

Alexander Grothendieck : période 1928-1956

El Haj LAAMRI
Université de Lorraine
Institut Elie Cartan
B.P : 239
54 506 Vandoeuvre-ls-Nancy
El-Haj.Laamri@univ-lorraine.fr

Le texte, qui suit, est issu de deux débats que j'ai animés (à Nancy, le 14 février 2014 et le 2 février 2015), suite à la projection du film "Grothendieck : l'espace d'un homme", et d'un exposé que j'ai fait, le 9 novembre 2015 à Rabat, lors d'une journée organisée par l'Académie Hassan II des Sciences et des Techniques. À l'Académie, quatre conférences exposaient la vie de Grothendieck, la période 1928-1956 m'étant attribuée. Ce texte développe cette partie.

Résumé : En me basant sur un *maximum de témoignages*, je vais décrire, à travers ce texte, le parcours de Grothendieck, de sa naissance le 28 mars 1928 jusqu'à sa nomination comme *maître de recherche au CNRS* à Paris en 1956. J'essaierai de souligner l'importance de son passage à Nancy¹ (de 1949 à 1953) pour préparer son doctorat, où il connut des conditions intellectuelles exceptionnelles au contact de mathématiciens de premier ordre. J'insisterai aussi sur son éclosion en tant que mathématicien et aborderai rapidement comment et pourquoi il est passé de l'Analyse Fonctionnelle à la Géométrie Algébrique à partir de 1955.

Enfance chaotique de Grothendieck

Comme l'a écrit Winfried Scharlau², l'un de ses biographes :
"on ne peut comprendre la vie de Grothendieck, à supposer qu'on puisse la comprendre, sans connaître la vie de ses parents."

Père de Grothendieck

Alexander Schapiro (dit Sascha), issu d'une famille juive pratiquante, est un éternel révolutionnaire. Il est né en 1890 à Novozybkov, en Russie, près de la frontière ukrainienne. Voilà ce qu'a dit Grothendieck de son père dans une conférence au CERN en 1970 :

*" ... A l'âge de quatorze ans, il prenait le large pour rejoindre un des groupes anarchistes qui sillonnaient le pays, en prêchant la révolution, le partage des terres et la liberté des hommes, de quoi faire battre un coeur généreux et hardi ! C'était en Russie tsariste, en 1904. Pendant deux ans, il partage la vie mouvementée d'un groupe qu'il avait rejoint, puis, cerné par les forces de l'ordre et après un combat acharné, il est fait prisonnier avec tous ses camarades. Tous sont condamnés à mort, **et tous, sauf lui**, sont exécutés. Pendant trois semaines, il attend jour après jour qu'on le ramène au peloton. Il est finalement*

1. Nancy était souvent considéré comme "capitale" mondiale de l'Analyse dans les années 1930, 1940 et 1950.

2. Winfried Scharlau : *Who is Alexander Grothendieck ?* Notices of the AMS, vol. 55, no. 8 (2008).

grâcié à cause de son jeune âge, et sa peine commuée en celle de prison à perpétuité. Il reste en prison onze ans de l'âge de 16 à l'âge de 27 ans, avec des épisodes mouvementés d'évasions, révoltes, grèves de la faim... Il est libéré par la révolution en 1917, puis participe très activement à la révolution, en Ukraine surtout où il combat, à la tête d'un groupe autonome de combattants anarchistes bien armés, en contact avec Makhno, le chef de l'armée ukrainienne des paysans. Condamné à mort par les bolcheviques, il a réussi à s'enfuir pour atterrir d'abord à Paris. Au cours des quatre dernières années écoulées d'activité militante et combattante, il a d'ailleurs une vie amoureuse assez tumultueuse, dont est issu un enfant, mon demi-frère Dodek."

Après son exil parisien, Sascha revient à Berlin pour s'y "installer". Il gagne sa vie en tant que photographe de rue et fréquente les milieux anarchistes.

Mère de Grothendieck

Hanka, Hanka Grothendieck, la mère d'Alexander, née en 1900 au nord de l'Allemagne, est issue d'une famille bourgeoise protestante de Hambourg. Voulant s'affranchir de son éducation traditionnelle, elle vient dans les années 1920 à Berlin, haut lieu des avant-gardes culturelles et révolutionnaires. Hanka était mariée à Alf Raddatz et le couple avait déjà une fille (Maidi).

Naissance d'Alexander Grothendieck

C'est dans ces milieux anarcho-libertaires que Hanka et Sascha se rencontrent. D'après Winfried Scharlau, lorsque Sascha rencontre Alf, il lui annonce tout de go qu'il va lui "voler sa femme". Le petit Alexander (dit aussi "Shourik" pour les intimes) est né de cette idylle le 28 mars 1928 et gardera le nom de sa mère et sa langue.

La famille, formée de Sascha, Hanka, Alexander et Maidi (la fille de Hanka et Alf), n'a vécu réunie que pendant cinq ans. En effet, l'arrivée des nazis au pouvoir contraint Sascha à s'enfuir à nouveau à Paris en mai 1933. Hanka le rejoint début 1934, après avoir placé son fils Alexander (de cinq ans) dans la famille d'un pasteur de Hambourg, Wilhelm Heydorn, et sa fille Maidi chez ses grands-parents. En 1936, le couple part pour l'Espagne où il s'engage auprès du Front populaire. Après la victoire franquiste, le couple retourne en France.

Grothendieck arrive en France à l'âge de 11 ans

En 1939, la situation de l'enfant devient dangereuse, du fait que ses parents adoptifs s'opposent au régime nazi. Pour sauver le petit Alexander, les Heydorn l'envoient en France en avril 1939 à ses parents. En octobre 1939, Sascha (comme d'autres réfugiés antifascistes, émigrés d'Espagne ou d'Allemagne) est arrêté et est envoyé au camp du Vernet, en Ariège, où il est interné. D'ailleurs pas très loin du village de Lasserre où Grothendieck allait finir sa vie. Déporté à Auschwitz, Sascha meurt en août 1942, ce que Alexander et sa mère n'apprendront que plus tard.

D'après plusieurs témoignages, Alexander Grothendieck vouera à son père une grande et durable admiration bien qu'il n'ait vécu avec lui que peu de temps. L'image du héros révolutionnaire ne faiblira pas : le portrait à l'huile de Sascha, réalisé par un codétenu du camp du Vernet, trônera longtemps dans son bureau de l'IHES (Institut des Hautes Etudes Scientifiques).

Hanka et Alexander Grothendieck internés

Début 1940, Hanka, citoyenne allemande, donc d'un pays ennemi, est placée avec son fils au camp de Rieucros. Le petit Alexander peut tout de même aller au collège. Voici comment Grothendieck évoque cette période dans son autobiographie³ "Récoltes et Semailles" :

"La première année de lycée en France, en 1940, j'étais interné avec ma mère au camp de concentration à Rieucros près de Mende. C'était la guerre, et on était des étrangers – des "indésirables" –, comme on disait. Mais l'administration du camp fermait un oeil pour les gosses du camp, tout indésirables qu'ils soient. On entraînait et on sortait un peu comme on voulait. J'étais le plus âgé, et le seul à aller au lycée, à quatre ou cinq kilomètres de là, qu'il neige ou qu'il vente, avec des chaussures de fortune qui toujours prenaient l'eau."

En février 1942, le camp de Rieucros est fermé et tous les prisonniers sont transférés au camp de Brens, à 200 Km de là. C'était donc fini pour le collège. Mais en juin 1942, il a été permis au petit Alexander de quitter le camp de Brens et d'aller se réfugier au village de Chambon-sur-Lignon grâce à la CIMADE (association d'aide aux réfugiés). Chambon-sur-Lignon est une agréable station de vacances qui abrite un lycée privé appelé "Collège Cévenol". Alexander fut pensionnaire au Foyer Suisse (c'est un foyer qui accueille des enfants juifs réfugiés) et élève au lycée.

Mais sa vie dans le foyer est une angoisse permanente, comme il le raconte très simplement dans "Récoltes et Semailles" :

"Quand on était averti par la police locale qu'il y aurait des rafles de la Gestapo, on allait se cacher dans les bois pour une nuit ou deux, par petits groupes de deux ou trois, sans trop nous rendre compte qu'il y allait bel et bien de notre peau."

Malgré ces conditions difficiles et le fait qu'il ait intégré le collège en 5ème, il a réussi à décrocher son bac en juin 1945 avec mention très bien. Voici ce que rapporte une note au collège le concernant :

"Alexandre Grothendieck, dit "Alex le poète". Allemand? Russe? Mère internée. Enfant très intelligent, toujours plongé dans ses réflexions, ses lectures, très bon joueur d'échec [...] réclame le silence quand il écoute la musique. Sinon tapageur, nerveux, brusque."

Études à l'Université de Montpellier (1945-1948)

Après la fin de la guerre, Grothendieck et sa mère s'installent à Mayrargues, un village au nord de Montpellier. Il s'inscrit en mathématiques à la faculté des sciences de Montpellier à partir de novembre 1945 (l'année universitaire à l'époque commençait en novembre) et bénéficie d'une bourse d'études. La mère et le fils vivent modestement grâce à la bourse du fils, à des travaux saisonniers dans les vignes et les vergers ainsi qu'aux ménages que fait la mère quand son état de santé le permet. En fait, Hanka avait contracté la tuberculose dans les camps.

Mais les cours et les livres de l'époque ne le satisfaisaient pas comme il le raconte dans "Récoltes et Semailles" :

"Ce qui me satisfaisait le moins, dans nos livres de maths, c'était l'absence de toute

3. Autobiographie de Grothendieck intitulée *Récoltes et Semailles : Réflexions et témoignages sur un passé de mathématicien*, éditée la première fois, en 1985, par l'université des Sciences et Techniques du Languedoc (Montpellier) et le CNRS. Le manuscrit est en ligne sur internet.

définition sérieuse de la notion de longueur (d'une courbe), d'aire (d'une surface), de volume (d'un solide). Je me suis promis de combler cette lacune, dès que j'en aurais le loisir. J'y ai passé le plus clair de mon énergie entre 1945 et 1948, alors que j'étais étudiant à l'Université de Montpellier. Les cours à la Fac n'étaient pas faits pour me satisfaire[...] Aussi je ne mettais les pieds à la Fac que de loin en loin, pour me tenir au courant du sempiternel "programme". Les livres y suffisaient bien, au dit programme, mais il était bien clair aussi qu'ils ne répondaient nullement aux questions que je me posais. A vrai dire, ils ne les voyaient même pas ... Du moment où ils donnaient des recettes de calcul à tout venant, pour des longueurs, des aires et des volumes, à coups d'intégrales simples, doubles, triples (les dimensions supérieures à trois restant prudemment éludées...), la question d'en donner une définition intrinsèque ne semblait pas se poser, pas plus pour mes professeurs que pour les auteurs des manuels [...] Il n'y avait aucun doute en moi que je ne pourrais manquer d'y arriver, de trouver le fin mot des choses, pour peu seulement que je me donne la peine de les scruter, en mettant noir sur blanc ce qu'elles me disaient, au fur et à mesure. L'intuition du volume, disons, était irrécusable. Elle ne pouvait qu'être le reflet d'une réalité, évasive pour le moment, mais parfaitement fiable. C'est cette réalité qu'il s'agissait de saisir, tout simplement [...] En m'y mettant, à l'âge de dix-sept ans et frais émoulu du lycée, je croyais que ce serait l'affaire de quelques semaines. Je suis resté dessus pendant trois ans."

Ainsi Grothendieck a consacré beaucoup de temps à ses recherches sur l'intégrale de Lebesgue et n'a pas réussi à valider tous les certificats nécessaires pour obtenir sa Licence en 1947. Il était donc obligé de refaire une année de plus à Montpellier. Voilà ce qu'il en dit dans "Récoltes et Semailles" :

"J'ai trouvé même moyen, à force, de louper un examen, en fin de deuxième année de Fac – celui de trigonométrie sphérique (dans l'option "astronomie approfondie", sic) –, à cause d'une erreur idiote de calcul numérique. (Je n'ai jamais été bien fort en calcul, il faut dire, une fois sorti du lycée...) C'est pour ça que j'ai dû rester encore une troisième année à Montpellier pour y terminer ma licence, au lieu d'aller à Paris tout de suite – le seul endroit, m'assurait-on –, où j'aurais l'occasion de rencontrer les gens au courant de ce qui était considéré comme important, en maths."

En fait, son Professeur de Calcul différentiel (Mr Soula) lui a expliqué que la question avait été résolue par le mathématicien Henri Lebesgue⁴. Mais Grothendieck ne veut pas voir la solution dans un livre :

"... A aucun moment, je n'ai été effleuré par l'idée d'aller dénicher le livre de ce Lebesgue, dont Monsieur Soula m'avait parlé. Dans mon esprit, il n'y avait rien de commun entre ce que pouvait être un livre et le travail que je faisais, à ma façon, pour satisfaire ma curiosité."

raconte Grothendieck dans "Récoltes et semailles".

4. Henri Lebesgue (1875-1941) est un mathématicien français. Après sa réussite à l'agrégation en 1897, il enseigne quelques années en classes préparatoires à Nancy, et prépare simultanément sa thèse. Il la soutient en 1902, sous le titre *Intégrale, longueur, aire*. Dans cette thèse, Lebesgue présente la théorie d'une nouvelle intégrale, appelée depuis intégrale de Lebesgue. Élu professeur au Collège de France en 1921 et membre de l'Académie des Sciences de Paris en 1922.

Grothendieck passe l'année universitaire 1948-1949 à Paris

Après avoir eu sa licence en juin 1948, il monte à Paris, avec une lettre de recommandation pour Elie Cartan⁵, que son Professeur Jacques Soula lui a faite. Il a aussi réussi à décrocher une bourse après un entretien concernant ses projets d'études, avec André Magnier, inspecteur de math et surtout membre de l'Entraide Universitaire de France. Voilà ce qu'a écrit plus tard A. Magnier de cette rencontre dans le bulletin de l'ENS (Ecole Normale Supérieure) :

“A l'époque, en 1948, je faisais partie de l'Entraide Universitaire de France. Comme Grothendieck était dans une situation de dénuement total, nous lui avons proposé de présenter un projet d'études. Je le reçus chez moi. Je fus stupéfait. Au lieu d'un entretien de vingt minutes, il passa deux heures à m'expliquer comment il avait reconstruit, ”avec les moyens du bord”, des théories qui avaient mis des siècles à se construire. Il montrait une sagacité extraordinaire. Je lui accordai immédiatement la bourse et le mis en contact avec Henri Cartan⁶, qui l'admit à son cours de l'Ecole Normale Supérieure. Grothendieck donnait l'impression d'un jeune homme extraordinaire mais déséquilibré par la souffrance et la privation.”

Effectivement, c'est Henri Cartan, Directeur des études à l'ENS, qui a reçu Grothendieck. Il l'a accepté dans son cours et son séminaire, et il lui a aussi conseillé de suivre le cours de Jean Leray⁷ au Collège de France. Voilà ce que raconte Grothendieck, de cette année universitaire à Paris, dans “Récoltes et Semailles” :

“J'ai découvert l'existence d'un monde mathématique en débarquant à Paris en 1948, à l'âge de 20 ans, avec dans ma maigre valise une Licence ès Sciences de l'Université de Montpellier, et un manuscrit aux lignes serrées, écrit recto-verso, sans marge (le papier était cher!), représentant trois ans de réflexions solitaires sur ce qui (je l'ai appris après) était alors bien connu sous le nom de “théorie de la mesure” ou de “l'intégrale de Lebesgue”. Faute d'en avoir jamais rencontré d'autre, je croyais bien, jusqu'au jour où je suis arrivé dans la capitale, que j'étais seul au monde à “faire des maths”, le seul mathématicien donc. C'était pour moi la même chose, et l'est un peu resté jusqu'à aujourd'hui encore. J'avais jonglé avec les ensembles que j'appelais mesurables (sans avoir rencontré d'ailleurs d'ensemble qui ne le soit...) et avec la convergence presque partout, mais ignorais ce qu'est un espace topologique. Je restais un peu paumé dans une douzaine de notions équivalentes “d'espace abstrait” et de compacité, pêchés dans un petit fascicule

5. Élie Cartan (1869-1951) est mathématicien français. Ses principaux travaux portent sur les applications géométriques des groupes de Lie, la relativité (théorie Einstein-Cartan) et sur la théorie des spineurs. Élu membre de l'Académie des Sciences de Paris en 1931. Le laboratoire de Math de l'université de Lorraine porte son nom depuis 1953.

6. Henri Cartan (1904-2008) est un mathématicien français. Membre co-fondateur du groupe Bourbaki. Fils d'Élie Cartan, il est considéré comme l'un des mathématiciens français les plus influents de son époque. Élu à l'Académie des Sciences de Paris en 1974.

7. Jean Leray (1906-1998) est un mathématicien français. Il a commencé sa carrière comme professeur de mécanique des fluides à l'université de Nancy de 1936 à 1940 où il est devenu célèbre quand il a résolu le fameux problème de Navier-Stokes (NS) en dimension 2. Le problème (NS) en dimension 3 est toujours ouvert et fait partie des sept problèmes du millénaire dont la solution vaut un million de dollars. Emprisonné entre 1940 et 1945, J. Leray a été obligé de changer de sujet de recherche (voir le texte de M. Demazure). Professeur au Collège de France de 1947 à 1978, il est élu membre de l'Académie des Sciences de Paris en 1953 et lauréat de plusieurs prix nationaux et internationaux.

(d'un dénommé Appert je crois, dans les *Actualités Scientifiques et Industrielles*), sur lequel j'étais tombé Dieu sait comment. Je n'avais pas entendu prononcer encore, dans un contexte mathématique du moins, des mots étranges ou barbares comme groupe, corps, anneau, module, complexe, homologie (et j'en passe!), qui soudain, déferlaient sur moi tous en même temps. Le choc fut rude! Si j'ai "survécu" à ce choc, et ai continué à faire des maths et à en faire même mon métier, c'est qu'en ces temps reculés, le monde mathématique ne ressemblait guère encore à ce qu'il est devenu depuis. Il est possible aussi que j'avais eu la chance d'atterrir dans un coin plus accueillant qu'un autre de ce monde insoupçonné. J'avais une vague recommandation d'un de mes professeurs à la Faculté de Montpellier, Monsieur Soula (pas plus que ses collègues il ne m'avait pas vu souvent à ses cours!), qui avait été un élève de Cartan (père ou fils, je ne saurais plus trop dire). Comme Elie Cartan était alors déjà "hors jeu", son fils Henri Cartan fut le premier "congénère" que j'aie eu l'honneur de rencontrer. Je ne me doutais pas alors à quel point c'était d'heureux augure! Je fus accueilli par lui avec cette courtoisie empreinte de bienveillance qui le distingue, bien connue des générations de normaliens qui ont eu cette chance de faire leurs toutes premières armes avec lui. Il ne devait pas se rendre compte d'ailleurs de toute l'étendue de mon ignorance, à en juger par les conseils qu'il m'a donnés alors pour orienter mes études. Quoi qu'il en soit, sa bienveillance visiblement s'adressait à la personne, non au bagage ou aux dons éventuels, ni (plus tard) à une réputation ou à une notoriété... Dans l'année qui a suivi, j'ai été l'hôte d'un cours de Cartan à "l'Ecole" (sur le formalisme différentiel sur les variétés), auquel je m'accrochais ferme; celui aussi du Séminaire Cartan⁸, en témoin ébahi des discussions entre lui et Serre⁹ à grands coups de "Suites Spectrales" (brr!) et de dessins (appelés "diagrammes") pleins de flèches recouvrant tout le tableau. C'était l'époque de la théorie des "faisceaux", "carapaces" et de tout un arsenal dont le sens m'échappait totalement, alors que je me contraignais pourtant tant bien que mal à ingurgiter définitions et énoncés et à vérifier les démonstrations. Au Séminaire Cartan il y avait aussi des apparitions périodiques de Chevalley¹⁰, de Weil¹¹, et les jours des Séminaires Bourbaki¹² (réunissant une petite vingtaine ou trentaine à tout casser, de participants et auditeurs), on y voyait débarquer, tel un groupe de co-

8. Le Séminaire Cartan a eu lieu à l'ENS de Paris de 1948 à 1964. Les textes de ce séminaire sont en ligne sur le site www.numdam.org.

9. Né en 1926, Jean-Pierre Serre est un mathématicien français (l'un des plus grands mathématiciens du 20^{ème} siècle). Il est le plus jeune lauréat de la médaille Fields (1954) et le plus jeune professeur au Collège de France (1955-1994). Membre du groupe Bourbaki. Élu membre de l'Académie des Sciences de Paris en 1974, il est aussi lauréat de la médaille d'or du CNRS ainsi qu'un maximum de prix prestigieux en Maths : Wolf, Abel, Balzan...

10. Claude Chevalley (1909-1999) est un mathématicien français. Il est co-fondateur du groupe Bourbaki et co-fondateur avec Grothendieck de l'association écologiste radicale "Vivre et Survivre" (voir le texte de Jean Malgoire).

11. André Weil (1906-1998) est un mathématicien français. Membre co-fondateur du groupe Bourbaki, il est notamment connu par ses conjectures. En effet, les *conjectures de Weil* ont largement influencé les géomètres algébristes depuis 1950. **Grothendieck a passé beaucoup de temps pour essayer de les démontrer** (voir le texte de M. Demazure).

12. Voir la note sur Bourbaki

pains un peu bruyants, les autres membres de ce fameux gang Bourbaki¹³ : Dieudonné¹⁴, Schwartz¹⁵, Godement¹⁶, Delsarte¹⁷. Ils se tutoyaient tous, parlaient un même langage qui m'échappait à peu près totalement, fumaient beaucoup et riaient volontiers, il ne manquait que les caisses de bière pour compléter l'ambiance – c'était remplacé par la craie et l'éponge –. Une ambiance tout autre qu'aux cours de Leray au Collège de France (sur la théorie de Schauder du degré topologique dans les espaces de dimension infinie, pauvre de moi!), que j'allais écouter sur les conseils de Cartan. J'avais été voir Monsieur Leray au Collège de France pour lui demander (si je me rappelle bien) de quoi traiterait son cours. Je ne me rappelle ni des explications qu'il a pu me donner, ni si j'y ai compris quoi que ce soit, seulement, que là aussi je sentais un accueil bienveillant, s'adressant au premier étranger venu. C'est cela et rien d'autre, sûrement, qui a fait que je suis allé à ce cours et m'y suis accroché bravement, comme au Séminaire Cartan, alors que le sens de ce que Leray y exposait m'échappait alors presque totalement.”

On déduit du témoignage précédent que l'algèbre générale et l'algèbre linéaire ne faisaient pas partie du programme de la Licence de Mathématiques à l'époque.

Par ailleurs, Grothendieck évoque plusieurs noms. Tous sont des anciens élèves à l'ENS et formaient (ou allaient former) le noyau de l'élite mathématique française (voire mondiale) : Laurent Schwartz et Jean-Pierre Serre seront lauréats de la médaille Fields¹⁸

13. Bourbaki : nom d'un groupe de mathématiciens formé en 1935 dont l'objectif premier était la rédaction d'un traité d'analyse. Sa composition a évolué avec un renouvellement constant de générations. Sous le pseudonyme de Nicolas Bourbaki fut publiée une série d'ouvrages sous le titre *Éléments de mathématique*. Ces livres ont eu une influence notable sur l'enseignement ainsi sur l'évolution des mathématiques du 20^{ème} siècle. **Grothendieck sera membre du groupe Bourbaki de 1955 à 1961.**

Le séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) a lieu à Paris depuis 1948. C'est donc l'un des plus vieux (voire le plus vieux) séminaires dans le monde et l'un des plus réputés. Les textes des conférences sont rédigés à l'avance et distribués le jour des exposés. Le conférencier expose un travail de recherche de haut niveau qui n'est pas le sien, **seul Grothendieck y a exposé ses propres travaux** (voir le texte de M. Demazure).

14. Jean Dieudonné (1906-1992) est un mathématicien français et co-fondateur du groupe Bourbaki. Il a été professeur à l'université de Nancy (1948-1952) et à l'université du Michigan (1952-1959). Comme il a été le premier professeur permanent à l'I.H.E.S (1959-1964). Président du Congrès International des Mathématiciens en 1970, il est considéré comme le dernier mathématicien capable de comprendre tout séminaire de son époque.

15. Laurent Schwartz (1915-2002) est le premier mathématicien français lauréat de la médaille Fields (1950) pour ses travaux sur la théorie des distributions. Professeur à l'université de Nancy (1945-1952), à l'université de Paris (1952-1958) et à l'Ecole Polytechnique (1958-1980). Élu membre de l'Académie des Sciences de Paris en 1973.

16. Né en 1921, Roger Godement a été professeur à l'université de Nancy (1946-1955) puis à l'université de Paris 7 (1955-1990). En plus des Maths, R. Godement est aussi connu pour son engagement contre la guerre d'Algérie, la guerre du Vietnam puis le lobby militaro-industriel et la collaboration entre scientifiques et militaires.

17. Jean Delsarte (1903-1968) a fait toute sa carrière à l'université de Nancy. Il devient doyen de la faculté des sciences de Nancy de 1945 à 1949. Membre co-fondateur du groupe Bourbaki et son secrétaire général jusqu'à son décès. Recruteur hors pair : il attire à Nancy plusieurs brillants mathématiciens tels que J. Leray, J. Dieudonné, L. Schwartz, R. Godement, J.-P Serre (pour ne citer que ceux qui ont un lien étroit avec Grothendieck) ...

18. La médaille Fields est la plus prestigieuse récompense pour la reconnaissance de travaux en

respectivement en 1950 et 1954. Ils étaient également tous membres du groupe Bourbaki, à l'exception de Jean Leray. En outre, Jean Delsarte, Jean Dieudonné, Roger Godement et Laurent Schwartz étaient professeurs à l'université de Nancy, Jean-Pierre Serre allait les rejoindre à partir de la rentrée universitaire 1952. Quant à Claude Chevalley et André Weil, ils étaient en poste aux États-Unis.

Comme on va le voir dans la suite de ce texte ainsi que dans le texte de M. Demazure, le chemin de Grothendieck va croiser celui de la majorité de ces mathématiciens, notamment J. Dieudonné, L. Schwartz et J.-P. Serre.

Revenons maintenant à Grothendieck, et ainsi que le veut la tradition à l'époque, on va appeler désormais tous les mathématiciens par leur nom de famille.

Grothendieck à Nancy à partir de Septembre 1949

Au Printemps 1949, Cartan conseille à Grothendieck d'aller préparer sa thèse à l'université de Nancy, sous la direction de Dieudonné et de Schwartz à partir de l'automne 1949 et lui suggère d'écrire à Dieudonné en lui mentionnant le travail qu'il avait déjà fait sur *la théorie de la mesure et de l'intégration*. Voilà l'essentiel de la réponse de Dieudonné : *“J’ai lu avec intérêt votre lettre du 30 juin ; elle témoigne d’une ardeur pour les mathématiques modernes dont je ne peux que vous féliciter ; et si vous venez à Nancy l’année scolaire prochaine, mes collègues et moi-même seront certainement heureux de guider vos recherches dans toute la mesure du possible...”*

En fait, Cartan connaît bien Nancy à plusieurs titres. D'une part, il y est né et son illustre père Elie Cartan était professeur à l'université de Nancy entre 1903 et 1909. D'autre part, il connaît très bien tous les mathématiciens qui y enseignent. On trouve aussi à Nancy le secrétariat du groupe Bourbaki dirigé par Delsarte. Se trouvent à Nancy également des doctorants qui allaient devenir de grands mathématiciens : François Bruhat (1929-2010), Jacques-Louis Lions (1928-2001), Bernard Malgrange (1928-) et Paul Malliavin (1925-2010). Ainsi Grothendieck va travailler dans un environnement mathématique exceptionnel.

Premiers travaux de recherche de Grothendieck qui vont le sortir de l'anonymat

Grothendieck arrive à Nancy en octobre 1949. Voilà ce que raconte Schwartz dans son autobiographie¹⁹ de la première rencontre entre Dieudonné et Grothendieck :

“Il présenta d’abord à Dieudonné un article d’une cinquantaine de pages, sur “l’intégrale à valeurs dans un groupe topologique”. C’était exact mais rigoureusement sans aucun intérêt. Dieudonné, avec l’agressivité (toujours passagère) dont il était capable, lui passa

mathématiques, souvent considérée comme un équivalent du prix Nobel car il n'en existe pas pour cette discipline. Elle est attribuée tous les quatre ans au cours du congrès international des mathématiciens à, au plus, quatre mathématiciens de moins de 40 ans. Les lauréats se voient attribuer chacun une médaille et un prix de 15 000 dollars canadiens. C'est le mathématicien canadien, John Charles Fields, qui propose la création de cette médaille. A sa mort en 1932, il lègue ses biens à la science afin de contribuer au financement de la médaille. L'attribution des deux premières médailles a lieu en 1936. La seconde guerre mondiale interrompt la délivrance de la distinction jusqu'en 1950. **Grothendieck sera lauréat de la médaille Fields en 1966.**

19. Laurent Schwartz : *Un Mathématicien aux prises avec le siècle*, Odile Jacob, Paris, 1997.

un savon mémorable, arguant qu'on ne devrait pas travailler de cette manière, en généralisant pour le plaisir de généraliser. Il fallait que le problème traité soit difficile, et susceptible d'applications dans le reste des mathématiques (ou d'autres sciences); ses résultats ne serviraient jamais à rien ni à personne."

Il se trouve qu'en cette année 1949, Dieudonné et Schwartz viennent de publier un article²⁰. *"L'article s'achevait sur quatorze questions, des problèmes que nous ne savions pas résoudre"* écrit Schwartz dans son autobiographie.

Ainsi après cet accueil "chaleureux" (probablement bien étudié à l'avance et bien orchestré pour orienter le jeune néophyte vers des questions concrètes), Dieudonné a donné une copie du fameux article à Grothendieck, et lui a proposé de choisir certaines questions qui l'inspiraient et de revenir quand il aurait avancé.

Il paraît que la fameuse scène n'a fait ni chaud ni froid à Grothendieck. Il est parti tout simplement travailler et il est revenu quelques semaines après, surprenant tout le monde, à commencer par ses deux co-encadrants. Voilà ce qu'a écrit Schwartz dans son autobiographie des premiers résultats de Grothendieck :

"Nous ne le revîmes plus de quelques semaines. Lorsqu'il réapparut, il avait trouvé la solution de la moitié d'entre eux! Des solutions profondes et difficiles, nécessitant elles aussi des notions nouvelles. Nous étions émerveillés. Nous avons affaire, évidemment, à un mathématicien de tout premier ordre. Il publia cette manne de résultats et devint notre collaborateur."

Dieudonné est aussi émerveillé et il le fait savoir à tout le monde :

"Le résultat dépassa nos espérances..."

En revanche, Grothendieck est surpris par l'attitude de Dieudonné, voilà ce qu'il en raconte plus tard dans "Récoltes et Semailles" :

"Si j'ai vu un mathématicien faire usage d'un puissant et élémentaire "pouvoir d'encouragement", c'est bien lui! Je n'y ai jamais ressenti avant cet instant, mais je me souviens que c'est dans ces dispositions aussi qu'il avait accueilli déjà mes tout premiers résultats à Nancy, résolvant des questions qu'il avait posées avec Schwartz."

Ainsi quelques mois après son arrivée à Nancy, Grothendieck a publié son premier résultat. Il a aussi été invité comme cobaye au meeting Bourbaki qui avait lieu à Nancy du 3 au 7 février 1950.

La première publication a été suivie par quatre autres, ce qui a donné trois notes aux C.R.A.S (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences) en 1950 et deux en 1951.

La thèse qui va rendre Grothendieck célèbre au niveau mondial

Il va sans dire que les premières publications de Grothendieck étaient largement suffisantes pour soutenir une excellente thèse courant 1951. Mais il est apatride, il voyage avec un passeport Nansen²¹. Il ne peut donc postuler à un poste d'enseignant-chercheur en France (la nationalité française était nécessaire à l'époque) et il n'a pas l'intention de demander sa naturalisation pour ne pas accomplir de service militaire parce qu'il est antimilitariste.

20. J. Dieudonné; L. Schwartz : *La dualité dans les espaces $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{LF})$* , Ann. Inst. Fourier Grenoble 1, (1949), p. 61-101.

21. Le passeport Nansen est un document d'identité reconnu par de nombreux États permettant aux réfugiés apatrides de voyager.

Dieudonné et Schwartz pensaient qu'il devrait profiter de sa bourse de thèse une année de plus puisqu'il n'avait aucun poste pour la suite. En fait, Grothendieck obtient, à partir de la rentrée 1950, une bourse en tant que "Attaché de recherches au CNRS" qu'il garde jusqu'à son départ définitif de Nancy. Par ailleurs, Dieudonné allait partir à l'Université du Michigan début septembre 1952, les deux éminents co-encadrants ont convenu que c'est Schwartz qui sera le directeur de thèse officiel et donc c'est lui qui propose un sujet de thèse. Voilà ce qu'en raconte Schwartz dans son autobiographie :

"Un sujet de thèse s'imposait. Je lui en proposai un, au printemps 1951, juste avant de passer l'été au Brésil... Preuve que je ne manipulais pas encore assez bien les espaces vectoriels topologiques. Grothendieck était l'homme tout désigné pour trouver une topologie tensorielle. Je reçus fin juillet, au Brésil, une lettre de lui, très déçue ... je ne savais quoi lui répondre. Deux semaines après, je reçus un courrier triomphant."

En fait, Grothendieck a trouvé les théorèmes fondamentaux l'été 1951. Il avait donc largement le temps pour rédiger sa thèse et préparer d'autres publications. Ainsi, en 1952, Grothendieck finit la rédaction de sa thèse, de plus 300 pages, intitulée *produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires* et publie également :

- un article intitulé *Critères de compacité dans les espaces vectoriels généraux* de 16 pages dans American Journal of Mathematics ;

- un article intitulé *Résumé des résultats essentiels dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires*, de 41 pages dans les Annales de l'Institut Fourier de Grenoble. L'article commence ainsi :

"Cet article est destiné à donner un résumé, sans démonstration, des principaux résultats contenus dans mon travail *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires* qui sera publié dans Memoirs of the American Mathematical Society."

En outre, il soumet quatre grands articles qui seront publiés en 1953.

En ce qui concerne la soutenance de la thèse, elle a lieu, le 28 février 1953, devant le jury composé de Cartan (Président), Schwartz (rapporteur) et Choquet²² (examineur). Et voilà ce que dit Schwartz de la thèse dans son autobiographie :

"... sa thèse était un monument de plus de 300 pages, un chef d'oeuvre de première grandeur... Il fallait la lire, l'apprendre, la comprendre, car tout était difficile et profond... J'y mis six mois à plein temps. Quel travail, mais quelle joie ! Les énoncés des théorèmes étaient kilométriques, car il n'épargnait rien au lecteur. J'y appris quantité de choses nouvelles. Ce fut la plus belle de "mes" thèses. Je connaissais depuis longtemps les plaisirs de l'enseignement et de la recherche personnelle, mais la collaboration avec ce jeune homme si talentueux constitua une expérience fascinante et enrichissante. Grothendieck fût aussitôt reconnu à l'échelle mondiale comme le grand maître des espaces vectoriels topologiques."

Cette thèse sera ensuite publiée dans les Mémoires de l'American Mathematical Society en 1955 et fera partie des documents les plus cités pendant trois décennies. Dans la version publiée, Grothendieck ajouta une dédicace en allemand, qui n'apparaissait pas

22. Gustave Choquet (1915-2006) est un mathématicien français. Spécialiste de l'Analyse Fonctionnelle, il a été élu membre l'Académie des sciences de Paris en 1976.

dans la version originale : “*An meiner Mutter, Hanka Grothendieck, in Verehrung und Dankbarkeit*” ; ce qu’on peut traduire comme ceci :

“*A ma mère, Hanka Grothendieck, avec vénération et reconnaissance.*”

Grothendieck en poste au Brésil pour deux ans

Comme on l’a déjà évoqué plus haut, Grothendieck n’a pas la nationalité française et ne peut donc avoir un poste d’enseignant-chercheur en France. Ses deux illustres directeurs de recherche Dieudonné et Schwartz commencent, en automne 1952, à lui chercher un poste à l’étranger qui soit à son niveau. Schwartz, lauréat de la médaille Fields en 1950, est de notoriété mondiale et est bien connu au Brésil d’autant plus qu’il y a fait plusieurs séjours scientifiques. Quant à Dieudonné, il est aussi connu que Schwartz et a déjà été en poste au Brésil entre 1946 et 1948. Ainsi, ils n’ont aucun problème à lui décrocher un poste de deux ans au Brésil à l’université de Sao Paulo. De plus, ils ont négocié avec l’université de Sao Paulo pour que Grothendieck puisse revenir en France fin octobre assister aux séminaires parisiens de novembre à février. Précisons pour le lecteur que l’année universitaire au Brésil dure de mars à décembre. Ayant soutenu sa thèse le 28 février 53, Grothendieck arrive à Sao Paulo début mars et commence immédiatement son cours qu’il donne en Français. En effet, la majorité des membres du département de Math parlaient à l’époque français et avaient l’habitude de recevoir des célébrités françaises : Weil, Dieudonné, Schwartz, ...

Et, à la demande du Chef du département de Math, Grothendieck rédige les notes de son cours sur les espaces vectoriels topologiques. Notes de cours qui ont été tapées par les soins du département de Maths et qui allaient être distribuées, les années suivantes, sous la forme d’un polycopié (un pavé de 240 pages).

En ce qui concerne la recherche, Grothendieck soumet plusieurs articles. Et comme Dieudonné le lui avait conseillé, il soumet notamment deux papiers au “Boletim Sociedade Matematica de Sao Paulo” qui sont publiés en 1953.

Mais d’après plusieurs lettres et témoignages, Grothendieck ne se plaisait pas au Brésil et ne faisait aucun effort pour s’intégrer, notamment lors de sa deuxième année. Il ne pensait qu’à son retour en France et essayait de récupérer le maximum de notes de cours des séminaires parisiens.

Rencontre Grothendieck et Serre ou la rencontre des géants

Serre est nommé à l’université de Nancy en septembre 1952, et c’est à partir de cette année que la coopération entre ces deux géants va commencer. Voilà ce qu’en dira Grothendieck plus tard dans “Récoltes et Semailles” :

“Je pourrais dire, en exagérant à peine, qu’entre le début des années cinquante jusque vers l’année 1966, donc pendant une quinzaine d’années, tout ce que j’ai appris en “géométrie” (dans un sens très large, englobant la géométrie algébrique ou analytique, la topologie et l’arithmétique), je l’ai appris par Serre, quand je ne l’ai pas appris par moi-même dans mon travail mathématique. C’est en 1952 je crois, quand Serre est venu à Nancy (où je suis resté jusqu’en 1953), qu’il a commencé à devenir pour moi un interlocuteur privilégié – et pendant des années –, il a été même mon seul interlocuteur pour les thèmes se plaçant en dehors de l’analyse fonctionnelle. La première chose je crois dont il m’ait parlé c’était les

“Tor” et les “Ext”, dont je me faisais un monde et pourtant, regarde donc, simple comme bonjour..., et la magie des résolutions injectives et projectives et des foncteurs dérivés et satellites, à un moment où le *diplodocus*²³ de Cartan-Eilenberg n’était pas publié encore. Ce qui m’avait attiré vers la cohomologie dès ce moment, c’étaient les “théorèmes A et B” qu’il venait de développer avec Cartan, sur les espaces analytiques de Stein. J’en avais déjà entendu parler je crois, mais c’est par un ou deux tête-à-tête avec Serre que j’ai senti toute la puissance, la richesse géométrique que recelaient ces énoncés cohomologiques tellement simples. Ils m’avaient d’abord totalement passé par dessus la tête, avant qu’il ne m’en parle, à un moment où je ne “sentais” pas encore la substance géométrique dans la cohomologie faisceautique d’un espace. J’étais enchanté au point que pendant des années j’avais l’intention de travailler sur les espaces analytiques, dès que j’aurais mené à bonne fin les travaux que j’avais encore en train en analyse fonctionnelle, où décidément je n’allais pas m’éterniser ! Si je n’ai pas vraiment suivi ces intentions, c’est parce que Serre entre-temps s’était tourné vers la géométrie algébrique et avait écrit son fameux article de fondements “FAC”²⁴, qui rendait compréhensible et hautement séduisant ce qui auparavant m’était apparu rébarbatif au possible, si séduisant même que je n’ai pas résisté à ses charmes, et me suis dirigé alors vers la géométrie algébrique, plutôt que vers les espaces analytiques.”

Cette coopération sera par la suite très fructueuse et va durer plusieurs années. Et voilà la réponse qu’a donnée Serre, au printemps 2015, suite à la question que lui a posée un journaliste de la revue “la Recherche” :

“Nous avons commencé cette correspondance en 1955, alors qu’il était au Kansas, ne trouvant pas de poste en France. Il commença à s’immerger dans la géométrie algébrique et souhaitait apprendre l’algèbre homologique qu’il ne connaissait pas. Comme il n’aimait pas lire les livres et qu’il préférait discuter avec les gens, j’ai été en quelque sorte son interlocuteur naturel et privilégié sur ce sujet. Quand nous étions dans des endroits différents, nous nous écrivions, et quand nous étions dans le même endroit, nous nous voyions ou nous nous téléphonions. Nous avons beaucoup échangé jusqu’en 1966, et la dernière lettre date de 1987.”

Changement de sujet de recherche

Influencé par Serre et conscient du fait qu’il a résolu tous les problèmes intéressants en Analyse Fonctionnelle, Grothendieck commença à se préparer pour s’orienter vers un nouveau sujet de recherche à partir de 1954. Plusieurs témoins l’ont vu, à la bibliothèque de l’université de Sao Paulo, chercher des livres de géométrie algébrique. Voilà ce qu’il en dit plus tard dans “Récoltes et Semailles” :

“Mes premières et solitaires réflexions, sur la théorie de la mesure et de l’intégration, se placent sans ambiguïté possible dans la rubrique “grandeur”, ou “analyse”. Et il en est de même du premier des nouveaux thèmes que j’ai introduits en mathématiques (lequel m’apparaît de dimensions moins vastes que les onze autres). Que je sois entré

23. *Homological Algebra* : livre de H. Cartan et S. Eilenberg publié en 1956. Voir aussi le texte de M. Demazure.

24. Jean-Pierre Serre : *Faisceaux algébriques cohérents*. Ann. of Math. (2) **61**, (1955). 197-278.

dans la mathématique par le “biais” de l’analyse m’apparaît comme dû, non pas à mon tempérament particulier, mais à ce qu’on peut appeler une “circonstance fortuite” : c’est que la lacune la plus énorme, pour mon esprit épris de généralité et de rigueur, dans l’enseignement qui m’était proposé au lycée comme à l’université, se trouvait concerner l’aspect “métrique” ou “analytique” des choses.

L’année 1955 marque un tournant crucial dans mon travail mathématique : celui du passage de l’“analyse” à la “géométrie”. Je me rappelle encore de cette impression saisissante (toute subjective certes), comme si je quittais des steppes arides et revêches, pour me retrouver soudain dans une sorte de “pays promis” aux richesses luxuriantes, se multipliant à l’infini partout où il plaît à la main de se poser, pour cueillir ou pour fouiller... Et cette impression de richesse accablante, au delà de toute mesure, n’a fait que se confirmer et s’approfondir au cours des ans, jusqu’à aujourd’hui même. C’est dire que s’il y a une chose en mathématiques qui (depuis toujours sans doute) me fascine plus que tout autre, ce n’est ni “le nombre”, ni “la grandeur”, mais toujours la forme. Et parmi les mille-et-un visages que choisit la forme pour se révéler à nous, celui qui m’a fasciné plus que tout autre et continue à me fasciner, c’est la structure cachée dans les choses mathématiques.”

Grothendieck à l’université du Kansas à partir de janvier 1955

Le contrat avec l’université de Sao Paulo va prendre fin en octobre 1954 et Grothendieck est très intéressé par un poste permanent en France. Mais sa candidature, à un poste de *maître de recherches au CNRS*, avait été rejetée en juillet 54. Il n’y avait pas d’autre solution à part trouver un poste à l’étranger.

Très inquiet par la situation de Grothendieck et voulant toujours l’aider, Dieudonné lui écrivait :

“Puisque le CNRS vous a refusé une maîtrise de recherche (je crois que vous êtes hélas victime de la réaction anti-Bourbaki!), et que je présume que vous n’avez pas l’intention de vous incruster au Brésil, envisageriez-vous maintenant de venir aux USA ? Il y a naturellement l’obstacle du voyage de votre mère, mais Schwartz me dit que vous ne l’avez pas emmenée avec vous cette fois, d’où je présume que vous accepteriez peut-être de venir dans les mêmes conditions aux États-Unis ?”

Effectivement, Grothendieck est invité par l’université de Kansas, en tant que “*Professeur Visiteur*”, à partir de janvier 1955. Et voilà comment sa venue a été annoncée :

“*News announcement from the K.U (Kansas University) News Bureau, January 11, 1955 : Alexandre Grothendieck, brilliant young French mathematician, has arrived at the University of Kansas for a six months assignment as a visiting research associate professor. Grothendieck is an expert on the theory of linear topological spaces. A large research project, partially government sponsored, has been in progress at K.U. in that field for several years.*

We sought Professor Grothendieck’s services a year ago as he was highly recommended by the best French mathematicians, “said Dr. G. Baley Price, department chairman”. However he was still on a 2-year engagement in Sao Paulo, Brazil.”

Les conditions de travail à l'Université du Kansas sont excellentes et Grothendieck est très bien payé. D'autres universités américaines profitant de son séjour au Kansas l'invitent pour y donner des séminaires.

Durant cette période, Grothendieck rédige ses derniers travaux en Analyse Fonctionnelle (il en va publier deux ou trois) et travaille sur l'algèbre homologique. Au printemps 1955, il envoie à Serre une copie d'un manuscrit qu'il a intitulé *classes abéliennes* en lui disant : *“J’ai déjà la conviction que la façon bourbachique de faire de l’algèbre homologique, c’est de changer de classe abélienne à tout instant, comme on change le corps des scalaires, ou la topologie en Analyse Fonctionnelle.”*

Serre montre le manuscrit aux membres du groupe à l'occasion du congrès Bourbaki qui a lieu au mois de juillet 1955. Et voilà ce qu'il a écrit à Grothendieck après le congrès :

“Ton papier sur l’algèbre homologique a été lu soigneusement, et a converti tout le monde (même Dieudonné, qui semble complètement fonctorisé !) à ton point de vue. Eilenberg²⁵ a décidé de faire une rédaction dans ce sens (pour Bourbaki), avec pour Chapitre I la théorie générale de l’homologie dans les classes abéliennes, Chapitre II l’application aux modules, Chapitre III l’application aux faisceaux. Il se mettra en rapport avec toi pour les questions de rédaction et de démonstrations.”

Quant à Dieudonné, il lui a écrit :

“Serre a dû vous donner des nouvelles du Congrès Bourbaki, où vos classes abéliennes ont soulevé l’enthousiasme ! On compte sur vous pour le Congrès d’Octobre et on espère que vous nous ferez un rapport rupeux sur les fonctions analytiques.”

Mais, malgré son “exil” doré aux États-unis, Grothendieck veut revenir en France à n'importe quel prix et le plus tôt possible. Voilà ce qu'il en dit dans une lettre à Serre :

*“J’ai appris qu’on créait en France une centaine de postes de professeurs associés, et qu’ils étaient aussi accessibles aux étrangers. Es-tu renseigné si la chose a fait du progrès, si éventuellement il y aurait une chance pour moi de décrocher un poste, et comment et quand on pose sa candidature ? **Ça m’intéresse énormément, car il ne peut être question pour moi de rester aux États-Unis, et je préfère nettement rester en France que d’aller en Allemagne ou même en Amérique du Sud !**”*

Serre lui répond avec délicatesse et bienveillance :

“Nous n’avons aucun détail sur la question des professeurs associés. Combien y en aurait-il pour toute la France ? Mystère. A Paris, Cartan a un candidat tout trouvé : Chevalley (confidentiel !). Y aura-t-il des postes en province ? En tout cas, tu peux être tranquille, s’il y a une possibilité pour toi, on bondira dessus. Les gens de Strasbourg avaient d’ailleurs plus ou moins pensé à toi, à un moment où ils se figuraient avoir un poste.”

Malheureusement, Grothendieck doit patienter et passer l'année universitaire 1955-1956 à l'université du Kansas qui est ravie de le garder une année de plus. Mai 56, Schwartz lui avait envoyé une lettre lui annonçant que sa deuxième candidature à un poste au CNRS allait être acceptée. Voilà la réponse de Grothendieck à la lettre de Schwartz :

“Merci pour la bonne nouvelle du CNRS : à vrai dire, je ne compterai avec que quand

25. Samuel Eilenberg (1913-1998) est un mathématicien américain d'origine polonaise. Professeur à l'université de Columbia à New York de 1947 à 1982. Il a aussi été un membre-collaborateur du groupe Bourbaki.

j'aurai une lettre officielle du CNRS m'instituant maître de recherches, mais il semble qu'il y ait bon espoir."

Effectivement, la lettre officielle ne tarda pas à arriver et Grothendieck plia bagage pour revenir à Paris où il est nommé *Maître de Recherches au CNRS* à Paris à partir de la rentrée 1956.

En guise de conclusion

L'enfance de Grothendieck a été marquée par le nazisme, la guerre d'Espagne et la deuxième guerre mondiale. Et pourtant, il est devenu, à l'âge de 25 ans, un éminent mathématicien connu à l'échelle mondiale.

Voici le premier paragraphe du rapport²⁶ qu'a fait Serre, **en 1965**, au comité Fields sur les travaux de Grothendieck. Ce paragraphe est entièrement consacré aux travaux qu'avait fait Grothendieck sur les evt (espaces vectoriels topologiques) durant la période 1952-1955 :

"L'une des idées directrices de Grothendieck dans ce domaine a été d'"expliquer" les phénomènes d'evt rencontrés par L. Schwartz en théorie des distributions. Dans le travail²⁷, il montre que la catégorie des $(\mathcal{LF})$ introduite par Dieudonné-Schwartz possède quantité de propriétés pathologiques ; parmi les résultats positifs qu'il obtient, on peut citer le théorème disant que le bidual d'un espace de Fréchet est un espace de Fréchet (ce n'est nullement trivial), et l'introduction de deux espaces de nouveaux types, les espaces $(\mathcal{DF})$ et les espaces de "Schwartz".

C'est dans la thèse²⁸ que sont faits les progrès décisifs. Il y définit deux produits tensoriels complétés $E \otimes_\varepsilon F$ et $E \otimes_\pi F$ d'evt. Ces deux produits tensoriels, distincts en général, coïncident lorsque E appartient à une nouvelle catégorie d'evt, celle des espaces nucléaires. Il montre que cette catégorie possède des propriétés de stabilité remarquables. De plus la plupart des espaces fonctionnels que l'on rencontre en théorie des distributions sont nucléaires : ce fait constitue une forme particulièrement commode du "théorème des noyaux" de Schwartz.

Parmi les idées nouvelles introduites par Grothendieck en théorie des evt, on peut citer :
(a) *la technique E_V et E_A associés à un evt E et à un voisinage de 0 convexe V (resp. à une partie bornée convexe A) de E .*

(b) *l'utilisation des espaces L^p et $\mathcal{C}(K)$ dans la théorie générale des evt (notamment pour l'étude des applications intégrales ou nucléaires).*

(c) *l'application des produits tensoriels complétés à une "formule de Künneth" vectorielle-topologique (cf. séminaire de Schwartz 53-54 consacré d'ailleurs entièrement à la thèse de Grothendieck). Cette formule permet de ramener certains problèmes de dimension > 1 à ceux de dimension 1. Cette technique a été utilisée par Grothendieck lui-même (trivialité de la d'' -cohomologie locale) et par R. Bott (Annals, 5).*

(d) *les résultats "fins" de la théorie métrique des espaces tensoriels d'espaces de Banach,*

26. J.-P Serre : *Rapport au comité Fields sur les travaux de Grothendieck*, K-theory 3 (1989), 199-204.

27. A. Grothendieck : *Sur les espaces $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{DF})$* , Summa Brasil. Math. 3 (1954), 57-123

28. A. Grothendieck : *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. no. 16, (1955), 140 pp.

*exposés dans son article*²⁹.”

On ne saurait mieux dire.

29. A. Grothendieck : *Résumé de la théorie métrique des espaces vectoriels topologiques*, Bol. Soc. Mat. Sao Paulo **8** (1953), 1-79.