

Villeneuve le 23.6.1974

Chers Deligne, Giraud, Verdier,

Vous savez peut-être qu'une mathématicienne vietnamienne, Hoang Kuan Sinh, <sup>2</sup>travaillé depuis mon séjour au Vietnam en 1967 à un sujet de recherche que je lui avais proposé, savoir une théorie de structure des  $(Gr)$ -catégories, et la construction d'une  $(Gr)$ -catégorie (ou plutôt catégorie de Picard) enveloppante pour une catégorie avec produit  $\otimes$  associatif et commutatif. J'ai reçu récemment une copie du manuscrit en forme (dont la confection s'est faite au prix de mille difficultés - il est douteux qu'il soit possible d'avoir d'autres copies dans un avenir proche, à moins d'en faire d'après cet exemplaire-là), et j'ai envoyé un rapport officiel au sujet de ce travail à M. Ta Quang Bui, ministre de l'enseignement supérieur et technique de la RDV, rapport dont je vous envoie une copie ci-joint. Mme Sinh, avec mon accord, a demandé à présenter ce travail comme thèse de doctorat, et à faire sa soutenance en France. A l'heure où j'écris, je n'ai pas connaissance d'un accord des autorités vietnamiennes pour l'un ni pour l'autre; il y a eu un certain nombre de difficultés soulevées, qu'il est inutile de détailler ici, et qui j'espère vont s'aplanir. J'ai appris par ailleurs que Mme Hoang Kuan Sinh figurerait sur la liste officielle de la délégation vietnamienne au congrès international de mathématiciens à Vancouver du 20 août 1974. Si c'est bien ainsi, il serait très souhaitable qu'elle puisse profiter de cette occasion pour faire sa soutenance à Orsay au retour de Vancouver, fin septembre ou début Octobre, et il ne semble plausible que les autorités vietnamiennes y donneront leur accord. Aussi il serait assez urgent, vu les lenteurs administratives, de constituer un jury. Par la présente, je vous demande si vous seriez disposé en principe à faire partie (avec moi) de ce jury de thèse - ce qui suppose évidemment que vous vous trouvez dans la région parisienne au moment prévu pour la soutenance. A celui qui m'en ferait la demande, je peux envoyer le texte de la thèse complète, ou un résumé assez détaillé rédigé par Mme Hoang Kuan Sinh, ou enfin un résumé moins détaillé de 13 pages manuscrites (rédigées en vue d'une publication aux GR, mais beaucoup trop long à cet effet). Ce serait gentil de me répondre rapidement, et en cas d'impossibilité, de voir autour de vous s'il y a des gens "dans le bain" de <sup>de chez</sup> ~~quelque~~ fait Mme Sinh, et qui seraient intéressés à faire partie du jury.

16

Pour ce qui est des formalités administratives, c'est le frère de  
Mme Hoan Kuan Man, qui habite à Antony, qui s'en occupera pour elle.  
A toutes fin utile, je vous passe son adresse:

Hoang Kuan Sanh, 49 rue de Châtenay, Estérel, 92 Antony, Tél BER 63 79.

Dans l'attente d'une réponse prochaine, bien cordialement

Schurk

PS N'ayant pas l'adresse de Giraud, je demande à Verdier s'il peut bien  
lui transmettre la lettre et le rapport. Je pense que celui-ci doit pou-  
voir servir comme rapport de thèse aussi vis à vis de l'administration  
universitaire en France.

17

Cher Deligne,

Étant peut-être empêché par ma jambe d'assurer un cours de 1<sup>er</sup> cycle au 1<sup>er</sup> trimestre, je vais peut-être à la place faire un petit séminaire d'algèbre, et envisage de le faire sur les fourbis de Mme Sinh, éventuellement transposés dans le contexte des "champs". À ce propos, je tombe sur le truc suivant, qui pour l'instant reste heuristique. Si  $M, N$  sont deux faisceaux abéliens sur un topos  $X$ , et  $\tau_{\leq 2} \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}(M, N) = E(M, N)$  est le complexe ayant les invariants

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{H}}^i = \underline{\mathrm{Ext}}^i(M, N) & \text{pour } 0 \leq i \leq 2 \\ \underline{\mathbf{H}}^i = 0 & \text{si } i \notin [0, 2], \end{cases}$$

il doit y avoir un triangle distingué canonique

$$(T) \quad \begin{array}{ccc} & \underline{\mathrm{Hom}}(M, {}_2N)[-2] & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ E(M, N) & \longrightarrow & E'(M, N), \end{array}$$

donc  $E'(M, N)$  est un complexe dont les invariants  $\underline{\mathbf{H}}^i$  sont ceux de  $E(M, N)$  en degré  $i \neq 2$ , et qui en degré 2 donne lieu à une suite exacte

$$(*) \quad 0 \rightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^2(M, N) \rightarrow \overbrace{\underline{\mathbf{H}}^2(E'(M, N))}^{P(M, N)} \xrightarrow{\sigma} \underline{\mathrm{Hom}}(M, {}_2N) \rightarrow 0.$$

Heuristiquement,  $E'(M, N)$  est le complexe qui exprime le "2-champ de Picard strict" formé des 1-champs de Picard (pas nécessairement stricts) "épinglés" par  $M, N$  sur des objets variables de  $X$ , en admettant que ta théorie pour les 1-champs de Picard stricts s'étend aux 2-champs de Picard stricts (ce qui pour moi ne fait guère de doute); de même  $E(M, N)$  correspond aux champs de Picard *stricts* épinglés par  $M, N$ . La suite exacte (\*) se construit en tous cas canoniquement "à la main", où le terme médian est le faisceau des classes à "équivalence" près des champs de Picard épinglés par  $M, N$ ,  $\sigma$  étant l'invariant qui s'obtient en associant à toute section  $L$  d'un champ de Picard la symétrie de  $L \otimes L$ , interprétée comme section de  ${}_2N$ . Je sais prouver (sauf erreur) que tout homomorphisme  $M \rightarrow {}_2N$  provient d'un champ de Picard convenable (épinglé par  $M, N$ ) (a priori l'obstruction est dans  $\mathrm{Ext}^3(X; M, N)$ , mais un argument "universel" prouve qu'elle est nulle). Cela prouve que l'extension (\*) est bien proche d'être splittée: toute section du troisième faisceaux, sur un objet quelconque de  $X$ , se remonte – en d'autres termes, l'extension a une section "ensembliste". Bien sûr, il y a mieux en fait: toute section sur un  $U \in \mathrm{Ob} X$  "provient" d'un élément de  $\mathcal{H}^2(U, E'(M, N))$  (hypercohomologie  $\mathcal{H}^2$ ).

*Exemple.* Soit  $\mathcal{A}$  un anneau sur  $X$ , soient  $M, N$  respectivement les faisceaux  $K^0, K^1$  associés au champ additif des  $\mathcal{A}$ -Modules projectifs de type fini (p. ex.). Alors la construction de Mme Sinh nous fournit un champ de Picard épinglé par  $M, N$ , d'où une section canonique du terme médian  $P(M, N)$  de (\*).

NB. Tout ce qui précède a les functorialités évidentes en  $M, N, X, \dots$

*Question:* Le triangle exact (T) et la suite exacte (\*) sont-ils connus par les compétences (Quillen, Breen, Illusie...)? Connaissent-ils des variantes “supérieures”? (Un principe “géométrique” pour les obtenir pourrait être via des  $n$ -champs de Picard non nécessairement stricts...)

Je profite de l'occasion pour soulever une question sur la “cohomologie relative”. Soit  $q : X \rightarrow Y$  un morphisme de topos. Si  $F$  est un faisceau abélien (ou un complexe d'iceux) sur  $Y$ , peut-on définir *fonctoriellement* en  $F$  la cohomologie relative  $R\Gamma(Y \text{ mod } X, F)$  (de la catégorie dérivée de  $\text{Ab}(Y)$  dans celle de  $\text{Ab}$ )? L'interprétation “géométrique” en termes d'opérations sur des  $n$ -champs de Picard ( $n$  “grand”) suggère que ça doit exister. Mais je ne vois de construction évidente “à la main” que dans les deux cas extrêmes :

- (a)  $q$  est “(-1)-acyclique”, i.e. pour tout  $F$  sur  $Y$ ,  $F \rightarrow q_*q^*F$  est injectif (NB C'est le cas de  $Y/P \rightarrow Y$  si  $P \rightarrow e_Y$  est un épimorphisme – c'est donc le cas de  $B_e \rightarrow B_G$  plus haut.)

On prend

$$R\Gamma(\text{Coker}(F \rightarrow \underbrace{q_*(C(q^*(F)))}_{\text{résolution injective}})[-1]) .$$

- (b)  $\forall F$  injectif sur  $Y$ ,  $q^*(F)$  est injectif et  $F \rightarrow q_*q^*F$  est un épimorphisme (exemple :  $q$  inclusion d'un ouvert  $U \hookrightarrow e_Y$ ). On prend

$$R\Gamma_Y(\text{Ker}(\underbrace{C(F) \rightarrow q_*q^*(C(F))}_{\text{résolution injective}})) .$$

Dans le cas général, la difficulté provient du fait que le cône d'un morphisme de complexes (tel que

$$F \rightarrow q_*(q^*(F)) \quad )$$

n'est pas fonctoriel (dans la catégorie dérivée) par rapport à la flèche dont on veut prendre le cône. Et pourtant, dans le cas particulier actuel, il devrait y avoir un choix fonctoriel. Est-ce évident ?

*Question pour Illusie :* Dans sa théorie des déformations de schémas en groupes plats, il tombe sur des  $H^3(B_G/X, -)$  resp. des  $\text{Ext}^2(X; -, =)$ . Peut-on court-circuiter sa théorie via la théorie (supposée écrite) des Gr-champs – resp. via ta théorie des champs de Picard? J'ai [phrase incomplète]

Je te signale que j'ai réfléchi aux Gr-champs sur  $X$ . Si  $G$  est un Groupe sur  $X$ ,  $N$  un  $G$ -Module, les Gr-champs sur  $X$  “épinglés par  $G, N$ ” forment a priori une 2-catégorie et même une 2-catégorie de Picard stricte, grâce à l'opération évidente à la Baer. On trouve que le complexe (de cochaînes) tronqué à l'échelon 2 qui lui correspond est le tronqué

$$\tau_{\leq 2}(R\Gamma(B_G \text{ mod } X, N)[1]) .$$

(NB la cohomologie de  $R\Gamma(B_G \text{ mod } X, N)$  commence en degré 1.) Plus géométriquement, un Gr-champ sur  $X$  épinglé par  $(G, N)$  est essentiellement “la même chose” qu'une 2-gerbe sur  $B_G$ , liée par  $N$ , et munie d'une trivialisatoin au dessus de  $X \approx B_e = (B_G)/P$  (où  $P$  est l'objet de  $B_G$  “torseur universel sous  $G$ ”). Ces 2-gerbes forment en fait une 3-catégorie de Picard a priori, mais il se trouve que dans celle-ci, les 3-flèches sont triviales (i.e. si source = but, ce

sont des identités) – cela ne fait qu’exprimer  $H^0(B_G/X, N) = 0$  (i.e.  $H^0(B_G, N) \rightarrow H^0(X, N)$  injectif...). Donc la 3-catégorie peut être regardée comme une 2-catégorie – et “c’est” celle des Gr-champs sur  $X$  épinglés par  $G, N$ . Si on veut localiser sur  $X$ , et décrire le 2-*champs* de Picard sur  $X$  des champs de Picard (sur des objets variables de  $X$ ) épinglés par  $G, N$ , on trouve qu’il est exprimé par le complexe

$$\tau_{\leq 2}(\mathbb{R} p_{G*} \text{Coker}(N \rightarrow \mathbb{R} q_{G*} \overbrace{C(q_G^* N)}^{\text{résolution injective}})),$$

où  $p_G : B_G \rightarrow X$  et  $q_G : B_e \approx X \simeq (B_G)_P \rightarrow B_G$ . Toutes ces descriptions étant compatibles avec des variations de  $G, N, X$ , cela donne en principe une description de la 2-catégorie des Gr-champs, avec  $X, G, N$  variables...