable).

(ii) $P^\infty(\sigma)$ est une σ-algèbre augmentée régulière.

Ces conditions impliquent que K/k est séparable, et si le corps résiduel L de σ est une extension séparable de k, elles équivalent à la condition :

(iii) σ est un anneau local régulier.

Comme pour un module de type fini sur σ, il revient au même d'être libre ou d'être projectif, l'équivalence de (i) et (ii) et le fait que ces conditions impliquent que K est une extension séparable de k, est contenu dans le cor.3 au th.6. Supposons que L soit une extension séparable de k, alors la suite (56) reste exacte en rajoutant un zéro à gauche. Donc la condition (i) équivaut à la condition (iii) du lemme 5, et (iii) équivaut à la condition (ii) du lemme, donc ces conditions sont équivalentes en vertu dudit lemme.

COROLLAIRE 1 - Si k est parfait, les conditions suivantes

sont équivalentes pour une localité intègre $\mathcal{O}$ sur k:

(i) $\Omega^1(\mathcal{O})$ est libre

(ii) $P^\infty(\mathcal{O})$ est une $\mathcal{O}$-algèbre augmentée régulière

(iii) $\mathcal{O}$ est un anneau local régulier.

COROLLAIRE 2 - Soit k un corps parfait, A une algèbre intègre affine sur k, ou une algèbre de fractions d'une telle algèbre. Conditions équivalentes :

(i) $\Omega^1(A)$ est un A-module projectif

(ii) $P^\infty(A)$ est une A-algèbre augmentée régulière

(iii) A est un anneau "régulier", i.e. ses anneaux des fractions $A_{\mathfrak{p}}$ ($\mathfrak{p}$ parcourant les idéaux premiers, ou seulement maximaux, de A) sont des anneaux locaux réguliers.

On applique le cor.3 au th.6, la prop.13 et le cor.1.

COROLLAIRE 3 - Soit $\mathcal{O}$ une localité régulière sur k, dont le corps résiduel L est une extension algébrique séparable de k, soit $(x^1,\dots,x^n)$ une suite finie d'éléments de l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{O}$. Pour que les dx^i forment une base du $\mathcal{O}$-module $\Omega^1(\mathcal{O})$, il faut et il suffit que les images canoniques des x^i dans $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = G^1(\mathcal{O})$ forment une base de cet espace vectoriel sur L, i.e. que (x^i) soit un système régulier de paramètres de $\mathcal{O}$.

En effet, la suite (56) est exacte quand on rajoute un zéro à gauche, et compte tenu de $\Omega^1(L) = 0$ (puisque L est algébrique séparable sur k) elle montre que $G^1(\mathcal{O}) \to L \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1(\mathcal{O})$ est un isomorphisme. Le corollaire résulte alors du lemme de

Nakayama.

Remarque. J'ignore si la condition que L/k soit séparable est inutile pour la validité de la deuxième partie du th.7 (je suspecte que non). On notera en tous cas que les conditions (i) et (ii) n'impliquent pas que L/k soit séparable, comme on voit en prenant pour k un corps non parfait et pour $\mathcal{O}$ l'anneau local de l'idéal premier x^p-a dans $k[x]$, a étant un élément de k qui n'est pas puissance p.ème. En tout état de cause, il semble raisonnable de distinguer dans la terminologie entre une localité qui est régulière (notion qui ne fait intervenir que la structure d'anneau) et une localité qui satisfait aux conditions équivalentes du lemme 5, i.e. aux conditions du th.7 (y inclus la séparabilité de L/k) - notion qui fait aussi intervenir la structure de k-algèbre sur A.

DEFINITION 7 - Une localité $\mathcal{O}$ sur un corps k, de corps des fractions K et de corps résiduel $L = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ est dite simple, si elle satisfait aux conditions équivalentes du lemme 5, ou encore si L/k est séparable et si elle satisfait aux conditions équivalentes (i), (ii), (iii), du th.7, i.e. si elle satisfait aux conditions équivalentes suivantes :

(i) $P^{(k)}(\mathcal{O})$ est un $\mathcal{O}$-module augmenté régulier, et l'homomorphisme canonique $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow \Omega^1(\mathcal{O})/\mathfrak{m}\,\Omega^1(\mathcal{O})$ est injectif

(ii) $\Omega^1(\mathcal{O})$ est libre de rang $n = \text{deg.tr.}_k K$, et l'homomorphisme envisagé dans (i) est injectif.

(iii) $\mathcal{O}$ est régulier et L/k est séparable

(i bis) $P^{(k)}(\sigma)$ est une σ-algèbre augmentée régulière et L/k est séparable.

On observera que l'énoncé des conditions (i) et (ii) ne fait pas intervenir des considérations de séparabilité, et s'exprime directement en termes de Géométrie Différentielle.

La proposition suivante aurait pu venir dès le n°1 ou n°2, mais elle ne semble s'insérer nulle part de façon très naturelle.

PROPOSITION 15 - Soit A une k-algèbre commutative, $\mathfrak{a}$ un idéal de A, D un opérateur différentiel d'ordre $\leq k$ d'un A-module M dans un autre N. Alors pour tout entier $k' \geq k$, D applique $\mathfrak{a}^{k'}M$ dans $\mathfrak{a}^{k'-k}N$.

Démonstration par récurrence sur k, l'assertion est triviale pour $k=0$, supposons donc $k>0$ et l'assertion démontrée pour les ordres $<k$. On procède alors par récurrence sur $k'-k$, l'assertion étant triviale pour $k'-k=0$, supposons donc $k'-k>0$ et l'assertion démontrée pour les couples (k,k'_1) tels que $k \leq k'_1 < k'$. Soient $f \in \mathfrak{a}$, $g \in \mathfrak{a}^{k'-1}$, $m \in M$; on a

$$D(fgm) = fD(gm) + L_f(gm)$$

où L_f est un opérateur différentiel d'ordre $\leq k-1$. Les deux termes du second membre sont, en vertu des hypothèses de récurrence, dans $\mathfrak{a}.\mathfrak{a}^{(k'-1)-k}N$ resp. dans $\mathfrak{a}^{(k'-1)-(k-1)}N$, donc dans $\mathfrak{a}^{k'-k}N$, donc $D(fgm) \in \mathfrak{a}^{k'-k}N$, ce qui prouve la proposition - Appliquant cette proposition aux opérateurs différentiels $d^{(k)}$ on trouve le

COROLLAIRE 1 - Soit M un A-module, k un entier >0, alors le

k-homomorphisme $d^{(k)} : M \longrightarrow P^{(k)}(M)$ définit par passage aux quotients un k-homomorphisme :

(57) $\quad M/\mathfrak{a}^{k+1}M \longrightarrow P^{(k)}M/\mathfrak{a}P^{(k)}M$

en particulier, pour $M=A$, on trouve un homomorphisme de k-algèbres :

(57 bis) $\quad A/\mathfrak{a}^{k+1}A \longrightarrow P^{(k)}(A)/\mathfrak{a}P^{(k)}(A).$

Ces deux homomorphismes sont compatibles avec les structures de modules des deux membres de (57) sur les deux membres de (57 bis).

Cette dernière assertion résulte de la formule $d^{(k)}(fm) = d^{(k)}(f)d^{(k)}(m)$.

COROLLAIRE 2 - Sous les conditions du cor. 1, supposons que l'homomorphisme naturel de k dans $A/\mathfrak{a}$ soit un isomorphisme. Alors (57) et en particulier (57 bis) est un isomorphisme.

Soit $\varepsilon : A \longrightarrow k$ l'augmentation définie par l'idéal $\mathfrak{a}$, et mettons sur $M/\mathfrak{a}^{k+1}M$ la structure de A-module déduite de sa structure de k-module, k étant identifié à un quotient de A : $f.(\bar{m}) = \varepsilon(f)\bar{m}$ pour tout $\bar{m} \in M/\mathfrak{a}^{k+1}M$. Nous allons définir une application A-linéaire

$$v : P^{(k)}(M)/\mathfrak{a}P^{(k)}(M) \longrightarrow M/\mathfrak{a}^{k+1}M$$

ou ce qui revient au même, une application A-linéaire de $P^{(k)}(M)$ dans $M/\mathfrak{a}^{k+1}M$. Pour ceci, on note que l'application canonique $m \longrightarrow \bar{m}$ de M sur $M/\mathfrak{a}^{k+1}M$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leq k$, comme le montre une récurrence immédiate sur k (cf. démonstration de prop. 2), il existe donc une

application A-linéaire unique de $P^{(k)}(M)$ dans $M/\mathfrak{a}^{k+1}M$ transformant $d^{(k)}m$ en $\bar{m}$. Comme $M/\mathfrak{a}^{k+1}M$ est annulé par $\mathfrak{a}$, l'application précédente s'annule sur $\mathfrak{a}P^{(k)}(M)$, d'où l'homomorphisme v cherché. Soit u l'homomorphisme (57), prouvons que $vu = \underline{1}$, $uv = \underline{1}$ (ce qui achève la démonstration du cor.2). En effet $vu(\bar{m}) = v(d^{(k)}m \bmod P^{(k)}(M)) = \bar{m}$, d'où $vu = \underline{1}$, et $uv = \underline{1}$ en résultera si nous prouvons que u est surjectif. Or cela résulte de la formule $fd^{(k)}(m) \equiv \varepsilon(f)d^{(k)}(m) \bmod \mathfrak{a}P^{(k)}(M)$.

Tout ceci a assez peu à voir avec les localités simples, si ce n'est que dans le cas desdites, on a une généralisation partielle du cor.2 (en ce qu'on suppose seulement $A/\mathfrak{a}$ algébrique sur k), grâce au corollaire suivant (dont l'utilité, ainsi que de celui qui le suit, est douteuse) :

COROLLAIRE 3 - Sous les conditions du cor.1, supposons que $P^{(k)}(A)$ soit une A-algèbre augmentée tronquée régulière d'ordre k, que $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}$ soit un idéal maximal de A et que l'homomorphisme $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \Omega^1(A)/\mathfrak{m}\,\Omega^1(A)$ induit par (57 bis) soit un isomorphisme. Alors l'homomorphisme (57 bis) est un isomorphisme, et il en est de même de (57) si M est libre.

Comme $\mathfrak{m}$ est maximal, les deux membres de (57 bis) ne changent pas si on remplace A par $A_{\mathfrak{m}}$, grâce à la formule générale $N/\mathfrak{m}^iN = N_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}^iN_{\mathfrak{m}}$ (Alg.Comm.) et la formule $P^{(k)}(A)_{\mathfrak{m}} = P^{(k)}(A_{\mathfrak{m}})$ (prop.13). On peut donc supposer que A est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Soit $L = A/\mathfrak{m}$, soient B et C les L-anneaux augmentés des deux membres de (57 bis), il suffit de montrer que l'homomor-

phisme correspondant sur les gradués associés est un isomorphisme. Or on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} S_L(V)/I^{k+1} & \xrightarrow{\beta'} & S_L(W)/J^{k+1} \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha'} \\ G(B) & \xrightarrow{\beta} & G(C) \end{array}$$

où $V = G^1(B)$ et $W = G^1(C)$. D'après l'hypothèse α' et β' sont des isomorphismes, donc $\beta\alpha$ est un isomorphisme, et comme α est surjectif, il s'ensuit que β est un isomorphisme. La dernière assertion du cor.2 en résulte immédiatement. En particulier :

COROLLAIRE 4 - Supposons que $\mathfrak{m}$ soit un idéal maximal d'une algèbre affine A sur k, et que le corps $A/\mathfrak{m}$ soit algébrique sur k et que $A_{\mathfrak{m}}$ soit simple (déf.7). Alors l'homomorphisme canonique $A/\mathfrak{m}^{k+1} \to P^{(k)}(A)/\mathfrak{m}P^{(k)}(A)$ est bijectif.

13 - Dual d'un opérateur différentiel.

Dans ces deux numéros finaux, le rédacteur s'est permis de se borner à indiquer le résultat sans démonstration, d'autant plus qu'il n'en aura pas besoin pour la suite de sa rédaction.

THEOREME 8 - Soit A une k-algèbre telle que $P^\infty(A)$ soit une A-algèbre augmentée régulière (déf.6), et contenant une famille $(x^i)_{1\leq i\leq n}$ de n éléments telle que les dx^i forment une base de $\Omega^1(A)$ (cf. th.5). Pour tout A-module M ayant une base finie, $M^0 = M' \otimes_A \Omega^n(A)$, où M' est le A-module dual de M. On a un isomorphisme canonique $M^{00} = M$. Il est possible, et d'une seule façon, d'associer à tout opérateur différentiel $D:M \to N$ d'un A-module ayant une base finie dans un autre, un opérateur

différentiel $D^0 : M^0 \longrightarrow M^0$, de façon que les conditions (i), (ii), et (iii) ci-dessous soient satisfaites.

(i) $(D+D')^0 = D^0+D'^0$, $(DD')^0 = D'^0 D^0$

(ii) Si D est linéaire, on a $D^0 = {}^tD \otimes 1_{\Omega^n(A)}$

(iii) Pour tout indice monomial $k = (k_1,\dots,k_n)$ relatif à l'ensemble d'indices $[1,n]$ (cf. n°10), si on définit les opérateurs différentiels D_k dans A comme dans le th.5, on a

(58) $(D_k)^0(f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = (-1)^{|k|}(D_k f)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$

De plus, cette application $D \longrightarrow D^0$ ne dépend pas du choix particulier du système $(x^i)_{1 \leq i \leq n}$, et on a les propriétés :

(iv) $(D^0)^0 = D$.

(v) Ordre de D = Ordre de D^0

(vi) Supposons que le A-module M ayant une base finie soit muni d'une θ-structure (par.2, n°2, déf.2), munissons $M^0 = M' \otimes \Omega^n(A)$ de la θ-structure prolongement canonique de celle de M (par.2, n°4), et pour $X \in \mathfrak{g}(A)$ soient $\theta_{X,M}$ resp. θ_{X,M^0} les opérateurs dans M resp. M^0 définis par X. Alors on a

(59) $(\theta_{X,M})^0 = -\theta_{X,M^0}$

Le rédacteur ne connait pas de jolie démonstration, et la démonstration bébête est franchement pénible. Pour (x^i) donné, l'existence et l'unicité de $D \longrightarrow D^0$ satisfaisant aux conditions (i), (ii), (iii) se fait par des calculs directs assez immédiats, il en est de même des propriétés (iv), (v) et (vi). La vérification de l'invariance est pénible. C'est immédiat si k contient le corps $\mathfrak{g}$, car il suffit de vérifier l'invariance de D^0 quand D

est un opérateur différentiel dans A, et comme les opérateurs θ_X engendrent la A-algèbre des opérateurs différentiels dans A (n°10, th.4), l'invariance résulte de (i), (ii) et (vi). On se ramène ensuite au cas précédent par des arguments de "formules universelles". Le rédacteur a vainement cherché une caractérisation intrinsèque de D^0 valable sans conditions de caractéristique.

On aura d'ailleurs intérêt probablement a rejeter ce numéro et le suivant au par.4, car on aura besoin surtout de la variante évidente du th.8 dans le cadre faisceautisé du par.4, or cette variante ne résulte pas du th.8, bien que sa démonstration directe soit identique.

14 - Primitives d'opérateurs différentiels.

Soit, comme au n° précédent, A une k-algèbre muni d'un ensemble $(x^i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments tel que les dx^i forment une base de $\Omega^1(A)$, et que $P^\infty(A)$ soit régulière, i.e. (th.5) $GP^\infty(A)$ s'identifie à $A[y^1,\dots,y^n]$, et grâce à l'application transformant y^i en $x^i = d^\infty x^i - x^i$, $P^\infty(A)$ s'identifie à l'anneau de séries formelles complété de $A[y^1,\dots,y^n]$. Il s'ensuit, plus généralement, que si M est un A-module ayant une base finie $(m^j)_{j \in J}$, alors $GP^\infty(M)$ s'identifie au $A[y^1,\dots,y^n]$-module libre ayant pour base le système des $d^\infty(m^j)$, et $P^\infty(M)$ s'identifie au complété de ce module pour sa topologie naturelle. Soit alors B l'anneau de polynômes $k[y^1,\dots,y^n]$, on a $A[y^1,\dots,y^n] = A \otimes_k B$, d'où des isomorphismes

(60) $$\begin{cases} GP^{\infty}(A) = A \otimes_{h} B & (B = h[y^1, \ldots, y^n]) \\ GP^{\infty}(M) = A \otimes_{h} B^{(J)} & \text{si } M = A^{(J)} \end{cases}$$

Soit alors N un A-module quelconque, les opérateurs différentiels de M dans N s'identifient aux applications A-linéaires continues de $P^{\infty}(M)$ dans N, ou encore de $GP^{\infty}(M)$ dans N, qui d'après la formule précédente s'identifient aux applications h-linéaires continues de $B^{(J)}$ dans N ; les opérateurs différentiels d'ordre $\leq m$ correspondent aux applications h-linéaires de $B^{(J)}$ dans N qui s'annulent sur les éléments de $B^{(J)}$ dont toutes les composantes sont des polynômes d'ordre $\leq m+1$. Nous allons appliquer ces remarques au cas où $M = \Omega(A)$, en prenant dans M la base formée des $dx^I = dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$ où $I=(i_1,\ldots,i_p)$ avec $1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n$. Les éléments de la base correspondante de $GP^{\infty}(M)$ sont en correspondance biunivoque avec les éléments dy^I de $\Omega(B)$, aussi nous identifierons dans (60) $B^{(J)}$ à $\Omega(B)$, et obtenons l'isomorphisme

(61) $$GP^{\infty}(\Omega(A)) = A \otimes_{h} \Omega(B).$$

Supposons donné un opérateur différentiel D de $\Omega^p(A)$ dans N, nous nous proposons d'étudier les conditions moyennant lesquelles on peut écrire D sous la forme $D' \circ d$, où D' est un opérateur différentiel de $\Omega^{p+1}(A)$ dans A, et $d : \Omega^p(A) \longrightarrow \Omega^{p+1}(A)$ la différentielle extérieure. Interprétant D et D' comme des applications linéaires de $P^{\infty}(\Omega^p(A))$ resp. $P^{\infty}(\Omega^{p+1}(A))$ dans N, et considérant l'application A-linéaire $P^{\infty}(d)$ de $P^{\infty}(\Omega^p(A))$ dans $P^{\infty}(\Omega^{p+1}(A))$ définie par d (n°6), la condition précédente s'écrit aussi $D = D' \circ P^{\infty}(d)$. Or on constate facilement que

$P^\infty(d)$ invarie $GP^\infty(\Omega(A))$ et se réduit sur ce A-module à l'endomorphisme $1 \otimes_k d$, où maintenant d désigne la différentielle extérieure dans $\Omega(B)$. Par suite si on interprète les opérateurs différentiels des $\Omega^p(A)$ dans N comme des applications k-linéaires des $\Omega^p(B)$, cette identification est compatible avec la composition à droite avec d (considéré comme opérateur soit dans $\Omega(A)$, soit dans $\Omega(B)$). On en conclut facilement :

PROPOSITION 16 - Soit A une algèbre commutative sur un corps k, ayant une suite $(x^i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments telle que les dx^i forment une base de $\Omega^1(A)$; on suppose que $P^\infty(A)$ est une A-algèbre augmentée régulière. Soit D un opérateur différentiel d'ordre $\leq m$ de $\Omega^p(A)$ dans un A-module N. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) D est de la forme $D' \circ d$, où D' est un opérateur différentiel de $\Omega^{p+1}(A)$ dans N.

(i bis) Comme (i), en supposant de plus D' d'ordre $\leq m-1$.

(ii) $\langle \omega, D \rangle$ est nul chaque fois que ω est un cycle de $\Omega^p(k[y^1, \ldots, y^n])$.

(ii bis) D est nul chaque fois que ω est un cycle de $\Omega^p(k[y^1, \ldots, y^n])$ dont les coefficients sont des polynômes de degré $\leq m$.

Démonstration. (i) implique (ii) grâce aux réflexions qui précèdaient, (ii) implique (ii bis) trivialement, prouvons que (ii bis) implique (i bis), ce qui achèvera la démonstration, puisque trivialement (i bis) implique (i). Or les éléments de $\Omega^p(B)$ dont les coefficients sont des polynômes de degré $\leq m$

forment un supplémentaire L^p_m de l'espace des formes dont les coefficients sont des polynômes d'ordre $> m$, donc les opérateurs différentiels d'ordre $\leq m$ de $\Omega^p(B)$ dans M s'identifient aussi aux applications k-linéaires de L^p_m dans M. D'autre part, d applique L^p_m dans L^{p+1}_{m-1}, et (i bis) signifie donc que l'application k-linéaire donnée $L^p_m \to M$ se factorise en $L^p_m \xrightarrow{d} L^{p+1}_{m-1} \to M$. Comme k est un corps, cela signifie bien que l'application $\omega \longrightarrow \langle \omega, D \rangle$ s'annule sur les cycles de L^p_m.

COROLLAIRE - Soit H^p un ensemble de cycles de $\Omega^p(B)$ formant une base d'un supplémentaire de l'ensemble des différentielles exactes de $\Omega^p(B)$. Alors les conditions de prop.16 équivalent à la suivante :

(iii) $D \circ d = 0$, et $\langle \omega, D \rangle = 0$ pour $\omega \in H^p$.

La nécessité est évidente compte tenu de (i) et (ii), et la suffisance aussi puisque $D \circ d = 0$ implique déjà que $\langle \omega, D \rangle = 0$ si ω est une différentielle exacte de $\Omega^p(B)$, donc en vertu de la deuxième condition (iii) on aura même $\langle \omega, D \rangle = 0$ si ω est un cycle de $\Omega^p(B)$.

Il y a donc lieu de chercher l'anneau de cohomologie $H^*(\Omega(B))$, $B = k[y^1, \ldots, y^n]$. En vertu de la formule de Kunneth, on a

$$H^*(\Omega(B)) = H^*(\Omega(k[y]))$$

Or $H^*(\Omega(k[y]))$ se calcule trivialement, le résultat dépend de la caractéristique de k. Si celle-ci est nulle, on trouve 0 en toutes dimensions, sauf en dimension 0, où on trouve k ; il en

est donc de même pour la cohomologie du complexe $\Omega(B)$, d'où résulte aussitôt :

THEOREME 9 - Soit A une algèbre commutative sur un corps de caractéristique 0, telle que $\Omega^1(A)$ admette une base de la forme $(dx^i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, où les x^i sont des éléments de A. Soit D un opérateur différentiel d'ordre m de $\Omega^p(A)$ dans un A-module N ($p\geqslant 0$). Pour que D puisse s'écrire sous la forme $D=D'\circ d$, où D' est un opérateur différentiel de $\Omega^{p+1}(B)$ dans N, il faut et il suffit si $p>0$ que $D\circ d = 0$, et si $p=0$ que $D(1) = 0$. S'il en est ainsi, on peut choisir pour D' un opérateur différentiel m-1. Enfin, si D',D'' sont deux opérateurs différentiels de $\Omega^{p+1}(A)$ dans N tels que $D=D'd$ et $D=D''d$, on a $D''-D'=D'''d$, où D''' est un opérateur différential $\Omega^{p+2}(A)$ dans N.

Les conditions préliminaires de la prop.16 sont bien vérifiées, grâce au th.4, de sorte qu'il suffit d'appliquer le corollaire à prop.16. La dernière partie du th.9 s'obtient en appliquant la première partie à $D'-D''$.

Appliquant le th.8, on peut dualiser le résultat précédent et on trouve le

COROLLAIRE 1 - A étant comme dans le th.9, soit N un A-module ayant une base finie, et soit D un opérateur différentiel d'ordre m de N dans un $\Omega^p(A)$. Pour que D puisse s'écrire sous la forme $D=dD'$, où D' est un opérateur différentiel de N dans $\Omega^{p-1}(A)$, il faut et il suffit, si $p\neq n$, que l'on ait $dD=0$, et si $p=n$, que $D^0(1) = 0$ (où D^0 désigne l'opérateur "dual"

de D, défini dans le th.8). S'il en est ainsi, on peut même prendre pour D' un opérateur différentiel d'ordre m-1, et de plus D est déterminé à l'addition près d'un opérateur différentiel de la forme dD", où D" est un opérateur différentiel de M dans $\Omega^{p-1}(A)$. (On suppose $p \leq n$).

Il faut encore généraliser le cor.1 à des opérateurs différentiels en plusieurs arguments. Soient M_α $(1 \leq \alpha \leq r)$ et N des A-modules, une application D de $\prod_1^r M_\alpha$ dans N est dit opérateur différentiel r fois linéaire si c'est une application k-multilinéaire qui est un opérateur différentiel par rapport à chaque argument, quand les autres arguments ont des valeurs fixées. On définit de façon évidente les ordres partiels de D par rapport à ses r arguments (ils sont finis si les M_i sont à engendrement fini) et on constate que les opérateurs différentiels D dont les ordres partiels sont majorés respectivement par $m_1,\dots,m_r$ s'identifient aux applications A-linéaires de $\mathscr{D}_{(A)}^{p(m_\alpha)}(M_\alpha)$ dans N, ou aussi aux opérateurs différentiels (r-1) fois linéaires de $\prod_2^r M_\alpha$ dans le module $\mathscr{D}^{m_1}(M_1;N)$ des opérateurs différentiels d'ordre $\leq m_1$ de M_1 dans N, ayant des ordres partiels majorés respectivement par $m_2,\dots,m_r$. Si donc M_1 admet une base $(a^i)_{i\in I}$, permettant d'identifier M à $A^{(I)}$, et si A satisfait aux conditions générales du th.5, alors avec les notations de ce théorème, un opérateur différentiel de M_1 dans N se met de façon unique sous la forme

$$D(\sum f_i a^i) = \sum_{p,i} c_{p,i} D_p f_i$$

où les $c_{p,i}$ sont des éléments de N ; donc un opérateur différentiel

r fois linéaire de $\prod_1^r M_\alpha$ dans N dont le degré partiel en M_1 est fini se met de façon unique sous la forme

(62) $D(\sum f_i a^i, g^2, \ldots, g^r) = \sum_{p,i} C_{p,i}(g^2, \ldots, g^r) D_p f_i$

($g^k \in M_k$ pour $2 \leq k \leq r$), où les $C_{p,i}$ sont des opérateurs différentiels r-1 fois linéaires de $\prod_2^r M_\alpha$ dans N ; dire que les ordres partiels de D sont $\leq m_i$ signifie que les $C_{p,i}$ sont nuls pour $p > m_1$, et ont des ordres partiels $\leq m_2, \ldots, m_r$. Mais on peut aussi, conjuguant le cor.1 au th.5 et le th.8, écrire tout opérateur différentiel de M_1 dans N=A de façon unique sous la forme

$$D(\sum f_i a^i) = \sum D_p(b_{p,i} f_i)$$

où les $b_{p,i}$ sont dans A. Donc un opérateur différentiel r fois linéaire de $\prod_1^r M_\alpha$ dans A peut s'écrire de façon unique sous la forme

(63) $D(\sum f_i a^i, g^2, \ldots, g^r) = \sum_{p,i} D_p(B_{p,i}(g^2, \ldots, g^r) f_i)$

où les $B_{p,i}$ sont des opérateurs différentiels r-1 fois linéaires de $\prod_2^r M_\alpha$ dans A. Il importe cependant de remarquer que, le passage du système $(c_{p,i})$ au système $(b_{p,i})$, ou si on veut d'un opérateur différentiel à son dual, étant loin d'être A-linéaire, les ordres partiels des opérateurs différentiels $B_{p,i}$ ne correspondent plus aux ordres partiels de D par rapport aux mêmes arguments. Il convient alors d'introduire l'ordre total d'un opérateur différentiel r fois linéaire de $\prod_1^r M_\alpha$ dans un A-module N, qui est défini si tous les M_α admettent des bases finies. La donnée de telles bases identifie un opérateur différentiel r fois linéaire D de $\prod_1^r M_\alpha$ dans N à un système d'opérateurs

différentiels r fois linéaires de A^r dans N. Or un tel opérateur s'écrit de façon unique :

(64) $D(g^1,\dots,g^r) = \sum e_{p_1,\dots,p_r} D_{p_1}(g^1)\dots D_{p_r}(g^r)$

où les $e_{p_1,\dots,p_r}$ sont des éléments de N. Par définition l'ordre total de D est égal au sup des sommes $|p_1| + \dots + |p_r|$ pour $e_{p_1,\dots,p_r} \neq 0$, resp. à 0 si D=0. Et l'ordre total d'un opérateur différentiel r fois linéaire de $\prod_1^r M_\alpha$ dans N est par définition le sup des ordres des opérateurs différentiels r fois linéaires de A^r dans N qui l'expriment (lorsque des bases ont été choisies dans les M_i). Il est immédiat que cet ordre total ne dépend pas des bases choisies. Cette notion étant posée, on constate facilement que si un opérateur différentiel r fois linéaire de $\prod_1^r M_\alpha$ dans A est écrit sous la forme (63), son ordre total est égal au sup des sommes $|p|$ + ordre total de $B_{p,i}$.

Nous pouvons maintenant énoncer le

COROLLAIRE 2 - A étant comme dans le th.9, soient M_α $(1 \leq \alpha \leq r)$ des A-modules, et soit D un opérateur différentiel r fois linéaire de $\prod_1^r M_\alpha$ dans $\Omega^q(A)$. On suppose que M_1 admet une base finie, et que les M_i sont à engendrement fini (de sorte que les ordres partiels de D sont finis). Pour $(g^2,\dots,g^r) \in \prod_2^r M_\alpha$ on désigne par $D(g^2,\dots,g^r)$ l'opérateur différentiel $g^1 \longrightarrow D(g^1,\dots,g^r)$ de M_1 dans $\Omega^q(A)$. Pour que D soit de la forme dD', où D' est un opérateur différentiel r fois linéaire de $\prod_1^r M_\alpha$ dans $\Omega^{q-1}(A)$, il faut et il suffit, si $q \neq n$, que $dD = 0$, et si q=n, que l'on ait $D(g^2,\dots,g^r)^0(1) = 0$ pour tout

$(g^2,\dots,g^r)\in\prod_2^r M_\alpha$, D' est bien déterminé à addition près d'un opérateur différentiel de la forme dD'', où D'' est un opérateur différentiel r fois linéaire de $\prod_1^r M_\alpha$ dans $\Omega^{q-2}(A)$. Si la condition énoncée ci-dessus est satisfaite, et si chacun des M_i admet une base finie, on peut choisir pour D' un opérateur différentiel d'ordre total m-1, où m est l'ordre total de D.

On se ramène aussitôt au cas où $M_1 = A$. Pour la première assertion, on arrive à se ramener au cor.1, en écrivant les opérateurs différentiels r fois linéaires de $\prod_1^r M_\alpha$ dans un $\Omega^k(A)$ sous la forme

$$D(g^1,\dots,g^r) = \sum D_p(B_{p,I}(g^2,\dots,g^r)g^1)\,dx^I$$

et en remarquant que avec cette écriture, les coefficients $B'_{p,J}$ de dD s'expriment à l'aide de ceux $B_{p,I}$ de D par des formules linéaires à coefficients dans k.

Remarques. 1° Il faudra quelque part un petit numéro sur les opérateurs différentiels r fois linéaires, pour pouvoir s'y référer dans le present numéro.

2° Les énoncés précédents, convenablement faisceautisés, donnent un résultat local pour les opérateurs différentiels sur une variété non singulière (différentiable, ou analytique, etc). La question si un opérateur différentiel D à valeurs dans Ω^q peut se mettre globalement sous la forme dD', quand les conditions locales sont vérifiées, est donc une question de cohomologie ; il y a une obstruction dans $H^1(X,Z_{q-1})$, où Z_{q-1} est le faisceau des germes d'opérateurs différentiels D' dans

Ω^{q-1} tels que $dD' = 0$. C'est là un faisceau de modules sur le faisceau des anneaux locaux (opérant par multiplication à droite) d'ailleurs localement libre si les M_i correspondent à des fibrés vectoriels. Dans le cas des variétés différentiables paracompactes, le faisceau des anneaux locaux étant fin, cette obstruction est nulle, et le th.9 et ses corollaires donnent en fait des résultats globaux. Remarquons aussi que dans le cas des variétés différentiables, la condition $D(g^2,\dots,g^r)^0(1) = 0$ équivaut à la suivante : $D(g^1,\dots,g^r) = 0$ chaque fois que g^1 est à support compact.

3° Le cas le plus important où le cor.2 s'applique est le suivant. Soient M et N deux A-modules ayant chacun une base finie D un opérateur différentiel de M dans N, D^0 l'opérateur différentiel dual, considérons l'application k-bilinéaire de $M\times N^0$ dans $\Omega^n(A)$ donnée par

$$D(f,g^0) = \langle Df, g^0\rangle - \langle f, D^0 g^0\rangle$$

C'est un opérateur différentiel bilinéaire d'ordre total m = ordre de D. On vérifie que la condition du cor.2 est vérifiée, donc il existe une "primitive de Green" $B(f,g^0)$, opérateur différentiel (qu'on peut supposer d'ordre total m-1) bilinéaire de $M\times N^0$ dans $\Omega^{n-1}(A)$, tel que

$$D(f,g^0) = dB(f,g^0)$$

Deux primitives de Green B et B' diffèrent par un opérateur différentiel de la forme $dC(f,g^0)$, où C est un opérateur différentiel bilinéaire de $M\times N^0$ dans $\Omega^{n-2}(A)$.

§ 4 - Espaces différentiés.

1 - Espace muni d'un faisceau d'algèbres.

Soit X un espace topologique, muni d'un faisceau $\mathcal{O}$ de k-algèbres commutatives (k étant un anneau commutatif avec unité) Si A désigne un objet variable de la catégorie des k-algèbres commutatives, $\Omega_k(A)$ peut être considéré, en vertu de par.1,n°4, comme un foncteur en A, à valeurs dans la catégorie des algèbres graduées anticommutatives (sur des anneaux non précisés), l'anneau d'opérateurs de $\Omega_k(A)$ étant A (identité fonctorielle). D'après la convention générale relative au prolongement des foncteurs covariants en des foneteurs sur des faisceaux (Top. Elén., Chap.I), on en déduit pour tout faisceau $\mathcal{O}$ de k-algèbres commutatives sur X, un faisceau d'algèbres anticommutatives $\Omega_k(\mathcal{O})$ sur X, dont le faisceau d'anneaux d'opérateurs est A, d'après la conservation des identités fonctorielles par prolongement des foncteurs aux faisceaux (loc.cité). Rappelons que $\Omega_k(\mathcal{O})$ est le faisceau d'algèbres associé au préfaisceau d'algèbres sur X qui, à un ouvert U, associe $\Omega_k(\Gamma(U,\mathcal{O}))$ (qui est bien une $\Gamma(U,\mathcal{O})$-algèbre). Toujours d'après le principe de conservation des identités fonctorielles, on a des identités fonctorielles :

$$(1) \qquad \Omega^p_k(\mathcal{O}) = \bigwedge^p_{\mathcal{O}}(\Omega^1_k(\mathcal{O}))$$

en particulier

$$(2) \qquad \Omega^0_k(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$$

quant à $\Omega^1_k(\mathcal{O})$, c'est un faisceau de $\mathcal{O}$-modules qui peut se

caractériser par une propriété universelle analogue à celle de par.1,n°1 prop.1 ; on a un homomorphisme (d'ailleurs fonctoriel, car déduit de l'homomorphisme fonctoriel $d : A \longrightarrow \Omega^1_k(A)$)

(3) $\qquad d : \mathcal{O} \longrightarrow \Omega^1_k(\mathcal{O})$

(homomorphisme de faisceaux de k-modules), qui est tel que pour tout $\mathcal{O}$-module M, l'application $u \longrightarrow u \circ d$ est un isomorphisme du groupe des $\mathcal{O}$-homomorphismes de $\Omega^1_k(\mathcal{O})$ dans M, sur le groupe des k-dérivations de $\mathcal{O}$ dans M ; une telle k-dérivation étant par définition (conformément aux conventions générales relatives aux prolongements des définitions diverses aux faisceaux, - Chevalley demerdetur) un homomorphisme de faisceaux qui, sur chaque anneau de sections sur un ouvert, est une k-dérivation au sens de par.1 n°1. Le fait que l'homomorphisme (3) jouit bien de la propriété universelle qu'on vient d'énoncer se vérifie facilement à partir des définitions ; on n'ose renvoyer à un principe général de prolongement des solutions de problèmes universels (ou autres) à des catégories de faisceaux. En appliquant l'énoncé précédent, pour tout ouvert $U \subset X$, au faisceau de k-algèbres $\mathcal{O}|U$, et notant que (en vertu des propriétés générales vues dans loc.cité) on a $\Omega^1_k(\mathcal{O}|U) = \Omega^1_k(\mathcal{O})|U$, on voit que l'homomorphisme $u \longrightarrow u \circ d$ définit un isomorphisme du faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}}(\Omega^1_k(\mathcal{O}), M)$ des germes de $\mathcal{O}$-homomorphismes de $\Omega^1_k(\mathcal{O})$ dans M, sur le faisceau des germes de k-dérivations de $\mathcal{O}$ dans M, faisceau dont les sections sur un ouvert U sont par définition les k-dérivations de $\mathcal{O}|U$ dans $M|U$. Lorsque $M = \mathcal{O}$, ce faisceau se désigne par $\mathcal{D}_k(\mathcal{O})$, c'est le <u>faisceau des k-dérivations</u> du faisceau de k-algèbres $\mathcal{O}$. Ainsi, d'après ce qui précède, on a un isomorphisme (fonctori

(4) $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}}(\Omega^1_{\mathfrak{k}}(\mathcal{O}),\mathcal{O}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{\mathfrak{k}}(\mathcal{O})$

On notera qu'on ne peut pas définir $\mathcal{D}_{\mathfrak{k}}(\mathcal{O})$ directement comme on a fait pour $\Omega_{\mathfrak{k}}(\mathcal{O})$, pour la simple raison que $\mathcal{D}_{\mathfrak{k}}(A)$ n'est pas un foncteur en A (quand on envisage comme morphismes dans la catégorie des $\mathfrak{k}$-algèbres commutatives A, les homomorphismes quelconques de $\mathfrak{k}$-algèbres).

Comme la différentielle extérieure $\Omega_{\mathfrak{k}}(A) \longrightarrow \Omega_{\mathfrak{k}}(A)$ est fonctorielle, elle définit un homomorphisme de faisceaux, non moins fonctoriel :

(5) $d : \Omega_{\mathfrak{k}}(\mathcal{O}) \longrightarrow \Omega_{\mathfrak{k}}(\mathcal{O})$

qui est une antidérivation de degré +1, de carré nul, se réduisant sur $\Omega^0_{\mathfrak{k}}(\mathcal{O})$ à l'opérateur (3). Ainsi $\Omega_{\mathfrak{k}}(\mathcal{O})$ devient un faisceau de $\mathcal{O}$-algèbres différentielles anticommutatives.

Désormais, quand aucune confusion ne sera possible, nous omettrons $\mathfrak{k}$ dans les notations comme $\Omega_{\mathfrak{k}}(\mathcal{O})$ etc. Il est évident que le crochet de deux $\mathfrak{k}$-dérivations de $\mathcal{O}$ "en est une autre", de sorte que $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ est un faisceau d'algèbres de Lie sur $\mathfrak{k}$. La loi de crochet et la loi de $\mathcal{O}$-Module sur $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ sont liées encore par la formule

(6) $[\overline{fX},\overline{Y}] = f[\overline{X},\overline{Y}] - \theta_Y(f)X$, $[\overline{X},\overline{fY}] = f[\overline{X},\overline{Y}] + \theta_X(f)Y$

pour toute section f de $\mathcal{O}$ sur un ouvert U et des sections X,Y de $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ sur le même ouvert, θ_X désignant l'endomorphisme de $\mathcal{O}|U$ défini par X. Cela se déduit de la même formule (5) du par.1, en remontant aux définitions. Interprétant $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ comme $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}}(\Omega^1(\mathcal{O}),\mathcal{O})$, on introduit comme au par.1, n°3 le produit

scalaire $\langle \omega, X \rangle$ pour une section ω de $\Omega^1(\sigma)$ et une section X de $\mathcal{G}(\sigma)$ sur un même ouvert U, c'est une section de σ sur U. Plus généralement, une section X de $\mathcal{G}(\sigma)$ sur U définit un endomorphisme i_X de $\Omega(\sigma)|U$, qui est une antidérivation de degré -1 coïncidant en degré 1 avec $\omega \longrightarrow \langle \omega, X \rangle$. Par définition, elle est déduite de l'endomorphisme de préfaisceau qui, pour tout ouvert $V \subset U$, est l'endomorphisme $i_{X'}$ de $\Omega(\Gamma(U,\sigma))$, X' désignant la dérivation de $\Gamma(U,\sigma)$ définie par X. Les propriétés de i_X énoncées dans par.1 prop.4 s'étendent immédiatement au cas actuel i_X dépend A-linéairement de X, est de carré nul, et i_X et i_Y anticommutent etc. On posera encore

(7) $$\theta_X = d i_X + i_X d$$

et on obtient ainsi une dérivation de $\Omega(\sigma)|U$, permutant à d, et se réduisant en degré 0 à la dérivation de $\sigma|U$ désignée par le même symbole. On a encore

(8) $$\theta_{[X,Y]} = [\theta_X, \theta_Y]$$

pour deux sections X,Y de $\mathcal{G}(\sigma)$ sur U, comme on déduit facilement de la même formule établie dans le par.1, th.2. De façon générale toutes les formules de par.1 n°3 gardent un sens et restent vraies dans le contexte plus général du présent numéro. Bien entendu, pour tous les opérateurs tels que i_X, θ_X etc., prendre la restriction de cet opérateur à un ouvert $V \subset U$ revient à remplacer X par sa restriction à V.

On voit sur la prop.1 du par.1 que le foncteur $A \longrightarrow \Omega(A)$ permute aux limites inductives, par suite (Top. Elém. Chap.I) on a

(9) $\Omega(\mathcal{O})_x = \Omega(\mathcal{O}_x)$

pour tout $x \in X$. D'autre part, comme $\mathcal{D}(\mathcal{O}) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}}(\Omega^1(\mathcal{O}), \mathcal{O})$, on a un homomorphisme canonique

(10) $\mathcal{D}(\mathcal{O})_x \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{O}_x) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_x}(\Omega^1(\mathcal{O})_x, \mathcal{O}_x)$

On sait (loc.cité) que cet homomorphisme est bijectif chaque fois que $\Omega^1(\mathcal{O})$ est un $\mathcal{O}$-Module cohérent (c'est ce qui aura lieu en Géométrie Algébrique), ou que c'est un $\mathcal{O}$-Module localement isomorphe à $\mathcal{O}^n$, (ce qui aura lieu en Géométrie Différentielle).

Considérant le foncteur $A \longrightarrow P^{(k)}(A)$ de la k-algèbre A, à valeurs dans la catégorie des A-algèbres augmentées (par.3, n°6), on en déduit comme plus haut, pour tout faisceau $\mathcal{O}$ de k-algèbres commutatives avec unité, un faisceau de $\mathcal{O}$-algèbres $\mathcal{O}$-augmenté désigné par $P^{(k)}(\mathcal{O})$, qui est par définition le faisceau associé au préfaisceau $U \longrightarrow P^{(k)}(\Gamma(U, \mathcal{O}))$. On a en particulier

(11) $P^{(0)}(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$, $P^{(1)}(\mathcal{O}) = \mathcal{O} + \Omega^1(\mathcal{O})$

la deuxième relation résultant du par.3, n°5, th.2. Les homomorphismes fonctoriels $P^{(k)}(A) \longrightarrow P^{(l)}(A)$ (pour $k \geqslant l$) donnent lieu à des homomorphismes de faisceaux, également fonctoriels :

(12) $\varphi_{lk} : P^{(k)}(\mathcal{O}) \longrightarrow P^{(l)}(\mathcal{O})$

qui sont encore surjectifs. Plus généralement, si M est un $\mathcal{O}$-Module, on définit, toujours selon le même principe, le faisceau $P^{(k)}(M)$ (qui est un $P^{(k)}(\mathcal{O})$-Module) et les homomorphismes surjectifs

(12 bis) $\varphi_{lk} : P^{(k)}(M) \longrightarrow P^{(l)}(M)$

qui est compatible avec l'homomorphisme (12) sur les faisceaux d'anneaux d'opérateurs des deux membres. Enfin, l'homomorphisme fonctoriel $d^{(k)} : M \longrightarrow P^{(k)}(M)$ (défini pour tout module M sur une k-algèbre A) définit pour tout $\mathcal{O}$-Module M un homomorphisme de faisceaux de k-modules :

(13) $d^{(k)} : M \longrightarrow P^{(k)}(M)$

D'après le principe de conservation des identités entre homomorphismes fonctoriels par passage aux catégories de faisceaux, on a $d^{(l)} = \varphi_{lk} d^{(k)}$. Le $\mathcal{O}$-Module $P^{(k)}(M)$, muni du homomorphisme de faisceaux (13), peut être caractérisé par une propriété "universelle" analogue à celle du par. 3, n°2, th.1. Disons qu'un homomorphisme de faisceaux de k-modules $D : M \longrightarrow N$ (où M et N sont des $\mathcal{O}$-Modules) est un <u>opérateur différentiel d'ordre</u> $\leq k$ si pour toute section f de M sur un ouvert U, l'opérateur $m \longrightarrow D(fm) - fD(m)$ sur $M|U$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leq k-1$ (étant convenu qu'un opérateur différentiel d'ordre <0 est l'opérateur nul). Alors $d^{(k)} : M \longrightarrow P^{(k)}(M)$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leq k$, et pour tout $\mathcal{O}$-Module N, l'application $u \longrightarrow u \circ d^{(k)}$ est un isomorphisme du groupe des homomorphismes de $\mathcal{O}$-Module de $P^{(k)}(M)$ dans N, sur le groupe des opérateurs différentiels d'ordre $\leq k$ de M dans N. (Cet énoncé se déduit sans difficulté du par. th.1). On en conclut aussitôt que le faisceau $\mathscr{D}_k(M,N)$ des germes d'opérateurs différentiels d'ordre $\leq k$ de M dans N est canoniquement isomorphe au faisceau <u>Hom</u>$_{\mathcal{O}}(P^{(k)}(M),N)$ des germes de $\mathcal{O}$-homomorphismes de $P^{(k)}(M)$ dans N.

On voit comme pour (9) que l'on a un isomorphisme canonique

(14) $$P^{(k)}(\sigma)_x = P^{(k)}(\sigma_x)$$

et un homomorphisme canonique, analogue à (10) :

(15) $$\mathscr{D}^k(M,N)_x \longrightarrow D^k(M_x,N_x)$$

Cet homomorphisme est un isomorphisme chaque fois qu'on sait que $P^{(k)}(M)$ est un σ-Module cohérent ou un σ-Module localement isomorphe à un σ^n.

De façon générale, tous les développements des paragraphes précédents s'étendent au cadre plus général du présent numéro. Donner à ce sujet tous les énoncés utiles reviendrait pratiquement à réécrire les paragraphes en question, les démonstrations étant remplacées par de persuasifs "on vérifie encore aisément que". On peut être tenté d'écrire d'emblée ces paragraphes dans le contexte des faisceaux, mais à ce compte on aurait bien pu écrire tout le livre d'algèbre (et d'autres) en termes de faisceaux. En tout état de cause, le contexte du présent numéro n'est pas encore assez général, car dans des cas importants le faisceau $\Omega(\sigma)$ est beaucoup trop gros, et il faut s'être donné un faisceau quotient de $\Omega(\sigma)$ pour faire du calcul différentiel raisonnable. C'est ce qu'on va examiner maintenant.

2 - Espaces différentiés : définition et exemples.

DEFINITION 1 - On appelle espace différentié sur l'anneau k, l'objet formé par un espace topologique X, muni d'un faisceau σ de k-algèbres commutatives unitaires, et une famille

de faisceaux d'algèbres quotients $P^{(k)}(X) = P^{(k)}(\mathcal{O})/J_k$, avec $J_0 = \{0\}$, ces données étant assujetties à l'axiome :

ED) Si pour deux entiers $k \geqslant \ell \geqslant 0$, on désigne par $\varphi_{\ell k}$ l'homomorphisme canonique $P^{(k)}(\mathcal{O}) \longrightarrow P^{(\ell)}(\mathcal{O})$, on a $\varphi_{\ell k}(J_k) = J_\ell$.

De $\varphi_{\ell k}(J_k) \subset J_\ell$ on conclut que $\varphi_{\ell k}$ passe au quotient en un homomorphisme de faisceaux de $\mathcal{O}$-algèbres

$$\varphi_{\ell k} : P^{(k)}(X) \longrightarrow P^{(\ell)}(X) \tag{14}$$

évidemment surjectif. Ainsi les $P^{(k)}(X)$ forment un système projectif de faisceaux de $\mathcal{O}$-algèbres, on peut donc considérer le faisceau de $\mathcal{O}$-algèbres graduées associé

$$GP^{\infty}(X) = \coprod_{k \geqslant 0} G^k(X) \tag{15}$$

où $G^k(X)$ est le noyau de $\varphi_{k-1,k} : P^{(k)}(X) \longrightarrow P^{(k-1)}(X)$.

Donnons une condition équivalente à ED) :

ED') Pour deux entiers $k \geqslant \ell \geqslant 0$, l'homomorphisme $\varphi_{\ell k}$ passe au quotient en un homomorphisme (14), et si on désigne son noyau par $I_{k,\ell+1}$, on a la relation $I_{k,\ell+1} = (I_{k,1})^{\ell+1}$

Il suffit de prouver l'équivalence de ED) et ED') quand on suppose les relations $\varphi_{\ell k}(J_k) \subset J_\ell$ vérifiées, i.e. l'existence des homomorphismes (14) assurée. En regardant les fibres des faisceaux envisagés en chaque $x \in X$, et utilisant (14), on est ramené au cas où X est réduit à un seul point, et où par suite $\mathcal{O}$ s'identifie à une k-algèbre A. Soit $P = P^{\infty}(A)$, et soit I l'idéal de l'augmentation de P. On a donc $P^{(k)}(A) = P/I^{k+1}$, et la donnée de l'idéal J_k de $P^{(k)}(A)$ équivaut à la donnée d'un idéal

dans P contenant I^{k+1}, que l'on désignera encore par J_k. Alors ED) signifie qu'on a

(16) $\qquad J_\ell = I^{\ell+1} + J_k$

pour tout couple d'entiers $k \geq \ell \geq 0$. D'autre part, l'idéal $I_{k,1}$ dans P/J_k n'est autre que I/J_k, donc $(I_{k,1})^{\ell+1} = (I^{\ell+1}+J_k)/J_k$, tandis que $I_{k,\ell+1} = J_\ell/J_k$. Donc ED') s'exprime aussi par la relation (16), d'où l'équivalence de ED) et ED').

Posons maintenant

(17) $\qquad \Omega^1_X = G^1(X) =$ idéal d'augmentation de $P^{(1)}(X)$

On a évidemment un isomorphisme canonique

(18) $\qquad P^{(1)}(X) = \mathcal{O} + \Omega^1_X$

D'autre part, de ED') résulte immédiatement l'énoncé suivant :

PROPOSITION 1 - Soit X un espace différentié, $\mathcal{O}$ son faisceau d'algèbres. Alors l'on a un homomorphisme canonique surjectif de faisceaux de $\mathcal{O}$-algèbres graduées :

(19) $\qquad S_{\mathcal{O}}(\Omega^1_X) \longrightarrow GP^\infty(X)$

(où $S_{\mathcal{O}}$ désigne le faisceau des algèbres symétriques du $\mathcal{O}$-Module Ω^1_X).

Exemples 1). On prend $P^{(k)}(X) = P^{(k)}(\mathcal{O})$. Ce choix n'a d'intérêt qu'en Géométrie Algébrique. La théorie des espaces différentiés du type précédent se réduit, lorsque X est réduit à un point, à la théorie des paragraphes précédents.

2). Soit X un espace muni d'un faisceau $\mathcal{O}$ de $\mathcal{K}$-algèbres commutatives unitaires. Donnons nous une famille (F_i) de $\mathcal{O}$-Modules sur X (le cas le plus intéressant étant celui où

cette famille est réduite à l'unique élément $(\mathcal{O})$). Pour tout entier $k \geq 0$, soit J_k le sous-faisceau de $P^{(k)}(\mathcal{O})$ dont les sections, sur tout ouvert U, sont les sections f de $P^{(k)}(\mathcal{O})$ sur U telles que pour tout ouvert $V \subset U$ et tout $\mathcal{O}$-homomorphisme $u : \mathcal{O}|V \longrightarrow F_i|V$, on ait $u(f) = 0$. Le sous-faisceau ainsi construit est évidemment un sous-faisceau abélien, c'est même un sous-faisceau d'idéaux, car si f est comme ci-dessus, et si g est une section quelconque de $P^{(k)}(\mathcal{O})$ sur U, alors gf est une section de J_k. En d'autres termes pour tout $u : \mathcal{O}|V \longrightarrow F_i|V$ comme ci-dessus, on a $u(gf) = 0$. En effet, il suffit de noter que $u(gf) = u_g(f)$, où $u_g : \mathcal{O}|V \longrightarrow F_i|V$ est l'homomorphisme composé de $f \longrightarrow fg$ et de u. Ainsi les J_k sont des faisceaux d'idéaux, et on vérifie aussitôt qu'on a $\varphi_{\ell k}(J_k) \subset J_\ell$. On ne peut pas affirmer en général que cette inclusion est en fait une égalité, ou, ce qui revient au même, que l'homomorphisme canonique $P^{(\ell)}(\mathcal{O}) \longrightarrow P^{(\ell)}(\mathcal{O})/\varphi_{\ell k}(J_k)$ s'annule sur J_ℓ ; mais ce sera le cas chaque fois qu'on pourra montrer que tout $x \in X$ admet un voisinage ouvert sur lequel le quotient du deuxième membre est isomorphe à un des F_i. *C'est ce qui aura lieu dans les deux cas suivants :

a) k est un corps valué complet, X est une variété analytique sur k, $\mathcal{O}$ le faisceau des germes de fonctions analytiques sur X, (F_i) est la famille (si on peut dire) des faisceaux analytiques cohérents sur X.

b) X est une variété indéfiniment différentiable, $\mathcal{O}$ le faisceau

des germes de fonctions indéfiniment différentiables sur X, (F_i) se réduit au faisceau $\mathcal{O}$.*

Exercice Soit A une k-algèbre commutative. Pour tout A-module M, soit $J_k(M)$ l'intersection des applications A-linéaires de $P^{(k)}(M)$ dans les A-modules de type fini. En particulier, $J_k(A)$ est un idéal de $P^{(k)}(A)$, et $P^{(k)}(M)/J_k(M)$ est un module sur $P^{(k)}(A)/J_k(A)$.

a) Supposons que $P^{(k)}(A)/J_k(A)$ soit de type fini pour tout k. En conclure que $P^{(k)}(M)/J_k(M)$ est un A-module de type fini pour tout k et tout A-module de type fini M (cf. par. 3, n°6, exercice 1 c). Montrer que sous ces conditions, si $\varphi_{\ell k}$ désigne l'application canonique de $P^{(k)}(M)$ dans $P^{(\ell)}(M)$, on a $J_\ell(M) = \varphi_{\ell k}(J_k(M))$.

b) Supposons que A soit noethérien, et soient $x^1,\dots,x^n$ des éléments de A tels que $k[x^1,\dots,x^n]$ soit dense dans A pour la topologie linéaire sur A pour laquelle un système fondamental de voisinages de 0 est formé par les produits finis de puissances d'idéaux maximaux. Soit (pour tout entier k fixé) $\xi^i = d^{(k)}x^i - x^i$ $(1 \leq i \leq n)$. Montrer que les ξ^p, où p parcourt les indices monomiaux d'ordre $\leq k$, forment un système de générateurs de $P^{(k)}(A)$ mod. $J_k(A)$. (Noter que si l'on munit tout A-module de type fini M de la topologie linéaire dont un système fondamental de voisinages de 0 est formé des sous-modules $\mathcal{O}M$, où $\mathcal{O}$ est un voisinage de 0 dans A, alors M est séparé, et tout opérateur différentiel $M \to N$ est continu

pour les topologies envisagées ; en particulier un opérateur différentiel de A dans un A-module de type fini est connu quand on connait sa restriction à $k[x^1,\dots,x^n]$. En particulier, sous les conditions précédentes, a) s'applique

c) Supposons a) vérifié, A noethérien, et que pour tout anneau quotient $B = A/\mathfrak{a}$ qui est d'Artin, le B-module $P^{(k)}(B)$ soient de type fini. (Il suffit par exemple que A soit un anneau semi-local noethérien, et que k soit un corps tel que $A/\mathcal{K}(A)$ soit de dimension finie sur k). Montrer que pour tout A-module de type fini M, on a $J_k(M) = \bigcap_{\mathfrak{a}} \mathfrak{a}.P^{(k)}(M)$, où $\mathfrak{a}$ parcourt l'ensemble des idéaux tels que $A/\mathfrak{a}$ soit un anneau d'Artin. (Conclure de l'hypothèse sur les quotients artiniens que pour tout idéal $\mathfrak{a}$ tel que $A/\mathfrak{a}$ soit artinien, $P^{(k)}(M)/\mathfrak{a}.P^{(k)}(M)$ est de type fini, d'où $J_k(M) \subset \bigcap \mathfrak{a}.P^{(k)}(M)$, et déduire l'inclusion inverse de l'hypothèse a), qui implique que $P^{(k)}(M)/J_k$ est de type fini donc séparé pour la topologie défini par les $\mathfrak{a}.(P^{(k)}(M)/J_k)$.

d) Supposons que A soit un anneau semi-local, k un corps, $A/\mathcal{K}(A)$ de dimension finie sur k. Pour tout A-module de type fini, soit $P'^{(k)}(M)$ le A-module de type fini $P^{(k)}(M)/J_k(M)$, muni de la topologie $\mathcal{K}(A)$-adique. Montrer que le complété de $P'^{(k)}(M)$ s'identifie à $P'^{(k)}(\hat{M})$, où $\hat{M}$ est considéré comme un module de type fini sur l'anneau local $\hat{A}$ (qui satisfait aux mêmes conditions que A).

e) Calculer les $P^{(k)}(A)$ dans le cas où $A = k[[x^1,\dots,x^n]]$.

3 - Où il faut (en principe) tout réexpliquer.

Il est douteux que les faits qui suivent aient un intérêt en dehors du cas où X est un espace différentié non singulier (cf. n°4). Dans le cas là, les axiomes ED 2) et ED 3) que nous serons amenés à poser ici seront automatiquement satisfaits, comme nous verrons.

Dans tout ce numéro, X désigne un espace différentié fixé, $\mathcal{O}$ son faisceau de k-algèbres. Soit $D : \mathcal{O} \longrightarrow M$ un opérateur différentiel d'ordre $\leq k$ de $\mathcal{O}$ dans un $\mathcal{O}$-Module M, nous avons vu qu'il s'identifie à un $\mathcal{O}$-homomorphisme de $P^{(k)}(\mathcal{O})$ dans M (n°1). Nous dirons que D est un opérateur différentiel d'ordre $\leq k$ sur X, de $\mathcal{O}$ dans M, si D est défini par un homomorphisme de $P^{(k)}(X)$ dans M (i.e. si l'homomorphisme $P^{(k)}(\mathcal{O}) \longrightarrow M$ s'annule sur le noyau J_k de l'homomorphisme $P^{(k)}(\mathcal{O}) \longrightarrow P^{(k)}(X)$). Dorénavant, quand nous parlerons d'opérateurs différentiels $\mathcal{O} \longrightarrow M$, il s'agira d'opérateurs différentiels sur X, au sens précédent. Cette notion est évidemment de nature locale, d'où le faisceau des germes d'opérateurs différentiels d'ordre $\leq k$ de $\mathcal{O}$ dans M, qui s'identifie donc au faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}}(P^{(k)}(X), M)$. Nous supposerons l'axiome suivant vérifié :

ED 2) Pour tout ouvert $U \subset X$, le composé de deux opérateurs différentiels, d'ordre $\leq k$ resp. d'ordre $\leq k'$ dans $\mathcal{O}|U$, est un opérateur différentiel d'ordre $\leq k+k'$. Si M est un $\mathcal{O}$-Module sur U, D un opérateur différentiel $\mathcal{O}|U \longrightarrow M$ d'ordre $\leq k$, alors le

composé de D avec un endomorphisme $\mathcal{O}$-linéaire de $\mathcal{O}|U$ est encore un opérateur différentiel d'ordre $\leq k$.

Soient alors M et N deux $\mathcal{O}$-Modules, D un homomorphisme de faisceaux de k-modules de M dans N, nous dirons que D est un <u>opérateur différentiel d'ordre $\leq k$</u> si, pour tout homomorphisme $\mathcal{O}$-linéaire $u : \mathcal{O}|U \to M$, le composé Dou est un opérateur différentiel d'ordre $\leq k$ de $\mathcal{O}|U$ dans N. Dans le cas où $M = \mathcal{O}$, on retrouve la notion précédente d'opérateur différentiel de $\mathcal{O}$ dans N (grâce à l'axiome ED 2)). Soient $D : M \to N$ et $D' : N \to P$ des opérateurs différentiels d'ordre $\leq k$ resp. d'ordre $\leq k'$, et supposons N localement isomorphe à $\mathcal{O}^n$, alors D'D est un opérateur différentiel d'ordre $\leq k+k'$, comme il résulte facilement des définitions et de ED 2).

Soit M un $\mathcal{O}$-module, considérons le $\mathcal{O}$-Module $P^{(k)}(M)$ défini au n°1, et pour tout ouvert $U \subset X$ et tout $\mathcal{O}$-homomorphisme $u : M|U \to \mathcal{O}|U$ considérons l'homomorphisme composé $P^{(k)}(M) \to P^{(k)}(\mathcal{O}) \to P^{(k)}(X)$, où le premier homomorphisme est déduit de u. On désigne par $P^{(k)}(X;M)$ le plus grand $\mathcal{O}$-Module quotient de $P^{(k)}(M)$ tel que les homomorphismes précédents se factorisent en $P^{(k)}(M) \to P^{(k)}(X;M) \to P^{(k)}(X)$, i.e. le quotient de $P^{(k)}(M)$ par le sous-faisceau dont les sections, sur un ouvert V, sont les sections f de $P^{(k)}(M)$ sur V telles que pour tout ouvert $U \subset V$ et tout u comme ci-dessus, l'image de $f|U$ dans $P^{(k)}(X)$ soit nulle. Faisant $M = \mathcal{O}$, on constate aussitôt que $P^{(k)}(X, \mathcal{O}) = P^{(k)}(X)$, d'autre part $P^{(k)}(X;-)$ permute au sommes directes finies, et aussi à l'opération de restriction à un

ouvert, ce qui permet de calculer $P^{(k)}(\mathcal{O}^n) = P^{(k)}(X)^n$, et $P^{(k)}(M)$ lorsque M est localement isomorphe à $\mathcal{O}^n$. L'homomorphisme fonctoriel $d^{(k)} : M \longrightarrow P^{(k)}(M)$ définit un homomorphisme fonctoriel, encore noté $d^{(k)}$, de M dans $P^{(k)}(X;M)$. Les propriétés formelles de $d^{(k)}$ notées dans le par.3 restent valables dans le contexte actuel. De plus, on constate encore facilement, à l'aide des définitions, que les opérateurs différentiels d'ordre $\leq k$ du $\mathcal{O}$-Module M localement isomorphe à $\mathcal{O}^M$, dans $\mathcal{O}$-Module quelconque N, s'identifient de la façon bien connue aux $\mathcal{O}$-homomorphismes de $P^{(k)}(X;M)$ dans N.

Les dérivations de $\mathcal{O}$ étant des opérateurs différentiels d'ordre ≤ 1 au sens du n°1, nous réserverons ici le mot de <u>dérivation sur l'espace différentié</u> X aux dérivations de $\mathcal{O}$ qui sont des opérateurs différentiels d'ordre ≤ 1 sur X. Définissant Ω^1_X par la formule (17) du n°2, on voit donc que les dérivations sur X s'identifient aux $\mathcal{O}$-homomorphismes de Ω^1_X dans $\mathcal{O}$. Nous désignerons par $\mathcal{D}(X)$ le faisceau des germes de dérivations sur X, par suite on a un isomorphisme canonique

(19) $\qquad \mathcal{D}(X) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}}(\Omega^1_X, \mathcal{O})$

En vertu de ED 2) le crochet de deux dérivations sur X est encore une dérivation sur X, ce que permet de considérer $\mathcal{D}(X)$ comme un faisceau de k-algèbres de Lie, et de façon plus précise comme un faisceau de $\mathcal{O}$-algèbres de Lie sur le faisceau de k-algèbres $\mathcal{O}$. Notons d'ailleurs que dans tous les cas que nous aurons à considérer, on aura en fait $\mathcal{D}(X) = \mathcal{D}(\mathcal{O})$.

Nous désignerons par Ω_X le faisceau algèbre extérieure de

Ω_X^1 au dessus de $\mathcal{O}$. On a donc

(20) $\Omega_X = \coprod_p \Omega_X^p$, $\Omega_X^p = \bigwedge_{\mathcal{O}}^p \Omega_X^1$ en particulier $\Omega_X^0 = \mathcal{O}$

C'est un faisceau de $\mathcal{O}$-algèbres graduées, s'identifiant au faisceau quotient de $\Omega(\mathcal{O})$ par le faisceau d'idéaux engendré par le noyau N de l'homomorphisme canonique $\Omega^1(\mathcal{O}) \to \Omega_X^1$. Comme les dérivations Y sur X sont les dérivations de $\mathcal{O}$ telles que $i_Y(N) = 0$, il s'ensuit que les opérations i_Y ($Y \in \Gamma(X, \mathcal{D}(X))$ passent au quotient en des antidérivations de degré -1, encore notées i_Y, de faisceau Ω_X. Les propriétés formelles usuelles de ces opérations sont conservées. Pour définir l'opérateur de différentiation extérieure d dans Ω_X, on a besoin de l'axiome :

ED 3) Soit N le sous-faisceau de $\Omega^1(\mathcal{O})$ noyau de l'homomorphisme canonique $\Omega^1(\mathcal{O}) \to \Omega_X^1$. Alors on a $d(N) \subset N.\Omega^1(\mathcal{O})$.

Moyennant cet axiome, on constate immédiatement que l'opérateur d défini dans $\Omega(\mathcal{O})$ passe au quotient, d'où la différentielle extérieure d dans Ω_X, qui bien entendu jouira encore des mêmes propriétés formelles. Enfin, il résulte de la formule d'homotopie $\theta_Y = di_Y + i_Y d$ (par.1) (formule (11)) que si Y est une dérivation sur X, alors l'opérateur θ_Y dans $\Omega(\mathcal{O})$ passe au quotient en un opérateur, noté par le même symbole, dans Ω_X. Toutes les propriétés formelles établies dans le par.1 pour les opérateurs θ_Y restent évidemment valables. Examinons rapidement comment s'étendent ici les considérations du par. 2. Une θ-algèbre de Lie sur X est un faisceau de θ-modules $\mathcal{G}$, muni d'une structure de faisceau de k-algèbres de Lie, et d'un

homomorphisme $Y \longmapsto \theta_Y$ de $\mathcal{O}$-modules et de k-algèbres de Lie de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}(X)$, ces données étant assujetties à satisfaire aux formules (1) et (2) du par.2. On peut dire aussi que c'est un faisceau de θ-algèbres de Lie dont le faisceau d'anneaux associé est $\mathcal{O}$, et tel que les dérivations de $\mathcal{O}|U$ définies par des sections de $\mathcal{G}$ sur U soient des dérivations sur U. Si par exemple M est un $\mathcal{O}$-Module, et si pour tout ouvert $U \subset X$, on considère les couples (D,Y), où Y est une dérivation sur U et D une Y-dérivation de $M|U$, on trouve ainsi les sections d'une θ-algèbre de Lie, appelée θ-algèbre de Lie des dérivations de M sur X. Toutes les autres définitions et résultats du par.2 se transposent de façon analogue, sans qu'il soit d'ailleurs nécessaire de faire appel à l'un des axiomes ED 1), ED 2) ou ED 3).

Si nous voulons transposer dans le cadre actuel les résultats du par.3, sans accumuler encore des axiomes ED 4) etc. canularesques, nous devons nous hâter d'introduire les espaces différentiés non singuliers.

4 - Espaces différentiés non singuliers.

DEFINITION 2 - On dit que l'espace différentié X est non singulier s'il satisfait aux conditions suivantes :

(i) Les anneaux $\mathcal{O}_x$ ($x \in X$) sont des anneaux locaux.

(ii) Pour tout $x \in X$ et tout entier $k > 0$, l'algèbre $\mathcal{O}_x$-augmentée $P^{(k)}(X)_x$ est régulière tronquée d'ordre k (par.3, n°9 déf.6).

(iii) Ω^1_X est un $\mathcal{O}$-Module localement libre de type fini.

On dit qu'un point $x \in X$ de X est simple, s'il existe un voisinage ouvert U de x tel que U soit un espace différentié non singulier.

L'ensemble des points simples de X est donc une partie ouverte de X, savoir la plus grande partie ouverte de X qui soit un espace différentié non singulier. Notons qu'il se trouve que dans les seuls cas, en pratique, où on ait affaire à des espaces différentiés avec singularités, savoir en géométrie algébrique sur un corps de définition parfait k, ou en géométrie analytique, le fait que $x \in X$ soit un point simple de X se vérifie par inspection de l'anneau local $\mathcal{O}_x$ uniquement (qui doit être "simple", cf. par.3, n°12) ; on pourrait donc renverser la vapeur, et définir d'abord les points simples, (mais la condition (iii) ne sera pas purement ponctuelle), puis définir les espaces différentiés non singuliers comme ceux dont tous les points sont simples. (On obtient ainsi une notion plus large de point simple, mais la même notion d'espace différentié non singulier).

Supposons que X satisfasse à (i) et (iii). Soit $x \in X$, alors $\Omega^1_X / \mathfrak{m}_x \Omega^1_X$ est un espace vectoriel de dimension finie engendré par les classes des df ($f \in \mathcal{O}_x$). On peut donc trouver une famille finie $(x^i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathcal{O}_x$ telle que les dx^i forment une base de Ω^1_X mod $\mathfrak{m}_x \Omega^1_X$. En vertu de Nakayama, les dx^i forment alors une base de Ω^1_x. D'autre part, il existe un ouvert U tel que les x^i proviennent de sections, encore notées x^i, de $\mathcal{O}$ sur U, et il résulte alors aussitôt du fait que Ω^1 est isomorphe à $\mathcal{O}^I$ sur un voisinage de x, et du fait que $\mathcal{O}$ est un faisceau d'anneaux

locaux, que les dx^i forment encore une base de Ω^1_y pour $y \in U$ voisin de x. (Ce fait général mériterait d'être dégagé en lemme ici où ailleurs). Ainsi, il résulte de (i) et (iii) que l'on peut trouver, sur un voisinage ouvert U assez petit de x, des sections x^i de $\mathcal{O}$ telles que les dx^i forment une base du $\mathcal{O}$-Module $\Omega^1|U$. Fixonx-nous un tel système de sections sur un ouvert U. Nous désigenrons par $(\frac{\partial}{\partial x^I})$ ou (e_i) la base duale du $\mathcal{O}$-Module $\mathcal{T}(X)$. Par définition, on a donc

(22) $\theta_{e_i} = \frac{\partial}{\partial x^I}$ i.e. $\frac{\partial}{\partial x^I} x^J = \delta_i^j$ (indice de Kronecker)

On trouve, exactement comme dans prop.11, que l'on a

(23) $[e_i, e_j] = 0$ i.e. $\left[\frac{\partial}{\partial x^I}, \frac{\partial}{\partial x^J}\right] = 0$

en d'autres termes les $\frac{\partial}{\partial x^I}$ sont des dérivations sur U deux à deux permutables.

Soit maintenant k un entier ≥ 1, posons

(24) $\delta x = (\delta x^i)_{i \in I} = (d^{(k)} x^i - x^i)_{i \in I}$

Les calculs de par.3, n°10, prop.12 prouvent qu'on a encore les formules (où les notations sont les mêmes que dans loc. cité, en particulier n et m désignent des indices monomiaux relatifs à l'ensemble d'indices I)

(25) $\frac{\partial^n}{\partial x^n} x^m = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}$ si $n \leq m$, 0 sinon

(26) $\langle \frac{\partial^n}{\partial x^n}, (\delta x)^m \rangle = m! \delta_n^m$

Raisonnant comme dans par.3, n°10, th.10, en tenant compte de la prop.1 du n°1 (qui implique que les $(\delta x)^m$ pour $|m| \leq k$ engendrent le $\mathcal{O}$-Module $P^{(k)}(X)|\mathcal{U}$), on en conclut que si h

contient le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels, alors les $(\delta x)^m$ ($|m| \leq k$) forment une base du σ-Module $P^{(k)}(X)$ sur U. En d'autres termes si k contient $\mathbb{Q}$, la condition (ii) de la déf.2 est conséquence de (i) et (iii). Si on ne suppose plus nécessairement que k contient $\mathbb{Q}$, mais si on suppose les conditions (i), (ii), (iii) de la déf.2 vérifiées, (en particulier si X est un espace différentié non singulier), il résulte encore immédiatement de (ii) que les $(\delta x)^m$ ($|m| \leq k$) forment une base du σ-Module $P^{(k)}(X)$ sur U. (Notons d'ailleurs qu'on n'avait pas besoin pour cela de l'axiome ED 1), quiest donc une conséquence des conditions (i), (ii), (iii)). Soit alors (D_m) la base du σ-Module $\underline{\mathrm{Hom}}_{\sigma}(P^{(k)}(X), \sigma)$ duale de la base $((\delta x)^m)_{|m| \leq k}$, les D_m s'identifient donc à des opérateurs différentiels d'ordre $\leq k$ dans σ/U, et on vérifie que les formules (42) à (47) du par.3 sont encore valables. (Cela semble impliquer que les résultats du par.3, n°10 et autres, n'ont pas été énoncés avec la généralité suffisante, puisqu'il semble qu'on soit obligé, en toute rigueur, de les démontrer ici par exactement les mêmes calculs. Next Redactor -). Cela donne en particulier la forme générale des opérateurs différentiels de σ dans un σ-Module M sur U. En particulier, la formule (46) au par.3 implique facilement que le composé de deux opérateurs différentiels dans σ en est encore un, d'où aussitôt l'axiome ED 2). L'axiome ED 3) se vérifie de même par quumu explicite, car la base (dx^i) de Ω^1 définit une base (dx^J) de Ω (J parcourant l'ensemble des parties finies de I) ; on définit alors l'opérateur d par la

formule explicite bien connue, utilisant cette base, et on constate avec satisfaction que l'opérateur ainsi construit est bien défini par passage au quotient à partir de l'opérateur d du n°1.

Les conditions (i), (ii) et (iii) des espaces différentiés non singuliers suffisent aussi pour reprendre, dans le contexte actuel, les définitions et résultats du par.3, n°7, 8, 13, 14 : on procède comme pour l'opérateur différentiel d. Le rédacteur n'a pas priver son successeur du plaisir de faire les choses plus proprement.

5 - Espace tangent et espace cotangent en un point.

Dans ce numéro, nous supposons que l'espace différentié X est tel que les $\mathcal{O}_x$ soient des anneaux locaux. L'idéal maximal de $\mathcal{O}_x$ est désigné par $\mathfrak{m}_x$.

DEFINITION 3 - Soit x un point de l'espace différentié X. On appelle espace cotangent en x l'espace vectoriel $\Omega^1_x/\mathfrak{m}_x\Omega^1_x$ sur le corps $k_x = \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x$. L'espace vectoriel dual est appelé espace tangent à X en x.

Ce dernier sera noté $T_{X,x}$ ou simplement T_x si aucune confusion n'est à craindre. Dans tous les cas que nous aurons à envisager, l'espace cotangent sera de dimension finie (c'est le cas par exemple si X est un espace différentié non singulier) ; alors l'espace cotangent est canoniquement isomorphe au dual de l'espace tangent, et sera donc noté par $T'_{X,x}$ ou simplement T'_x. Les éléments de l'espace vectoriel tangent (resp. cotangent) en x

s'appellent les vecteurs tangents (resp. les vecteurs cotangents) à X au point x.

Il résulte aussitôt de la définition que l'on a

(27) $T_x = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_x}(\Omega^1_x, k_x) = \mathrm{Hom}_{k_x}(\Omega^1_x / \mathfrak{m}_x \Omega^1_x, k_x)$

Nous allons définir des homomorphismes canoniques

(28) $\mathcal{V}(X)_x / \mathfrak{m}_x \mathcal{V}(X)_x \longrightarrow T_x \longrightarrow D(\mathcal{O}_x, k_x)$

où le dernier membre désigne le k_x-espace vectoriel des k-dérivations de $\mathcal{O}_x$ dans le $\mathcal{O}_x$-module k_x. Le premier homomorphisme dans (28) résulte aussitôt de la formule (27) et de la formule (19) $\mathcal{V}(X) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}}(\Omega^1, \mathcal{O})$. Le deuxième homomorphisme (28) associe à tout $\xi \in T_x$ la dérivation

$$f \longrightarrow \langle \xi, (df)_x(x) \rangle$$

de $\mathcal{O}_x$ dans k_x, où $(df)(x)$ désigne l'élément de $\Omega^1_x / \mathfrak{m}_x \Omega^1_x$ déduit de l'élément df de Ω^1_x par réduction mod $\mathfrak{m}_x \Omega^1_x$. (Cette notation mériterait d'être introduite systématiquement, pour tout faisceau de modules sur un faisceau d'anneaux locaux)

PROPOSITION 2 - Si Ω^1 est localement isomorphe à un $\mathcal{O}$-Module $\mathcal{O}^n$, en particulier si X est non singulier, le premier homomorphisme (28) est bijectif, i.e. on a un isomorphisme canonique

(28 bis) $T_x = \mathcal{V}(X)_x / \mathfrak{m}_x \mathcal{V}(X)_x$

Beweis klaar, puisqu'on aura dans ce cas

$\mathcal{V}(X)_x = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_x}(\Omega^1_x, \mathcal{O}_x)$.

Quant au deuxième homomotphisme (28), il est en tous cas injectif, puisque les df ($f \in \mathcal{O}_x$) engendrent le $\mathcal{O}_x$-module

Ω^1_X. D'ailleurs on a $D(\mathcal{O}_x, k_x) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_x}(\Omega^1(\mathcal{O})_x, k_x) =$
$= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_x}(\Omega^1(\mathcal{O})_x, k_x) = \mathrm{Hom}_{k_x}(\Omega^1(\mathcal{O})_x/m_x\Omega^1(\mathcal{O})_x, k_x)$, et le deuxième homomorphisme (28) apparait comme transposé de l'homomorphisme d'espaces vectoriels sur k_x

(29) $\quad \Omega^1(\mathcal{O})_x/m_x\Omega^1(\mathcal{O})_x \to \Omega^1_X/m_x\Omega^1_X$

déduit de l'homomorphisme canonique $\Omega^1(\mathcal{O}) \to \Omega^1_X$. Il est donc bijectif si et seulement si (29) est bijectif. Cela est le cas évidemment si $\Omega^1_X = \Omega^1(\mathcal{O})$ (géométrie algébrique). Ce sera encore vrai pour toutes les espèces de "variétés" que nous aurons à considérer. En effet, les espaces différentiés que nous rencontrerons satisferont à l'axiome suivant :

ED 4) Les anneaux $\mathcal{O}_x$ sont des anneaux locaux. Soit m_x l'idéal maximal de $\mathcal{O}_x$. Pour tout entier k, l'homomorphisme canonique

$$P^{(k)}(\mathcal{O})_x/m_xP^{(k)}(\mathcal{O})_x \to P^{(k)}(X)_x/m_xP^{(k)}(X)_x$$

est un isomorphisme.

Cette dernière condition signifie aussi, visiblement, que le noyau J_k de l'homomorphisme canonique $P^{(k)}(\mathcal{O})_x \to P^{(k)}(X)_x$ est contenu dans $m_xP^{(k)}(\mathcal{O})_x$. En faisant $k = 1$, elle implique que le deuxième homomorphisme (28) est un isomorphisme.

PROPOSITION 3 - Supposons que l'axiome ED 4) soit vérifié, et soit $x \in X$ un point tel que l'homomorphisme canonique $k \to k_x$ soit un isomorphisme. Soit M un $\mathcal{O}$-Module localement isomorphe à $\mathcal{O}^n$. On a alors, pour tout entier $k > 0$, un isomorphisme canonique d'espaces vectoriels sur k:

(30) $\mathscr{M}_x/\mathfrak{m}_x^{k+1}\mathscr{M}_x \xrightarrow{\sim} P^{(k)}(X;M)_x/\mathfrak{m}_x P^{(k)}(X;M)_x$

Il suffit de conjuguer par.3 prop.15, cor.2 avec l'axiome ED 4), qui implique que le deuxième membre de (30) est identique à $P^{(k)}(M)_x/\mathfrak{m}_x P^{(k)}(M)_x = P^{(k)}(M_x)/\mathfrak{m}_x P^{(k)}(M_x)$.

COROLLAIRE - Supposons que les $\mathcal{O}_x$ soient des anneaux locaux et que les homomorphismes canoniques $k \to \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x$ soient des isomorphismes. Pour que l'axiome ED 4) soit vérifié, il faut et il suffit que pour tout $x \in X$, et tout entier $k>0$, l'homomorphisme canonique d'espaces vectoriels sur k

(30) $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x^{k+1}\mathcal{O}_x \qquad P^{(k)}(X)_x/\mathfrak{m}_x P^{(k)}(X)_x$

soit un isomorphisme.

Par définition implicite, l'homomorphisme (30) est celui déduit par passage au quotient de l'homomorphisme $d^{(k)}$ de M_x dans $P^{(k)}(X;M)_x$. C'est donc le composé des homomorphismes canoniques

$$\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x^{k+1}\mathcal{O}_x \to P^{(k)}(\mathcal{O}_x)/\mathfrak{m}_x P^{(k)}(\mathcal{O}_x) \to P^{(k)}(X)_x/\mathfrak{m}_x P^{(k)}(X)_x$$

(noter, pour la définition du deuxième homomorphisme, que $P^{(k)}(\mathcal{O}_x) = P^{(k)}(\mathcal{O})_x$). Or, en vertu de par.3, prop.18, cor.2 le premier homomorphisme est un isomorphisme, d'où la conclusion.

COROLLAIRE 2 - Supposons que X soit un espace différentié non singulier, et que les homomorphismes canoniques $k \to k_x = \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x$ soient des isomorphismes. Pour que l'axiome ED 4) soit vérifié, il faut et il suffit que pour tout $x \in X$, tout entier $k>0$, et tout système $(x^i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathfrak{m}_x$ tel

que les $(dx^i)(k)$ forment une base de l'espace cotangent en x, les x^m, où $m = (m_i)_{i \in I}$ parcourt l'ensemble des indices monomiaux par rapport à I de degré $\leq k$, forment une base de l'espace vectoriel $\mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_x^{k+1} \mathcal{O}_x$.

En effet, il résulte des considérations du n°3 que leurs images dans $P^{(k)}(X)_x / \mathfrak{m}_x P^{(k)}(X)_x$ forment une base de ce dernier espace vectoriel. On notera qu'il existe toujours, pour $x \in X$ donné, une famille (x^i) du type envisagé dans le cor.2.

6 - Morphismes d'espaces différentiés. Application tangente

Soient X,X' deux espaces topologiques, f une application continue de X dans X', F (resp. F') un préfaisceau sur X (resp. sur X') à valeurs dans une catégorie C. Rappelons (Top. Elém. Chap.I) qu'on appelle homomorphisme de F' dans F compatible avec f, la donnée d'une famille $g = (g_U)_U$ d'homomorphismes, U parcourant la famille des parties ouvertes de X', et pour tout U, g_U désignant un homomorphisme (dans C) de $\Gamma(U,F')$ dans $\Gamma(f^{-1}(U),F)$; cette famille étant de plus assujettie à la condition que, pour un ouvert $V \subset U$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(U,F') & \longrightarrow & \Gamma(V,F') \\ \downarrow{\scriptstyle g_U} & & \downarrow{\scriptstyle g_V} \\ \Gamma(f^{-1}(U),F) & \longrightarrow & \Gamma(f^{-1}(V),F) \end{array}$$

soit commutatif (les flèches horizontales désignant les homomorphismes de restriction). (N.B. Dans le cas des faisceaux les homomorphismes de F' dans F compatibles avec f peuvent aussi

s'interpréter comme les homomorphismes usuels du faisceau image inverse $f^{-1}(F')$ dans F, mais ce point de vue ne semble pas commode ici). En particulier, on a la notion d'homomorphisme de faisceaux de k-algèbres, et la notion d'homomorphisme de de faisceaux de modules : Soit F un faisceau de modules sur un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}$ sur X, soient de même F' et $\mathcal{O}'$ sur X', un homomorphisme de faisceaux de modules de $(\mathcal{O}', F')$ dans $(\mathcal{O}, F)$ compatible avec f, consiste en la donnée d'un homomorphisme de faisceaux d'anneaux $\mathcal{O}' \to \mathcal{O}$ compatible avec f, et d'un homomorphisme de faisceaux de groupes abéliens $F' \to F$ compatible avec f, ces deux homomorphismes devant en plus être compatibles avec les opérations de $\mathcal{O}$ sur F resp. de $\mathcal{O}'$ sur F' (le sens précis de cette expression étant clair). Dans les cas que nous aurons à envisager ici, l'homomorphisme $\mathcal{O}' \to \mathcal{O}$ sera donné, et on considèrera des homomorphismes de faisceaux de modules $F' \to F$ "compatibles" avec l'homomorphisme en question.

Supposons donc donnés, sur les espaces topologiques X resp. X', des faisceaux de k-algèbres commutatives unitaires $\mathcal{O}$ resp. $\mathcal{O}'$, et un homomorphisme $f : \mathcal{O}' \to \mathcal{O}$ associé à une application continue de X dans X'. (Nous admettons que la donnée d'un homomorphisme de faisceaux inclut la donnée de l'application continue correspondante, que par abus de langage nous noterons par la même lettre f). Nous allons de ces données déduire des homomorphismes de faisceaux d'algèbres sur $\mathcal{O}'$ et $\mathcal{O}$:

(31) $\quad f^* : P^{(k)}(\mathcal{O}') \to P^{(k)}(\mathcal{O})$,

et plus généralement, pour tout homomorphisme $u : M' \longrightarrow M$ d'un $\mathcal{O}'$-Module M' dans un $\mathcal{O}$-Module M, nous allons définir des homomorphismes de faisceaux de modules sur ces faisceaux d'algèbres :

(31 bis) $\qquad u^* : P^{(k)}(M') \longrightarrow P^{(k)}(M)$

Pour définir (31 bis), notons que u définit des homomorphismes

$$\Gamma(U, M') \longrightarrow \Gamma(V, M) \qquad (V = f^{-1}(U))$$

compatibles avec les homomorphismes d'algèbres

$$\Gamma(U, \mathcal{O}') \longrightarrow \Gamma(V, \mathcal{O})$$

d'où, en vertu de par 3, n°6 des homomorphismes

$$P^{(k)}(\Gamma(U, M')) \longrightarrow P^{(k)}(\Gamma(V, M))$$

qui est un homomorphisme de préfaisceaux, compatible avec f, d'où par passage aux faisceaux associés l'homomorphisme cherché (31 bis). Cela définit en particulier (31) ; et le fait que (31) soit un homomorphisme de faisceaux d'algèbres, et que (31 bis) soit compatible avec les opérations des deux membres de (31) sur les deux membres de (31 bis), se vérifie trivialement sur les définitions. On vérifie de même que les homomorphismes (31 bis) permutent aux homomorphismes de faisceaux $d^{(k)}$, aux homomorphismes de réduction $P^{(\ell)} \longrightarrow P^{(k)}$ etc.

(N.B. On s'aperçoit ici qu'il ne suffit pas de faire les sorites du prolongement des foncteurs aux catégories de faisceaux, dans le cas où l'espace de base est fixé, mais qu'il faut le faire aussi pour des morphismes avec un espace de base qui se ballade. Cela implique qu'en définissant le

faisceau $\widetilde{A}$ associé à un préfaisceau A comme foncteur par rapport à A, il ne faut pas se borner - pour définir cette dépendance fonctorielle - à faire varier A dans la catégorie des faisceaux sur un espace de base fixe. Y a de la joie pour Chevalley).

Supposons maintenant que X et X' soient des espaces différentiés, et $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ leurs faisceaux d'anneaux. Alors l'homomorphisme f est appelé un <u>morphisme d'espaces différentiés</u> si les homomorphismes (31) veulent bien passer au quotient, en des homomorphismes

(32) $\quad f^* : P^{(k)}(X') \longrightarrow P^{(k)}(X)$

Dans ce cas, on vérifie aussitôt que, si M' est localement isomorphe à $\mathcal{O}'^n$, l'homomorphisme (31 bis) passe aussi au quotient en un homomorphisme

(31 bis) $\quad u^* : P^{(k)}(X';M') \longrightarrow P^{(k)}(X,M)$

La condition sur $f : \mathcal{O}' \longrightarrow \mathcal{O}$ qu'on vient d'envisager est évidemment vide si $P^{(k)}(X') = P^{(k)}(\mathcal{O}')$, ce qui aura lieu en géométrie algébrique. Tous les autres cas que nous aurons à envisager rentreront dans le cas de l'exemple 2 du n°2, où $P^{(k)}(X)$ se construit intrinsèquement à partir de $\mathcal{O}$ en termes de la structure de faisceau d'algèbres de $\mathcal{O}$. On vérifie aussitôt que dans ce cas où $P^{(k)}(X)$ et $P^{(k)}(X')$ sont construits comme dans l'exemple en question, l'homomorphisme (31) passe automatiquement au quotient en un homomorphisme (32).

Supposons dorénavant que f soit un morphisme d'espaces

différentiés. Faisons dans l'homomorphisme (32) n=1. Notant que l'homomorphisme f est compatible avec les augmentations, on en déduit un homomorphisme sur les noyaux desdites augmentations :

(33) $$f^* : \Omega^1_{X'} \longrightarrow \Omega^1_X$$

Toujours en vertu du principe du prolongement des foncteurs aux catégories de faisceaux (base variable !), on en déduit des homomorphismes de faisceaux d'algèbres différentielles graduées :

(34) $$f^* : \Omega_{X'} \longrightarrow \Omega_X$$

Bien entendu, les homomorphismes d'espaces différentiés se composent (les espaces différentiés forment donc une catégorie comme tout le monde), et si f et g sont deux homomorphismes composables, alors on a

(35) $$(gf)^* = f^* g^*$$

où f et g sont définis soit par (32), soit par (34).

Supposons maintenant que $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ soient des faisceaux d'anneaux locaux. Soit $x \in X$, posons $x' = f(x)$. L'homomorphisme (33) définit un homomorphisme

(33 bis) $$f^* : \Omega^1_{X'} \longrightarrow \Omega^1_X$$

compatible avec l'homomorphisme $\mathcal{O}_{X'} \longrightarrow \mathcal{O}_X$ défini par f. Supposons que ce dernier applique l'idéal maximal $\mathfrak{m}_{X'}$ de $\mathcal{O}_{X'}$ dans l'idéal maximal $\mathfrak{m}_X$ de $\mathcal{O}_X$. (Il en sera ainsi trivialement dans tous les cas que nous aurons à envisager par la suite). Alors (33 bis) définit par passage au quotient un homomorphisme

(36) $\Omega^1_{X',x'}/m_{x'}\Omega^1_{X',x'} \longrightarrow \Omega^1_{X,x}/m_x\Omega^1_{X,x}$

de l'espace cotangent en x' à X' dans l'espace cotangent en x à X, homomorphisme additif compatible avec l'homomorphisme $k_{x'} \longrightarrow k_x$ défini par f sur leurs corps d'opérateurs. Cette application est appelée l'application cotangente de f en $x \in X$. Dans le cas où l'homomorphisme $k_{x'} \longrightarrow k_x$ est un isomorphisme (par exemple si les k_x et $k_{x'}$ s'identifient tous deux à k), on peut aussi considérer l'application transposée de l'application cotangente, c'est une application linéaire, notée le plus souvent f'(x) ou f'_x,

(37) $f'(x) : T_{X,x} \longrightarrow T_{X',x'}$,

de l'espace tangent à X en x dans l'espace tangent à X' en x', et appelée application tangente à f au point $x \in X$.

Soient X, X', X'' trois espaces différentiés, $f : X \longrightarrow X'$ et $g : X' \longrightarrow X''$ des homomorphismes d'espaces différentiés, soient $x \in X$, $x' = f(x)$ et $x'' = g(x')$, alors on a

(38) $(gf)'(x) = g'(x') \circ f'(x)$

Cette relation, appelée théorème des fonctions composées, est une conséquence immédiate de la relation (35).

7 - Enfin une classe de cohomologie.

Soit X un espace différentié non singulier. Cela implique donc que le $\mathcal{O}$-Module $\mathcal{Y}(X)$ est localement isomorphe à un $\mathcal{O}^n$. Soit d'autre part $\mathcal{A}$ un fibré infinitésimal sur X, i.e. une Θ-algèbre de Lie sur X telle que l'homomorphisme $\theta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{Y}(X)$ soit surjectif. Par suite, en tant que $\mathcal{O}$-Module, $\mathcal{A}$ est une

extension de $\mathcal{J}(X)$ par le noyau $\mathcal{A}_0$ de $\mathcal{A}$. Comme $\mathcal{J}(X)$ est un $\mathcal{O}$-Module localement libre, on sait (référence ?) que l'ensemble des classes de $\mathcal{O}$-Modules extensions de $\mathcal{J}(X)$ par $\mathcal{A}_0$ s'identifie à $H^1(X, \underline{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{J}(X), \mathcal{A}_0))$. D'ailleurs, on a $\underline{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{J}(X), \mathcal{A}_0)) = \Omega^1_X \otimes \mathcal{A}_0$ (le produit tensoriel étant pris sur $\mathcal{O}$). Ainsi la classe de l'extension $\mathcal{A}$ de $\mathcal{J}(X)$ par $\mathcal{A}_0$ s'identifie à un élément

(38) $\qquad \gamma(\mathcal{A}) \in H^1(X, \Omega^1_X \otimes \mathcal{A}_0)$

appelé <u>classe de Atiyah</u> du fibré infinitésimal $\mathcal{A}$. Elle est nulle si et seulement si l'extension est triviale, c'est-à-dire si et seulement si on peut trouver un homomorphisme de $\mathcal{O}$-Modules $\mathcal{J}(X) \longrightarrow \mathcal{A}$ inverse à gauche de la projection $\Theta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{J}(X)$. Mais un tel homomorphisme n'est autre chose qu'une <u>connexion</u> sur le fibré infinitésimal. Par suite :

PROPOSITION 4 - <u>Soit $\mathcal{A}$ un fibré infinitésimal sur l'espace différentié non singulier X. Pour que $\mathcal{A}$ admette une connexion, il faut et il suffit que sa classe de Atiyah soit nulle.</u>