Jean Giraud

Cohomologie non abélienne



Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1971

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

in Einzeldarstellungen
mit besonderer Berücksichtigung
der Anwendungsgebiete

Band 179

Herausgegeben von

J. L. Doob · A. Grothendieck · E. Heinz · F. Hirzebruch
E. Hopf · W. Maak · S. Mac Lane · W. Magnus · J. K. Moser
M. M. Postnikov · F. K. Schmidt · D. S. Scott · K. Stein

Geschäftsführende Herausgeber

B. Eckmann und B. L. van der Waerden

Jean Giraud
Maître de Conférences à l'Ecole Normale Supérieure de Saint Cloud

Geschäftsführende Herausgeber:

Prof. Dr. B. Eckmann
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich

Prof. Dr. B. L. van der Waerden
Mathematisches Institut der Universität Zürich

AMS Subject Classifications (1970): 18-02, 14 F 20, 55 B 30

ISBN 3-540-05307-7 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-05307-7 Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdruckes, der Entnahme von Abbildungen, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Bei Vervielfältigungen für gewerbliche Zwecke ist gemäß § 54 UrhG eine Vergütung an den Verlag zu zahlen, deren Höhe mit dem Verlag zu vereinbaren ist. © by Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1971. Library of Congress Catalog Card Number 78-146049.
Printed in Germany. Gesamtherstellung: Universitätsdruckerei H. Stürtz AG, Würzburg

Table des matières

Introduction 1

Chapitre 0. Sites et topos 4

§ 1. Topologies, sites 4
§ 2. Faisceaux, topos 6
§ 3. Morphismes de sites, de topos 10

Chapitre I. Catégories fibrées et scindées 18

§ 1. Rappels et notations 18
1.1. Les catégories de morphismes 19
1.2. Les accouplements de composition 21
1.3. Les foncteurs de composition 22
1.4. Leurs propriétés algébriques 22
1.5. Composition avec une E-équivalence 23
1.6. Changement de base 24
1.7. Univers 25
1.8. La 2-catégorie $\mathscr{F}ib(E)$ 26
1.9. La 2-catégorie $\mathscr{S}cin(E)$ 27
1.10. La catégorie $\varinjlim(F/A)$ 28
1.11. Adjoint d'un E-foncteur 29

§ 2. Le changement de base et ses adjoints 32
2.1. Notations 32
2.2. Adjoint d'un 2-foncteur 33
2.3. Les 2-foncteurs de changement de base 35
2.4. Les adjoints de $\mathscr{O}u\mathscr{b}_u$ 37
2.5. Les 2-foncteurs $u^{\bullet}_{\mathrm{fib}}$ et u^{+}_{fib} 41
2.6. Les préfaisceaux de S-morphismes. 47
2.6.1. La catégorie fibrée des préfaisceaux 47
2.6.2. Préfaisceaux $\mathrm{Hom}_S(x, y)$ dans une catégorie scindée 49
2.6.3. Dans une catégorie fibrée. 50
2.6.5. Effet d'un changement de base 51

§ 3. Extension à $\hat{E}$ d'une E-catégorie fibrée 53
3.1. Univers 53
3.2. L'extension canonique à $\hat{E}$ 53
3.3. La E-catégorie CART(F, G) 56

Chapitre II. Les champs 64

§ 1. Propriétés diverses 64
1.1. Topologie de la F-descente 64
1.2. Champs sur un site 67
1.3. Champs sur un U-site 69
1.4. E-foncteurs couvrants et bicouvrants 72

§ 2. Champ associé à une catégorie fibrée 76
2.1. Théorème d'existence 76
2.2. Champ scindé associé à une catégorie fibrée 78

§ 3. Images directe et inverse de champs 82
3.1. Image directe 82
3.2. Image inverse de champs 84
3.3. Champs sur un site et sur le topos associé 91
3.4. Le champ des faisceaux sur un site 94
3.5. Les faisceaux $\mathbf{Aut}_S(x)$ des S-automorphismes 104

Chapitre III. Torseurs. Cohomologie de degré 1 106

§ 1. Objets à opérateurs dans un topos 106
1.1. Introduction: Objets à opérateurs dans une catégorie . 106
1.2. Les objets $\mathbf{Hom}_G(P, Q)$ dans un topos 108
1.3. Le produit contracté $P \overset{G}{\wedge} Q$; extension du groupe structural 114
1.4. Torseurs dans un topos 117
1.5. Opposé d'un torseur; bitorseurs 121
1.6. Produit contracté par un torseur 123
1.7. Torseurs sur un site 126

§ 2. Torseurs et objets à faisceaux d'opérateurs dans un champ 129
2.1. Gerbes. Factorisation canonique d'un champ 129
2.2. Morphismes d'une gerbe triviale dans un champ . . . 137
2.3. Objets tordus 140
2.4. L'ensemble pointé $H^1(A)$ associé à un faisceau de groupes 148
2.5. Classification d'objets localement isomorphes à un objet donné 151
2.6. Changement d'origine 153

§ 3. La suite exacte en degré 1 156
3.1. Le premier opérateur cobord 156
3.2. Cas d'un sous-groupe 159
3.3. Cas d'un sous-groupe invariant 161
3.4. Cas d'un sous-groupe abélien ou central 164
3.5. Effaçabilité; cohomologie abélienne 168
3.6. Cohomologie de Čech 170
3.7. Calculs galoisiens 177

Chapitre IV. Liens et Gerbes (Cohomologie de degré 2) 184

§ 1. Liens sur un site 184
1.1. Le champ des liens 184
1.2. Propriétés locales des liens 191
1.3. Quotients de liens 194
1.4. Produits finis de liens 198
1.5. Centralisateur d'un morphisme de liens 199
1.6. Le produit contracté $L^C_\wedge M$ de deux liens 204

§ 2. Gerbes liées 207
2.1. Opérations d'un lien sur un champ 207
2.2. Lien d'une gerbe 212
2.3. La gerbe des morphismes liés 217
2.4. Le produit contracté $P^C_\wedge Q$ de deux gerbes 229
2.5. La gerbe des relèvements d'une section. 236

§ 3. L'ensemble $H^2(L)$ attaché à un lien L 247
3.1. Définition, «fonctorialité» 247
3.2. La gerbe des représentants d'un lien L; description de l'ensemble $H^2(L)'$ des classes neutres 252
3.3. Comparaison entre la cohomologie d'un lien et celle de son centre 256
3.4. Cohomologie abélienne 259
3.5. Cohomologie de Čech 264
3.6. Calculs galoisiens (suite) 271

§ 4. Prolongement de la suite exacte de cohomologie. 273
4.1. Suites exactes de liens 273
4.2. Le second cobord 279
4.3. Compléments sur la suite exacte 285

§ 5. Compléments. 293
5.1. Existence de sections d'un espace homogène 293
5.2. Bitorseurs 295

Chapitre V. Effet d'un morphisme de sites sur la cohomologie . . 302

§ 1. Changement de site 302
1.1. Image inverse de faisceaux de groupes 302
1.2. Image inverse de liens 304
1.3. Image inverse d'un objet tordu 310
1.4. Image inverse de gerbes 313
1.5. Les applications $H^i(E, A) \to H^i(E', f^*(A))$ 316

§ 2. Les faisceaux $R^1 f_* (A)$ 319

§ 3. La suite exacte attachée à un morphisme de sites 321
3.1. Le cas général 321
3.2. Le cas abélien; transgression 330
3.3. Interprétation du second cobord attaché à un revêtement de groupes topologiques 337

§ 4. Calculs formels concernant le groupe de Brauer 339

Chapitre VI. Liens et 3-cohomologie 348

§ 1. Effaçabilité 348

§ 2. L'obstruction $c(L) \in H^3(C)$ attachée à un lien L de centre C 361

Chapitre VII. Exemples tirés de la Géométrie Algébrique 369

§ 1. Relèvement infinitésimal de schémas lisses 369
1.1. Relèvements d'homomorphismes 369
1.2. Relèvements de schémas lisses 373
1.3. Relèvements de torseurs 374

§ 2. Deux théorèmes de M. Artin et A. Grothendieck 377
2.1. Le changement de base lisse 378
2.2. Le changement de base pour un morphisme propre . . 383

Chapitre VIII. Extension d'un topos 392

§ 0. Conventions 392

§ 1. Localisation d'un topos 397

§ 2. Champs de topos 400

§ 3. Morphismes de champs de topos 407

§ 4. Le topos classifiant d'un faisceau de groupes 411

§ 5. Topos classifiant d'une gerbe et effacement d'une classe de cohomologie de degré 2 416
5.1. Construction du topos classifiant $B_{\mathsf{G}}(X)$ d'une gerbe G 417
5.2. La propriété universelle de $B_{\mathsf{G}}(X)$ 419
5.3. Extensions d'un topos 425

§ 6. Interprétation de $H^2(X, L)$ en termes d'extensions du topos X 428
6.1. Liens sur un topos classifiant 429
6.2. La classe $b \in H^2(X, L)$ attachée à une extension B d'un topos X 432

§ 7. Extensions de groupes dans un topos 437
7.1. Une suite exacte pour les extensions de groupes à noyau abélien 437
7.2. Extensions d'un groupe H et extensions du topos B_H . 441
7.3. Extensions d'un groupe H par un lien F sur B_H 445
7.4. Extensions de groupes et cohomologie des groupes discrets. 452

§ 8. Extensions de groupes topologiques 453

Bibliographie 459

Index des notations 461

Index terminologique 465

Introduction

Le thème central de cet ouvrage est la notion de recollement que l'on formalise au chapitre II en termes de *champs sur un site.* Pour cela, il faut disposer d'une notion de localisation: les topologies de Grothendieck; les résultats fondamentaux et les principales constructions les concernant sont rappelés au chapitre 0. En gros, un champ sur un site X est un faisceau de catégories F, à deux différences près: au lieu de se donner, pour toute flèche $f\colon T \to S$ de X un foncteur restriction $F(f)\colon F(S) \to F(T)$, on suppose que F est une catégorie fibrée, ce qui assure seulement l'existence d'un tel foncteur, unique à isomorphisme unique près, l'habituelle condition de transitivité n'étant satisfaite qu'à isomorphisme près; par ailleurs, la condition de recollement pour une famille couvrante $(X_i \to X)$ fait aussi intervenir les produits fibrés triples des X_i/X. Ceci introduit quelques complications au chapitre II où l'on traite l'analogue pour les champs des constructions indispensables en théorie des faisceaux: faisceau associé à un préfaisceau, image directe et inverse par un morphisme de sites, d'autant que l'on s'est astreint à ne pas supposer l'existence de produits fibrés dans le site de base. Pour surmonter ces difficultés, on a rassemblé au chapitre I un certain nombre de constructions sur les catégories fibrées, traitant en quelque sorte les mêmes problèmes dans le cas où il n'y a pas de topologie. Au § 3 du chapitre II, on montre comment se correspondent les champs sur un site et sur le topos associé, faisant voir ainsi que les notions définies en termes de champs ont un caractère intrinsèque et ne dépendent que du topos associé.

Le chapitre III traite sans surprise de la cohomologie de degré 1 en termes de torseurs (espace principal homogène). Au chapitre IV, on aborde la cohomologie de degré 2, définie grace à la notion de *gerbe.* L'exemple type de gerbe s'obtient en considérant un épimorphisme $v\colon G \to H$ de faisceaux de groupes sur un site X et un H-torseur Q. En attachant à tout objet X du site X la catégorie $R(X)$ des relèvements de Q à G, c'est à dire des couples (P, u), où P est un G-torseur sur X et u un isomorphisme entre $Q|X$ et le H-torseur déduit de P par extension du groupe structural, on définit un champ sur E, car les relèvements de Q se localisent et se recollent. Ce champ possède des propriétés

supplémentaires, que l'on traduit en disant qu'il est une gerbe et qui sont les suivantes: (a) il existe une famille (X_i) couvrant l'objet final de X telle que les $R(X_i)$ soient non vides, (b) deux objets quelconques d'un même $R(X)$ sont localement isomorphes. Bien entendu, la catégorie $R(\mathsf{X})$ des sections de R est le plus souvent vide, et la gerbe R exprime l'obstruction à restreindre à G le groupe structural de Q. D'où l'idée d'introduire le «noyau» F de $v\colon G \to H$ et de définir $H^2(\mathsf{X}, F)$ comme classifiant les F-gerbes, ce qui permet, presque par définition, de prolonger la suite exacte de cohomologie. Les théorèmes clefs sont rassemblés au § 3. Ce point de vue présente un défaut, en ce sens que $H^2(\mathsf{X}, F)$ n'est pas toujours fonctoriel en F. Dans la théorie de Dedecker, (limitée aux espaces topologiques paracompacts), on y remédie en introduisant un ensemble de cohomologie beaucoup plus gros, sans éviter pour autant qu'il ne dépende pas seulement de F mais de toute la suite exacte $1 \to F \to G \to H \to 1$, comme on voit déjà dans le cas où F est abélien mais non central. En fait, les applications que nous traitons aux chapitre VII et VIII montrent bien que l'important n'est pas l'ensemble de cohomologie, mais la 2-catégorie des gerbes et qu'il suffit amplement de savoir calculer avec celles-ci, c'est à dire de connaître les constructions expliquées au § 2 du chapitre IV ainsi que la fonctorialité par rapport au site, expliquée au chapitre V en même temps que l'analogue de la suite exacte des termes de bas degré de la suite spectrale de Leray.

Au chapitre VI, on montre que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une gerbe de lien donné L est la nullité d'une certaine classe $c \in H^3(\mathsf{X}, C)$, où C est le centre de L.

Le chapitre VII est consacré à des exemples tirés de la Géométrie Algébrique: relèvement infinitésimal de torseurs sous un groupe lisse au § 1 et les analogues non commutatifs du théorème de changement de base pour un morphisme lisse et par un morphisme propre en cohomologie étale au § 2.

Le chapitre VIII est fondé sur la possibilité de tordre un X-topos B (topos au-dessus de X) par une gerbe G sur X, obtenant ainsi de nouveaux exemples de topos. On en déduit au § 6 une nouvelle interprétation de $H^2(\mathsf{X}, L)$ comme classifiant certains X-topos. Le topos attaché à une gerbe est défini par une propriété universelle formulée à l'aide de celle-ci, qui le fait apparaître comme le topos universel qui efface (annule) la gerbe en question. Au § 7, on profite de ces résultats pour étudier les extensions de groupes dans un topos. Bien qu'il n'y ait rien à ajouter aux résultats d'Eilenberg et Mac-Lane sur les extensions de groupes «abstraits», nous leur consacrons un numéro pour éclairer la théorie générale en la spécialisant à un cas particulier bien connu. Au § 8, on montre comment les considérations précédentes fournissent un procédé

de dévissage pour réduire l'étude des extensions d'un groupe topologique par un groupe de Lie à l'étude de certains groupes de cohomologie: cochaines continues à valeurs dans un espace vectoriel et cohomologie de l'espace classifiant à coefficients discrets.

Je ne puis terminer sans remercier A. Grothendieck à qui je suis redevable de beaucoup d'idées et qui, par ses conseils et ses encouragements amicaux, m'a beaucoup aidé.

Chapitre 0

Sites et topos

Nous donnons ici un bref résumé des premiers exposés de Verdier au séminaire cité [SGA 4]. Dans ce qui suit, U désigne un univers.

§ 1. Topologies, sites

Définition 1.1. Soit E une catégorie. On appelle *crible* de E une partie R de $\mathrm{Ob}(E)$ telle que, pour toute flèche $m: X \to Y$ de E, $Y \in R$ entraine $X \in R$.

1.1.1. Par abus de langage, nous identifierons R à la *sous-catégorie pleine de* E dont l'ensemble d'objets est R. Si $f: E' \to E$ est un foncteur et si R est un crible de E, on posera $R^f = \{X \in \mathrm{Ob}(E'), f(X) \in R\}$; c'est un crible de E' que l'on appellera *image inverse* de R par f.

1.1.2. Une flèche $f: T \to S$ de E induit un foncteur $E_{/f}: E_{/T} \to E_{/S}$ entre les catégories d'objets au dessus de T et S. Si R est un crible de $E_{/S}$, on notera encore R^f son image inverse par $E_{/f}$. Si $\mathbf{S} = (S_i \to S)$, $i \in I$, est une famille de flèches de E, l'ensemble des objets $X \to S$ de $E_{/S}$ tels qu'il existe un $i \in I$ et un S-morphisme $X \to S_i$ est appelé *le crible de* $E_{/S}$ *engendré par* S. Son image inverse par une flèche $f: T \to S$ est le crible engendré par la famille des premières projections $T \times_S S_i \to T$, du moins si les produits fibrés écrits existent.

Définition 1.2. Une *topologie* sur une catégorie E est une application qui, à tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$, associe une partie *non vide* $J(S)$ de l'ensemble des cribles de $E_{/S}$ telle que

(i) pour toute flèche $f: T \to S$ de E et tout $R \in J(S)$ on a $R^f \in J(T)$,

(ii) pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$, tout $R \in J(S)$ et tout crible R' de $E_{/S}$, on a $R' \in J(S)$ dès que, pour tout objet $f: T \to S$ de R, on a $R^f \in J(T)$.

Pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$, les éléments de $J(S)$ sont appelés les *raffinements* de S. On appelle *site* une catégorie munie d'une topologie.

1.2.1. On vérifie aisément que, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$, l'intersection de deux raffinements de S est un raffinement de S et que tout crible de $E_{/S}$ qui contient un raffinement est un raffinement, en particulier le plus grand, à savoir $E_{/S}$. Cette définition coïncide avec celle de [SGA 4], cf. (2.4.1).

Exemple 1.2.2. Soit X un espace topologique. La catégorie $\mathrm{Ouv}(X)$ des ouverts de X est munie d'une topologie: les raffinements d'un ouvert U de X sont les parties R de l'ensemble des ouverts de U telles que $V \in R$ et $W \subset V$ entrainent $W \in R$ et telles que la réunion des $V \in R$ soit égale à U.

1.3. Une topologie J est dite plus fine qu'une autre J' si, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$, $J(S) \supset J'(S)$. Si J_i est une famille de topologies sur une catégorie E, la fonction $J(S) = \bigcap_i J_i(S)$ est une topologie appelée *borne inférieure* des J_i.

On appelle borne supérieure des J_i, ou topologie engendrée par les J_i la borne inférieure de l'ensemble des topologies qui sont plus fines que toutes les J_i.

1.4. Une famille de flèches $(S_i \to S)$ de E est dite *couvrante* pour une topologie J sur E si le crible engendré par $\mathbf{S}$ est un raffinement de S.

Définition 1.5. Soit E une catégorie. On appelle *prétopologie* sur E la donnée, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$, d'un ensemble $\mathrm{Cov}(S)$ dont les éléments sont des familles $\mathbf{S} = (S_i \to S)$, $i \in I$, de flèches de E de telle sorte que

(PT 1) pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$ toute $\mathbf{S} \in \mathrm{Cov}(S)$ et toute flèche $f: T \to S$ de E, les produits fibrés $T_i = T \times_S S_i$ existent (on dit que $\mathbf{S}$ est *quarrable*) et la famille des premières projections $T_i \to T$ appartient à $\mathrm{Cov}(T)$,

(PT 2) si $(s_a: S_a \to S)$, $a \in A$, appartient à $\mathrm{Cov}(S)$ et si, pour tout $a \in A$, $(t_b: T_b \to S_a)$, $b \in B(a)$, appartient à $\mathrm{Cov}(S_a)$ alors la famille $(s_a \cdot t_b: T_b \to S)$, $a \in A, b \in B(a)$, appartient à $\mathrm{Cov}(S)$,

(PT 3) pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$, $\mathrm{id}_S: S \to S$ appartient à $\mathrm{Cov}(S)$.

On appelle *topologie engendrée* par une prétopologie la moins fine de celles pour lesquelles, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$, toute $\mathbf{S} \in \mathrm{Cov}(S)$ est couvrante.

1.5.1. Si J est une topologie définie par une prétopologie Π, toutes les notions et constructions intéressantes se formulent intrinsèquement en termes de J et se traduisent plus intuitivement en termes de Π.

Définition 1.6. Soit U un univers. On appelle U-*site* un site tel que

(i) la catégorie sous-jacente E est une U-catégorie; autrement dit pour tout couple (X, Y) d'objets de E l'ensemble $\mathrm{Hom}(X, Y)$ est isomorphe à un élément de U,

(ii) il existe une famille X_i, $i\in I$, $I\in\mathsf{U}$, $X_i\in\mathrm{Ob}(E)$, telle que, pour tout $X\in\mathrm{Ob}(E)$, la famille de toutes les flèches $X_i\to X$, $i\in I$, soit couvrante (1.2.4).

1.6.1. On dira alors que la famille X_i de (ii) est une U-*famille de générateurs topologiques de* E; on notera que, pour tout $X\in\mathrm{Ob}(E)$, la famille des $X_i\to X$ est indexée par un ensemble isomorphe à un élément de U.

§ 2. Faisceaux, topos

Définition 2.1. Un U-préfaisceau d'ensembles sur une catégorie E est un foncteur $P\colon E^0\to$ U-ens, où U-ens est la catégorie des ensembles appartenant à U. Un U-*faisceau* d'ensembles sur un *site* E est un U préfaisceau d'ensembles F tel que, pour tout $S\in\mathrm{Ob}(E)$ et tout raffinement R de S, l'application naturelle

$$F(S)\to\varprojlim(F|R) \tag{1}$$

soit bijective, où $F|R$ est le préfaisceau sur R défini par $(F|R)(f)=F(T)$, $f\in R$, $f\colon T\to S$, (1.1.1).

Lemme 2.2. Soient E une catégorie et F un U-préfaisceau d'ensembles sur E. Pour tout $S\in\mathrm{Ob}(E)$, désignons par $J(S)$ l'ensemble des cribles R de $E_{/S}$ tels que, pour toute flèche $f\colon T\to S$ de E, l'application

$$F(T)\to\varprojlim(F|R^f)$$

soit bijective (1.1.2). La fonction $S\mapsto J(S)$ est une topologie sur S.

Lemme 2.3. Soient E une catégorie et Π une prétopologie sur E. Pour qu'un U-préfaisceau d'ensembles F sur E soit un faisceau pour la topologie définie par Π il faut et il suffit que, pour tout $S\in\mathrm{Ob}(E)$ et tout $\mathbf{S}\in\mathrm{Cov}(S)$, $\mathbf{S}=(S_i\to S)$, $i\in I$, le diagramme d'ensembles ci-dessous soit exact

$$F(S)\to\prod_{i\in I}F(S_i)\rightrightarrows\prod_{i,\,j\in I^2}F(S_i\times_S S_j).$$

2.3.1 [SGA 4 II 2.4]. Soit E une catégorie. En associant à tout $S\in\mathrm{Ob}(E)$ l'ensemble de tous les cribles de $E_{/S}$ (resp. le crible $E_{/S}$), on définit une topologie appelée topologie *grossière* (resp. *discrète*). Pour la topologie *grossière*, seul le préfaisceau final est un faisceau. Pour la topologie *discrète*, tout préfaisceau est un faisceau. Enfin on appelle *topologie canonique* la plus fine de celles pour lesquelles tout V-préfaisceau représentable est un faisceau, où V est un univers tel que E soit une V-catégorie.

2.3.2. Si E est le site des ouverts d'un espace topologique X, la notion de faisceau sur X au sens de [15] coïncide évidemment avec celle de faisceau sur E.

2.4. Soit E une U-*catégorie*. On désignera par $\hat{E}_U$ (ou simplement par $\hat{E}$) la catégorie $\mathbf{Hom}(E^0, \text{U-ens})$ des U-préfaisceaux d'ensembles sur E et par

$$\eta\colon\ E \to \hat{E}, \qquad \eta(S)(T) = \mathrm{Hom}(T, S), \tag{1}$$

le foncteur pleinement fidèle habituel [plus correctement, $\eta(S)(T)$ est un élément de U isomorphe à $\mathrm{Hom}(T, S)$, choisi grâce au symbole τ [SGA 4 I 1.3]].

Remarque 2.4.1. Soit E une U-catégorie. Les notions de site et faisceau introduites ici coïncident avec celles de [SGA 4 II 2]. En effet, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$, on définit une bijection entre l'ensemble des cribles de $E_{/S}$ et l'ensemble des sous-préfaisceaux de $\eta(S)$ en associant à tout crible R le préfaisceau $R'(T) = \{f \in \mathrm{Hom}(T, S),\ f \in R\}$, $T \in \mathrm{Ob}(E)$, et, par ailleurs, pour tout préfaisceau F, l'application (2.1 (1)) s'identifie à l'application de restriction

$$\mathrm{Hom}(\eta(S), F) \to \mathrm{Hom}(R', F). \tag{1}$$

Théorème 2.5. Soit E un U-site. Soit $\tilde{E}_U$ la sous-catégorie pleine de $\hat{E}_U$ dont les objets sont les faisceaux. Le foncteur d'inclusion $i\colon \tilde{E} \to \hat{E}$ admet un adjoint à gauche $a\colon \hat{E} \to \tilde{E}$ qui commute aux limites projectives finies:

$$\tilde{E} \underset{a}{\overset{i}{\rightleftarrows}} \hat{E}. \tag{1}$$

2.5.1. On choisira toujours a de telle sorte que

$$a\,i = \mathrm{id}_{\tilde{E}}, \tag{2}$$

ce qui est possible, car i est pleinement fidèle. On posera

$$\varepsilon = a\,\eta, \qquad \varepsilon\colon\ E \to \tilde{E}. \tag{3}$$

2.5.2. Si la *topologie canonique* de E est plus fine que celle du site, on a

$$i\,\varepsilon = \eta, \tag{4}$$

et le foncteur $\varepsilon\colon E \to \tilde{E}$ est *pleinement fidèle.* Si, de plus, les produits fibrés finis existent dans E, on dira que E est un *site standard.*

Exemple 2.5.3. Soit X un préschéma élément de U. On note $E\,t_{/X}$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des X-préschémas appartenant à U dont les objets sont les $X' \to X$ qui sont étales. On la munit de la pré-

topologie dont les familles couvrantes sont les $(X'_i \to X')$, $i \in I$, qui sont *surjectives*. Munie de la topologie engendrée, $Et_{/X}$ devient un U-site standard appelé *site étale de* X. On en trouvera une étude extensive dans [SGA 4]. On définit également d'autres topologies sur la catégorie des schémas [SGA 3 IV] dont la plus fine est la topologie «fpqc», (descente par morphismes fidèlement plats et quasicompacts).

Théorème 2.6. Soit T une catégorie. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) il existe un site standard E appartenant à U tel que T soit équivalente à $\tilde{E}_U$;

(ii) il existe un U-site E tel que T soit équivalente à $\tilde{E}_U$;

(iii) munie de sa topologie canonique, T devient un U-site tel que tout U-faisceau soit représentable;

(iv) munie de sa topologie canonique, T devient un U-site (1.6) et de plus

(a) les limites projectives finies existent dans T,

(b) les sommes directes indexées par un élément de U existent dans T et sont disjointes et universelles (cf. 2.6.2),

(c) les relations d'équivalences sont effectives universelles (cf. 2.6.2).

2.6.1 [SGA 4 II 4.14]. Une catégorie satisfaisant les conditions du théorème sera appelée un U-*topos*.

2.6.2. Précisons qu'une limite inductive $\{X(i) \to X\}$ d'un foncteur $i \rightsquigarrow X(i)$ est dite *universelle* si, pour toute flèche $X' \to X$ de T les projections $\{X(i) \times_X X' \to X'\}$ font de X' une limite inductive de $i \rightsquigarrow X(i) \times_X X'$. Par ailleurs une somme directe $x_i : X_i \to X$, $i \in I$, est dite *disjointe* si les x_i sont des monomorphismes et si les produits fibrés $X_i \times_X X_j$, $i \neq j$, existent et sont des objets initiaux de T. On notera que la condition (iv)(b) entraine que T admet *un objet initial* $\emptyset$ et que celui-ci est *strict*: tout morphisme de but $\emptyset$ est un isomorphisme. Enfin, un épimorphisme $f : X \to Y$ est dit *effectif* si f est le conoyau des projections $X \times_Y X \rightrightarrows X$; *un épimorphisme effectif universel* est un morphisme $f : X \to Y$ tel que pour toute flèche $Y' \to Y$, la première projection de $Y' \times_Y X$ soit un épimorphisme effectif; une relation d'équivalence $R \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} X$ est dite *effective universelle* si le couple (u, v) admet un conoyau $f : X \to Y$, si celui-ci est un épimorphisme effectif universel et si $R \to X \times_Y X$ est un isomorphisme.

Corollaire 2.7. Soit T un U-topos.

(i) Les limites projectives indexées par une catégorie appartenant à U existent dans T.

(ii) Les limites inductives indexées par une catégorie appartenant à U existent dans T et sont universelles.

(iii) Les limites inductives filtrantes (indexées par un ensemble ordonné filtrant) sont distributives par rapport aux limites projectives finies.

(iv) Tout épimorphisme est effectif universel. Toute relation d'équivalence est effective universelle.

(v) Pour toute flèche $f: X \to Y$ de T il existe des flèches $X \xrightarrow{e} I \xrightarrow{i} Y$ de T, avec $f = i\,e$, où e est un épimorphisme et i un monomorphisme.

(vi) Un morphisme qui est un épimorphisme et un monomorphime est un isomorphisme.

(vii) Pour tout $X \in \mathrm{Ob}(T)$, l'ensemble des classes à isomorphisme près de monomorphismes de but X (resp. épimorphismes de source X) est isomorphe à un élément de U.

2.8. Autrement dit, du point de vue des limites inductives et projectives, un U-topos se comporte comme la catégorie des ensembles. On prouve d'ailleurs ce corollaire par réduction au cas où $T = \tilde{E}$ (2.6 (i)), puis $T = \hat{E}$ (2.5), puis enfin $T =$ U-ens, par construction des limites dans $\hat{E}$.

Exemple 2.9. Soient T un U-topos et G un Groupe de T. La catégorie des G-objets à gauche de T est un U-topos (III 1.2.8).

Théorème 2.10. Soit E une U-catégorie. On a une bijection entre l'ensemble des topologies qui font de E un U-site (1.6) et l'ensemble des sous-catégories strictement pleines F de $\hat{E}_U$ qui sont des U-topos et pour lesquelles le foncteur d'inclusion $i: F \to E$ admet un adjoint à gauche qui commute aux limites projectives finies.

2.10.1 [SGA II 3.9]. La bijection est évidemment obtenue en associant à toute topologie J sur E la catégorie des U-faisceaux d'ensembles sur E pour J. *Nota*: une sous-catégorie C' de C est dite *strictement pleine* si elle est pleine et si tout $X \in \mathrm{Ob}(C)$ isomorphe à un objet X' de C' appartient à $\mathrm{Ob}(C')$.

Corollaire 2.11. Soit T un U-topos. Il existe une bijection entre l'ensemble des topologies sur T qui sont *plus* fines que la topologie canonique et l'ensemble des sous-catégories strictement pleines F de T telles que l'inclusion $i_*: F \to T$ admette un adjoint à gauche $i^*: T \to F$ qui commute aux limites projectives finies. De telles sous-catégories sont des U-topos et l'on a un morphisme de topos (3.4.2) $i: F \to T$.

2.11.1. Le corollaire résulte immédiatement du théorème. On dira d'un tel F que c'est *un sous-topos* de T, pour un exemple, voir (3.9.3).

§ 3. Morphismes de sites, de topos

Définition 3.1. Soient X et Y deux U-sites. Un foncteur $f^{-1}\colon \mathsf{Y}\to\mathsf{X}$ entre les catégories sous-jacentes est dit *continu* si, pour tout U-faisceau F sur X le préfaisceau

$$f_*(F)(Y)=F\big(f^{-1}(Y)\big),\qquad Y\in\mathrm{Ob}(\mathsf{Y}),\tag{1}$$

est un faisceau.

3.1.1. On démontre alors que, pour tout univers V et tout V-faisceau F sur X, le préfaisceau $f_*(F)$ est un faisceau.

Définition 3.1.2. Soient $u\colon \mathsf{X}\to\mathsf{Y}$ un foncteur et J une topologie sur Y. On appelle topologie induite sur X la plus fine pour laquelle u soit continu.

3.1.3. Si les limites projectives finies existent dans X et si u les respecte, une famille $(X_i\to X)$ de flèches de X est couvrante pour la topologie induite si, et seulement si, la famille $\big(u(X_i)\to u(X)\big)$ est couvrante pour J.

3.1.4. Soient E un site et $P\in\mathrm{Ob}(\hat{E})$. Par *topologie induite* sur $E_{/P}=\hat{E}_{/P}\times_{\hat{E}}E$ on entendra toujours celle qu'induit le foncteur $E_{/P}\to E$. Pour tout $\mathsf{S}=\big(S, s\colon \eta(S)\to P\big)$, $\mathsf{S}\in\mathrm{Ob}\,(E_{/P})$, l'isomorphisme naturel $(E_{/P})_{/\mathsf{S}}\simeq E_{/S}$ induit une *bijection* entre l'ensemble des raffinements de S pour la topologie induite sur $E_{/P}$ et l'ensemble des raffinements de S pour la topologie de E [SGA 4 III 6.2].

Proposition 3.2. Sous les hypothèses de (3.1), le foncteur

$$f_*\colon\ \tilde{\mathsf{X}}_{\mathsf{U}}\to\tilde{\mathsf{Y}}_{\mathsf{U}},\qquad f_*(F)=F\cdot f^{-1},\tag{1}$$

admet un adjoint à gauche

$$f^*\colon\ \tilde{\mathsf{Y}}_{\mathsf{U}}\to\tilde{\mathsf{X}}_{\mathsf{U}}.\tag{2}$$

[SGA 4 III 2.3]. L'existence du foncteur faisceau associé (sur X) permet de supposer que les topologies sont discrètes, auquel cas le résultat est classique: théorème de Kan.

Définition 3.3. Soient X et Y deux U-sites. Un morphisme de sites de source X et de but Y

$$f\colon\ \mathsf{X}\to\mathsf{Y}\tag{1}$$

est un foncteur continu entre les catégories sous-jacentes

$$f^{-1}\colon\ \mathsf{Y}\to\mathsf{X}\tag{2}$$

tel que le foncteur adjoint à gauche (appelé foncteur *image inverse*)

$$f^*\colon \tilde{\mathsf{Y}}_{\mathsf{U}} \to \tilde{\mathsf{X}}_{\mathsf{U}} \tag{3}$$

du foncteur *image directe*

$$f_*\colon \tilde{\mathsf{X}}_{\mathsf{U}} \to \tilde{\mathsf{Y}}_{\mathsf{U}}, \quad f_*(F)(Y) = F\big(f^{-1}(Y)\big), \tag{4}$$

commute aux limites projectives finies.

3.3.1. On montre que, pour tout univers V tel que X et Y soient des V-sites, le foncteur f^{-1} définit encore un morphisme de sites.

3.3.2. On choisira toujours f^* de telle sorte que le diagramme ci-dessous soit *commutatif* (et non pas seulement commutatif à isomorphisme près)

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{X} & \xrightarrow{\varepsilon} & \tilde{\mathsf{X}}_{\mathsf{U}} \\ {\scriptstyle f^{-1}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle f^*} \\ \mathsf{Y} & \xrightarrow[\varepsilon']{} & \tilde{\mathsf{Y}}_{\mathsf{U}} \end{array} \tag{5}$$

où ε et ε' sont les foncteurs de (2.5 (3)). Si X et Y sont des sites standards, les foncteurs ε et ε' sont pleinement fidèles et l'on s'autorisera souvent à écrire $f^*(Y)$ au lieu de $f^{-1}(Y)$, $Y \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Y})$.

Exemple 3.3.3. Une application continue $f\colon X \to Y$ induit évidemment un morphisme $\mathsf{f}\colon \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ du site des ouverts de X (1.2.2) dans celui des ouverts de Y.

3.3.4. Si $\mathsf{X} \xrightarrow{f} \mathsf{Y} \xrightarrow{g} \mathsf{Z}$ sont des morphismes de sites dont les foncteurs sous-jacents sont f^{-1} et g^{-1} le composé $f^{-1} \cdot g^{-1}$ définit un morphisme de sites que l'on notera $gf\colon X \to Z$ et que l'on appellera *composé de f et g*.

Proposition 3.4. Soient X et Y deux U-sites *standards* et soit $f^*\colon \mathsf{Y} \to \mathsf{X}$ un foncteur. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) f^* est sous-jacent à un morphisme de sites $f\colon \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$;

(ii) f^* commute aux limites projectives finies et transforme familles couvrantes en familles couvrantes.

Si, de plus, X et Y sont des U-*topos*, ces conditions équivalent à

(iii) f^* commute aux limites projectives finies et aux limites inductives quelconques;

(iv) f^* commute aux limites projectives finies et admet un adjoint à droite $f_*\colon \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$.

3.4.1. L'équivalence de (i) et (ii) résulte immédiatement de (3.3.2 (7)) et l'autre partie de la proposition résulte de (2.5 (iii)).

3.4.2. Sous les conditions de (3.4 (iv)), on dira que le couple

$$\mathsf{X} \underset{f_*}{\overset{f^*}{\rightleftarrows}} \mathsf{Y}$$

est un *morphisme de topos* de source X et de but Y. Pour exprimer qu'un foncteur $f^*\colon \mathsf{Y} \to \mathsf{X}$, où X et Y sont deux U-topos, vérifie (3.4 (iii)), on dira parfois qu'il «est» un morphisme de topos, ce qui est tolérable car f^* détermine f_* à isomorphisme unique près; *on prendra garde cependant que f^* et le morphisme de topos vont en sens inverse.*

Définition 3.5. Soit E un U-site. On appelle *topologie induite* sur $\hat{E}_{\mathsf{U}}$ la plus fine de celles pour lesquelles le foncteur faisceau associé $a\colon \hat{E}_{\mathsf{U}} \to \tilde{E}_{\mathsf{U}}$ est continu. On dit qu'une flèche $m\colon P \to Q$ de $\hat{E}$ est *couvrante* (resp. *bicouvrante*) si $a(m)$ est un épimorphisme (resp. isomorphisme).

3.5.1. Cette terminologie est en accord avec celle de [SGA 4 II 3.5]. Puisque a commute aux limites projectives finies, l'ensemble des morphismes couvrants (resp. bicouvrants) est stable par changement de base.

Proposition 3.5.2. Soit E un U-site.

(i) Pour qu'un monomorphisme m de $\hat{E}_{\mathsf{U}}$ soit couvrant il faut et il suffit qu'il soit bicouvrant.

(ii) Soit $m\colon P \to Q$ une flèche de $\hat{E}_{\mathsf{U}}$ soit $i\colon P' \to P$ l'image de m et soit $d\colon P \to P \times_Q P$ le morphisme diagonal. Pour que m soit bicouvrant il faut et il suffit que les monomorphismes i et d soient couvrants.

(iii) Soient $S \in \mathrm{Ob}(E)$, R un crible de $E_{/S}$ et R' le sous-objet de $\eta(S)$ qui lui correspond par (2.4.1). Pour que R soit un raffinement de S, il faut et il suffit que l'inclusion $R' \subset \eta(S)$ soit couvrante (donc bicouvrante).

3.5.2.1. (i) et (ii) sont triviales, (iii) résulte de (2.2). En particulier, un morphisme de $\hat{E}_{\mathsf{U}}$ *est couvrant si, et seulement si, il l'est pour la topologie induite.* Plus généralement on a ce qui suit.

Proposition 3.5.3. Soient E un U-site et $\mathsf{P} = (p_i\colon P_i \to P)$, $i \in I$, une famille de flèches de $\hat{E}_{\mathsf{U}}$. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) P est couvrante pour la topologie induite;

(ii) l'image de P par a est épimorphique (donc couvrante pour la topologie canonique de $\tilde{E}_{\mathsf{U}}$);

(iii) le morphisme $P' \to P$ est bicouvrant, où P' désigne la réunion des images des p_i.

Résulte immédiatement du fait que a commute aux limites inductives et aux limites projectives finies.

Proposition 3.6. Soient E un U-site et V un univers auquel appartiennent U et E.

(i) les foncteurs

$$\hat{E} \xrightarrow{a} \tilde{E}, \quad \tilde{E} \xrightarrow{i} \hat{E}, \quad E \xrightarrow{\eta} \hat{E}, \quad E \xrightarrow{\varepsilon} \tilde{E}, \tag{1}$$

de (2.4(1)) et (2.5(1)(3)) [relatifs à U] définissent des morphismes de V-sites

$$\hat{E} \leftarrow \tilde{E}, \quad \tilde{E} \leftarrow \hat{E}, \quad E \leftarrow \hat{E}, \quad E \leftarrow \tilde{E}, \tag{2}$$

si l'on munit E (resp. $\hat{E}$) (resp. $\tilde{E}$) de la topologie donnée (resp. induite) (resp. canonique).

(ii) Les foncteurs image directe définis par les morphismes de sites (2) [qui, par définition, sont induits par la composition avec les foncteurs de (1)] sont des équivalences de catégories et induisent des *équivalences* entre les catégories de U-faisceaux d'ensembles.

3.6.1. En général, $\hat{E}_U$ n'est pas une U-catégorie, ce qui nous a conduit à introduire V pour avoir un énoncé correct. Prouvons d'abord que tout U-*faisceau F sur $\hat{E}$ pour la topologie induite est représentable par un* $X \in \mathrm{Ob}(\tilde{E}) \subset \mathrm{Ob}(\hat{E})$. D'après (3.5.3), le composé $F \cdot i$ est un U-faisceau sur $\tilde{E}$ pour la topologie canonique. D'après (2.6) il est donc représentable par un $X \in \mathrm{Ob}(\tilde{E})$. Pour tout $P \in \mathrm{Ob}(\hat{E})$, on a des morphismes

$$F(P) \xleftarrow{m} F(i\,a(P)) \xrightarrow{m'} \mathrm{Hom}_{\tilde{E}}(a(P), X) \xrightarrow{m''} \mathrm{Hom}_{\hat{E}}(P, i(X)), \tag{3}$$

où m' est la valeur en $a(P)$ de l'isomorphisme qui exprime que X représente $F \cdot i$, où m'' est la valeur en (P, X) de l'isomorphisme qui exprime que a est adjoint à gauche de i et où $m = F(p)$, $p\colon P \to i\,a(P)$ étant le morphisme d'adjonction. Il est immédiat que m, m' et m'' sont fonctoriels en P; de plus, par la formule d'adjonction, $p\colon P \to i\,a(P)$ est bicouvrant, d'où l'on déduit par (3.5.2(ii)) que $F(p)$ est un isomorphisme. Donc m est un isomorphisme, ce qui prouve que $i(X)$ *représente* F.

3.6.2. Il résulte de ceci que les catégories de faisceaux $\tilde{\tilde{E}}$ et $\tilde{\tilde{E}}$ associées aux sites de (2) sont équivalentes à $\tilde{E}$. Enfin, par ces équivalences, la composition avec les foncteurs de (1) induit quatre foncteurs de $\tilde{E}$ dans elle-même. Ils sont tous isomorphes à l'identité, comme on voit en

utilisant la formule d'adjonction. Nous avons ainsi prouvé que la composition avec les foncteurs de (1) induit des équivalences entre les catégories de U-faisceaux. Par la proposition ci-dessous, il en est de même pour les catégories de V-faisceaux, ce qui prouve (ii), d'où (i) résulte trivialement.

Proposition 3.7 *(lemme de comparaison).* Soient E un U-site, $u: E' \to E$ un foncteur pleinement fidèle. Supposons que, pour tout $X \in \mathrm{Ob}(E)$, il existe une famille $(x_i: u(X_i) \to X)$, $i \in I$, $I \in \mathsf{U}$, $x_i \in \mathrm{Fl}(E)$, $X_i \in \mathrm{Ob}(E')$, qui soit couvrante pour la topologie de E. Alors le foncteur

$$u_*: \tilde{E}_{\mathsf{U}} \to \tilde{E}_{\mathsf{U}'}, \qquad u_*(F) = F \cdot u,$$

est une équivalence de catégories, où $\tilde{E}'_{\mathsf{U}}$ désigne la catégorie des U-faisceaux sur E' pour la topologie induite (la plus fine pour laquelle u soit continu).

On applique d'abord [SGA 4 III 4.4] en y remplaçant U par un univers V auquel appartiennent E, E' et U, puis l'on note qu'un V-faisceau F sur E tel que $F \cdot u$ soit isomorphe à un U-faisceau est un U-faisceau.

Proposition 3.8. Soit $f: X \to Y$ un morphisme de U-topos. Soit J la topologie la plus fine (sur Y) telle que f^* soit continu et soit $i: f(X) \to Y$ le sous-topos de Y (2.11) qu'elle définit. On a un morphisme de topos $p: X \to f(X)$ caractérisé par

$$p^* = f^* i_* \qquad f_* = i_* p_* \tag{1}$$

et vérifiant $f = i\,p$. De plus, p^* est *conservatif* et *fidèle*. De plus, soit $m: y \to y'$ une flèche de Y. Pour que $f^*(m)$ soit un isomorphisme (resp. monomorphisme) (resp. épimorphisme) il faut et il suffit qu'il en soit ainsi de $i^*(m)$.

3.8.1. Rappelons qu'un foncteur $u: A \to B$ est dit *conservatif* si toute flèche de A dont l'image par u est inversible est inversible.

3.8.2. Par définition, $f(X)$ est la sous-catégorie pleine de Y dont les objets sont les $y \in \mathrm{Ob}(Y)$ tels que le préfaisceau représenté par y soit un faisceau pour J. Par définition de i, le foncteur image directe $i_*: f(X) \to Y$ est l'inclusion; il est donc *pleinement fidèle*. Par définition de J, on a donc $f_*(x) \in \mathrm{Ob}(f(X))$ pour tout $x \in \mathrm{Ob}(X)$, ce qui permet de caractériser p_* par (1). Définissant p^* par (1), il est immédiat que c'est un adjoint à gauche de p_* car l'inclusion $i_*: f(X) \to Y$ est pleinement

fidèle. D'où la première assertion. On a donc un isomorphisme canonique $f^* \xrightarrow{\sim} p^* i^*$, d'où l'on déduit, en utilisant (2.11), que la seconde assertion résulte du corollaire que voici.

Corollaire 3.9. Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme de U-topos.

(i) Pour que le foncteur image inverse $f^*\colon Y \to X$ soit conservatif (3.8.1) il faut et il suffit que la topologie canonique de Y soit la plus fine pour laquelle f^* soit continu.

(ii) Si f^* est conservatif il est fidèle (et réciproquement). De plus, une flèche $m\colon y \to y'$ de Y est alors un monomorphisme (resp. épimorphisme) dès qu'il en est ainsi de son image par f^*. Enfin, pour tout $y \in \mathrm{Ob}(Y)$, le morphisme d'adjonction $p\colon y \to f_* f^*(y)$ est un monomorphisme.

3.9.1. Soit $\mathbf{S} = (s_i\colon S_i \to S)$, $i \in I$, une famille de flèches de Y et soit $s'\colon S' \to S$ la réunion des images des s_i. La famille des $\{s'_i\colon S_i \to S'\}$ est couvrante pour la topologie canonique de Y donc pour la topologie induite par f; par suite, pour que $\mathbf{S}$ soit couvrante pour la topologie induite par f il faut et il suffit que $s'\colon S' \to S$ soit couvrant. Puisque s' est un monomorphisme, ceci signifie que $f^*(s')$ est un isomorphisme. La condition de (i) est donc nécessaire. Elle est suffisante. En effet, soit $m\colon y \to y'$ une flèche de Y, soit $i\colon y'' \to y'$ l'image de m et soit $d\colon y \to y \times_{y'} y$ le morphisme diagonal. Si $f^*(m)$ est un isomorphisme il en est de même de $f^*(i)$ et $f^*(d)$, donc i et d sont couvrants pour la topologie induite donc des épimorphismes, donc des isomorphismes car ce sont des monomorphismes. Donc m est un isomorphisme.

3.9.2. Les premières assertions de (ii) sont laissées au lecteur (utiliser (2.7)). Pour prouver la dernière, il suffit alors de montrer que $f^*(p)\colon f^*(y) \to f^* f_* f^*(y)$ est un monomorphisme, ce qui résulte du fait que son composé avec le morphisme d'adjonction $f^* f_* f^*(y) \to f^*(y)$ est l'identité de $f^*(y)$.

Exemple 3.9.3. Soient X et Y des espaces topologiques et $f\colon X \to Y$ une application continue. Soit $f'\colon X' \to Y'$ le morphisme induit par f entre les topos de faisceaux d'ensembles sur X et Y. L'image du morphisme de topos f' est le topos $f(X)'$ des faisceaux d'ensembles sur l'image $f(X)$ de f munie de la topologie induite par celle de Y. En effet, d'une part, f'^* est conservatif lorsque f est surjective et, d'autre part, f'_* est pleinement fidèle lorsque f est injective et que X est muni de la topologie induite par celle de Y (regarder les fibres). *Dans ce dernier cas, X' est donc un sous-topos de Y'* (2.11); si X' est *fermé* dans Y, on sait X' s'identifie à la sous-catégorie pleine de Y' dont les objets sont les

faisceaux sur Y dont la restriction à l'ouvert $U = Y - X$ est le faisceau final. On a un résultat analogue pour la topologie étale d'un schéma [SGA 4 VIII 6.3]. Plus généralement, on a ce qui suit.

Corollaire 3.10. Soient $f: X \to Y$ un morphisme de topos et U l'objet initial de $f(X)$. L'image directe par f de l'objet initial de X est isomorphe à U; c'est un sous-objet de l'objet final de Y (on dit que c'est un *ouvert* de Y). Soit $Y' \in \mathrm{Ob}(Y)$. Pour que $f^*(Y')$ soit l'objet initial de X il faut et il suffit qu'il existe un morphisme $Y' \to U$. Si $Y' \in \mathrm{Ob}(f(X))$, la seconde projection $Y' \times U \to U$ est un isomorphisme.

La démonstration est laissée au lecteur. La dernière assertion signifie que $f(X)$ est un sous-topos du «*topos résiduel* de U» introduit par Verdier.

Proposition 3.11. Soient X un U-topos, U un ouvert de X (sous-objet de l'objet final de X) et F la sous-catégorie pleine de X dont les objets sont les $X' \in \mathrm{Ob}(X)$ tels que la seconde projection $X' \times U \to U$ soit un isomorphisme. F est un sous-topos de X (2.11.1).

3.11.1 [SGA 4 IV 3.3]. On dira que F est le *topos résiduel* de U. La terminologie est justifiée par le fait que l'on reconstruit comme suit X à partir de F et du topos $X_{/U}$.

3.11.2. Soit $f: A \to B$ un foncteur. On notera (A, B, f) la catégorie dont les objets sont les $(a, b, m: b \to f(a))$, $a \in \mathrm{Ob}(A)$, $b \in \mathrm{Ob}(B)$, $m \in \mathrm{Fl}(B)$, les morphismes étant définis naturellement. Sous les hypothèses de (3.11), notons $i^*: X \to F$ l'adjoint à gauche de l'inclusion $i^*: F \to X$ et $j_*: X_{/U} \to X$ l'adjoint à droite du foncteur changement de base $j^*: X \to X_{/U}$, $j^*(X') = X' \times U$, $X' \in \mathrm{Ob}(X)$. Pour tout $X' \in \mathrm{Ob}(X)$, on a un morphisme $X' \to j_* j^*(X')$, d'où un morphisme $t(X'): i^*(X') \to i^* j_* j^*(X')$, d'où un foncteur

$$\begin{aligned} &f: X \to (U, F, i^* j_*: U \to F) \\ &f(X') = (j^*(X'), i^*(X'), t(X')). \end{aligned} \tag{1}$$

Proposition 3.12. Sous les hypothèses de (3.11), le foncteur (1) est une équivalence de catégories.

[SGA 4 IV 3.4]. Reprenant l'exemple (3.9.3), on en déduit une description de la catégorie des faisceaux sur un espace topologique (resp. le site étale d'un préschéma) en termes de faisceaux sur un ouvert et sur le fermé complémentaire.

Définition 3.13. On appelle *point* d'un U-topos T un morphisme de topos x: U-ens $\to$ T. On appelle *foncteur fibre* d'un U-topos T le foncteur image inverse sous-jacent à *un point* de T. On dit qu'un U-topos admet suffisamment de foncteurs fibres si ceux-ci forment une famille conservative de foncteurs.

3.13.1. On connait des exemples de topos admettant suffisamment de foncteurs fibres: le topos des U-faisceaux d'ensembles sur un espace topologique X (fibres aux points de X), ou le topos étale d'un préschéma X (fibres aux points géométriques de X [SGA 4 VIII 3.3]), ou encore le topos des U-préfaisceaux d'ensembles sur une catégorie E appartenant à U (prendre les foncteurs $S \rightsquigarrow F(S)$, $S \in \mathrm{Ob}(E)$). Par ailleurs, si T est un U-topos, G un groupe de T et G le U-topos des G-objets de T (2.9), le foncteur oubli des opérations de G, G $\to$ T est conservatif: comme de plus, c'est un morphisme de topos, G admet suffisamment de foncteurs fibres s'il en est ainsi de T. En utilisant la théorie de la mesure, Deligne a construit un U-topos qui n'admet pas de fibre.

Chapitre I

Catégories fibrées et scindées

§ 1. Rappels et notations

Nous renvoyons à [D 1] et à [SGA 1 VI] pour l'étude des notions de catégorie fibrée et scindée. Rappelons cependant les définitions.

1.0.1. Soit $\varphi: F \to E$ un foncteur. Pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$, on appelle *catégorie fibre* de F en S et on note

$$F_S \tag{1}$$

la sous-catégorie de F dont les flèches, appelées S-morphismes, sont les $m \in \mathrm{Fl}(E)$ vérifiant $\varphi(m) = \mathrm{id}_S$. On note

$$\mathrm{Hom}_S(x, y), \quad x, y \in \mathrm{Ob}(F_S), \tag{2}$$

l'ensemble des S-morphismes $x \to y$. Soient $m: x \to y$ une flèche de F et $f: T \to S$ sa projection (image par φ). On dira que m est E-cartésienne, ou que m est une *image inverse* de y par f, ou, abusivement, que x est une image inverse de y par f, si, pour tout $z \in \mathrm{Ob}(F_T)$, l'application

$$\mathrm{Hom}_T(z, x) \to \mathrm{Hom}_f(z, y), \quad n \to mn, \tag{3}$$

est bijective, où $\mathrm{Hom}_f(z, y) = \{n \in \mathrm{Hom}(z, y), \varphi(n) = f\}$.

Définition 1.0.2. Une *E-catégorie fibrée* est un foncteur $\varphi: F \to E$ tel que, pour toute flèche $f: T \to S$ de E et tout $y \in \mathrm{Ob}(F_S)$, il existe une image inverse de y par f et tel que le composé de deux morphismes E-cartésiens de F soit E-cartésien (existence et transitivité des images inverses).

Définition 1.0.3. Une E-catégorie scindée est une E-catégorie fibrée F munie d'une application (appelée *scindage* de F) qui à toute flèche $f: T \to S$ de E et à tout $y \in \mathrm{Ob}(F_S)$ associe une image inverse $x_f: x^f \to x$ de telle sorte que, pour tout couple $U \xrightarrow{g} T \xrightarrow{f} S$ de flèche de E et tout

$y \in \mathrm{Ob}(F_S)$ on ait

$$x_f \cdot (x^f)_g = x_{fg} \quad (\text{donc } (x^f)^g = x^{fg}). \tag{1}$$

D'après [D 5 (a)], la donnée d'une E-catégorie scindée F est essentiellement équivalente à celle d'un foncteur

$$E^0 \to (\mathrm{Cat}), \quad S \rightsquigarrow F_S. \tag{2}$$

1.1. Les catégories de morphismes

1.1.1. Soit un diagramme de catégories

$$\begin{array}{ccc} & G & F \\ & {\scriptstyle g}\downarrow & \downarrow{\scriptstyle f} \\ B & \xleftarrow[a]{} & A. \end{array}$$

On désigne par

$$\mathsf{Hom}_a(F, G) \tag{1}$$

la sous-catégorie de $\mathsf{Hom}(F, G)$ dont les objets sont les $u: F \to G$ tels que $g u = a f$, (on les appelle des a-foncteurs), les morphismes étant les m: $u \to u'$ tels que $g * m$ soit le morphisme identique du foncteur $a f$, (on les appelle des a-morphismes, sous-entendu: «de a-foncteurs»).

On désigne par

$$\mathsf{Cart}_a(F, G) \tag{2}$$

la sous-catégorie pleine de la précédente dont les objets sont les a-foncteurs *cartésiens*, c'est à dire, par définition, ceux qui transforment tout morphisme A-cartésien de F en un morphisme B-cartésien de G. La catégorie (2), ne sera guère utilisée que si f et g sont *fibrants*.

1.1.2. Supposons de plus que f et g soient munis d'un *scindage*, [D 1.5], ce qui entraine qu'ils sont *fibrants*. On notera encore $\mathsf{Cart}_a(F, G)$ la catégorie de (2) relative aux foncteurs fibrants sous-jacents. De plus, on désignera par

$$\mathsf{Scin}_a(F, G) \tag{1}$$

la sous-catégorie pleine de $\mathsf{Hom}_a(F, G)$ dont les objets sont les *a-morphismes de catégories scindées*, i.e. ceux qui transforment tout morphisme de transport [D 1.5 et 1.6], en un morphisme de transport. Un tel foncteur est a-cartésien, d'où les inclusions de sous-catégories pleines

$$\mathsf{Scin}_a(F, G) \subset \mathsf{Cart}_a(F, G) \subset \mathsf{Hom}_a(F, G). \tag{2}$$

1.1.3. Si $A=B$ et $a=\mathrm{id}_A$, on notera plutôt

$$\mathsf{Scin}_A(F,G), \quad \mathsf{Cart}_A(F,G) \quad \text{et} \quad \mathsf{Hom}_A(F,G)$$

les catégories précédentes. De plus, les ensembles d'objets de toutes ces catégories seront désignées par les symboles analogues: $\mathrm{Cart}_a(F,G)$, $\mathrm{Cart}_A(F,G)$ etc.

Lemme 1.1.4. Soit un diagramme de catégories

$$\begin{array}{ccc} G & & F \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ B & \xleftarrow[a]{} & A \end{array}$$

(i) En considérant F comme une B-catégorie grâce à $af\colon F \to B$, on a

$$\mathsf{Hom}_a(F,G)=\mathsf{Hom}_b(F,G) \tag{1}$$

(ii) Si l'une des conditions suivantes est vérifiée
(a) tout morphisme de G est B-cartésien
(b) pour tout morphisme de F, B-cartésien équivaut à A-cartésien
(c) a est scindé à fibres des catégories discrètes (i.e. *discret* au sens de [D 6.1]) alors on a égalité

$$\mathsf{Cart}_a(F,G)=\mathsf{Cart}_B(F,G). \tag{2}$$

(iii) Si (c) est vérifiée et si f est muni d'un scindage les morphismes de transport de celui-ci sont les morphismes de transport d'un scindage de af et, pour tout scindage de g, on a

$$\mathsf{Scin}_a(F,G)=\mathsf{Scin}_B(F,G). \tag{3}$$

Résulte immédiatement des définitions.

1.1.5. Soit F une A-catégorie *fibrée*. On pose

$$\varprojlim(F/A)=\mathsf{Cart}_A(A,F) \tag{1}$$

et, pour toute catégorie X, on a un isomorphisme canonique

$$\mathsf{Hom}(X,\varprojlim(F/A)) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Cart}_A(X\times A,F). \tag{2}$$

De même, si F est une A-catégorie *scindée*, on pose

$$\varprojlim(F/A)=\mathsf{Scin}_A(A,F), \tag{3}$$

qui est donc une sous-catégorie pleine de la précédente, l'inclusion

$$\varprojlim(F/A)\to\varprojlim(F/A) \tag{4}$$

n'étant pas, en général, une équivalence [D 5.5]. Bien entendu, (3) est canoniquement isomorphe à la limite projective du préfaisceau de catégories défini par F [SGA 1 VI 9]. Un objet de (1) s'appelle une section cartésienne de F.

1.2. Les accouplements de composition

1.2.1. Soit un diagramme de catégories

$$\begin{array}{ccccc} H & & G & & F \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ C & \xleftarrow[b]{} & B & \xleftarrow[a]{} & A. \end{array} \tag{1}$$

On a un foncteur

$$\mathsf{Hom}_a(F, G) \times \mathsf{Hom}_b(G, H) \to \mathsf{Hom}_{ba}(F, H) \tag{2}$$

qui, à tout objet (u, v) du produit, associe le composé vu et, à tout morphisme (m, n) du produit associe $n * m$. Rappelons [SGA VI 2] et [15], qu'avec les notations

$$H \underset{v'}{\overset{v}{\underset{\downarrow n}{\leftleftarrows}}} G \underset{u'}{\overset{u}{\underset{\downarrow m}{\leftleftarrows}}} F, \tag{3}$$

où F, G et H sont des catégories u, u', v et v' des foncteurs et m et n des morphismes de foncteurs, on a

$$n * m = (n * u')(v * m) = (v' * m)(n * u). \tag{4}$$

De plus, si $v = v'$ et si $n = \mathrm{id}_v$, (resp. si $u = u'$ et si $m = \mathrm{id}_u$), on a

$$n * m = v * m \qquad (\text{resp. } n * m = n * u). \tag{5}$$

Enfin, étant donné de plus un morphisme de foncteurs

$$K \underset{w'}{\overset{w}{\underset{\downarrow p}{\leftleftarrows}}} H,$$

on a *la formule d'associativité*

$$(p * n) * m = p * (n * m). \tag{6}$$

1.2.2. Le composé de deux foncteurs cartésiens est cartésien, ce qui entraine que (2) induit un foncteur

$$\mathsf{Cart}_a(F, G) \times \mathsf{Cart}_b(G, H) \to \mathsf{Cart}_a(F, H), \tag{1}$$

chaque fois que l'on a un diagramme tel que (1.2.1 (1)). Si l'on suppose de plus donnés des scindages de f, g et h, le foncteur (1) en induit un autre

$$\mathsf{Scin}_a(F, G) \times \mathsf{Scin}_b(G, H) \to \mathsf{Scin}_{ba}(F, H). \tag{2}$$

1.3. Les foncteurs de composition

1.3.1. Soit un diagramme tel que (1.2.1 (1)). Pour tout $u \in \mathrm{Hom}_a(F, G)$, on note

$$\mathsf{Hom}_a(u, H)\colon\ \mathsf{Hom}_b(G, H) \to \mathsf{Hom}_{ba}(F, H) \qquad (1)$$

le foncteur qui, à tout objet v associe $v\,u$ et à tout morphisme n associe $n * u$. Si $u \in \mathrm{Cart}_a(F, G)$, ce foncteur en induit un autre

$$\mathsf{Cart}_a(u, H)\colon\ \mathsf{Cart}_b(G, H) \to \mathsf{Cart}_{ba}(F, H). \qquad (2)$$

Si, de plus, f, g et h sont scindés et si $u \in \mathsf{Scin}_a(F, G)$, le foncteur (2) en induit un autre

$$\mathsf{Scin}_a(u, H)\colon\ \mathsf{Scin}_b(G, H) \to \mathsf{Scin}_{ba}(F, H). \qquad (3)$$

1.3.2. On obtient de même, pour tout $v \in \mathrm{Cart}_b(G, H)$, un foncteur

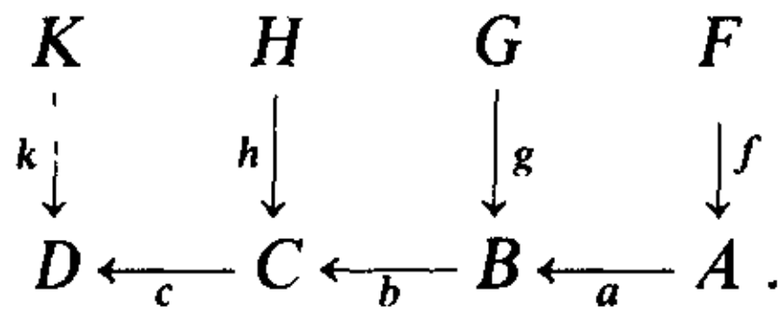
$$\mathsf{Cart}_b(F, v)\colon\ \mathsf{Cart}_a(F, G) \to \mathsf{Cart}_{ba}(F, H), \qquad (1)$$

induit par un foncteur $\mathsf{Hom}_b(F, v)$ et induisant lui-même, si F, G et H sont scindées et si $v \in \mathrm{Scin}_b(G, H)$, un foncteur $\mathsf{Scin}_b(F, v)$.

1.3.3. Si $A = B$ et si $a = \mathrm{id}_A$ on écrira $\mathsf{Cart}_A(u, H)$ au lieu de $\mathsf{Cart}_a(u, H)$, etc.

1.4. Leurs propriétés algébriques

Soit un diagramme de catégories



De la formule d'associativité (1.2.1 (6)), résultent les formules suivantes.

Si $(u, v) \in \mathrm{Hom}_a(F, G) \times \mathrm{Hom}_b(G, H)$, on a

$$\mathsf{Hom}_a(u, K) \cdot \mathsf{Hom}_b(v, K) = \mathsf{Hom}_{ba}(v\,u, K). \qquad (2)$$

Si $(v, w) \in \mathrm{Hom}_b(G, H) \times \mathrm{Hom}_c(H, K)$, on a

$$\mathsf{Hom}_c(F, w) \cdot \mathsf{Hom}_b(F, v) = \mathsf{Hom}_{bc}(F, w\,v). \qquad (3)$$

Si $(u, w) \in \mathrm{Hom}_a(F, G) \times \mathrm{Hom}_c(H, K)$, on a

$$\mathsf{Hom}_c(F, w) \cdot \mathsf{Hom}_a(u, H) = \mathsf{Hom}_a(u, K) \cdot \mathsf{Hom}_c(G, w). \qquad (4)$$

En supposant que tous les foncteurs considérés sont cartésiens, on obtient des formules analogues relatives aux catégories $\mathbf{Cart}(\cdot,\cdot)$. Si, de plus, f, g, h et k sont munis de scindages, on a des formules analogues relatives aux catégories $\mathbf{Scin}(\cdot,\cdot)$.

1.5. Composition avec une E-équivalence

Proposition 1.5.1. (Composition avec un morphisme i-fidèle.) Soient A une catégorie, F et G deux A-catégories fibrées, $u: F \to G$ un A-foncteur *cartésien* et i un entier, $(0 \leqq i \leqq 2)$. Les conditions suivantes sont équivalentes

(a) u est i-fidèle (resp. conservatif (0 3.8.1));

(b) pour toute A-catégorie fibrée X le foncteur

$$\mathbf{Cart}_A(X,u):\ \mathbf{Cart}_A(X,F) \dashrightarrow \mathbf{Cart}_A(X,G) \tag{1}$$

est i-fidèle (resp. conservatif);

(c) pour tout $S \in \mathrm{Ob}(A)$ le foncteur induit par u sur les catégories fibres en S, $u_S: F_S \to G_S$, est i-fidèle (resp. conservatif).

1.5.1.1. On rappelle qu'un foncteur est dit i-fidèle s'il est fidèle, pleinement fidèle ou une équivalence selon que $i=0$, 1 ou 2.

1.5.1.2. La preuve est laissée au lecteur; pour prouver que (b) $\Rightarrow$ (c) il prendra $X = A_{/S}$, $S \in \mathrm{Ob}(A)$.

Corollaire 1.5.2. Pour $i=2$ les conditions de la proposition équivalent à

(d) il existe un A-foncteur cartésien $v: G \to F$ et des A-isomorphismes $m:\ vu \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_F$ et $n:\ uv \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_G$ tels que $u * m = n * u$ et $m * v = v * n$.

1.5.2.1. Sous ces conditions on dira que u est une *A-équivalence* et que (v, m) est un *A-quasi-inverse* de u. Si u est un morphisme de A-catégories scindées et une A-équivalence il peut ne pas exister de A-quasi-inverse qui soit un morphisme de catégories scindées (cf. [D 5.5]).

Corollaire 1.5.3. Soient A une catégorie, F et G des A-catégories fibrées et $u: F \to G$ un A-foncteur cartésien.

(i) Si u est i-fidèle $(0 \leqq i \leqq 2)$ il en est de même, pour tout diagramme de catégories

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & & \downarrow \\ A & \xleftarrow[b]{} & B \end{array}$$

des foncteurs

$$\mathsf{Hom}_A(X, u)\colon\ \mathsf{Hom}_b(X, F) \to \mathsf{Hom}_b(X, G)$$

$$\mathsf{Cart}_A(X, u)\colon\ \mathsf{Cart}_b(X, F) \to \mathsf{Cart}_b(X, G)$$

et (si F, G, X sont scindées et si $u \in \mathrm{Scin}_A(F, G)$) il en est de même du foncteur

$$\mathsf{Scin}_A(X, u)\colon\ \mathsf{Scin}_b(X, F) \to \mathsf{Scin}_b(X, G).$$

(ii) Si u est une E-équivalence, pour tout diagramme de catégories

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & & \downarrow \\ B & \xleftarrow[b]{} & A \end{array}$$

les foncteurs

$$\mathsf{Cart}_A(u, X)\colon\ \mathsf{Cart}_b(G, X) \to \mathsf{Cart}_b(F, X)$$

et $\mathsf{Hom}_A(u, X)$ sont des équivalences de catégories.

1.6. Changement de base

Proposition 1.6.1. Soit un *produit fibré* de catégories

$$\begin{array}{ccc} H & \xleftarrow{v} & G \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ C & \xleftarrow[b]{} & B. \end{array}$$

(i) Si h est fibrant il en est de même de g et les morphismes B-cartésiens de G sont ceux dont l'image par v est C-cartésienne. Si, de plus, h est muni d'un scindage il existe un unique scindage sur g tel que $v \in \mathrm{Scin}_b(G, H)$.

(ii) Pour tout diagramme de catégories $B \xleftarrow{a} A \xleftarrow{f} F$ les foncteurs

$$\mathsf{Hom}_b(F, v)\colon\ \mathsf{Hom}_a(F, G) \to \mathsf{Hom}_{ba}(F, H)$$

et

$$\mathsf{Cart}_b(F, v)\colon\ \mathsf{Cart}_a(F, G) \to \mathsf{Cart}_{ba}(F, H)$$

sont des *isomorphismes* et il en est de même de $\mathsf{Scin}_b(F, v)$, du moins, pour ce dernier, si f et h sont scindés et si l'on munit g du scindage défini par $v \in \mathrm{Scin}_b(G, H)$.

Corollaire 1.6.2. Sous les hypothèses de la proposition précédente, la première projection de $G = H \times_C B$ induit des isomorphismes

$$\varprojlim(H \times_C B/B) \xrightarrow{\approx} \mathsf{Cart}_b(B, H) \tag{1}$$

$$\varprojlim(H \times_C B/B) \xrightarrow{\approx} \mathsf{Scin}_b(B, H), \quad (H \text{ scindée}). \tag{2}$$

1.6.2.1. En inversant l'isomorphisme (1) (resp. (2)), on trouve, par composition avec b, un foncteur

$$\beta\colon \varprojlim(H/C)\to \varprojlim(H\times_C B/B) \tag{1}$$

[resp.

$$\beta\colon \varprojlim(H/C)\to \varprojlim(H\times_C B/B), \quad H \text{ scindée}], \tag{2}$$

caractérisé par $v\beta(k)=k\,b$.

Corollaire 1.6.3. Sous les hypothèses de (1.6.1),

(i) si b est fibrant à fibres des groupoïdes (ou, autrement dit, si tous les morphismes de B sont C-cartésiens), on a

$$\mathbf{Cart}_b(B,H)=\mathbf{Cart}_C(B,H) \tag{1}$$

et l'isomorphisme (1.6.2 (1)) s'écrit

$$\varprojlim(H\times_C B/B)\xrightarrow{\sim}\mathbf{Cart}_C(B,H). \tag{2}$$

(ii) Si, de plus, b est scindé à fibres discrètes c'est à dire si b est un *changement de base discret* au sens de [D 6.1], pour tout scindage de h, on a

$$\mathbf{Scin}_b(B,H)=\mathbf{Scin}_C(B,H) \tag{3}$$

et l'isomorphisme (1.6.2 (2)) s'écrit

$$\varprojlim(H\times_C B/B)\xrightarrow{\sim}\mathbf{Scin}_C(B,H). \tag{4}$$

Résulte de (1.1.4).

1.7. Univers

1.7.1. Nous adoptons quant aux univers le langage de [SGA 4 I]. Précisons. *Soit* U *un univers fixé jusqu'à* (3.1). Nous dirons qu'une catégorie est essentiellement U-*petite* si elle est équivalente à une catégorie élément de U. Nous dirons qu'une catégorie C est une U-*catégorie* si, pour tout couple (x, y) d'objets de C, l'ensemble $\mathrm{Hom}_C(x, y)$ est isomorphe à un élément de U.

Lemme 1.7.2. Soit un diagramme de catégories

$$\begin{array}{ccc} G & & F \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ B & \xleftarrow[a]{} & A. \end{array}$$

(i) Si F et G sont élément de U (resp. U-petites), il en est de même des catégories $\mathbf{Hom}_a(F, G)$, $\mathbf{Cart}_a(F, G)$ et, si F et G sont scindées, $\mathbf{Scin}_a(F, G)$.

(ii) Si F est essentiellement U-petite et si les catégories fibres de G sont des U-catégories alors les catégories $\mathbf{Hom}_a(F, G)$, $\mathbf{Cart}_a(F, G)$, et le cas échéant $\mathbf{Scin}_a(F, G)$, sont des U-catégories.

1.8. La 2-catégorie $\mathscr{F}ib(E)$

1.8.1. Pour toute catégorie E élément de U, on désigne par $\mathrm{Fib}(E)$ l'ensemble des E-catégories fibrées qui appartiennent à U. Ce n'est pas un élément de U. En attachant à tout couple (F, G) d'éléments de $\mathrm{Fib}(E)$ la catégorie $\mathbf{Cart}_E(F, G)$ de (1.1.3) et à tout triplet (F, G, H) d'éléments de $\mathrm{Fib}(E)$ l'accouplement (1.2.2 (1)), on définit une 2-*catégorie* notée $\mathscr{F}ib(E)$. En effet, les axiomes qui permettent d'affirmer que ces données définissent une 2-catégorie, [31, chap. VI-1], sont choisis pour généraliser les égalités (4), (5) et (6) de (1.2.1). La catégorie dont l'ensemble des objets est $\mathrm{Fib}(E)$, dont l'ensemble des flèches est la somme disjointe des $\mathrm{Cart}_E(F, G)$ pour $(F, G) \in \mathrm{Fib}(E) \times \mathrm{Fib}(E)$ et dont la loi de composition est induite par celle des E-foncteurs sera désignée par $\mathbf{Fib}(E)$. C'est une U-catégorie.

Proposition 1.8.2. Soient E une catégorie élément de U et

$$\mathsf{L}\colon I \to \mathbf{Fib}(E) \tag{1}$$

un foncteur, où I est une catégorie élément de U.

(i) La limite projective de L existe (dans $\mathbf{Fib}(E)$ évidemment).

(ii) Si L est une limite projective de L, pour toute $X \in \mathrm{Fib}(E)$ on a un *isomorphisme de catégories*

$$\mathbf{Cart}_E(X, L) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_I (\mathbf{Cart}_E(X, \mathsf{L}(i))). \tag{2}$$

(iii) Si L est une limite projective de L, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$, on a un isomorphisme canonique

$$L_S \xrightarrow{\sim} \varprojlim_I \mathsf{L}(i)_S. \tag{3}$$

1.8.2.1. Nous allons d'abord construire une catégorie L. Pour cela on note que dans le catégorie $(\mathsf{U}\text{-ens})_{/\mathrm{Ob}(E)}$, on a un système projectif indexé par I à savoir

$$i \rightsquigarrow \mathrm{Ob}(\mathsf{L}(i)). \tag{4}$$

On pose $\mathrm{Ob}(L)=\varprojlim \mathrm{Ob}(\mathsf{L}(i))$, qui est donc un ensemble «au dessus de $\mathrm{Ob}(E)$». On procède de même pour les ensembles de flèches. D'où E-catégorie L. Il est immédiat qu'elle vérifie (iii). Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que L est fibrée et de prouver l'assertion (ii). Le cas du produit de deux objets de $\mathsf{Fib}(E)$ a été traité dans [SGA 1 VI 6], le cas général se traite de la même façon. On notera que le produit de deux objets F et G de $\mathsf{Fib}(E)$ n'est autre que le produit fibré $F\times_E G$.

1.9. La 2-catégorie $\mathscr{Scin}(E)$

1.9.1. Soit E une catégorie élément de U. En procédant comme au numéro précédent, on note $\mathrm{Scin}(E)$ l'*ensemble* des E-catégories scindées qui sont éléments de U, $\mathscr{Scin}(E)$ la 2-*catégorie* obtenue en associant à tout couple (F, G) d'éléments de $\mathrm{Scin}(E)$ la catégorie $\mathsf{Scin}_E(F, G)$ et à tout triplet (F, G, H) d'éléments de $\mathrm{Scin}(E)$ l'accouplement (1.2.2 (2)). Enfin on note $\mathsf{Scin}(E)$ la catégorie «sous-jacente» dont l'ensemble des flèches est la somme directe des ensembles $\mathrm{Scin}_E(F, G)$.

1.9.2. Par *oubli des scindages*, on définit un morphisme de 2-catégories

$$\mathscr{Oub}_E\colon \mathscr{Scin}(E)\to\mathscr{Fib}(E)$$

qui induit sur les catégories de morphismes les foncteurs d'inclusion $\mathsf{Scin}_E(F, G)\subset\mathsf{Cart}_E(F, G)$, lesquels sont pleinement fidèles, mais, en général, ni des isomorphismes ni des équivalences.

1.9.3. Pour toute E-catégorie scindée F, les foncteurs image inverse, [D 1.6], définissent un préfaisceau de catégories sur E, c'est à dire un élément F' de $\mathrm{Hom}(E^0, (\mathrm{Cat}))$, où (Cat) est la catégorie des catégories éléments de U. Cette construction induit, pour tout couple (F, G) de E-catégorie scindées un *isomorphisme de catégories* $\mathsf{Scin}_E(F, G)\xrightarrow{\approx}\mathsf{Hom}(F', G')$, la seconde étant définie de manière que le lecteur retrouvera sans peine s'il ne la connait déjà. Par [SGA 1 VI 9] ou [D 5 (a)], à tout préfaisceau de catégories P sur E est associée une E-catégorie scindée F et un isomorphisme $F'\xrightarrow{\approx}P$.

1.9.3.1. Si E est munie d'une topologie, on dira qu'une E-catégorie scindée «*est*» *un faisceau de catégories* s'il en est ainsi du préfaisceau de catégories qu'elle définit.

1.9.4. Terminons par une remarque qui nous sera utile dans plusieurs démonstrations. D'après les généralités sur les préfaisceaux d'ensembles munis de structures algébriques [SGA 4 II 5.3], la donnée d'un préfaisceau de catégories équivaut à celle d'une catégorie de la catégorie

$\hat{E}$ des préfaisceaux d'ensembles sur E, c'est à dire d'un diagramme de $\hat{E}$

$$X \underset{q}{\overset{p}{\underset{m}{\rightrightarrows}}} Y \underset{b}{\overset{s}{\rightrightarrows}} Z \tag{1}$$

tel que, pour tout $V \in \mathrm{Ob}(\hat{E})$, le diagramme

$$X(V) \underset{q(V)}{\overset{p(V)}{\underset{m(V)}{\rightrightarrows}}} Y(V) \underset{b(V)}{\overset{s(V)}{\rightrightarrows}} Z(V) \tag{2}$$

définisse une catégorie [$s(V)$ et $b(V)$ sont les applications source et but, $p(V)$ et $q(V)$ identifient $X(V)$ à l'ensemble des couples de flèches composables et $m(V)$ est l'application définissant la loi de composition]. D'après ce qui précède, *une E-catégorie scindée F s'interprête comme une catégorie*

$$\mathscr{fl}^2(F) \rightrightarrows \mathscr{fl}(F) \rightrightarrows \mathscr{ob}(F) \tag{3}$$

de $\hat{E}$, où $\mathscr{ob}(F)$, $\mathscr{fl}(F)$ et $\mathscr{fl}^2(F)$ sont respectivement les préfaisceaux qui à tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$ associent l'ensemble des objets, des flèches et des couples de flèches composables de la catégorie fibre F_S. Moyennant quoi, un objet de F de projection $S \in \mathrm{Ob}(E)$ s'interprète comme un morphisme de préfaisceaux d'ensembles

$$x\colon \eta(S) \to \mathscr{ob}(F), \quad x \in \mathrm{Ob}(F_S), \tag{4}$$

où $\eta(S)$ est le préfaisceau représenté par S.

1.10. La catégorie $\underrightarrow{\mathrm{Lim}}(F/A)$

Le lecteur trouvera la preuve des assertions qui suivent et des compléments importants dans [SGA 4 VI 2]. Soient X et A des catégories et F une A-catégorie. La composition avec la première projection de $X \times A$ induit un isomorphisme

$$\mathbf{Cart}_A(F, X \times A) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Hom}'(F, X) \tag{1}$$

où la seconde désigne la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Hom}(F, X)$ dont les objets sont les foncteurs qui transforment tout morphisme A-cartésien de F en un isomorphisme. A l'évidence, (1) est fonctoriel en F et X.

Proposition 1.10.1. Pour toute A-catégorie F appartenant à U il existe une catégorie $\underrightarrow{\mathrm{Lim}}(F/A)$ appartenant à U et un foncteur $\lambda\colon F \to \underrightarrow{\mathrm{Lim}}(F/A)$ tels que, pour toute catégorie X la composition avec λ induise un isomorphisme de catégories

$$\mathbf{Hom}(\underrightarrow{\mathrm{Lim}}(F/A), X) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Hom}'(F, X) \approx \mathbf{Cart}_A(F, X \times A). \tag{2}$$

On exprime généralement la propriété universelle de $\varinjlim(F/A)$ en disant qu'elle s'obtient *en inversant les flèches A-cartésiennes de F*. Par la dite propriété universelle, à tout diagramme de (Cat)

$$\begin{array}{ccc} F & & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow[a]{} & B \end{array}$$

et à tout objet (resp. flèche) u de $\mathbf{Cart}_a(F, G)$ est associé un foncteur que l'on notera

$$\varinjlim(u/a)\colon \varinjlim(F/A) \to \varinjlim(G/B), \tag{3}$$

(resp. un morphisme entre foncteurs

$$\varinjlim(F/A) \rightrightarrows \varinjlim(G/B) \tag{4}$$

que l'on notera encore $\varinjlim(u/a)$).

On notera donc que $\varinjlim(F/A)$ est *covariant*, contrairement à $\varprojlim(F/A)$, (1.6.2.1 (1)).

Lemme 1.10.2. Soient F une A-catégorie *fibrée*, e un objet initial de A et $i\colon F_e \to F$ le foncteur d'inclusion de la catégorie fibre en e. Le composé $\lambda i\colon F_e \to \varinjlim(F/A)$, où λ est le morphisme structural de (1.10.1) est une *équivalence.*

1.11. Adjoint d'un E-foncteur

Proposition 1.11.1. Soient

$$A \underset{g}{\overset{d}{\leftrightarrows}} B \tag{1}$$

deux E-foncteurs et soient

$$u\colon g\,d \to \mathrm{id}_B, \qquad v\colon \mathrm{id}_A \to d\,g \tag{2}$$

deux E-morphismes de E-foncteurs. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) u et v font de g un adjoint à gauche de d;

(i bis) on a

$$(u * g)(g * v) = \mathrm{id}_g \quad \text{et} \quad (d * u)(v * d) = \mathrm{id}_d; \tag{3}$$

(ii) pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$, si (g_S, d_S, u_S, v_S) désignent les foncteurs et morphismes de foncteurs induits par g, d, u et v sur les catégories fibres en S, les morphismes u_S et v_S font de g_S un *adjoint à gauche* de d_S;

(iii) pour toute E-catégorie X et tout couple de E-foncteurs

$$a\colon X \to A, \qquad b\colon X \to B, \tag{4}$$

les applications (entre ensembles de E-morphismes de E-foncteurs)

$$\begin{gathered} \mathrm{Hom}(g\,a, b) \to \mathrm{Hom}(d\,g\,a, d\,b) \to \mathrm{Hom}(a, d\,b) \\ x \to d * x \qquad\qquad x \to x \cdot (v * a) \end{gathered} \tag{5}$$

et

$$\begin{gathered} \mathrm{Hom}(a, d\,b) \to \mathrm{Hom}(g\,a, g\,d\,b) \to \mathrm{Hom}(g\,a, b) \\ x \to g * x \qquad\qquad x \to (u * b) \cdot x \end{gathered} \tag{6}$$

sont des bijections inverses l'une de l'autre.

L'équivalence de (i) et (i bis) est la définition, [10, p. 340]. Une égalité entre E-morphismes de E-foncteurs se voit sur les catégories fibres, donc (i bis) $\Leftrightarrow$ (ii). Prouvons que (i bis) $\Rightarrow$ (iii). Par (1.2.1 (4)), pour tout $x \in \mathrm{Hom}(g\,a, b)$, on a

$$(u * b)(g\,d * x) = (\mathrm{id}_B * x)(u * g\,a) \tag{7}$$

d'où il résulte, en utilisant le seconde formule de (3), que le composé de (6) et (5) est l'identité de $\mathrm{Hom}(g\,a, b)$. Une formule analogue prouve que le composé de (5) et (6) est l'identité de $\mathrm{Hom}(a, d\,b)$, donc (i bis) $\Rightarrow$ (iii).

Enfin (iii) $\Rightarrow$ (i bis), car la première formule de (3), par exemple, s'obtient en prenant $X = A$, $b = g$, $a = \mathrm{id}_A$ et $x = \mathrm{id}_a$. *Notons pour terminer que la donnée de* g, d *et* v *tel que* (5) *soit bijectif détermine* u.

Définition 1.11.2. On dira qu'un E-foncteur $d\colon B \to A$ admet un *E-adjoint* à gauche s'il existe (g, u, v) vérifiant les conditions de la proposition précédente.

Autrement dit, un E-adjoint à gauche d'un E-foncteur est un adjoint à gauche qui est un E-foncteur, les morphismes d'adjonction u et v étant des E-morphismes. D'après (iii), un tel adjoint est *unique à E-isomorphisme unique prés.*

Corollaire 1.11.3. Soit $d\colon B \to A$ un E-foncteur *cartésien*, A et B étant des E-catégories *fibrées.*

(i) Pour que d admette un E-adjoint à gauche il faut et il suffit que, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$, le foncteur $d_S\colon B_S \to A_S$ induit par d sur les fibres en S admette un adjoint à gauche.

(ii) Soit pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$ un adjoint à gauche g_S de d_S, le morphisme d'adjonction étant $v_S\colon \mathrm{id}_{A_S} \to d_S g_S$. Il existe un unique E-adjoint à gauche (g, u, v) de d tel que, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$, le foncteur (resp.

morphisme) induit par g (resp. v) sur les fibres en S soit égal à g_S (resp. v_S).

1.11.3.1. La condition de (i) est nécessaire d'après (1.11.1); elle est suffisante d'après (ii) que nous allons prouver. Montrons d'abord que d admet un adjoint à gauche. Par hypothèse, pour tout $S\in\mathrm{Ob}(E)$ et tout $a\in\mathrm{Ob}(A_S)$, on a un objet $g_S(a)\in\mathrm{Ob}(B_S)$ et un S-morphisme

$$v_S(a):\ a\to d(g_S(a)), \tag{1}$$

tel que, pour tout $b\in\mathrm{Ob}(B_S)$, l'application composée

$$\begin{array}{ccccc}\mathrm{Hom}_S(g_S(a),b) & \to & \mathrm{Hom}_S(d(g_S(a)),d(b)) & \to & \mathrm{Hom}_S(a,d(b))\\ x & \to & d(x) & & y\to y\cdot v_S(a)\end{array} \tag{2}$$

soit un isomorphisme.

Prouvons que *le couple* $(g_S(a), v_S(a))$ *représente le foncteur*

$$B\to(\mathrm{Ens}),\qquad b\rightsquigarrow\mathrm{Hom}(a,d(b)).$$

Il suffit de prouver que, pour tout $b\in\mathrm{Ob}(B)$ et tout morphisme $f: S\to T$ de E, où T est la projection de b, l'application composée évidente

$$\mathrm{Hom}_f(g_S(a),b)\to\mathrm{Hom}_f(d(g_S(a)),d(b))\to\mathrm{Hom}_f(a,d(b)) \tag{3}$$

est bijective. Soit b' une image inverse de b par f. Puisque d est E-cartésien, $d(b')$ est une image inverse de $d(b)$ par f, et puisque d est un E-foncteur, il suffit de prouver que l'application composée évidente

$$\mathrm{Hom}_S(g_S(a),b')\to\mathrm{Hom}_S(d(g_S(a)),d(b'))\to\mathrm{Hom}_S(a,d(b')) \tag{4}$$

est bijective, ce qui est l'hypothèse.

1.11.3.2. Par un raisonnement bien connu, on en déduit qu'il existe un unique foncteur adjoint (g, u, v) de d tel que pour tout $a\in\mathrm{Ob}(A)$ on ait $g(a)=g_S(a)$ et $v(a)=v_S(a)$, où $S\in\mathrm{Ob}(E)$ est la projection de a. Il reste à démontrer que g est un E-foncteur, ce qui résulte du fait que (3) est bijective, que v est un E-morphisme, ce qui est immédiat, et que u est un E-morphisme, ce qui résulte du fait que (4) est bijective.

Remarque 1.11.4. Sous les hypothèses de (1.11.3 (ii)), on dira que les adjoints g_S des d_S sont compatibles avec les *foncteurs images inverses si g est E-cartésien*. Cette condition n'est pas toujours vérifiée comme on voit aisément; elle s'exprime évidemment sans faire usage explicite de g. Par ailleurs, on prendra garde que pour «échanger la gauche et la droite» dans le corollaire précédent il faut également remplacer cartésien par cocartésien et fibré par cofibré.

§2. Le changement de base et ses adjoints

2.1. Notations

2.1.1. Soit $u\colon E \to E'$ un foncteur tel que E et E' appartiennent à U (cf. 1.7.1). Le lecteur notera l'analogie de ce qui va suivre (2.3 et infra) avec les trois foncteurs de [SGA 3 III § 1]:

$$\hat{E} \underset{u^+}{\overset{u^*}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\longleftarrow}}}} \hat{E}', \tag{1}$$

chacun étant adjoint à gauche de celui est écrit sous lui cependant que $u_\bullet(F) = F u$. Bien entendu, $\hat{E} = \mathrm{Hom}(E^0, \text{U-ens})$ désigne la catégorie des U-préfaisceaux d'ensembles sur E. Nous remplacerons les $\varprojlim$ et $\varinjlim$ qui interviennent classiquement dans le calcul des adjoints ci-dessus par des $\underset{\longleftarrow}{\mathrm{Lim}}$ et des $\underset{\longrightarrow}{\mathrm{Lim}}$ prises sur les mêmes catégories d'indices. Quant à celles-ci, pour être à l'aise, fixons nos notations.

2.1.2. Soit E' une catégorie. Pour tout $P \in \mathrm{Ob}(E')$ et toute E'-catégorie $x\colon X \to E'$, on désigne par $X_{/P}$ la catégorie dont les objets sont les (S, s), $S \in \mathrm{Ob}(X)$, $s \in \mathrm{Hom}_{E'}(x(S), P)$, les morphismes d'un (S, s) dans un (T, t) étant les $a \in \mathrm{Hom}_X(S, T)$ tels que $t\,x(a) = s$. Si X et E' appartiennent à U il en est de même de $X_{/P}$.

Si $y\colon Y \to E'$ est une autre E'-catégorie et $m\colon X \to Y$ un E'-foncteur il en résulte un foncteur

$$m_{/P}\colon\ X_{/P} \to Y_{/P}, \qquad m_{/P}(S, s) = \big(m(S), s\big), \tag{1}$$

qui est compatible avec les projections naturelles

$$\mathsf{s}_P^X\colon\ X_{/P} \to X, \qquad \mathsf{s}_P^X(S, s) = S, \tag{2}$$

c'est à dire vérifie

$$m \cdot \mathsf{s}_P^X = \mathsf{s}_P^Y \cdot m_{/P}. \tag{3}$$

Il est immédiat que le carré commutatif de (3) fait de $X_{/P}$ un produit fibré

$$X_{/P} \approx X \times_Y (Y_{/P}), \tag{4}$$

ce qui, en prenant $m = x$, $x\colon X \to E'$, donne une interprétation de $X_{/P}$, compte tenu de ce que $E'_{/P}$ n'est autre que la catégorie des objets de E' au dessus de P.

Si maintenant $f\colon P \to Q$ est une flèche de E', elle définit un X-morphisme de catégories scindées

$$X_{/f}\colon\ X_{/P} \to X_{/Q}, \qquad X_{/f}(S, s) = (S, f\,s), \tag{5}$$

tel que, pour tout $m\colon X \to Y$, on ait

$$m_{/Q} \cdot X_{/f} = Y_{/f} \cdot m_{/P}. \tag{6}$$

On notera que $\mathbf{s}_P^X\colon X_{/P} \to X$ est muni d'un *scindage*, facile à expliciter, lequel est *unique* car les fibres de $\mathbf{s}_P^X$ sont des catégories *discrètes*. C'est donc un changement de base discret au sens de [D 6.1].

2.1.3. Soit $x\colon X \to E'$ un foncteur. Pour tout objet P de E' on note $X^{\setminus P}$ la catégorie dont les objets sont les (S, s), $S \in \mathrm{Ob}(X)$, $s \in \mathrm{Hom}_{E'}(P, x(S))$, les morphismes d'un objet (S,s) dans un autre (T, t) étant les $a \in \mathrm{Hom}_X(S, T)$ tels que $x(a)\, s = t$. Si X et E' appartiennent à $\mathbf{U}$ il en est de même de $X^{\setminus P}$ pour tout $P \in \mathrm{ob}(E')$. On a un foncteur

$$\mathbf{b}_X^P\colon X^{\setminus P} \to X, \qquad \mathbf{b}_X^P(S, s) = S, \tag{1}$$

et, pour toute E'catégorie $y\colon Y \to E'$ et tout E'-foncteur $m\colon X \to Y$, un m-foncteur

$$m^{\setminus P}\colon X^{\setminus P} \to Y^{\setminus P}, \qquad m^{\setminus P}(S, s) = (m(S), s). \tag{2}$$

Par ailleurs, si $n\colon X \to Y$ est un autre E'-foncteur, et si $a\colon m \to n$ est un E'-morphisme de E'-foncteurs, on a un m-morphisme de foncteurs

$$a^{\setminus P}\colon m^{\setminus P} \to n^{\setminus P}, \qquad a^{\setminus P}(S, s) = a(S), \tag{2 bis}$$

qui, par définition, vérifie

$$a * \mathbf{b}_X^P = \mathbf{b}_Y^P * a^{\setminus P}. \tag{3}$$

Enfin, pour toute flèche $f\colon P \to Q$ de E', on a un foncteur

$$X^{\setminus f}\colon X^{\setminus Q} \to X^{\setminus P}, \qquad X^{\setminus f}(S, s) = (S, sf), \tag{4}$$

qui vérifie

$$m^{\setminus P} \cdot X^{\setminus f} = Y^{\setminus f} \cdot m^{\setminus Q}. \tag{5}$$

2.1.4. Si l'on applique la construction de (2.1.2) en prenant pour $x\colon X \to E'$ le foncteur identique d'une catégorie E, on trouve que, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$, la catégorie $E_{/S}$ que nous venons d'introduire est égale à la catégorie des objets de E au dessus de S. Notre notation est donc compatible avec celles que l'on adopte classiquement.

2.2. Adjoint d'un 2-foncteur

2.2.1. Un 2-foncteur (ou morphisme d'une 2-catégorie A dans une autre B) [31, chap. VI, §1], est un couple formé d'une application $u\colon \mathrm{Ob}(A) \to \mathrm{Ob}(B)$ et d'une famille de foncteurs $u_{x,y}\colon \mathrm{Hom}(x, y) \to \mathrm{Hom}(u(x), u(y))$ indexée par les couples d'objets de A tel que

(i) pour tout $x \in \mathrm{Ob}(A)$ le foncteur $u_{x,x}$ applique le morphisme identique de x [qui est un objet de $\mathsf{Hom}(x, x)$] sur celui de $u(x)$

(ii) les $u_{x,y}$ soient compatibles avec les foncteurs de composition relatifs à A et B.

Un morphisme d'un 2-foncteur $u\colon A \dashrightarrow B$ dans un autre $v\colon A \dashrightarrow B$ est une famille m_x, $x \in \mathrm{Ob}(A)$, d'objets $m_x\colon u(x) \to v(x)$ de $\mathsf{Hom}(u(x), v(x))$ telle que, pour tout couple (x, y) d'objets de A et toute flèche f de $\mathsf{Hom}(x, y)$ on ait

$$m_y * u_{x,y}(f) = v_{x,y}(f) * m_x. \tag{1}$$

On peut aussi considérer des 2-morphismes mais nous n'en n'aurons pas besoin.

Définition 2.2.2. Soit $D\colon A \to B$ un foncteur. Un 2-adjoint à gauche de D est un couple formé d'un 2-foncteur $G\colon B \to A$ et d'un morphisme de 2-foncteurs $M\colon 1_B \to DG$, où 1_B désigne le 2-foncteur identique de B, tels que, pour tout $(X, Y) \in \mathrm{Ob}(A) \times \mathrm{Ob}(B)$, le *foncteur* composé

$$\mathsf{Hom}_A(G(Y), X) \xrightarrow{d} \mathsf{Hom}_B(DG(Y), D(X)) \xrightarrow{m} \mathsf{Hom}_B(Y, D(X)) \tag{1}$$

soit un *isomorphisme*, où $d = D_{G(Y),X}$ et où $m(a) = a * M_Y$.

Le lecteur étendra sans peine aux 2-adjoints les considérations que l'on trouve par exemple dans [10], chap. 1, §7. Signalons seulement que si (G, M) et (G', M') sont deux 2-adjoints de D il existe un unique isomorphisme de 2-foncteurs $I\colon G \to G'$ tel que, pour tout $Y \in \mathrm{Ob}(B)$, on ait

$$M'_Y = D(I_Y) \cdot M_Y. \tag{2}$$

Un tel I s'appelle un isomorphisme de 2-adjoints.

2.2.2.1. Par passage aux ensembles d'objets dans l'isomorphisme (2.2.2 (1)), on voit immédiatement qu'*un couple de 2-foncteurs 2-adjoints induit, sur les catégories sous-jacentes (i.e. obtenues par oubli des morphismes entre morphismes) un couple de foncteurs adjoints.* Cette assertion admet une réciproque.

Proposition 2.2.3. Soient $D\colon A \dashrightarrow B$ un 2-foncteur, $D'\colon A' \to B'$ le foncteur sous-jacent et

$$G'\colon B' \to A', \qquad M\colon \mathrm{id}_{B'} \to D'G', \tag{1}$$

un adjoint à gauche de D'. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) Pour tout $X \in \mathrm{Ob}(A)$ et tout $Y \in \mathrm{Ob}(B)$ le foncteur (cf. 2.2.2 (1))

$$\mathsf{Hom}_A(G'(Y), X) \to \mathsf{Hom}_B(DG'(Y), D(X)) \to \mathsf{Hom}_B(Y, D(X)) \tag{2}$$

est pleinement fidèle.

(ii) Il existe un 2-foncteur (nécessairement unique) $G\colon B \to A$ qui induit G' sur les catégories sous-jacentes et qui est tel que M soit un morphisme de 2-foncteurs.

De plus, sous ces conditions, (G, M) est un 2-adjoint à gauche de D (et (2) est un isomorphisme!).

Preuve: Copier de [10, chap. I, §7, prop. 10]. Autrement dit: un 2-adjoint à gauche de D n'est pas autre chose qu'un adjoint à gauche du foncteur sous-jacent à D possédant la propriété (i).

2.3. Les 2-foncteurs de changement de base

2.3.1. Soit $u\colon E \to E'$ un foncteur tel que E et E' appartiennent à U. Jusqu'à 3.1 les 2-catégories $\mathscr{Fib}(E)$, $\mathscr{Scin}(E)$ etc. seront prises relativement à U, (1.8 et 1.9). Soient F' et G' deux éléments de $\mathrm{Fib}(E')$, et soient $f'\colon F \to F'$ et $g'\colon G \to G'$ les premières projections des produits fibrés $F = F' \times_{E'} E$ et $G = G' \times_{E'} E$. Par la propriété universelle du produit fibré (1.6.1 (ii)) on voit qu'il existe un unique foncteur

$$\varphi\colon \mathsf{Cart}_{E'}(F', G') \to \mathsf{Cart}_{E}(F, G) \tag{1}$$

tel que pour toute flèche m de la première catégorie on ait $g' * \varphi(m) = m * f'$. Par la même propriété universelle, les foncteurs de (1) sont compatibles avec la composition, d'où un *2-foncteur*

$$u^{\mathrm{fib}}_{\bullet}\colon \mathscr{Fib}(E') \to \mathscr{Fib}(E), \qquad F' \rightsquigarrow F' \times_{E'} E. \tag{2}$$

Toujours d'après (1.6.1), si F' est scindé il existe un unique scindage sur $F = F' \times_{E'} E$ tel que la première projection $f\colon F \to F'$ soit un u-morphisme de catégories scindées et le foncteur (1) en induit un autre

$$\sigma\colon \mathsf{Scin}_{E'}(F', G') \to \mathsf{Scin}_{E}(F, G), \tag{3}$$

d'où un nouveau 2-foncteur, induit par $u^{\mathrm{fib}}_{\bullet}$:

$$u^{\mathrm{scin}}_{\bullet}\colon \mathscr{Scin}(E') \to \mathscr{Scin}(E). \tag{4}$$

Enfin on désignera par

$$\mathscr{Oub}_{u}\colon \mathscr{Scin}(E') \to \mathscr{Fib}(E) \tag{5}$$

le 2-foncteur associé à $u^{\mathrm{scin}}_{\bullet}$ par oubli des scindages, autrement dit le composé $\mathscr{Oub}_{E} \cdot u^{\mathrm{scin}}_{\bullet}$ (1.9.2).

Bien entendu, si $v\colon E' \dashrightarrow E''$ est un foncteur tel que E'' appartienne à U, par transitivité du produit fibré, on a un isomorphisme canonique de 2-foncteurs

$$u^{\mathrm{fib}}_{\bullet} \cdot v^{\mathrm{fib}}_{\bullet} \xrightarrow{\approx} (v\,u)^{\mathrm{fib}}_{\bullet} \tag{6}$$

qui en induit un autre

$$u^{\mathrm{scin}}_{\bullet} \cdot v^{\mathrm{scin}}_{\bullet} \xrightarrow{\approx} (v\,u)^{\mathrm{scin}}_{\bullet}. \tag{7}$$

Théorème 2.3.2. Soit $u: E \to E'$ un foncteur tel que E et E' appartiennent à U

(i) Le 2-foncteur $u_\bullet^{\mathrm{scin}}: \mathscr{S}cin(E') \to \mathscr{S}cin(E)$ admet un 2-adjoint à droite u^+_{scin} et un 2-adjoint à gauche $u^\bullet_{\mathrm{scin}}$.

(ii) Si les limites projectives finies existent dans E et si le foncteur: $u: E \to E'$ les respecte, le foncteur $\mathsf{Scin}(E) \to \mathsf{Scin}(E')$ sous-jacent au 2-foncteur $u^\bullet_{\mathrm{scin}}$ commute aux limites projectives finies.

(iii) Sous les hypothèses de (ii), si $m: F \to G$ est un morphisme de E-catégories scindées et si m est i-fidèle (1.5.1.1) ($i=0$, 1 ou 2) (resp. essentiellement surjectif) il en est de même de $u^\bullet_{\mathrm{scin}}(m)$.

2.3.2.1. Regardant les catégories scindées comme des préfaisceaux de catégories (1.9.3), la construction bien connue (cf. par exemple [SGA 4 III 1.1]) nous fournit des adjoints à gauche et à droite du foncteur sous-jacent à $u_\bullet^{\mathrm{scin}}$. Le présent résultat ne jouant qu'un rôle très accessoire dans la suite, contentons-nous de signaler que (i) résulte de ceci en utilisant (2.2.3).

2.3.2.2. Toujours par (2.2.3), le foncteur sous-jacent à $u^\bullet_{\mathrm{scin}}$ est adjoint à gauche du foncteur sous-jacent à $u_\bullet^{\mathrm{scin}}$. Utilisant à nouveau la traduction en termes de préfaisceaux de catégories, on prouve (ii) en appliquant [SGA 4 III 1.2].

2.3.2.3. Sous les hypothèses de (ii), l'adjoint à gauche $u^\bullet: \hat{E} \to \hat{E}'$ du foncteur $u_\bullet: \hat{E}' \to \hat{E}$, $u_\bullet(P) = P \cdot u$, commute aux limites projectives finies. Il transforme donc une catégorie de $\hat{E}$ (1.9.4 (1)) en une catégorie de $\hat{E}'$. D'après [SGA 4 III 1.8 (3)], on en déduit que, si $F \in \mathrm{Scin}(E)$, la catégorie de $\hat{E}'$ définie par la E'-catégorie scindée $u^\bullet_{\mathrm{scin}}(F)$ (1.9.4 (3)) est l'image par $u^\bullet$ de la catégorie de $\hat{E}$ définie par F, ce qui donne sous les hypothèses de (ii) un procédé de calcul de $u^\bullet_{\mathrm{scin}}$ que nous allons utiliser pour prouver (iii).

2.3.2.4. Rappelons pour commencer qu'un foncteur est dit i-fidèle s'il est fidèle, pleinement fidèle ou une équivalence selon que $i=0$, 1 ou 2. Ceci dit, soit $m: F \to G$ un morphisme de E-catégories scindées; reprenons pour les catégories de $\hat{E}$ associées à F et G les notations de (1.9.4). On a un carré commutatif dans $\hat{E}$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{fl}(F) & \longrightarrow & \mathrm{fl}(G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Ob}(F) \times \mathrm{Ob}(F) & \longrightarrow & \mathrm{Ob}(G) \times \mathrm{Ob}(G) \end{array} \qquad (1)$$

où les flèches horizontales sont définies par m: $F \to G$ et les flèches verticales par les applications source et but. De (1.5.1) il résulte que pour que m soit pleinement fidèle [resp. fidèle] il faut et il suffit que le carré (1) soit *cartésien* dans $\hat{E}$ [resp. induise un *monomorphisme* de $\mathrm{fl}(F)$ dans le produit fibré du diagramme obtenu en ôtant $\mathrm{fl}(F)$ de (1)]. En vertu de (2.5.2.3) ceci prouve (iii) pour $i=0$ et 1 parce que $u^\bullet$ commute aux limites projectives finies. Il reste à prouver que si m est essentiellement surjectif il en est de même de $u^\bullet_{\mathrm{scin}}(m)$. Or la condition portant sur m signifie qu'un certain morphisme de préfaisceaux d'ensembles dont la source et le but sont définis par limites projectives finies à partir de $\mathrm{ob}(F)$, $\mathrm{ob}(G)$ etc. est *un épimorphisme* (dans $\hat{E}$). D'où la conclusion car $u^\bullet$ transforme épimorphismes en épimorphismes, puisque c'est un adjoint à gauche.

2.4. Les adjoints de $\mathscr{O}ub_u$

2.4.1. Le foncteur $u^{\mathrm{fib}}_\bullet$ n'admet pas, en général, d'adjoint à gauche. En effet, en prenant pour E' la catégorie $0 \to 1$, pour E la sous-catégorie dont l'unique objet est 1, et pour u le foncteur d'inclusion, on voit que le dit adjoint ne peut «être défini» en l'objet final de $\mathsf{Fib}(E)$. Par ailleurs, nous avons construit dans [D 4] un adjoint à droite, mais en supposant que u soit cofibrant. Au numéro suivant nous tournerons ces difficultés en utilisant les résultats du présent numéro et en nous contentant d'une propriété moins forte que la propriété universelle que vérifient des foncteurs adjoints.

Théorème 2.4.2. Soit u: $E \to E'$ un foncteur tel que E et E' appartiennent à U.

(i) Le 2-foncteur $\mathscr{O}ub_u$ de (2.3.1 (5)) admet un 2-adjoint à gauche (2.2.2). Le 2-foncteur sous-jacent est noté

$$\mathscr{G}au_u\colon \mathscr{F}ib(E) \to \mathscr{S}cin(E') \tag{1}$$

et le morphisme de 2-foncteurs est noté

$$\mathrm{gau}_u\colon 1_{\mathscr{F}ib(E)} \to \mathscr{O}ub_u \cdot \mathscr{G}au_u. \tag{2}$$

(ii) Pour toute $F \in \mathrm{Fib}(E)$ et toute $F' \in \mathrm{Scin}(E')$, si l'on pose $F^0 = \mathscr{O}ub_u \cdot \mathscr{G}au_u(F)$ et $\varphi = \mathrm{gau}_u(F)$, alors φ: $F \to F^0$ est un E-foncteur cartésien et *le foncteur composé*

$$\mathsf{Scin}_{E'}(\mathscr{G}au_u(F), F') \xrightarrow{\omega} \mathsf{Cart}_E(F^0, \mathscr{O}ub_u(F')) \xrightarrow{\varphi'} \mathsf{Cart}_E(F, \mathscr{O}ub_u(F'))$$

est un isomorphisme, où ω est induit par $\mathscr{O}ub_u$ et φ' par la composition avec φ.

On notera que (ii) n'est que l'explicitation de la définition.

2.4.2.1. On construit $\mathscr{G}au_u(F)$, $F\in\mathrm{Fib}(F)$, en posant, pour tout $P\in\mathrm{Ob}(E')$

$$\mathscr{G}au_u(F)(P)=\varinjlim(F^{\searrow P}/E^{\searrow P}),\quad (2.1.3)\text{ et }(1.10),\qquad (1)$$

et pour toute flèche $f\colon P\to Q$ de E'

$$\mathscr{G}au_u(F)(f)=\varinjlim(F^{\searrow f}/E^{\searrow f}),\qquad (2)$$

cf. (2.1.3 (4)) et (1.10 (3)). Il est immédiat que (1) et (2) définissent un préfaisceau de catégories sur E', autrement dit une E'-catégorie scindée $\mathscr{G}au_u(F)$. Vu la fonctorialité en F de $F^{\searrow P}$ (2.1.3 (2 bis)), et de $\varinjlim$ (1.10 (4)), on obtient ainsi le 2-foncteur $\mathscr{G}au_u$ annoncé dans (1).

2.4.2.2. Pour décrire gau_u, il faut associer à toute $F\in\mathrm{Fib}(E)$ un E-foncteur cartésien $\varphi=\mathrm{gau}_u(F)$, $\varphi\colon F\to F^0$, où l'on a posé $F^0=\mathscr{O}ub_u\cdot\mathscr{G}au_u(F)$. Nous nous contenterons, pour tout $S\in\mathrm{Ob}(E)$, de décrire le foncteur

$$\varphi_S\colon F_S\to(F^0)_S,\quad (F^0)_S=\varinjlim(F^{\searrow S'}/E^{\searrow S'}),\quad S'=u(S),\qquad (1)$$

induit par φ sur les catégories fibres en S. Pour cela on note d'abord que le carré

$$\begin{array}{ccc} F & \longleftarrow & F^{\searrow S'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \longleftarrow & E^{\searrow S'} \end{array}$$

est cartésien moyennant quoi $\mathrm{b}_F^{S'}\colon F^{\searrow S'}\to F$ induit un *isomorphisme*

$$\beta\colon (F^{\searrow S'})_\sigma\xrightarrow{\approx}F_S\qquad (2)$$

sur les catégories fibres en $\sigma=(S,s)$, $\sigma\in\mathrm{Ob}(E^{\searrow S'})$, et en S, car $\mathrm{b}_E^{S'}(\sigma)=S$. On prend alors pour φ_S le composé

$$F_S\xrightarrow{\beta^{-1}}(F^{\searrow S'})_\sigma\xrightarrow{\iota}F^{\searrow S'}\xrightarrow{\lambda}\varinjlim(F^{\searrow S'}/E^{\searrow S'}),\qquad (3)$$

où ι est le foncteur d'inclusion de la catégorie fibre et où λ est le morphisme structural, cf. (1.10). Il est aisé d'achever la construction de $\varphi=\mathrm{gau}_u(F)$ et de vérifier que l'on obtient un morphisme de 2-foncteurs gau_u.

Corollaire 2.4.2.3. Sous les hypothèses de (2.4.2), si $u\colon E\dashrightarrow E'$ est *pleinement fidèle*, pour toute $F\in\mathrm{Fib}(E)$ le E-foncteur cartésien $\mathrm{gau}_u(F)$ est une *équivalence.*

En effet, d'après (1.5.1), il suffit de vérifier que les φ_S de (2.4.2.2 (1)) sont des équivalences. Or l'hypothèse faite sur u implique que σ est

objet *initial* de $E^{\searrow S'}$. Par suite, dans (2.4.2.2 (3)), le composé $\lambda\iota$ est une équivalence d'après (1.10.2).

2.4.2.4. Pour prouver le théorème (2.4.2), il reste à prouver (ii). Sachant que $\mathscr{G}au_u$ est un 2-foncteur et gau_u un morphisme de 2-foncteurs, il suffit pour cela de trouver, pour tout $F'\in\mathrm{Scin}(E')$, un E'-morphisme de catégories scindées d: $F'_0\to F'$, $F'_0=\mathscr{G}au_u\cdot\mathscr{O}ub_u(F')$, tel que le composé

$$\mathscr{O}ub_u(F')\xrightarrow{g}\mathscr{O}ub_u(F'_0)\xrightarrow{\mathscr{O}ub_u(d)}\mathscr{O}ub_u(F'),$$

où $g=\mathrm{gau}_u(\mathscr{O}ub_u(F'))$, qui est un E-foncteur cartésien, soit le foncteur identique de $\mathscr{O}ub_u(F')$. Nous nous contenterons de définir d, c'est à dire les foncteurs

$$d(P)\colon\ F'_0(P)\to F'(P),\qquad P\in\mathrm{Ob}(E'),$$

laissant les vérifications au lecteur. Posant $F''=F'\times_{E'}E$, on a $F'_0(P)=\varinjlim(F''^{\searrow P}/E^{\searrow P})$. Par la propriété universelle de $\varinjlim$ (1.10) $d(P)$ correspondra à un $(E^{\searrow P})$-foncteur cartésien $F''^{\searrow P}\to F'(P)\times(E^{\searrow P})$. Pour définir ce dernier, nous choisirons même un morphisme de catégories scindées, ou encore, du point de vue préfaisceaux de catégories sur $E^{\searrow P}$, un morphisme

$$\delta(P)\colon\ F''^{\searrow P}\to F'(P)^c,$$

où l'exposant c désigne le préfaisceau constant. Or, pour tout $(S,s)\in\mathrm{Ob}(E^{\searrow P})$, s: $P\to u(S)$, on a

$$F''^{\searrow P}(S,s)=F'\big(u(S)\big).$$

On posera

$$\delta(P)(S,s)=F'(s),\qquad F'(s)\colon\ F'\big(u(S)\big)\to F'(P).$$

C.Q.F.D.

Corollaire 2.4.3. Soit E une catégorie élément de U. Pour toute $F\in\mathrm{Fib}(E)$, il existe une E-catégorie scindée $\mathsf{L}F$ et un E-foncteur cartésien

$$\mathsf{l}F\colon\ F\to\mathsf{L}F \tag{1}$$

tels que

(i) pour toute E-catégorie scindée G le foncteur

$$\mathbf{Scin}_E(\mathsf{L}F,G)\to\mathbf{Cart}_E(F,G),\qquad m\rightsquigarrow m\cdot\mathsf{l}F, \tag{2}$$

est un isomorphisme,

(ii) $\mathsf{l}F$ est une E-équivalence et, pour toute E-catégorie scindée, l'inclusion $\mathbf{Scin}_E(\mathsf{L}F,G)\subset\mathbf{Cart}_E(\mathsf{L}F,G)$ est une équivalence.

Résulte de (2.4.2 (ii)) et (2.4.2.3); on calcule $\mathsf{L}F$ par (2.4.2.1) et (2.4.2.2), en notant qu'ici $E^{\searrow P}$ est la catégorie des objets de E au dessous de P. On dira parfois que $\mathsf{L}F$ est la *catégorie scindée libre associée à F*.

Théorème 2.4.4. Soit $u\colon E \to E'$ un foncteur tel que E et E' appartiennent à U.

(i) Le foncteur $\mathscr{O}ub_u$ de (2.3.1 (5)) admet un 2-adjoint à droite (2.1.2). Le 2-foncteur sous-jacent est noté

$$\mathscr{D}r_u\colon \mathscr{F}ib(E) \to \mathscr{S}cin(E') \tag{1}$$

et le morphisme de 2-foncteurs sous-jacent est noté

$$\mathrm{dr}_u\colon \mathscr{O}ub_u \cdot \mathscr{D}r_u \to \mathrm{id}_{\mathscr{F}ib(E)}. \tag{2}$$

(ii) Pour toute $F \in \mathrm{Fib}(E)$ et toute $F' \in \mathrm{Scin}(E')$, posant $F^* = \mathscr{D}r_u(F) \times_{E'} E$ et $f = \mathrm{dr}_u(F)$, $f\colon F^* \to F$, le foncteur composé

$$\mathbf{Scin}_{E'}(F', \mathscr{D}r_u(F)) \xrightarrow{\omega} \mathbf{Cart}_E(\mathscr{O}ub_u(F'), F^*) \xrightarrow{\varphi} \mathbf{Cart}_E(\mathscr{O}ub_u(F'), F)$$

est un isomorphisme, où ω est induit par $\mathscr{O}ub_u$ et φ par la composition avec f.

On notera que (ii) n'est que l'explicitation de la définition d'un 2-adjoint.

2.4.4.1. Soit $P \in \mathrm{Ob}(E')$. La propriété universelle appliquée à la E'-catégorie scindée $E'_{/P}$ de (2.1.2) fournit un isomorphisme canonique

$$\mathscr{D}r_u(F)(P) \to \mathbf{Cart}_E(E_{/P}, F), \tag{1}$$

car d'une part P est objet final de $E'_{/P}$ et d'autre part, (1.6.3 (4)) s'applique ici, ce qui assure que $\mathscr{D}r_u(F)(P)$ est canoniquement isomorphe à $\mathbf{Scin}_{E'}(E'_{/P}, \mathscr{D}r_u(F))$. On notera que, puisque tous les morphismes de $E_{/P}$ sont E-cartésiens, on a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{Cart}_E(E_{/P}, F) \to \varprojlim(F_{/P}/E_{/P}), \quad (1.6.3\,(2)). \tag{2}$$

Vu la fonctiorialité de $E_{/P}$ en P, (2.1.2 (5)), la formule (1) fournit *un procédé de calcul* de $\mathscr{D}r_u(F)$ et il est évident que l'on obtient ainsi une E'-catégorie scindée $\mathscr{D}r_u(F)$ d'où un 2-foncteur $\mathscr{D}r_u$.

2.4.4.2. Soit $F \in \mathrm{Fib}(E)$. soit $f = \mathrm{dr}_u(F)$, $F^* = \mathscr{O}ub_u \cdot \mathscr{D}r_u(F)$, $f\colon F^* \to F$. Nous décrirons seulement l'action de f sur les catégories fibres en $S \in \mathrm{Ob}(E)$. Posant $S' = u(S)$, on a

$$F^*(S) = \mathscr{D}r_u(F)(S') = \mathbf{Cart}_E(E_{/S'}, F).$$

L'image de l'objet $\sigma = (S, \mathrm{id}_{S'})$ de $E_{/S'}$ par le foncteur $\mathrm{s}^E_{S'}\colon E_{/S'} \to E$ de (2.1.2 (2)) n'est autre que S. Ceci permet de prendre pour f_S le foncteur «valeur en σ»:

$$f_S\colon \mathbf{Cart}_E(E_{/S'}, F) \to F_S, \quad f_S(x) = x(\sigma). \tag{1}$$

Après définition complète de f, on vérifie que l'on a obtcnu le morphisme de 2-foncteurs annoncé dans (2.4.4 (2)).

2.4.4.3. On notera-que, si u est pleinement fidèle, pour toute $F \in \mathrm{Fib}(E)$, le foncteur $\mathrm{dr}_u(F)$ est une équivalence car il en est ainsi de sa restriction aux catégories fibres puisqu'alors σ est objet final de $E_{/S'}$.

2.4.4.4. On achève la preuve de (2.4.4) comme celle de (2.4.2). On notera que si $E = E'$ et $u = \mathrm{id}_E$, on a déjà donné dans [D 5] la théorie de $\mathscr{D}r_u$. Nous reprendrons les mêmes notations et résumerons les résultats y relatifs.

Corollaire 2.4.5. Soient E une catégorie et u le foncteur identique de E. Pour toute $F \in \mathrm{Fib}(E)$ on appelle *E-catégorie des sections cartésiennes* de F et on note $\mathsf{S}F$ la E-catégorie scindée $\mathscr{D}r_u(F)$. Le E-foncteur cartésien $\mathrm{dr}_u(F)$ est noté

$$\mathsf{v}F\colon\ \mathsf{S}F \to F. \tag{1}$$

C'est une équivalence. Il est même surjectif sur les objets. Pour toute $G \in \mathrm{Scin}(E)$, le foncteur

$$\mathsf{Scin}_E(G, \mathsf{S}F) \to \mathsf{Cart}_E(G, F), \qquad m \rightsquigarrow \mathsf{v}F \cdot m, \tag{2}$$

est un *isomorphisme.*

2.4.5.1. Le composé $\mathsf{l}F \cdot \mathsf{v}F\colon\ \mathsf{S}F \to \mathsf{L}F$ *n'est pas*, en général, un morphisme de catégories scindées. (Pour $\mathsf{l}F\colon F \to \mathsf{L}F$, voir 2.4.3.)

2.5. Les 2-foncteurs $u^{\bullet}_{\mathrm{fib}}$ et u^{+}_{fib}

2.5.1. Soit $u\colon E \to E'$ un foncteur tel que E et E' soient éléments de U, fixé jusqu'à la fin de ce numéro. On désignera par

$$u^{\bullet}_{\mathrm{fib}}\colon\ \mathscr{F}ib(E) \to \mathscr{F}ib(E') \tag{1}$$

le 2-foncteur composé $u^{\bullet}_{\mathrm{fib}} = \mathscr{O}ub_{E'} \cdot \mathscr{G}au_u$; on écrira aussi $u^{\bullet}$ si l'on ne peut faire de confusion. On désignera par

$$g_u\colon\ 1_{\mathscr{F}ib_{(E)}} \to u^{\mathrm{fib}}_{\bullet} \cdot u^{\bullet}_{\mathrm{fib}} \tag{2}$$

le morphisme de 2-foncteurs défini par

$$g_u(F) = \mathrm{gau}_u(F), \qquad g_u(F)\colon\ F \to u_{\bullet}u^{\bullet}(F), \qquad F \in \mathrm{Fib}(E). \tag{3}$$

Le couple $(u^{\bullet}, g_u)$, qui se calcule par (2.4.2.1) et (2.4.2.2), se trouve ainsi défini à isomorphisme unique près, cf. (2.1.2) et (2.4.2), ce qui n'apparait pas sur la propriété suivante.

Théorème 2.5.2. Pour toute $F \in \mathrm{Fib}(E)$ et toute $F' \in \mathrm{Fib}(E')$ le foncteur composé

$$\mathbf{Cart}_{E'}(u^\bullet(F), F') \xrightarrow{\upsilon} \mathbf{Cart}_E(F^0, u_\bullet(F')) \xrightarrow{\gamma} \mathbf{Cart}_E(F, u_\bullet(F')) \qquad (1)$$

est *une équivalence de catégories*, où $u_\bullet(F') = F' \times_{E'} E$, où $F^0 = u_\bullet u^\bullet(F) = u_\bullet(F) \times_{E'} E$ et où υ est induit par $u_\bullet$ et γ par la composition avec $g_u(F)$. De plus, si l'on note p la première projection de $F^0 = (u^\bullet(F)) \times_{E'} E$, et si l'on pose

$$g'_u(F) = p \cdot g_u(F), \qquad g'_u \colon F \to u^\bullet(F), \qquad (2)$$

alors $g'_u(F)$ est un u-foncteur cartésien et le foncteur

$$\mathbf{Cart}_u(g'_u(F), F') \colon \mathbf{Cart}_{E'}(u^\bullet(F), F') \to \mathbf{Cart}_u(F, F') \qquad (3)$$

est *une équivalence de catégories.*

On notera que (1) et (3) sont des équivalences simultanément en vertu de (1.6.1 (ii)). Prouvons que (3) est une équivalence et pour cela considérons la catégorie $\mathbf{S}F'$ des sections cartésiennes de F', (2.4.5). Le carré

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Scin}_{E'}(u^\bullet(F), \mathbf{S}F') & \xrightarrow{\gamma} & \mathbf{Cart}_u(F, \mathbf{S}F') \\ \downarrow{\scriptstyle \upsilon} & & \downarrow{\scriptstyle \upsilon'} \\ \mathbf{Cart}_{E'}(u^\bullet(F), F') & \xrightarrow{\gamma'} & \mathbf{Cart}_u(F, F') \end{array},$$

dans lequel les foncteurs verticaux sont induits par la composition avec $\mathbf{v}F' \colon \mathbf{S}F' \to F'$ et les foncteurs horizontaux par la composition avec $g'_u(F) \colon F \to u^\bullet(F)$, est *commutatif* par (1.4 (4)). De plus, γ est un isomorphisme par (2.4.5), υ est un isomorphisme par (2.4.4 (ii)) et (1.6.1 (ii)), car $g'_u(F) = p \cdot g_u(F)$, et enfin υ' est une équivalence par (1.5 (iii)) car $\mathbf{v}F'$ en est une. D'où la conclusion.

Corollaire 2.5.2.1. Supposons que les produits fibrés finis existent dans E et que le foncteur $u \colon E \to E'$ les respecte.

(i) Si $F = \varprojlim F_i$ est une limite projective d'objets de $\mathrm{Fib}(E)$, indexée par une catégorie finie le E'-foncteur cartésien naturel

$$u^\bullet_{\mathrm{fib}}(F) \to \varprojlim(u^\bullet_{\mathrm{fib}}(F_i)) \qquad (1)$$

est une E'-équivalence.

(ii) Si $m \colon F \to G$ est un E-foncteur cartésien i-fidèle (1.5.1.1), ($i = 0$, 1 ou 2), son image $u^\bullet_{\mathrm{fib}}(m)$ est i-fidèle.

2.5.2.2. Vu les problèmes universels que résolvent ces objets, on a un E'-isomorphisme canonique de catégories scindées

$$\mathscr{G}au_u(F) \approx u^\bullet_{\mathrm{scin}}(\mathbf{L}F) \qquad (2)$$

qui est un isomorphisme entre 2-foncteurs de $\mathscr{F}ib(E)$ dans $\mathscr{S}cin(E')$ et qui, par oubli des scindages, fournit un isomorphisme de 2-foncteurs de $\mathscr{F}ib(E)$ dans $\mathscr{F}ib(E')$

$$u^{\bullet}_{\mathrm{fib}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}ub_{E'} \cdot u^{\bullet}_{\mathrm{scin}} \cdot \mathsf{L}. \tag{3}$$

Il est immédiat que le foncteur Oub_u sous-jacent au 2-foncteur $\mathscr{O}ub_u$ commute aux limites projectives quelconques (1.8.2 (iii)) et (1.9.4). Par ailleurs, le foncteur sous-jacent à $u^{\bullet}_{\mathrm{scin}}$ commute aux limites projectives finies (2.3.2 (ii)). Enfin, puisque $\mathsf{l}F\colon F \to \mathsf{L}F$ est une E-équivalence et un morphisme de 2-foncteurs il est clair que le morphisme naturel (de catégories scindées) $\mathsf{L}F \xrightarrow{\lambda} \varprojlim(\mathsf{L}(F_i))$ est une E-équivalence. On en déduit (i) en utilisant le fait que $u^{\bullet}_{\mathrm{scin}}(\lambda)$ est une E-équivalence (2.3.2 (iii)).

2.5.2.3. Vu l'isomorphisme (3), pour prouver (ii) il suffit de remarquer que $\mathsf{l}F\colon F \to \mathsf{L}F$ est une E-équivalence, donc que $\mathsf{L}(m)$ est i-fidèle et d'appliquer (2.3.2 (iii)). On notera que, pour $i=2$, l'assertion résulte trivialement du fait que $u^{\bullet}_{\mathrm{fib}}$ est un 2-foncteur (prendre un quasi-inverse de m). On n'a pu appliquer ce raisonnement pour prouver (2.3.2 (iii)) pour $i=2$ car si $m\colon F \to G$ est un morphisme de catégories scindées et une E-équivalence il n'existe pas forcément de quasi-inverse qui soit un morphisme de catégories scindées.

2.5.3. Sous les hypothèses de (2.5.1), on désigne par

$$u^{+}_{\mathrm{fib}}\colon \mathscr{F}ib(E) \to \mathscr{F}ib(E'), \tag{1}$$

ou encore par u^{+}, le composé $\mathscr{O}ub_{E'} \cdot \mathscr{D}r_u$, (1.9.2) et (2.4.4 (1)) c'est un 2-foncteur. On désignera par

$$d_u\colon u^{\mathrm{fib}}_{\bullet}\, u^{+}_{\mathrm{fib}} \to \mathrm{id}_{\mathscr{F}ib(E)} \tag{2}$$

le morphisme de 2-foncteurs défini par

$$d_u(F) = \mathrm{dr}_u(F), \quad d_u(F)\colon u_{\bullet}\, u^{+}(F) \to F, \quad F \in \mathrm{Fib}(E), \tag{3}$$

cf. (2.4.4 (2)). Le couple (u^{+}, d_u), qui se calcule par (2.4.4.1) et (2.4.4.2), se trouve ainsi défini à isomorphisme unique près, ce que n'assurerait pas le propriété que voici.

Théorème 2.5.4. Soit $u\colon E \to E'$ un foncteur tel que E et E' appartiennent à U. Pour toute $F \in \mathrm{Fib}(E)$ et toute $F' \in \mathrm{Fib}(E')$ le foncteur composé

$$\mathsf{Cart}_{E'}(F', u^{+}(F)) \xrightarrow{u} \mathsf{Cart}_{E}(F'_{\bullet}, F^{1}) \xrightarrow{\delta} \mathsf{Cart}_{E}(F'_{\bullet}, F), \tag{1}$$

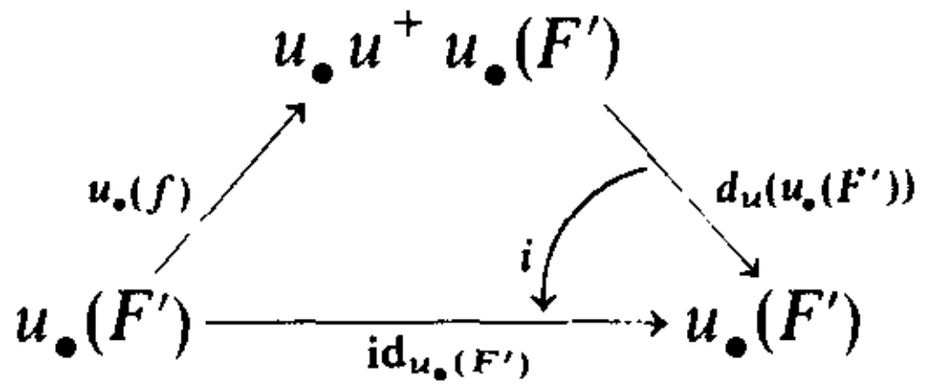
est une *équivalence*, où $F^1 = u_\bullet u^+(F) = u^+(F) \times_{E'} E$, où $F'_\bullet = u_\bullet(F') = F' \times_{E'} E$, où v est induit par le 2-foncteur $u_\bullet$, (2.3.1 (2)), et où δ est induit par la composition avec $d_u(F)$: $u_\bullet u^+(F) \to F$.

2.5.4.1. On prouve ce théorème comme (2.5.2), mais cette fois, en appliquant (2.4.4 (ii)) à F et $\mathrm{L}F'$ et (2.4.3).

2.5.4.2. Soit $F' \in \mathrm{Fib}(E')$. En appliquant le théorème à F' et à $F = u_\bullet(F')$, on trouve qu'il existe un E'-foncteur cartésien

$$f\colon\ F' \to u^+ u_\bullet(F') \tag{2}$$

et un E-isomorphisme i entre E-foncteurs cartésiens



le couple (f, i) étant unique à isomorphisme unique près.

Corollaire 2.5.5. Soit $F \in \mathrm{Fib}(E)$.

(i) Pour toute E'-catégorie fibrée en groupoïdes X', le foncteur

$$\varprojlim(u^+(F) \times_{E'} X'/X') \to \varprojlim(F \times_E X/X), \qquad X = X' \times_{E'} X, \tag{1}$$

induit par le changement de base $X \to X'$ (1.6.2.1 (1)) et par la composition avec $d_u(F)$ est une *équivalence.*

(ii) Pour toute E'-catégorie discrète X' [c'est à dire scindée à fibres discrètes] l'inclusion

$$\varprojlim(u^+(F) \times_{E'} X'/X') \subset \varprojlim(u^+(F) \times_{E'} X'/X') \tag{2}$$

de (1.1.5 (4)) est une *équivalence* et le composé de (2) et de (1)

$$\varprojlim(u^+(F) \times_{E'} X'/X') \to \varprojlim(F \times_E X/X), \qquad X = X' \times_{E'} X, \tag{3}$$

est un isomorphisme.

Via l'isomorphisme (1.6.3 (2)), le foncteur (1) s'identifie à l'équivalence (2.5.4 (1)). De même, via l'isomorphisme (1.6.3 (4)), le foncteur (3) s'identifie à l'isomorphisme de (2.4.4 (ii)). D'où le corollaire.

Proposition 2.5.6. Soient $E \underset{u}{\overset{v}{\leftrightarrows}} E'$ deux foncteurs tels que v soit *adjoint à gauche* de u et tels que E et E' appartiennent à U.

(i) On a un isomorphisme canonique de 2-foncteurs entre $\mathscr{D}r_v$ et le 2-foncteur composé

$$\mathscr{F}ib(E') \xrightarrow{\mathbf{S}} \mathscr{S}ci\,n(E') \xrightarrow{u_\bullet^{\mathbf{scin}}} \mathscr{S}ci\,n(E). \tag{1}$$

(i bis) Pour toute $F' \in \mathrm{Fib}(E')$ on a un *isomorphisme canonique* de E-catégories scindées

$$v^+(F') \approx u_\bullet(\mathbf{S}F'), \quad u_\bullet(\mathbf{S}F') = \mathbf{S}F' \times_{E'} E, \tag{2}$$

et une *E-équivalence* de catégories fibrées

$$v^+(F') \to F' \times_{E'} E. \tag{3}$$

(ii) On a un isomorphisme canonique de 2-foncteurs entre $\mathscr{G}au_u$ et le 2-foncteur composé

$$\mathscr{F}ib(E) \xrightarrow{\mathbf{L}} \mathscr{S}ci\,n(E) \xrightarrow{v_\bullet^{\mathbf{scin}}} \mathscr{S}ci\,n(E'). \tag{4}$$

(ii bis) Pour toute $F \in \mathrm{Fib}(E)$ on a un isomorphisme canonique de E'-catégories scindées

$$u^\bullet(F) \approx v_\bullet(\mathbf{L}F), \quad v_\bullet(\mathbf{L}F) = \mathbf{L}F \times_E E', \tag{5}$$

et une E'-équivalence de catégories fibrées

$$F \times_E E' \xrightarrow{\approx} u^\bullet(F). \tag{6}$$

2.5.6.1. Par la formule d'adjonction entre u et v

$$\mathrm{Hom}_E(v(X'), X) \approx \mathrm{Hom}_{E'}(X', u(X)), \tag{7}$$

où $X' \in \mathrm{Ob}(E')$, $X \in \mathrm{Ob}(E)$, on trouve, pour tout $X \in \mathrm{Ob}(E)$, un E'-isomorphisme de catégories

$$E'_{/u(X)} \approx E'_{/X}, \tag{8}$$

qui est fonctoriel en X. D'où des isomorphismes

$$\mathbf{Cart}_{E'}(E'_{/u(X)}, F) \approx \mathbf{Cart}_{E'}(E'_{/X'}, F) \tag{9}$$

qui d'après (2.4.5) et (2.4.4.1) s'écrivent

$$\mathbf{S}F'(u(X)) \approx \mathscr{D}r_v(F')(X) \approx v^+(F')(X). \tag{10}$$

Etant fonctoriels en X, ils définissent un E-isomorphisme

$$\mathbf{S}F' \times_{E'} E \approx \mathscr{D}r_v(F'), \tag{11}$$

qui n'est autre que (2), écrit autrement. Par les formules de commutation de (1.4 (4)), il est immédiat que (11) définit l'isomorphisme de 2-foncteurs annoncé dans (i). Pour achever la preuve de (i bis), il suffit de composer

l'isomorphisme (2) avec la E-équivalence

$$u_\bullet(\mathsf{v}\,F')\colon\ u_\bullet(\mathsf{S}\,F')\to u_\bullet(F')$$

déduite par le changement de base $u\colon E\to E'$ de l'équivalence de catégories $\mathsf{v}\,F'\colon\ \mathsf{S}\,F'\to F'$, (2.4.5).

2.5.6.2. On prouve de même (ii) et (ii bis), en se reportant aux formules de définition de $\mathsf{L}\,F$ et de $u^\bullet(F)$.

Proposition 2.5.7. Soient $E\underset{u}{\overset{v}{\leftrightarrows}}E'$ deux foncteurs tels que E et E' appartiennent à U et soit $m\colon \mathrm{id}_{E'}\xrightarrow{\sim} u\,v$ un morphisme de foncteurs qui fasse de v un adjoint à gauche de u. Supposons que u soit pleinement fidèle.

(i) Pour toute E'catégorie fibrée F' les conditions suivantes sont équivalentes:

(a) il existe une E-catégorie fibrée F et une E'-équivalence $F'\approx v_\bullet(F)$;

(b) pour tout $X'\in\mathrm{Ob}(E')$, le foncteur image inverse $F_{uv(X')}\to F_{X'}$ attaché à $m(X')\colon X'\to u\,v(X')$ est une équivalence;

(c) pour tout clivage c de F', la foncteur naturel $v_\bullet u_\bullet(F')\to F'$ [D 1.17] est une E'-équivalence.

(ii) Si F' et G' sont deux E'-catégories fibrées et si F' vérifie (i)(a), le foncteur induit par le changement de base u

$$\mathsf{Cart}_{E'}(F',G')\to\mathsf{Cart}_E\big(u_\bullet(F'),u_\bullet(G')\big)\qquad(1)$$

est une équivalence de catégories.

(iii) Si F et G sont deux E-catégories fibrées, le foncteur induit par le changement de base v

$$\mathsf{Cart}_E(F,G)\to\mathsf{Cart}_{E'}\big(v_\bullet(F),v_\bullet(G)\big)\qquad(2)$$

est une équivalence.

2.5.7.1. Par construction, le foncteur $v_\bullet u_\bullet(F')\to F'$ de [D 1.17] induit sur les fibres en X' le foncteur image inverse attaché à $m(X')$, donc (b) équivaut à (c). Par ailleurs (c) entraine (a). Enfin (a) entraine (b), car l'image de $m(X')$ par v est un isomorphisme, puisque u est pleinement fidèle. Ce qui prouve (i).

2.5.7.2. Prouvons (ii). On peut évidemment remplacer F' par une catégorie E'-équivalente et donc supposer que $F'=v_\bullet(\mathsf{L}F)$, où F est une E-catégorie fibrée; en effet, $\mathsf{L}F$ est E-équivalente à F, (2.4.3 (ii)). D'après (2.5.6 (ii bis)), on peut donc supposer que $F'=u^\bullet(F)$, $F\in\mathrm{Fib}(E)$. Mais

alors, puisque u est pleinement fidèle, le foncteur $F \to u_\bullet u^\bullet(F)$ est une E-équivalence (2.4.2.3), donc (1) est une équivalence, d'après la «propriété universelle» de $u^\bullet(F)$ (2.5.2 (1)). Il reste à prouver (iii). D'après (ii), il suffit de montrer que le composé de (2) et du foncteur induit par le changement de base u

$$\mathsf{Cart}_{E'}(v_\bullet(F), v_\bullet(G)) \to \mathsf{Cart}_E(u_\bullet v_\bullet(F), u_\bullet v_\bullet(G))$$

est une équivalence de catégories. Par transitivité du changement de base, ce composé est induit par le changement de base $v u$: $E \to E$ et celui-ci est isomorphe à id_E car u est pleinement fidèle, d'où la conclusion, en invoquant à nouveau [D 1.17] si l'on y tient.

Remarque 2.5.8. Soit u: $E \to E'$ une équivalence de catégories. Un quasi-inverse de u est évidemment un adjoint à gauche ce qui permet d'appliquer la proposition précédente; on notera que les conditions de (i) sont toujours vérifiées car m est ici un isomorphisme.

2.6. Les préfaisceaux de S-morphismes

2.6.1. La catégorie fibrée des préfaisceaux

2.6.1.1. Soient E une U-catégorie, $\hat{E} = \mathsf{Hom}(E^0, \text{U-ens})$ la catégorie des U-préfaisceaux d'ensembles sur E et

$$\eta\colon\ E \to \hat{E}, \qquad \eta(S) = \mathrm{Hom}(*, S), \tag{1}$$

le foncteur habituel, [ramené dans U grâce au symbole τ, cf. [SGA 4 I 1.3]]. Puisque les produits fibrés finis existent dans $\hat{E}$, la $\hat{E}$-catégorie $\mathsf{Fl}(\hat{E})$ des flèches de E [dont les objets de projection P sont les flèches $P' \to P$ de $\hat{E}$] est *fibrée* sur $\hat{E}$. On désigne par

$$\mathrm{PREF}(E) \tag{2}$$

la E-catégorie fibrée qui s'en déduit par le changement de base η et on l'appelle *catégorie fibrée des* U-*préfaisceaux d'ensembles sur* E. Par définition, sa fibre en $S \in \mathrm{Ob}(E)$ est canoniquement isomorphe à

$$\hat{E}_{/\eta(S)}, \qquad S \in \mathrm{Ob}(E). \tag{3}$$

2.6.1.2. Soit maintenant

$$\mathrm{PREFSCIN}^+(E) \tag{1}$$

la $\hat{E}$-*catégorie scindée* obtenue en associant à tout $P \in \mathrm{Ob}(\hat{E})$ la catégorie $\widehat{(E_{/P})}$ des U-préfaisceaux d'ensembles sur la catégorie $E_{/P}$ obtenue par le procédé de (2.1.2) à partir du foncteur η: $E \to \hat{E}$ et $P \in \mathrm{Ob}(\hat{E})$. Le

foncteur image inverse relatif à une flèche $m: P \to Q$ de $\hat{E}$ est défini par la composition avec le foncteur

$$E_{/m}: E_{/P} \to E_{/Q}$$

décrit dans (2.1.2 (5)). On a un $\hat{E}$-foncteur

$$\mathsf{Fl}(\hat{E}) \to \mathrm{PREFSCIN}^{+}(E), \quad (X/P) \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{P}(*, X), \tag{2}$$

qui est *cartésien*, cette assertion triviale signifiant que le foncteur image inverse de $\mathsf{Fl}(\hat{E})$ relatif à une flèche $m: P \to Q$ de $\hat{E}$, qui n'est autre que $(Q'/Q) \rightsquigarrow (Q' \times_{Q} P/P)$ s'interprète comme le foncteur obtenu par composition avec $E_{/m}$.

Lemme 2.6.1.3. Soit E une U-catégorie. Le foncteur (2) est une $\hat{E}$-équivalence de catégories.

D'après (1.5.1), il suffit de prouver que les foncteurs induits sur les fibres en $P \in \mathrm{Ob}(\hat{E})$

$$\hat{E}_{/P} \to (E_{/P})\hat{}, \quad (P'/P) \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{P}(*, P'), \tag{1}$$

sont des *équivalences*. Ils sont *pleinement fidèles* par une conséquence triviale du fait que $\eta: E \to \hat{E}$ l'est. Supposons pour commencer que E *appartienne à* U. Il en résulte immédiatement que la source et le but de (1) sont des U-topos. Par ailleurs, vu le calcul des limites inductives et projectives dans une catégorie de préfaisceaux, et le fait que les premières sont universelles, il est immédiat que (1) commute aux limites inductives et projectives quelconques. D'où la conclusion dans ce cas, en notant que les objets $\eta(S) \xrightarrow{s} P$, $(S, s) \in \mathrm{Ob}(E_{/P})$ forment une U-famille de générateurs topologiques de $\hat{E}_{/P}$ dont l'image par (1) est la famille de générateurs formée par les préfaisceaux représentés par les (S, s). Si l'on suppose seulement que E est une U-catégorie, on introduit un univers V auquel appartient E, avec $\mathsf{U} \in \mathsf{V}$, et on note que si $P' \to P$ est un morphisme de V-préfaisceaux tel que P soit un U-préfaisceau et tel que $\mathrm{Hom}_{P}(*, P')$ soit un U-préfaisceau sur $E_{/P}$ alors P' est isomorphe à un U-préfaisceau. On trouvera dans [SGA 3 I 1.4.1], une construction d'un foncteur quasi-inverse de (1) lorsque P est représentable qui se généralise aisément au cas présent.

2.6.1.4. On désignera par

$$\mathrm{PREFSCIN}(E) \tag{1}$$

la *E-catégorie scindée* déduite de $\mathrm{PREFSCIN}^{+}(E)$ par le changement de base $\eta: E \to \hat{E}$. Comme on a des isomorphismes canoniques évidents

$$E_{/S} \approx E_{/\eta(S)}, \quad S \in \mathrm{Ob}(E), \tag{2}$$

elle est *E-isomorphe* à la E-catégorie scindée

$$S \rightsquigarrow (E_{/S})\hat{}. \tag{3}$$

Le lemme précédent fournit une E-équivalence

$$\mathrm{PREF}(E) \to \mathrm{PREFSCIN}(E), \qquad P \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\eta(S)}(*, P), \tag{4}$$

qui, sur les fibres, fournit les équivalences habituelles

$$\hat{E}_{/\eta(S)} \to (E_{/S})\hat{}, \tag{5}$$

le fait que (4) est E-cartésien résumant les compatibilités que l'on trouvera en détail dans [SGA 3 I 1.6].

2.6.1.5. Le foncteur $\mathsf{Fl}(\eta)\colon \mathsf{Fl}(E) \to \mathsf{Fl}(\hat{E})$ définit un *E-foncteur cartésien pleinement fidèle*

$$\mathsf{Fl}(E) \to \mathrm{PREF}(E) \tag{1}$$

dont le composé avec (2.6.1.4 (4)) n'est autre que

$$\mathsf{Fl}(E) \to \mathrm{PREFSCIN}(E), \qquad (X/S) \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_S(*, S), \tag{2}$$

autrement dit induit sur les fibres les foncteurs classiques $E_{/S} \to (E_{/S})\hat{}$.

2.6.2. Préfaisceaux $\mathbf{Hom}_S(x, y)$ dans une catégorie scindée

2.6.2.1. Soit F une E-catégorie scindée, F et E éléments de U. Pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$ et tout couple (x, y) d'objets de F_S, nous considérons le préfaisceau sur $E_{/S}$

$$\mathsf{Hom}_S(x, y) \tag{1}$$

qui, pour tout *objet* $f\colon T \to S$ de $E_{/S}$, vaut

$$\mathsf{Hom}_S(x, y)(f) = \mathrm{Hom}_T(x^f, y^f), \tag{2}$$

où x^f et y^f sont les images inverses de x et y par f. Puisque F est *scindée* on obtient bien ainsi un préfaisceau sur $E_{/S}$. On a évidemment une bijection canonique

$$\mathrm{Hom}_S(x, y) \xrightarrow{\sim} \Gamma(S, \mathsf{Hom}_S(x, y)) \tag{3}$$

et des accouplements

$$\mathsf{Hom}_S(x, y) \times \mathsf{Hom}_S(y, z) \to \mathsf{Hom}_S(x, z); \qquad x, y, z \in \mathrm{Ob}(F_S) \tag{4}$$

qui par passage aux sections redonnent, grâce à (3), la loi de composition de la catégorie fibre F_S.

Pour toute flèche $f\colon T\to S$ de E et tout couple (x, y) d'objets de F_S on a

$$\mathbf{Hom}_S(x, y)^f = \mathbf{Hom}_T(x^f, y^f), \tag{5}$$

où l'exposant f désigne la restriction à $E_{/T}$, i.e. le foncteur image inverse dans la catégorie PREFSCIN(E) de (2.6.1.2 (1)). Enfin, pour tout morphisme de catégories scindées, $u\colon F\to G$, tout $S\in\mathrm{Ob}(E)$, et tout couple (x, y) d'objets de F_S, on a un morphisme de préfaisceaux

$$\mathbf{Hom}_S(x, y)\to \mathbf{Hom}_S\big(u(x), u(y)\big) \tag{6}$$

qui, par passage aux sections, redonne l'action de u sur les flèches de F_S.

2.6.2.2. En vertu de (1.9.4), une E-catégorie scindée F détermine une catégorie de $\hat{E}$. Si (x, y) est un couple d'objets de F_S et si

$$x, y\colon \eta(S)\rightrightarrows ob(F) \tag{1}$$

sont les morphismes de préfaisceaux d'ensembles qui leur correspondent (1.9.4 (4)), on a un carré *cartésien* dans $\hat{E}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Hom}_S(x, y) & \longrightarrow & fl(F) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (s,\, b)} \\ \eta(S) & \xrightarrow[(x,\, y)]{} & ob(F)\times ob(F) \end{array} \tag{2}$$

où l'on gardé les notations de (1.9.4) et où la flèche verticale de gauche (de $\hat{E}$) correspond par l'équivalence $\hat{E}_{/\eta(S)}\xrightarrow{\approx}(E_{/S})\hat{}$ (2.6.1.4 (5)) au préfaisceau $\mathbf{Hom}_S(x, y)$ sur $E_{/S}$.

2.6.3. Dans une catégorie fibrée

2.6.3.1. Pour étendre cette construction à une E-catégorie fibrée F, on considère le foncteur $\mathbf{l}F\colon F\to \mathbf{L}F$, où $\mathbf{L}F$ est la E-catégorie scindée libre associée à F, (2.5.3), et on pose

$$\mathbf{Hom}_S(x, y) = \mathbf{Hom}_S\big(\mathbf{l}F(x), \mathbf{l}F(y)\big). \tag{1}$$

Par la propriété universelle de $\mathbf{L}F$, on obtiendrait les mêmes préfaisceaux, à isomorphisme canonique près, en remplaçant $\mathbf{l}F$ par un E-foncteur cartésien pleinement fidèle $f\colon F\to F'$ tel que F' soit scindée. Grâce à l'équivalence (2.6.1.2 (1)) il est possible de considérer $\mathbf{Hom}_S(x, y)$ comme un S-objet de $\hat{E}$, ce que nous ferons souvent.

2.6.3.2. Les propriétés établies au numéro précédent s'étendent immédiatement et l'on a une bijection

$$\mathrm{Hom}_S(x, y)\xrightarrow{\sim}\Gamma\big(S, \mathbf{Hom}_S(x, y)\big), \tag{1}$$

et des accouplements

$$\mathbf{Hom}_S(x, y) \times_S \mathbf{Hom}_S(y, z) \to \mathbf{Hom}_S(x, z), \tag{2}$$

qui par passage aux sections sur S redonnent la loi de composition de F_S. Si x' et y' sont des images inverses de x et y par un morphisme $S' \to S$ de E, on a un isomorphisme canonique (et non plus égalité)

$$\mathbf{Hom}_S(x, y) \times_S S' \to \mathbf{Hom}_{S'}(x', y') \tag{3}$$

«compatible» avec (1) et (2) en un sens évident. Enfin, si $u\colon F \to F'$ est un E-foncteur cartésien, $\mathbf{L}u\colon \mathbf{L}F \to \mathbf{L}F'$ est un E-morphisme de catégories scindées et l'on a un S-morphisme

$$\mathbf{Hom}_S(x, y) \to \mathbf{Hom}_S(u(x), u(y)) \tag{4}$$

qui, par passage aux sections, redonne l'action de u sur les catégories fibres en S.

2.6.3.3. Si F est munie d'un *clivage* c, on peut calculer $\mathbf{Hom}_S(x, y)$ sans recours à $\mathbf{L}F$. Il suffit de copier la définition donnée dans le cas d'un scindage, en tenant compte des isomorphismes de transitivité de l'image inverse. Ainsi, pour $F = \mathbf{Fl}(E)$, si les produits fibrés finis existent dans E et si on les a choisis, pour tout couple (x, y) de S-objets de E, (i.e. d'objets de F_S), on retrouve par ce procédé le S-préfaisceau habituel $\mathbf{Hom}_S(x, y)$. On pourrait aussi le décrire sans choisir de produits fibrés grâce au foncteur (2.6.1.2 (2)).

2.6.5. Effet d'un changement de base

2.6.5.1. Soit $u\colon E \to E'$ un foncteur tel que E et E' appartiennent à $\mathbf{U}$, fixé jusqu'à la fin de ce paragraphe. Soit $S \in \mathrm{Ob}(E)$, $S' = u(S)$. On notera

$$u_{S\bullet}\colon \widehat{E'_{/S'}} \to \widehat{E_{/S}} \tag{1}$$

le foncteur induit par la composition avec $u_{/S}\colon E_{/S} \to E'_{/S'}$, cf. (2.1.2), et

$$u_S^{\bullet} \quad (\text{resp. } u_S^{+}) \tag{2}$$

l'adjoint à gauche (resp. droite) du précédent, (2.1.1).

2.6.5.2. Soit $G' \in \mathrm{Fib}(E')$. Posons $G = u_{\bullet}(G') = G' \times_{E'} E$. Pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$, la première projection de G induit sur les catégories fibres un isomorphisme $p_S\colon G_S \xrightarrow{\sim} G'_{S'}$, $S' = u(S)$, et, par suite, à tout couple (x, y) d'objets de G_S correspond un couple (x', y') d'objets de $G'_{S'}$. On a un

isomorphisme canonique

$$\mathbf{Hom}_S(x, y) \xrightarrow{\sim} u_{S.}(\mathbf{Hom}_{S'}(x', y')) \tag{1}$$

qui, par passage aux sections redonne, via (2.6.3.2 (1)) l'action du foncteur p_S sur les flèches. Cela est clair: il suffit de regarder la définition des $\mathbf{Hom}_S(x, y)$.

2.6.5.3. Soit $F \in \mathrm{Fib}(E)$, soit $F^\bullet = u^\bullet(F)$ et soit $g_u(F)$: $F \to F^\bullet \times_{E'} E$ le morphisme structural, (2.5.1). Pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$ et tout couple (x_0, y_0) d'objets de F_S, notant (x, y) les images de (x_0, y_0) par $g_u(F)$ et (x', y') les images de ceux-ci par l'isomorphisme

$$p_S\colon (F^\bullet \times_{E'} E)_S \xrightarrow{\sim} (F^\bullet)_{S'}, \qquad S' = u(S),$$

[qui sont aussi les images de (x_0, y_0) par le u-foncteur cartésien $g'_u(F)$: $F \to F^\bullet$, cf. (2.5.2 (2))], le foncteur $g_u(F)$ induit un morphisme

$$\mathbf{Hom}_S(x_0, y_0) \to \mathbf{Hom}_S(x, y) \tag{1}$$

qui, compte tenu de l'isomorphisme (2.6.5 (1)), et de la propriété d'adjonction de $u_S^\bullet$ et $u_{S.}$ définit un morphisme

$$u_S^\bullet(\mathbf{Hom}_S(x_0, y_0)) \to \mathbf{Hom}_{S'}(x', y'). \tag{2}$$

Celui-ci est un *isomorphisme*, du moins si les limites projectives finies existent dans E et si le foncteur $u\colon E \to E'$ les respecte.

En effet, dans ce cas, le 2-foncteur $u_\bullet^{\mathrm{scin}}$ admet un 2-adjoint à gauche $u_{\mathrm{scin}}^\bullet$, (2.3.2 (ii)), et l'on a un isomorphisme canonique

$$\mathscr{G}au_u(F) \to u_{\mathrm{scin}}^\bullet(\mathsf{L}F) \tag{3}$$

comme le montrent les définitions et l'unicité du 2-adjoint. Puisque $\mathsf{l}F\colon F \to \mathsf{L}F$ est une équivalence, on voit aisément qu'il suffit de prouver que l'analogue de (2) obtenu en supposant F scindée et en remplaçant $u_{\mathrm{fib}}^\bullet(F)$ par $u_{\mathrm{scin}}^\bullet(F)$ est un isomorphisme. Or le foncteur sous-jacent au 2-foncteur $u_{\mathrm{scin}}^\bullet$ est un adjoint à gauche du foncteur sous-jacent à $u_\bullet^{\mathrm{scin}}$ et se calcule par le procédé général pour les préfaisceaux d'ensembles munis de structures algébriques [SGA 4 III 1.8] d'où la conclusion (1.9.4).

2.6.5.4. Soit $F \in \mathrm{Fib}(E)$, soit $F' = u^+(F)$ et soit $d_u(F)$: $F' \times_{E'} E \to F$ le morphisme structural, (2.5.3). Soit $S \in \mathrm{Ob}(E)$, $S' = u(S)$. A tout couple (x', y') d'objets de $F'_{S'}$ est associé, par l'isomorphisme $(F' \times_{E'} E)_S \xrightarrow{\approx} F'_{S'}$, un couple (x, y) d'objets de $(F' \times_{E'} E)_S$ dont l'image par $d_u(F)$ est un couple (x_0, y_0) d'objets de F_S. Le foncteur $d_u(F)$ induit un morphisme de préfaisceaux sur $E_{/S}$

$$\mathbf{Hom}_S(x, y) \to \mathbf{Hom}_S(x_0, y_0) \tag{1}$$

qui, par (2.6.5.2 (1)) et la propriété d'adjonction de u_S^+ et de $u_{S\cdot}$ définit un morphisme de préfaiseaux sur $E'_{/S'}$

$$\mathsf{Hom}_{S'}(x', y') \to u_S^+(\mathsf{Hom}_S(x, y)). \tag{2}$$

Celui-ci est un *isomorphisme* comme le montre le calcul de $u^+(F)$.

§ 3. Extension à $\hat{E}$ d'une E-catégorie fibrée

3.1. Univers

3.1.1. Jusqu'à la fin du chapitre suivant, nous fixons deux univers U et V vérifiant $\mathsf{U} \in \mathsf{V}$. Sauf mention expresse du contraire, pour tout U-catégorie E, on posera

$$\hat{E} = \mathsf{Hom}(E^0, \mathsf{U}\text{-ens}) \tag{1}$$

et si l'on doit considérer l'analogue relatif à V on la désignera par $\hat{E}_{\mathsf{V}}$. En revanche, les 2-catégories $\mathscr{Fib}(E)$, $\mathscr{Fib}(\hat{E})$, $\mathscr{Scin}(E)$, $\mathscr{Scin}(\hat{E})$ et leurs ensembles d'objets seront relatifs à l'univers V, ce que l'on indiquera parfois par l'indice V: par exemple $\mathscr{Fib}(E)_{\mathsf{V}}$.

3.1.2. Enfin, si E est une U-catégorie, on désignera par

$$\eta\colon\ E \to \hat{E}, \qquad \eta(S)(T) = \mathrm{Hom}(T, S), \qquad (0\ 2.4) \tag{1}$$

le foncteur habituel, ramené dans U grâce au symbole τ comme dans [SGA 4 I 1.3].

3.2. L'extension canonique à $\hat{E}$

Convention 3.2.1. Soit E une U-catégorie élément de V. Pour toute E-catégorie fibrée

$$f\colon\ F \to E$$

nous désignerons par

$$F_{/P}, \qquad P \in \mathrm{Ob}(\hat{E}), \tag{1}$$

la catégorie obtenue en appliquant le procédé de (2.1.2) au foncteur composé

$$F \xrightarrow{f} E \xrightarrow{\eta} \hat{E}.$$

Si $F = E$, on trouve la catégorie $E_{/P}$ dont les objets sont les (S, s), $S \in \mathrm{Ob}(E)$, $s \in \mathrm{Hom}(\eta(S), P) = P(S)$. Elle s'identifie canoniquement à la E-catégorie fibrée associée par le procédé de [SGA 1 VI 8)] ou de [D 5 (a)] au préfaisceau de catégories $S \rightsquigarrow P(S)$, où l'ensemble $P(S)$ est considéré

comme une catégorie discrète. D'après (2.1.2 (4)), le carré ci-dessous est *cartésien*

$$\begin{array}{ccc} F & \xleftarrow{s_P^F} & F_{/P} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{/P}} \\ E & \xleftarrow[s_P^E]{} & E_{/P} \end{array}, \quad P \in \mathrm{Ob}(\hat{E}), \tag{2}$$

et, pour tout E-foncteur cartésien $m\colon F \to G$ le foncteur

$$m_{/P}\colon F_{/P} \to G_{/P}, \quad P \in \mathrm{Ob}(\hat{E}), \tag{3}$$

est un $E_{/P}$-foncteur cartésien car il se déduit de m par le changement de base $E_{/P} \to E$.

Nous considérons toujours $F_{/P}$ comme une $E_{/P}$-catégorie fibrée grâce au foncteur $f_{/P}\colon F_{/P} \to E_{/P}$, (2.1.2 (1)).

Pour terminer, remarquons que l'on a un isomorphisme canonique de E-catégories, fonctoriel en S,

$$E_{/S} \xrightarrow{\sim} E_{/\eta(S)}, \quad S \in \mathrm{Ob}(E), \tag{4}$$

où $E_{/S}$ désigne comme toujours la catégorie de E au dessus de S.

Définition 3.2.2. Soit E une U-catégorie appartenant à V. Soit $\eta\colon E \to \hat{E}$ le foncteur de (3.2.1 (1)).

(i) Pour toute $F \in \mathrm{Fib}(E)$, on appelle *extension canonique de F à $\hat{E}$* la $\hat{E}$-catégorie scindée

$$F^+ = \mathscr{D}r_\eta(F), \quad (2.4.4). \tag{1}$$

(ii) Pour tout E-foncteur cartésien $m\colon F \to G$, on appelle *extension canonique de m à $\hat{E}$* le morphisme de $\hat{E}$-catégories scindées

$$m^+\colon F^+ \to G^+, \quad m^+ = \mathscr{D}r_\eta(m). \tag{2}$$

Cette terminologie est justifiée par (3.2.3) et (II 3.3.5) ci-dessous.

3.2.2.1. On rappelle que l'on a un E-foncteur cartésien

$$\mathrm{dr}_\eta(F)\colon F^+ \times_{\hat{E}} E \to F, \quad (2.4.4\,(2)), \tag{1}$$

et que, pour toute $\hat{E}$-catégorie *scindée* G on a un isomorphisme (2.4.4 (ii))

$$\mathbf{Scin}_{\hat{E}}(G, F^+) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Cart}_E(G, F), \quad f \rightsquigarrow \mathrm{dr}_\eta(F) \cdot \eta_\bullet(F), \tag{2}$$

et pour toute $\hat{E}$-catégorie *fibrée* G une équivalence (2.5.4)

$$\mathbf{Cart}_{\hat{E}}(G, F^+) \xrightarrow{\approx} \mathbf{Cart}_E(G, F), \quad f \rightsquigarrow \mathrm{dr}_\eta(F) \cdot \eta_\bullet(f). \tag{3}$$

3.2.2.2. D'après (2.4.4.1), pour tout $P \in \mathrm{Ob}(\hat{E})$, on a

$$F^+(P) = \mathbf{Cart}_E(E_{/P}, F) \approx \varprojlim (F_{/P}/E_{/P}) \tag{1}$$

où $F_{/P}$ est décrite par (3.2.1(1)), le foncteur image inverse $F^+(P) \to F^+(Q)$ correspondant à un morphisme $Q \to P$ de $\hat{E}$ étant défini par la composition avec le foncteur naturel $E_{/Q} \to E_{/P}$.

Corollaire 3.2.3. Sous les hypothèses de (3.2.2), on a un isomorphisme canonique de E-catégories scindées

$$i\colon\ F^+ \times_{\hat{E}} E \xrightarrow{\sim} \mathbf{S}F, \tag{1}$$

où $\mathbf{S}F$ est la catégorie des sections cartésiennes de F, (2.4.5). Le composé

$$\mathbf{v}F \cdot i\colon\ F^+ \times_{\hat{E}} E \xrightarrow{i} \mathbf{S}F \xrightarrow{\mathbf{v}F} F \tag{2}$$

est égal à $\mathrm{dr}_\eta(E)$. *C'est une équivalence de catégories.* Pour F variable, les morphismes (2) définissent un morphisme de 2-foncteurs.

Par la propriété universelle de $\mathbf{S}F$ (2.2.5), la relation $\mathrm{dr}_\eta(F) = \mathbf{v}F \cdot i$ caractérise i. C'est un isomorphisme car, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(\mathrm{E})$, le foncteur

$$i(S)\colon\ F^+(\eta(S)) \to \mathbf{S}F(S)$$

s'identifie au foncteur $\mathbf{Cart}_E(E_{/\eta(S)}, F) \to \mathbf{Cart}_E(E_{/S}, F)$ induit par *l'isomorphisme* $E_{/S} \xrightarrow{\sim} E_{/\eta(S)}$ de (3.2.1(4)). La seconde assertion du corollaire résulte du fait que $\mathbf{v}F$ est une équivalence. On notera qu'il résulte maintenant de (2.2.5) que, pour tout $P \in \mathrm{Ob}(\hat{E})$, des deux foncteurs

$$F^+(P) \to \varprojlim (\mathbf{S}F_{/P}/E_{/P}) \to \varprojlim (\mathbf{S}F_{/P}/E_{/P}) \tag{3}$$

le premier est un *isomorphisme* et le second une *équivalence.*

Proposition 3.2.4. Soient E un U-site élément de V et $F \in \mathrm{Fib}(E)$.

(i) Soit $P = \varinjlim P_i$ une limite inductive dans $\hat{E}$. Le foncteur naturel $F^+(P) \to \varprojlim F^+(P_i)$ est un *isomorphisme.*

(ii) F^+ est un faisceau de catégories sur $\hat{E}$ pour la topologie canonique.

En effet, (ii) résulte de (i) qui résulte de [D 1.11(iii)] et de la formule (3.2.2.2(1)) car $E_{/P}$ est limite inductive des $E_{/P_i}$.

Grâce à la notion de champs nous parferons au chapitre suivant la correspondance entre E-catégories fibrées et $\hat{E}$-catégories fibrées. Dès maintenant nous pouvons donner une propriété de stabilité:

Proposition 3.2.5. Soit E une U-catégorie qui appartient à V. Soit (F, G) un couple d'éléments de $\mathrm{Fib}(E)$.

(i) Les foncteurs

$$\mathbf{Cart}_E(F, G) \xrightarrow{\pi'} \mathbf{Scin}_{\hat{E}}(F^+, G^+) \xrightarrow{\iota} \mathbf{Cart}_{\hat{E}}(F^+, G^+) \qquad (1)$$

sont des *équivalences*, où π' est induit par le 2-foncteur $F \rightsquigarrow F^+$ et où ι est l'inclusion canonique.

(ii) On a un carré commutatif dont toutes les flèches sont des *équivalences de catégories*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Cart}_E(F, G) & \xrightarrow{\pi} & \mathbf{Cart}_{\hat{E}}(F^+, G^+) \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} \\ \mathbf{Cart}_E(\mathbf{S}F, G) & \xleftarrow[\gamma]{} & \mathbf{Cart}_E(\mathbf{S}F, \mathbf{S}G) \end{array} \qquad (2)$$

dans lequel $\pi = \iota\,\pi'$, cf. (1), où β est induit par le 2-foncteur $F' \rightsquigarrow F' \times_{\hat{E}} E = \eta_\bullet(F')$ [cf. (2.4.4(1)) et (2.3.1(2))], et où $\gamma = \mathbf{Cart}_E(\mathbf{S}F, \mathbf{v}G)$, $\varphi = \mathbf{Cart}_E(\mathbf{v}F, G)$, cf. (1.3.1) et (2.4.5(1)).

Prouvons (ii). Modulo l'identification de (3.2.2.2) on a $F^+ \times_{\hat{E}} E = \mathbf{S}F$ et la commutativité de (2) résulte du fait que dr_η est un morphisme de 2-foncteurs, cf. (2.4.4(1)). Le composé $\gamma\,\beta$ est une équivalence par (2.5.4). Enfin, par (1.5.1), φ et γ sont des équivalences car il en est ainsi de $\mathbf{v}F$ et $\mathbf{v}G$. D'où (ii). Bien entendu, (i) en résulte.

Corollaire 3.2.6. Soit $m\colon F \to G$ un E-foncteur cartésien, $F \in \mathrm{Fib}(E)$, $G \in \mathrm{Fib}(E)$. Pour que m soit fidèle, pleinement fidèle ou une équivalence, il faut et il suffit qu'il en soit ainsi de $m^+\colon F^+ \to G^+$, son extension canonique à $\hat{E}$.

La condition est nécessaire en vertu de la formule (3.2.2.2(1)) et de (1.5.1). Elle est suffisante car m «s'identifie» au morphisme déduit de m^+ par le changement de base $\eta\colon E \to \hat{E}$, (3.2.3), (1.5.1(c)).

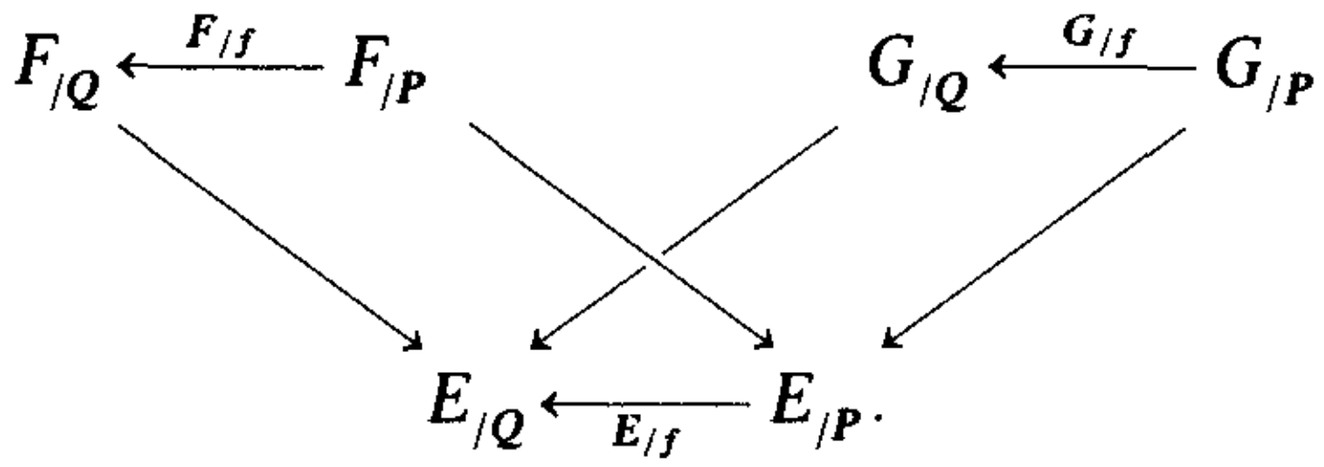
3.3. La E-catégorie $\mathbf{CART}(F, G)$

3.3.1. Soit E une U-catégorie appartenant à V, fixée jusqu'à la fin de ce numéro. La construction que nous allons indiquer sera utilisée constamment dans les démonstrations du chapitre IV.

3.3.1.1. Soient F et G des E-catégories fibrées appartenant à V. Pour tout $P \in \mathrm{Ob}(\hat{E})$, on pose

$$\mathrm{CART}^+(F, G)(P) = \mathbf{Cart}_{E/P}(F_{/P}, G_{/P}), \qquad (1)$$

cf. (3.2.1 (1)). Pour toute flèche $f: P \to Q$ de $\hat{E}$, on a par (2.1.2) un diagramme de catégories dont les carrés sont cartésiens par (2.1.2 (4))



(2)

Par la propriété universelle du produit fibré (1.6.1 (ii)) on en déduit un foncteur

$$\mathrm{CART}^+(F, G)(Q) \to \mathrm{CART}^+(F, G)(P) \tag{3}$$

qui, à tout objet (resp. flèche) q de la première catégorie, associe l'objet (resp. flèche) p de la seconde caractérisé par

$$q \cdot F_{/f} = G_{/f} \cdot p \quad \text{(resp. } q * F_{/f} = G_{/f} * p\text{)}. \tag{4}$$

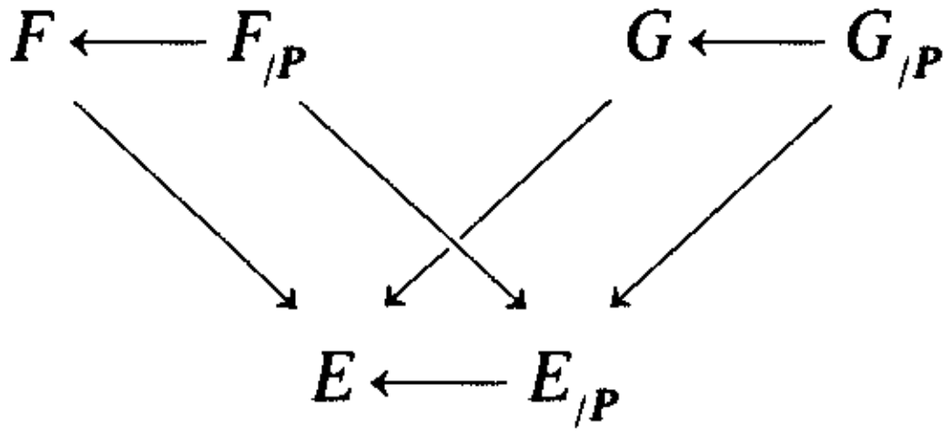
3.3.1.2. On en déduit immédiatement que (1) *et* (4) *définissent une* $\hat{E}$*-catégorie scindée*

$$\mathrm{CART}^+(F, G). \tag{1}$$

De même, si l'on prend les arguments P et Q dans $\mathrm{Ob}(E)$, *les formules* (1) *et* (4) *définissent une E-catégorie scindée*

$$\mathrm{CART}(F, G). \tag{2}$$

3.3.1.3. Si l'on suppose que Q est l'objet final de $\hat{E}$, le diagramme (3.3.1.1 (2)) s'identifie à



(1)

où les flèches horizontales sont les foncteurs source. Par la propriété universelle du produit fibré et par (1.6.3 (i)), on en déduit un isomorphisme

$$\mathrm{CART}^+(F, G)(P) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Cart}_E(F_{/P}, G). \tag{2}$$

Par ces isomorphismes, pour toute flèche $f: P \to Q$ de $\hat{E}$, le foncteur $\mathrm{CART}^+(F, G)(f)$ de (3.3.1.1 (3)) s'identifie au foncteur

$$\mathbf{Cart}_E(F_{/Q}, G) \to \mathbf{Cart}_E(F_{/P}, G) \tag{3}$$

induit par la composition avec le E-foncteur $F_{/f}: F_{/P} \to F_{/Q}$ (2.1.2 (1)).

3.3.1.4. On a un isomorphisme canonique de E-catégories scindées

$$\mathrm{CART}(F, G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{CART}^+(F, G) \times_{\hat{E}} E \tag{1}$$

car le foncteur $\eta\colon E \to \hat{E}$, étant pleinement fidèle, induit des isomorphismes $E_{/S} \xrightarrow{\sim} E_{/\eta(S)}$ et $F_{/S} \xrightarrow{\sim} F_{/\eta(S)}$.

3.3.2. Remarquons que, si F, G et H sont trois E-catégories fibrées on a un isomorphisme de $\hat{E}$-catégories scindées

$$\mathrm{CART}^+(F, G \times_E H) \xrightarrow{\sim} \mathrm{CART}^+(F, G) \times \mathrm{CART}^+(F, H) \tag{1}$$

et un accouplement, induit par la composition des foncteurs cartésiens, qui est un morphisme de catégories scindées

$$\mathrm{CART}^+(F, G) \times \mathrm{CART}^+(G, H) \to \mathrm{CART}^+(F, H). \tag{2}$$

En particulier, si $F = E$, comme on a visiblement

$$\mathrm{CART}^+(E, G) = G^+ \quad \text{et} \quad \mathrm{CART}(E, G) = \mathbf{S}G, \tag{3}$$

on trouve un accouplement

$$G^+ \times \mathrm{CART}^+(G, H) \to H^+, \tag{4}$$

qui, par restriction à E, grâce aux équivalences $\mathbf{v}F\colon \mathbf{S}F \to F$ et $\mathbf{v}G\colon \mathbf{S}G \to G$, donne un accouplement

$$G \times \mathrm{CART}(G, H) \to H \tag{5}$$

dont l'interprétation est évidente.

Proposition 3.3.3. Soit $u\colon F \to G$ un E-foncteur cartésien, $F, G \in \mathrm{Fib}(E)$. Pour toute $X \in \mathrm{Fib}(E)$

(i) si u est fidèle (resp. pleinement fidèle) il en est de même du $\hat{E}$-morphisme de catégories scindées

$$\mathrm{CART}^+(X, u)\colon \mathrm{CART}^+(X, F) \to \mathrm{CART}^+(X, G). \tag{1}$$

(ii) Si u est une équivalence il en est de même de $\mathrm{CART}^+(X, u)$ et de

$$\mathrm{CART}^+(u, X)\colon \mathrm{CART}^+(G, X) \to \mathrm{CART}^+(F, X). \tag{2}$$

Les morphismes (1) et (2) sont induits, argument par argument par les foncteurs de composition de (1.3) et possèdent les mêmes propriétés algébriques (1.4). Les assertions de l'énoncé résultent de (1.5).

Proposition 3.3.4. Soient F et G deux E-catégories fibrées.

(i) Si $P=\varinjlim P_i$ est une limite inductive dans $\hat{E}$ le foncteur naturel

$$\mathrm{CART}^+(F,G)(P)\xrightarrow{\sim}\varprojlim \mathrm{CART}^+(F,G)(P_i) \tag{1}$$

est un isomorphisme

(ii) $\mathrm{CART}^+(F,G)$ est un faisceau de catégories sur $\hat{E}$ pour la topologie canonique.

L'assertion (i) résulte de (3.3.1.3 (1)), car $F_{/P}$ est limite inductive des $F_{/P_i}$ et l'on applique [D 1.11]. D'où (ii).

Proposition 3.3.5. Soient F et G deux E-catégories fibrées.

(i) On a des $\hat{E}$-équivalences de catégories

$$\mathrm{CART}(F^+,G^+)\approx\mathrm{CART}^+(F,G)\xrightarrow{\pi}\mathrm{CART}(F,G)^+. \tag{1}$$

(ii) Pour tout $P\in\mathrm{Ob}(\hat{E})$ le foncteur naturel

$$\mathrm{CART}^+(F,G)(P)\to\varprojlim(\mathrm{CART}(F,G)_{/P}/E_{/P}) \tag{2}$$

est une équivalence de catégories.

(ii bis) Pour tout $P\in\mathrm{Ob}(\hat{E})$, pour qu'il existe un $E_{/P}$-foncteur cartésien $x\colon F_{/P}\to G_{/P}$ il faut et il suffit qu'il existe une section cartésienne de $\mathrm{CART}(F,G)$ au dessus de $E_{/P}$.

(iii) Le foncteur

$$\mathbf{Cart}_E(F,G)\to\varprojlim(\mathrm{CART}(F,G)/E)$$

est une équivalence de catégories.

3.3.5.1. On notera que (ii bis) ne fait que commenter (ii) et que l'on déduit (iii) de (ii) en y prenant pour P l'objet final de $\hat{E}$. Quant au foncteur de (2) c'est le composé du foncteur évident (voir les définitions)

$$\mathrm{CART}^+(F,G)(P)\to\varprojlim(\mathrm{CART}(F,G)_{/P}/E_{/P}) \tag{3}$$

et de l'inclusion habituelle

$$\varprojlim(X/A)\to\varprojlim(X/A),\qquad (1.1.5\,(4)). \tag{4}$$

Or (3) est un isomorphisme en vertu de (3.3.4 (i)) car P est limite inductive des $\eta(S)$, $(S,s)\in\mathrm{Ob}(E_{/P})$. Par ailleurs, (4) est pleinement fidèle d'après (1.1.5). Les morphismes de (3) et (4) étant fonctoriels en P définissent *un $\hat{E}$-morphisme de catégories scindées*

$$\pi\colon\ \mathrm{CART}^+(F,G)\to\mathrm{CART}(F,G)^+. \tag{5}$$

D'après (1.5.1) nous venons de démontrer que π *est pleinement fidèle.* Nous montrerons plus loin que π est une équivalence, ce qui prouvera aussi (ii).

3.3.5.2. Auparavant notons que $\mathrm{CART}^+(F, G)$ et $\mathrm{CART}^+(\mathbf{S}F, \mathbf{S}G)$ sont $\hat{E}$-équivalentes car F est E-équivalente à $\mathbf{S}F$ et G est E-équivalente à $\mathbf{S}G$. Or il existe *un morphisme de $\hat{E}$-catégories scindées*

$$\beta\colon \mathrm{CART}(F^+, G^+) \to \mathrm{CART}^+(\mathbf{S}F, \mathbf{S}G) \tag{6}$$

où la première est obtenue en appliquant aux $\hat{E}$-catégories fibrées F^+ et G^+ la construction donnée plus haut pour des E-catégories fibrées. Pour définir le morphisme β, nous devons décrire, pour tout $P \in \mathrm{Ob}(\hat{E})$, un foncteur

$$\mathbf{Cart}_{\hat{E}_{/P}}(F^+_{/P}, G^+_{/P}) \to \mathbf{Cart}_{E_{/P}}(\mathbf{S}F_{/P}, \mathbf{S}G_{/P}). \tag{7}$$

C'est le foncteur induit par le changement de base de $\hat{E}_{/P}$ à $E_{/P}$, (2.1.2 (4)), (3.2.2) et (3.3.1). D'après (3.2.5 (i)), le foncteur β est une équivalence de catégories.

3.3.5.3. Il nous reste à montrer que le foncteur (5) est une équivalence, sachant qu'il est pleinement fidèle. D'après (1.5.1 (c)), cela signifie que, pour tout $P \in \mathrm{Ob}(\hat{E})$, (2) est une équivalence. Pour simplifier les calculs, notons que l'on peut supposer que $E = E_{/P}$, car on a un *isomorphisme canonique de $(E_{/P})$-catégories scindées*

$$\mathrm{CART}(F, G)_{/P} \xrightarrow{\sim} \mathrm{CART}(F_{/P}, G_{/P}), \qquad P \in \mathrm{Ob}(\hat{E}), \tag{8}$$

induit par les isomorphismes évidents

$$(E_{/P})_{/Q} \xrightarrow{\sim} E_{/Q'}, \qquad P \in \mathrm{Ob}(\hat{E}),\ Q \in \mathrm{Ob}(E_{/P}), \tag{9}$$

où Q' est l'image de Q par $E_{/P} \to E$.

3.3.5.4. Il nous reste à prouver que, pour toute section cartésienne

$$E \to \mathrm{CART}(F, G), \tag{10}$$

il existe un E-foncteur cartésien $k\colon F \to G$ dont l'image par (2), (où $P =$ objet final de $\hat{E}$), est isomorphe à (10). Par définition, (10) est essentiellement un couple de fonctions dont l'une associe à tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$ un objet

$$k_S\colon F_{/S} \to G \tag{11}$$

de $\mathrm{CART}(F, G)(S)$ et dont l'autre associe à toute flèche $f\colon T \to S$ de E un E-isomorphisme de E-foncteurs cartésiens

$$u_f\colon k_T \to k_S^f, \qquad \text{où} \qquad k_S^f = k_S \cdot F_{/f}, \tag{12}$$

ce couple étant assujetti à vérifier

$$(u_f * F_{/g}) \cdot u_g = u_{fg} \tag{13}$$

pour tout couple $U \xrightarrow{g} T \xrightarrow{f} S$ de flèches composables de E (3.3.1.1 (2)) et (3.3.1.3 (2)).

3.3.5.5. Pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$, on a un isomorphisme canonique

$$F_{/S} \xrightarrow{\sim} F \times_E (E_{/S}), \quad (3.2.1\ (2)), \tag{14}$$

et un objet de $F_{/S}$ s'identifie donc à un couple

$$(x, f), \tag{15}$$

où $x \in \mathrm{Ob}(F)$ et où $f \in \mathrm{Ob}(E_{/S})$ (donc $f\colon T \to S$ est une flèche de E) tel que la projection de x soit T. De même, une flèche de $F_{/S}$ s'identifie à un

$$(m, f, g) \tag{16}$$

où m est une flèche de F et (f, g) une flèche de $E_{/S}$, (c'est à dire essentiellement un couple $U \xrightarrow{g} T \xrightarrow{f} S$ de flèches composables de E), la projection de n étant égale à g.

3.3.5.6. *Définissons* $k\colon F \to G$, (cf. (10)). Posons

$$k(x) = k_S(x, \mathrm{id}_S), \quad S \in \mathrm{Ob}(E),\ x \in \mathrm{Ob}(F_S), \tag{17}$$

ce qui définit k sur les objets. Soit $m\colon y \to x$ une flèche de F de projection $f\colon T \to S$. Nous connaissons une flèche de G de projection f et de but $k(x)$, à savoir $k_S(m, \dot{f})$, où

$$\dot{f} = (\mathrm{id}_S, f), \quad \dot{f}\colon f \to \mathrm{id}_S, \tag{18}$$

désigne, dans $E_{/S}$, le morphisme final de source f. La source de $k_S(m, \dot{f})$ est $k_S(y, f)$. Considérons l'objet (y, id_T) de $F_{/T}$; son image par $F_{/f}\colon F_{/T} \to F_{/S}$ est (y, f). L'isomorphisme u_f définit donc un T-isomorphisme de G

$$u_f(y, \mathrm{id}_T)\colon\ k_T(y, \mathrm{id}_T) \to k_S(y, f). \tag{19}$$

Nous poserons

$$k(m) = k_S(m, \dot{f}) \cdot u_f(y, \mathrm{id}_T). \tag{20}$$

La projection de $k(m)$ est f, sa source est $k(y)$ et son but est $k(x)$. Si m est *cartésien* il est clair que $(m, \dot{f})$ est cartésien relativement à E et à $E_{/S}$. Il en est donc de même de $k_S(m, \dot{f})$, donc aussi de $k(m)$, car u_f est un

E-isomorphisme. Si $m=\mathrm{id}_x$, alors $f=\mathrm{id}_S$ et il est immédiat que $k(m)=\mathrm{id}_{k(x)}$. Il nous suffit de vérifier que, pour tout couple $x \xleftarrow{m} y \xleftarrow{n} z$ de flèches composables de E se projettant sur $S \xleftarrow{f} T \xleftarrow{g} U$, on a

$$k(m\,n)=k(m)\,k(n). \tag{21}$$

Pour calculer le composé

$$k(m)\,k(n)=k_S(m,\dot{f})\,u_f(y,\mathrm{id}_T)\,k_T(n,\dot{g})\,u_g(z,\mathrm{id}_U) \tag{22}$$

appliquons à la flèche $(n,\dot{g})\colon (z,g)\to(y,\mathrm{id}_T)$ de $F_{/T}$ l'identité qui exprime que u_f est un morphisme de foncteurs. On trouve

$$u_f(y,\mathrm{id}_T)\cdot k_T(n,\dot{g})=k_S^f(n,\dot{g})\cdot u_f(z,g). \tag{23}$$

Or $k_S^f=k_S\cdot F_{/f}$ et $F_{/f}(n,\dot{g})=(n,f,g)$, d'où

$$\begin{aligned} k(m)\,k(n)&=k_S(m,\dot{f})\,k_S(n,f,g)\,u_f(z,g)\,u_g(z,\mathrm{id}_U)\\ &=k_S(m\,n,\dot{\widehat{f\,g}})\,u_f(z,g)\,u_g(z,\mathrm{id}_U)\end{aligned} \tag{24}$$

car k_S est un foncteur. La relation (13) donne alors

$$u_f(F_{/g}(z,\mathrm{id}_U))\,u_g(z,\mathrm{id}_U)=u_{fg}(z,\mathrm{id}_U), \tag{25}$$

ce qui prouve (21), car $F_{/g}(z,\mathrm{id}_U)=(z,g)$. *Les formules* (17) *et* (20) *définissent donc un E-foncteur cartésien* $k\colon F\to G$.

3.3.5.7. *Il reste à démontrer que l'image de k dans* $\varprojlim(\mathrm{CART}(F,G)/E)$ *est isomorphe à la section cartésienne* (10) *dont on est parti.* Nous devons donc trouver, pour tout $S\in\mathrm{Ob}(E)$, un E-isomorphisme (de E-foncteurs définis sur $F_{/S}$ à valeurs dans G)

$$a_S\colon\ k^S\to k_S,\qquad k^S=k\cdot \mathbf{s}_S^F,\qquad (3.3.1.3\,(1)), \tag{26}$$

tel que, pour toute flèche $f\colon T\to S$ de E, le carré ci-dessous soit commutatif dans $\mathrm{CART}(F,G)(T)$

$$\begin{array}{ccc} k^S F_{/f} & = & k^T \\ {\scriptstyle a_S * F_{/f}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a_T} \\ k_S F_{/f} & \xleftarrow{u_f} & k_T. \end{array} \tag{27}$$

3.3.5.8. *Construisons* a_S. *Soit* $(y,f)\in\mathrm{Ob}(F_{/S})$; on a $f\in\mathrm{Fl}(E)$, $f\colon T\to S$ et $y\in\mathrm{Ob}(F_T)$, (15). Posons

$$a_S(y,f)=u_f(y,\mathrm{id}_T). \tag{28}$$

Puisque (y, id_T) est un objet de $F_{/T}$,

$$u_f(y, \mathrm{id}_T):\ k_T(y, \mathrm{id}_T) \to k_S^f(y, \mathrm{id}_T)$$

est bien un T-isomorphisme de G qui s'écrit

$$a_S(y, f):\ k^S(y, f) \to k_S(y, f), \qquad (26), (17). \tag{29}$$

3.3.5.9. *Montrons que a_S est un morphisme de foncteurs.* Soit (n, f, g) une flèche de $F_{/S}$. D'après (16), $U \xrightarrow{g} T \xrightarrow{f} S$ est un couple de flèches composables de E et $n:\ z \to y$ une flèche de F de projection g. D'où la source et le but de (n, f, g)

$$(n, f, g):\ (z, fg) \to (y, f), \qquad (15). \tag{30}$$

Pour prouver que a_S est un morphisme de foncteurs, nous devons prouver

$$a_S(y, f)\, k^S(n, f, g) = k_S(n, f, g)\, a_S(z, fg). \tag{31}$$

Par définition, le premier membre est égal à

$$u_f(y, \mathrm{id}_T)\, k(n) = u_f(y, \mathrm{id}_T)\, k_T(n, \dot{g})\, u_g(z, \mathrm{id}_U), \tag{32}$$

qui est égal au second membre d'après (23) et (25).

3.3.5.10. Il nous reste à démontrer la commutativité de (27). C'est une égalité entre morphismes de foncteurs définis sur $F_{/T}$. Nous devons donc vérifier que, pour tout objet (z, g) de $F_{/T}$, $g \in \mathrm{Fl}(E)$, $g:\ U \to T$, $z \in \mathrm{Ob}(F_U)$, on a

$$u_f(z, g)\, a_T(z, g) = a_S\big(F_{/f}(z, g)\big), \tag{33}$$

ou encore, en revenant aux définitions,

$$u_f(z, g)\, u_g(z, \mathrm{id}_U) = u_{fg}(z, \mathrm{id}_U), \tag{34}$$

qui n'est autre que (25). C.Q.F.D.

Chapitre II

Les champs

§ 1. Propriétés diverses

1.1. Topologie de la F-descente

Définition 1.1.1. Soient E une catégorie, F une E-catégorie fibrée, S un objet de E et R un crible de $E_{/S}$ (0 1.1). On dit que R est un crible de F-i-descente, $i=0, 1, 2$, si le foncteur restriction

$$\mathbf{Cart}_E(E_{/S}, F) \to \mathbf{Cart}_E(R, F) \tag{1}$$

est i-fidèle (I 1.5.1.1).

1.1.1.1. Supposons que E soit une U-catégorie. Soit $\eta(S)$ le préfaisceau représenté par S et soit $R' \subset \eta(S)$ le sous-préfaisceau attaché à R par (0 2.4.1). Le foncteur (1) s'écrit également

$$F^+(\eta(S)) \to F^+(R'), \tag{2}$$

où F^+ désigne l'extension canonique de F à $\hat{E}_U$ (I 3.2.2). En effet, on a un isomorphisme canonique $R \approx E_{/R'}$.

1.1.1.2. Soient $\mathbf{S}=(s_i\colon S_i \to S)$, $i \in I$, une famille de flèches de E et R le crible de $E_{/S}$ engendré par $\mathbf{S}$ (0 1.1.2). Pour que R soit de F-0-*descente* il faut et il suffit que le produit

$$F_S \to \prod_{i \in I} F_{S_i} \tag{3}$$

des foncteurs image inverse associés aux $s_i\colon S_i \to S$ soit fidèle [D 6.15]. Supposons que, pour toute flèche $f\colon T \to S$ de E, les produits fibrés $T_i = T \times_S S_i$ existent (on dit que $\mathbf{S}$ est *quarrable*) et soit encore c un *clivage* de F (choix des foncteurs image inverse [D (1.5)]). On considère alors la catégorie $\mathbf{Desc}(F/E, c, S)$ des *familles d'objets* $x_i \in \mathrm{Ob}(F_{S_i})$, $i \in I$, *munies d'une donnée de descente relativement à* $\mathbf{S}$ [D 9.19]. D'après [D 9.11 et 9.19], le foncteur (1) s'inteprète alors à équivalence près comme le foncteur

$$\Delta\colon\ F_S \to \mathbf{Desc}(F/E, c, \mathbf{S}) \tag{4}$$

qui, à tout $x \in \mathrm{Ob}(F_S)$, associe la famille de ses images inverses sur les S_i munie de sa donnée de descente naturelle [D (9.10)]. Ce qui donne une interprétation plus intuitive de la définition.

Nous nous intéresserons uniquement dans ce travail aux cribles et familles de descente *universelle*.

Définition 1.1.2. Soient E une catégorie et F une E-catégorie fibrée. On dit qu'un crible R de $E_{/S}$, $S \in \mathrm{Ob}(E)$, est de F-i-descente universelle, $i = 0, 1, 2$, si, pour toute flèche $f\colon T \to S$ de E, l'image inverse R^f de R par f, (0 1.1.2), est un crible de F-i-descente. On dit qu'une famille $(S_i \to S)$, $i \in I$, de flèches de E est de F-i-descente universelle s'il en est ainsi du crible de $E_{/S}$ qu'elle engendre (0 1.1.2).

1.1.2.1. D'une manière générale, on dira aussi *F-descente* pour F-1-descente et *F-descente effective* pour F-2-descente. D'après [D 6.18], la terminologie introduite est compatible avec celle de [D 6.19].

Proposition 1.1.3. Soient E une catégorie, F une E-catégorie fibrée et i un entier $0 \leqq i \leqq 2$. Pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$, on désigne par $J_i(S)$ l'ensemble des cribles de $E_{/S}$ qui sont de F-i-descente universelle.

(i) Les $J_i(S)$ sont les ensembles de raffinements d'une topologie sur E (appelée *topologie de la F-i-descente*).

(ii) La topologie de la F-i-descente est la plus fine de celles pour lesquelles, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$, tout raffinement de S est un crible de F-i-descente.

(iii) Si E est une U-catégorie et si F^+ désigne l'extension canonique de F à $\hat{E}_{\mathsf{U}}$, la topologie de la F^+-i-descente est la topologie induite sur $\hat{E}_{\mathsf{U}}$ (0 3.5) par la topologie de la F-i-descente.

(iv) Sous les hypothèses de (iii), pour qu'une flèche $f\colon P \to Q$ de $\hat{E}$ soit bicouvrante (0 3.5) pour la topologie de la F-i-descente il faut que, pour toute flèche $Q' \to Q$ de $\hat{E}$ le foncteur $F^+(p)\colon F^+(Q') \to F^+(P')$ soit i-fidèle, où p est la seconde projection de $P' = P \times_Q Q'$. La réciproque est vraie si $i = 2$, ou si f est un monomorphisme.

1.1.3.1. Les assertions (i) et (ii) résultent de [D 6.23]. Soit maintenant $\mathbf{P} = (P_j \to P)$ une famille de flèches de $\hat{E}$ et soit $p\colon P' \to P$ l'image de P, c'est à dire la borne supérieure des images des $P_i \to P$. Prouvons que, *pour que P soit de F^+-i-descente il faut et il suffit que $F^+(p)\colon F^+(P) \to F^+(P')$ soit i-fidèle.* Soit R le crible de $\hat{E}_{/P}$ engendré par $\mathbf{P}$. Par définition, la première condition signifie que le foncteur

$$\mathbf{Cart}_{\hat{E}}(\hat{E}_{/P}, F^+) \to \mathbf{Cart}_{\hat{E}}(R, F^+) \tag{1}$$

est i-fidèle, ce qui, par (I 2.5.5 (i)) et (I 3.2.2 (1)) signifie qu'il en est de même du foncteur

$$\mathbf{Cart}_E(E_{/P}, F) \to \mathbf{Cart}_E(R', F), \qquad R' = R \times_{\hat{E}} E. \tag{2}$$

Or il est immédiat que $R' \to E_{/P}$ s'identifie à $E_{/P'} \to E_{/P}$ et que, par suite, (2) est i-fidèle si, et seulement si, le foncteur $F^+(P) \to F^+(P')$ l'est.

1.1.3.2. Si $\mathbf{P}$ est couvrante pour la topologie canonique de $\hat{E}$, on a $P' = P$. D'après ce qui précède, $\mathbf{P}$ est donc couvrante pour la topologie de la F^+-2-descente, car l'hypothèse est stable par changement de base. Par ailleurs, la formation de P' commute aux changements de base et $P' \to P$ est un *monomorphisme.* Donc (iii) résultera de (iv) car, d'après (0 3.5.3), $\mathbf{P}$ est couvrante pour la topologie induite si, et seulement si, p: $P' \to P$ est bicouvrant.

1.1.3.3. Soit f: $P \to Q$ un *monomorphisme* de $\hat{E}$. Supposons que f soit bicouvrant pour la topologie de la F-i-descente. Pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$ et toute flèche $\eta(S) \to Q$, la première projection de $P[S] = \eta(S) \times_Q P$ est alors bicouvrante. D'après (0 3.5.2 (iii)), cela signifie que le crible de $E_{/S}$ qui correspond à $P[S]$ par (0 2.4.1) est un raffinement pour la topologie de la F-i-descente. D'après (1.1.1.1 (2)) le morphisme $F^+(\eta(S)) \to F^+(P[S])$ est donc i-fidèle. Par [D 6.18], on en déduit que $F^+(Q) \to F^+(P)$ est i-fidèle. Donc f vérifie la condition de (iv), car l'ensemble des morphismes bicouvrants est stable par changement de base. Inversement, supposons que f vérifie la condition de (iv). Remontant le raisonnement précédent, on en déduit que, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$ et toute flèche $\eta(S) \to Q$, la première projection de $\eta(S) \times_Q P$ est bicouvrante. Il en est donc de même de f, car les $\eta(S)$, $S \in \mathrm{Ob}(E)$, couvrent Q pour la topologie induite. Les *conditions de* (iv) *sont donc équivalentes lorsque f est un monomorphisme.* Notons que ceci suffit à entrainer (iii), cf. (1.1.3.2).

1.1.3.4. Soit f: $P \to Q$ une flèche de $\hat{E}$ qui soit bicouvrante pour la topologie de la F-i-descente. Donc f est couvrant, donc, d'après (iii), f est un morphisme de F^+-i-descente. Par ailleurs, les diagonales d: $P \to P \times_Q P$ et d': $P \to P \times_Q P \times_Q P$ sont bicouvrantes (0 3.5). Les foncteurs $F^+(d)$ et $F^+(d')$ sont donc i-fidèles, d'où l'on déduit, par le lemme des diagonales [D 7.17], que $F^+(f)$ est i-fidèle. D'où l'on déduit que f vérifie la condition de (iv) car l'ensemble des morphismes bicouvrants est stable par changement de base.

1.1.3.5. Il reste à prouver qu'une flèche f: $P \to Q$ de $\hat{E}$ qui vérifie la condition de (iv) pour $i = 2$ est bicouvrante. Soit p: $P \times_Q P \to P$ la seconde projection. Par hypothèse, $F^+(f)$ et $F^+(p)$ sont des équivalences; donc

aussi $F^+(d)$, où $d: P \to P \times_Q P$ est la diagonale. Donc d est bicouvrant par (1.1.3.3). De plus, appliquant à nouveau le lemme des diagonales [D 7.17], on trouve que f est couvrant pour la topologie de la F^+-2-descente, donc aussi, pour la topologie induite d'après (iii). Du fait que f est couvrant et d bicouvrant, on déduit immédiatement que f est bicouvrant (0 3.5.2 (ii)). C.Q.F.D.

1.2. Champs sur un site

Définition 1.2.1. Soit E un site.

(i) Une E-catégorie fibrée F est dite *complète* (resp. précomplète) si, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$ et tout raffinement R de S le foncteur restriction

$$\mathbf{Cart}_E(E_{/S}, F) \to \mathbf{Cart}_E(R, F) \tag{1}$$

est une équivalence (resp. est pleinement fidèle).

(ii) On appelle *E-champ*, (resp. E-préchamp) une E-catégorie fibrée complète (resp. précomplète).

(iii) On appelle *morphisme de E-champs* un E-foncteur cartésien dont la source et le but sont des E-champs.

(iv) On appelle *morphisme de morphismes de E-champs* un E-morphisme de E-foncteurs dont la source et le but sont des morphismes de E-champs.

1.2.1.1. S'il n'y a pas d'ambiguité, on omet le préfixe E. On notera que cette définition ne réfère à aucun univers (0 1.2).

1.2.1.2. D'après (1.1.3 (i)), pour que F soit un champ (resp. préchamp) il faut et il suffit que la topologie de la F-descente effective (resp. F-descente) soit plus fine que celle du site.

1.2.1.3. Un E-champ dont les fibres sont des groupoïdes sera appelé un champ de groupoïdes. Si les fibres d'un champ F sont des U-topos (resp. catégories additives) et si les foncteurs image inverse sont des morphismes de topos (resp. sont additifs) on dira que F est un champ de U-topos (resp. de catégories abéliennes).

Définition 1.2.2. Tous les sites considérés seront éléments de $\mathbf{V}$ et, le plus souvent, des U-sites (0 1.6). Si E est un site, on notera $\mathrm{Champ}(E)$ (resp. $\mathrm{Préchamp}(E)$) l'ensemble des $F \in \mathrm{Fib}(E)$, (c'est à dire $\mathrm{Fib}(E)_{\mathbf{V}}$, (I 3.1.1)), qui sont des E-champs (resp. E-préchamps). On notera $\mathscr{Champ}(E)$ (resp. $\mathscr{Préchamp}(E)$) la 2-catégorie dont l'ensemble d'objets est $\mathrm{Champ}(E)$ (resp. $\mathrm{Préchamp}(E)$), les catégories de morphismes et la loi de composition étant celles de $\mathscr{Fib}(E)$, [cf. 1.1.8, où $\mathbf{V}$ remplace U].

1.2.2.1. De même on notera Champsc(E) l'ensemble des $F \in \mathrm{Scin}(E)$ dont la E-catégorie fibrée sous-jacente est un champ. Enfin on notera $\mathscr{C}hampsc(E)$ la 2-catégorie dont l'ensemble d'objets est Champsc(E), les catégories de morphismes et la loi de composition étant induites par celles de $\mathscr{S}cin(E)$, (I 1.9).

1.2.2.2. Si, de plus, $E \in \mathsf{U}$, on notera $\mathscr{F}ib(E)_{\mathsf{U}}$ etc., les catégories analogues relatives à U.

Proposition 1.2.3. Soient E un site élément de V et F une E-catégorie fibrée.

(i) Pour que F soit précomplète il faut et il suffit que, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$ et tout couple (x, y) d'objets de F_S, le préfaisceau $\mathsf{Hom}_S(x, y)$ soit un faisceau (sur $E_{/S}$ pour la topologie induite).

(ii) Si la topologie de E est définie par une prétopologie $\prod$, pour que F soit précomplète (resp. complète) il faut et il suffit que toute famille couvrante appartenant à $\prod$ soit de F-1-descente (resp. de F-2-descente).

La première assertion résulte de [D 7.1] et la seconde des définitions et de (1.1.3 (i)).

Proposition 1.2.4. Soient E un site élément de V. Soit $L = \prod_{i \in I} L_i$ un produit dans la catégorie $\mathscr{F}ib(E)$, (I 1.8.2). Si les L_i sont précomplètes (resp. complètes) il en est de même de L.

1.2.4.1. De ceci, on déduit trivialement par (I 1.8.2 (ii)) que les produits indexés par un élément de V existent dans la catégorie $\mathsf{Champ}(E)$, sous-catégorie pleine de $\mathsf{Fib}(E)$ dont les objets sont les champs.

1.2.4.2. Soit $S \in \mathrm{Ob}(E)$ et $R \subset E_{/S}$ un raffinement de S. On a un morphisme de systèmes projectifs de catégories

$$\mathsf{Cart}_E(E_{/S}, L_i) \to \mathsf{Cart}_E(R, L_i) \tag{1}$$

défini par la composition avec le foncteur d'inclusion $R \subset E_{/S}$. Par hypothèse, (1) est pleinement fidèle (resp. une équivalence) pour tout objet i de la catégorie d'indices. Donc aussi le foncteur

$$\prod \mathsf{Cart}_E(E_{/S}, L_i) \to \prod \mathsf{Cart}_E(R, L_i) \tag{2}$$

obtenu par passage à la limite projective. D'où la conclusion par (I 1.8.2 (ii)).

1.2.4.3. En fait, le même argument montre qu'une limite projective de *préchamps* est un préchamp [utiliser [D 5.5]]. Mais *le noyau d'un couple*

de morphismes de champs peut ne pas être un champ: on fait aisément un exemple. Pour parer à cet inconvénient, on introduit une catégorie fibrée $\underleftarrow{\mathrm{Lim}}\, L_i$, «plus grosse» que $\underleftarrow{\lim}\, L_i$. Le détail est laissé au lecteur qui s'inspirera du cas particulier traité dans (IV 2.5.1).

Lemme 1.2.5. Soient F un E-champ et G une sous-catégorie pleine de F. Supposons que G soit une E-catégorie fibrée et que l'inclusion $G \to F$ soit E-cartésienne. Alors G est un E-préchamp. Pour que G soit un E-champ il faut et il suffit que, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$, tout $x \in \mathrm{Ob}(F_S)$ qui appartient localement à $\mathrm{Ob}(G)$ soit S-isomorphe à un $x' \in \mathrm{Ob}(G_S)$.

1.2.5.1. La première assertion résulte de (1.2.3 (i)). La dernière condition de l'énoncé signifie comme de juste que $x \in \mathrm{ob}(G_S)$ dès que l'ensemble des $f\colon T \to S$ tels que l'image inverse de x par f soit T-isomorphe à un objet de G_T est un raffinement de S (c'est en tous cas un crible de $E_{/S}$). La seconde assertion résulte immédiatement de la définition. Sous les conditions de l'énoncé, on dira que G *est un sous-champ plein de* F.

1.3. Champs sur un U-site

Nous donnons ici quelques résultats intermédiaires qui seront repris de manière plus satisfaisante dans (3.3).

Proposition 1.3.1. Soient E un U-site élément de $\mathbf{V}$ et F une E-catégorie fibrée. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) F est un E-champ (resp. E-préchamp)

(ii) l'extension canonique F^+ de F à $\hat{E}_{\mathsf{U}}$ est un champ (resp. préchamp) sur $\hat{E}$ pour la topologie induite (0 3.5).

(iii) pour tout morphisme bicouvrant $f\colon P \to Q$ de $\hat{E}$, le foncteur $F^+(f)\colon F^+(Q) \to F^+(P)$ est une équivalence (resp. est pleinement fidèle).

D'après (1.1.3), on a (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii). Inversement, (iii) $\Rightarrow$ (ii) d'après la description de la topologie induite (0 3.5.3).

Proposition 1.3.2. Soient E une U-catégorie élément de $\mathbf{V}$ et $F \in \mathrm{Fib}(\hat{E})_{\mathbf{V}}$.

(i) Pour que F soit un champ pour *la topologie canonique* de $\hat{E}$ il faut et il suffit que le foncteur naturel

$$\varphi\colon F \to \eta^+(\eta_\bullet(F)), \qquad [\eta\colon E \to \hat{E},\ (0\,2.4)] \tag{1}$$

soit une $\hat{E}$-équivalence.

(ii) S'il en est ainsi et si, de plus, E est un U-site, pour que F soit un champ pour *la topologie induite sur* $\hat{E}$ par celle de E, (0 3.5.2) il faut et il

suffit que le foncteur décrit plus bas

$$a_\bullet\, i_\bullet(F) \to F, \qquad [\text{où } \hat{E} \xrightarrow{a} \tilde{E} \xrightarrow{i} \hat{E},\ (0\ 2.4] \tag{2}$$

soit une $\hat{E}$-équivalence.

1.3.2.1. Avant de prouver (i) explicitons (1). D'après (I 2.5.4), on a une *équivalence*

$$\mathbf{Cart}_{\hat{E}}(F, F'^{+}) \xrightarrow{\approx} \mathbf{Cart}_{E}(F', F'), \qquad F' = \eta_\bullet(F). \tag{3}$$

Le fait que $\mathrm{id}_{F'}$ appartienne à l'image essentielle de (3) signifie qu'il existe un $\hat{E}$-morphisme de champs $\varphi\colon F \to F'^{+}$ et un E-isomorphisme de E-morphismes de champs $i\colon \mathrm{id}_{F'} \xrightarrow{\sim} \mathrm{dr}_\eta(F') \cdot \eta_\bullet(\varphi)$, le couple (φ, i) étant unique à isomorphisme unique près. On notera que $\eta_\bullet(\varphi)$ est une *équivalence*, [comme foncteur quasi-inverse de $\mathrm{dr}_\eta(F)$ qui est une équivalence, (I 3.2.3)].

1.3.2.2. D'après (1.1.3 (ii)), on sait que F'^{+} est un champ pour la topologie canonique. La condition de (i) est donc suffisante. Elle est nécessaire. En effet, le foncteur (1) induit une équivalence sur les fibres des $P \in \mathrm{Ob}(\hat{E})$ qui sont *représentables*, puisque $\eta_\bullet(\varphi)$ est une E-équivalence. Il suffit donc d'appliquer [D 6.16] en notant que pour tout $P \in \mathrm{ob}(\hat{E})$ il existe une famille couvrante pour la topologie canonique $\{\eta(S_i) \to P\}$, $S_i \in \mathrm{ob}(E)$.

1.3.2.3. Avant de prouver (ii), explicitons (2). Puisque a est adjoint à gauche de i, on a un morphisme de foncteurs

$$m\colon\ \mathrm{id}_{\hat{E}} \to i\,a. \tag{4}$$

Choisissant un elivage de F, il en résulte, d'après [D 1.17] un $\hat{E}$-foncteur cartésien

$$m^*\colon\ (i\,a)_\bullet(F) \to F, \qquad (i\,a)_\bullet(F) \approx a_\bullet\, i_\bullet(F), \tag{5}$$

entre les deux catégories déduites de F par les changements de base $\mathrm{id}_{\hat{E}}$ et $i\,a$. D'après [D 1.17], pour tout $P \in \mathrm{Ob}(\hat{E})$, le foncteur

$$m_P^*\colon\ F_{ia(P)} \to F_P \tag{6}$$

induit par m^* sur les fibres en P s'identifie au foncteur image inverse relatif au morphisme $m(P)\colon P \to i\,a(P)$.

1.3.2.4. Nous pouvons maintenant prouver (ii). Puisque F est un champ pour la topologie canonique nous savons que $F \approx F'^{+}$, avec les notations de (1.3.2.1). Si F est un champ pour la topologie induite, F' est un E-champ d'après (1.3.1) et les foncteurs (6) relatifs à F'^{+} sont des

équivalences d'après (1.1.3 (iv)), donc aussi ceux relatifs à F, donc la condition est nécessaire. Elle est suffisante. En effet, la topologie induite sur $\hat{E}$ est engendrée par les familles couvrantes de la topologie canonique et les morphismes de la forme $m(P)$, $P \in \mathrm{Ob}(\hat{E})$ (0 3.5.3). D'où la conclusion, car les premières sont de F-2-descente par hypothèse, et pour qu'un monomorphisme $f\colon X \to Y$ de $\hat{E}$ soit de F-2-descente, il faut et il suffit que le foncteur image inverse

$$f^*\colon F_Y \to F_X$$

soit une équivalence, puisque X est objet final du crible de Y engendré par f. C.Q.F.D.

Proposition 1.3.3. Soient E un U-site, F un E-champ, F^+ son extension canonique à $\hat{E}_U$ et F^* la restriction de F^+ à $\tilde{E}_U$.

(i) F^* est un champ $\tilde{E}$ pour la topologie canonique

(ii) On a une équivalence

$$\varepsilon_\bullet(F^*) \xrightarrow{\approx} F, \qquad \varepsilon_\bullet(F^*) = F^* \times_{\tilde{E}} E, \tag{1}$$

qui est un morphisme de 2-foncteurs en $F \in \mathrm{Champ}(E)$.

1.3.3.1. Par (1.3.1), F^+est un champ sur $\hat{E}$ pour la topologie *induite*; puisque $i\colon \tilde{E} \to \hat{E}$ est un morphisme de sites (0 3.6), il transforme familles couvrantes en familles couvrantes, d'où l'on déduit trivialement (i), en raisonnant en termes d'objets munis d'une donnée de descente [D 9.19]. D'après (1.3.2 (ii)), on a une équivalence

$$a_\bullet\, i_\bullet(F^+) \xrightarrow{\approx} F^+ \qquad [\text{c'est à dire } a_\bullet(F^*) \approx\!\!\approx F^+] \tag{2}$$

d'où, par le changement de base $\eta\colon E \to \hat{E}$, une équivalence

$$\eta_\bullet\, a_\bullet\, i_\bullet(F^+) \xrightarrow{\approx} \eta_\bullet(F^+), \tag{3}$$

qui, par transitivité du changement de base et la formule $\varepsilon = a\eta$, s'écrit également

$$\varepsilon_\bullet(F^*) \xrightarrow{\approx} \eta_\bullet(F^+). \tag{4}$$

D'où l'équivalence (1) en composant avec $\eta_\bullet(F^+) \xrightarrow{\approx} F$ (I 3.2.3 (2)).

1.3.3.2. Si on définit (2) en utilisant le scindage canonique de F^+, on trouve d'après [D 1.17], que l'action de (2) sur les fibres en $P \in \mathrm{Ob}(\hat{E})$ est le foncteur

$$F^+(a(P)) \to F^+(P), \tag{5}$$

où $P \to a(P)$ est le morphisme structural du faisceau associé. Avec ce choix, il est immédiat que (1) est un morphisme de 2-foncteurs.

Définition 1.3.4. Soient E une catégorie et F une E-catégorie fibrée.

(i) Soit $S \in \mathrm{Ob}(E)$. On dira que

*F vérifie la condition $(\mathsf{U}-P)_S$ si la fibre F_S est une U-catégorie (I 1.7.1),

*F vérifie la condition $(\mathsf{U}-p)_S$ si la fibre F_S est équivalente à une catégorie élément de U.

(ii) On dira que F vérifie $(\mathsf{U}-P)$ (resp. $(\mathsf{U}-p)$) si, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$, F vérifie $(\mathsf{U}-P)_S$ (resp. $(\mathsf{U}-p)_S$).

Proposition 1.3.5. Soient E un U-site, F un E-champ et $S_i \in \mathrm{Ob}(E)$, $i \in I$, $I \in \mathsf{U}$, une famille de générateurs topologiques de E (0 1.6). Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) pour tout $i \in I$, le champ F vérifie $(\mathsf{U}-P)_{S_i}$ (resp. $(\mathsf{U}-p)_{S_i}$);
(ii) F vérifie $(\mathsf{U}-P)$ (resp. $(\mathsf{U}-p)$);
(iii) l'extension canonique F^+ de F à $\hat{E}$ vérifie $(\mathsf{U}-P)$ (resp. $(\mathsf{U}-p)$);
(iv) le $\tilde{E}$-champ F^* de (1.3.3) vérifie $(\mathsf{U}-P)$ (resp. $(\mathsf{U}-p)$).

1.3.5.1. Pour l'équivalence des conditions $(\mathsf{U}-P)$, il suffit de supposer que F est un *E-préchamp*. Par définition, (ii) $\Rightarrow$ (i), on a (iii) $\Rightarrow$ (ii) car $F \approx \eta_\bullet(F^+)$ (I 3.2.3 (2)) et (iv) $\Rightarrow$ (iii) car $a_\bullet(F^*) \approx F^+$ (1.3.3.1 (2)). Montrons que (i) $\Rightarrow$ (iv). On sait que les $\varepsilon(S_i)$ forment une famille de générateurs topologiques de $\tilde{E}_{\mathsf{U}}$. Par ailleurs les fibres de F^* en les $\varepsilon(S_i)$ sont équivalentes à celles de F en les S_i (1.3.3). D'où la conclusion, en utilisant les données de descente.

Proposition 1.3.6. Sous les hypothèses de (1.3.5), soit $u\colon F \to G$ un morphisme de E-champs et soit r un entier, $0 \leqq r \leqq 2$. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) u est r-fidèle (I 1.5.1.1)
(ii) u^+ est r-fidèle
(iii) la restriction u^* de u^+ à $\tilde{E}$ est r-fidèle
(iv) les foncteurs u_i induits sur les fibres en les générateurs S_i sont r-fidèles.

On reprend les arguments de la démonstration précédente, à ceci près que (i) $\Rightarrow$ (iv) est prouvé par [D 10.1]. D'après [D 10.2 et 10.3], on peut se contenter de supposer que F est un champ et G un préchamp.

1.4. E-foncteurs couvrants et bicouvrants

Définition 1.4.1. Soient E un site élément de V et $u\colon F \to G$ un E-foncteur cartésien, $F, G \in \mathrm{Fib}(E)$. On dira que u est *bicouvrant* (resp. *couvrant*) s'il vérifie les conditions suivantes:

(i) pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$ et tout couple (x, y) d'objets de F_S le S-morphisme de préfaisceaux induit par u

$$\mathbf{Hom}_S(x, y) \to \mathbf{Hom}_S(u(x), u(y)), \tag{1}$$

((I 2.6.3) où $\mathbf{V}$ remplace $\mathbf{U}$) est bicouvrant (resp. couvrant (0 3.5)).

(ii) pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$ et tout $y \in \mathrm{Ob}(G_S)$ l'ensemble des $f\colon T \to S$, $f \in \mathrm{Ob}(E_{/S})$ tels que l'image inverse de y par f soit T-isomorphe à un objet de l'image de u *est un raffinement de* S.

1.4.1.1. Dire que u est couvrant signifie donc qu'il est «localement surjectif sur les objets et sur les flèches». Pour qu'il soit bicouvrant il faut de plus qu'il soit «localement injectif» sur les flèches. Le lecteur précisera ces assertions dans le style de (ii) en utilisant la caractérisation des morphismes bicouvrants donnée dans (0 3.5.3).

1.4.1.2. *On notera que les conditions envisagées ne dépendent que du site et de u mais pas de l'univers* $\mathbf{V}$.

Proposition 1.4.2. Soient E un site et $u\colon F \to G$ un E-foncteur cartésien *couvrant*.

(i) Pour tout E-préchamp X, le foncteur

$$\mathbf{Cart}_E(u, X)\colon \mathbf{Cart}_E(G, X) \to \mathbf{Cart}_E(F, X) \tag{1}$$

est pleinement fidèle.

(ii) Si, de plus, u est un morphisme de catégories scindées, pour tout E-préchamp scindé X, le foncteur

$$\mathbf{Scin}_E(u, X)\colon \mathbf{Scin}_E(G, X) \to \mathbf{Scin}_E(F, X) \tag{2}$$

est pleinement fidèle.

1.4.2.1. Quitte à changer d'univers, nous pouvons supposer que E, F et G appartiennent à $\mathbf{V}$. Par les propriétés universelles de $\mathbf{S}X$, $\mathbf{L}F$ et $\mathbf{L}G$ (I 2.4.5 et 2.4.3), il suffit de prouver (ii). Par ailleurs, puisque u est un morphisme de catégories scindées, il est le composé de trois morphismes de catégories scindées

$$F \xrightarrow{p} G' \xrightarrow{q} G'' \xrightarrow{r} G \tag{3}$$

où G' est l'image de u, où G'' est la sous-catégorie pleine de G dont les objets sont ceux de G qui, localement, appartiennent à G' et où q et r sont les foncteurs d'inclusion. Il suffit de prouver que les foncteurs $\mathbf{Scin}_E(p, X)$, $\mathbf{Scin}_E(q, X)$ et $\mathbf{Scin}_E(r, X)$ sont pleinement fidèles. Pour le premier, cela

résulte immédiatement du fait que p est surjectif sur les objets et sur les flèches. Pour le troisième, cela est clair car r est une équivalence. Remplaçant u par q, on peut donc supposer que $u: F \to G$ est un foncteur d'inclusion, que tout objet de G appartient localement à $\mathrm{Ob}(F)$ et que toute flèche de G appartient localement à $\mathrm{Fl}(F)$.

1.4.2.2. Pour prouver (ii), il reste donc à démontrer que, sous les conditions que l'on vient d'énoncer, pour tout couple $a, b: G \rightrightarrows X$ de morphismes de catégories scindées et tout E-morphisme de E-foncteurs $m: a\,u \dashrightarrow b\,u$ il existe un unique E-morphisme de E-foncteurs $n: a \to b$ tel que $n * u = m$. Pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$ et tout $y \in \mathrm{Ob}(G_S)$, il existe un raffinement R de $E_{/S}$ tel que, pour tout objet $f: T \to S$ de R, l'image inverse y^f de y par f appartienne à $\mathrm{Ob}(F)$. Puisque m est un morphisme de morphismes de catégories scindées, l'application $f \mapsto m(y^f)$ définit une section au dessus de R du faisceau $\mathbf{Hom}_S(a(y), b(y))$ qui correspond donc à un élément v de $\mathrm{Hom}_S(a(y), b(y))$. Puisque l'on doit avoir $n * u = m$, on doit avoir $n(y^f) = m(y^f)$ pour tout $f \in \mathrm{Ob}(R)$ et l'on a donc nécessairement $n(y) = v$. D'où l'unicité de n. Il reste à prouver qu'en procédant ainsi on définit un morphisme de foncteurs $n: a \dashrightarrow b$ car il est clair qu'il vérifiera $n * u = m$. Soit donc $i: x \dashrightarrow y$ une S-flèche de G, $S \in \mathrm{ob}(E)$. On doit vérifier que

$$m(y)\,a(i) = b(i)\,n(x).$$

C'est une relation entre sections de $\mathbf{Hom}_S(a(x), b(y))$ que l'on vérifie après localisation; on peut donc supposer que $i: x \to y$ provient d'une flèche de F, d'où la conclusion.

Proposition 1.4.3. Sous les hypothèses de (1.4.1), *si E est un* U*-site*, pour que u soit bicouvrant (resp. couvrant) il faut et il suffit qu'il en soit ainsi du $\hat{E}$-morphisme de catégories scindées $u^+: F^+ \to G^+$ déduit de u par extension canonique à $\hat{E}$.

1.4.3.1. Bien entendu on munit $\hat{E}$ de la topologie induite par celle de E (0 3.5). Puisque $F^+ \times_{\hat{E}} E$ est E-équivalente à F, il est clair que la condition est suffisante.

1.4.3.2. La réciproque résulte du fait que tout objet P de $\hat{E}$ est couvert, pour la topologie canonique donc pour la topologie induite, par une famille $\{P_i \to P\}$ où les P_i sont représentables.

Proposition 1.4.4. Soient E un U-site élément de $\mathbf{V}$ et $u: F \to G$ un E-foncteur cartésien. Supposons que G soit un champ et que u soit couvrant. Si F vérifie la condition $(\mathrm{U}-P)$ (resp. $(\mathrm{U}-p)$) de (1.3.4) il en est de même de G.

1.4.4.1. La condition $(U-P)$ signifie aussi que les préfaisceaux $\mathrm{Hom}_S(x, y)$ sont isomorphes à des U-préfaisceaux. Si F vérifie $(U-P)$, puisque le faisceau associé à un U-préfaisceau est un U-faisceau, on voit immédiatement que G vérifie $(U-P)$.

1.4.4.2. Si F vérifie $(U-p)$ on sait déjà que G vérifie $(U-P)$. Par suite, la sous-catégorie pleine de G dont les objets sont ceux de l'image essentielle de u vérifie $(U-p)$. Il en est de même de G comme on voit en raisonnant comme dans la preuve de (1.3.5).

Les résultats précédents concernaient les E-foncteurs couvrants. Quant aux foncteurs bicouvrants, nous les caractériserons dans (2.1.4), ci-dessous. Mais pour cela nous utiliserons les résultats que voici.

Proposition 1.4.5. Soient E un site élément de $\mathbf{V}$ et $u: F \to G$ un E-foncteur cartésien. Si F est un *préchamp* les conditions suivantes sont équivalentes

(i) u est bicouvrant

(ii) u est pleinement fidèle et vérifie (1.4.1 (ii)).

Si, de plus, F est un champ, ces conditions équivalent à

(iii) u est une équivalence.

1.4.5.1. On notera que chacune des conditions envisagées est indépendante de $\mathbf{V}$. Puisqu'il existe un univers $\mathbf{W}$ tel que $\mathbf{V} \in \mathbf{W}$, on peut supposer que E est un U-site élément de $\mathbf{V}$. D'après (1.4.3) on peut alors remplacer E par $\hat{E}$ ce qui permet de supposer que la topologie est définie par une prétopologie. On conclut alors par [D 10.3].

Proposition 1.4.6. Soient E un U-site élément de $\mathbf{V}$ et $u: F \to G$ un morphisme de *E-préchamps* qui soit bicouvrant, (donc pleinement fidèle (1.4.5)). Pour tout $P \in \mathrm{Ob}(\hat{E})$ et tout $x \in \mathrm{Ob}(G^+(P))$ il existe un monomorphisme $i: R \to P$ de $\hat{E}$, couvrant pour la topologie insuite (0 3.5) et un $y \in \mathrm{Ob}(F^+(R))$ tels que $u^+(R)(y)$ soit isomorphe à $G^+(i)(x)$ dans $G^+(R)$.

D'après (1.4.3) et (1.3.6) on sait que $u^+: F^+ \to G^+$ vérifie les mêmes hypothèses que $u: F \to G$. Il existe donc une famille couvrante $(P_i \to P)_{i \in I}$ telle que les images inverses de x par les morphismes $P_i \to P$ appartiennent à l'image essentielle de u^+. Désignons par $R \dashrightarrow P$ l'image de la famille $(P_i \to P)$. D'après (0 3.5.3), on sait que $R \to P$ est un monomorphisme couvrant et que la famille $\{P_i \to R\}$ est couvrante pour *la topologie canonique* de $\hat{E}$. Puisque F^+ et G^+ sont des champs pour la topologie canonique de $\hat{E}$, la conclusion en résulte par [D 10.3].

§2. Champ associé à une catégorie fibrée

2.1. Théorème d'existence

Définition 2.1.1. Soient E un site et F un E-champ. On appelle *champ associé* à F un couple (F', f), où F' est un *E-champ* et $f: F \to F'$ un E-foncteur cartésien tel que, pour tout E-champ X, le foncteur

$$\mathbf{Cart}_E(f, X): \mathbf{Cart}_E(F', X) \to \mathbf{Cart}_E(F, X) \tag{1}$$

soit *une équivalence de catégories.*

2.1.1.1. On notera que cette propriété caractérise «le» champ associé à E-équivalence près.

2.1.1.2. Si $u: F \to G$ est un E-foncteur cartésien et si (F', f) (resp. (G', g)) est un champ associé à F (resp. G), on appellera *morphisme de champs associé à u* un couple (u', i) où $u': F' \to G'$ est un morphisme de champs et $i: u' f \xrightarrow{\sim} g u$ un E-isomorphisme de E-foncteurs. Le couple (u', i) est alors unique à isomorphisme unique près. On s'autorise à l'appeler *le* morphisme de champs associé à u.

2.1.2. Il nous sera commode de prouver l'existence d'un champ associé à l'aide *d'une construction fonctorielle* qui sera exposée au numéro suivant.

Enonçons dès à présent le résultat que nous avons en vue.

Théorème d'existence 2.1.3. Soit E un site.

(i) Pour toute E-catégorie fibrée F il existe un champ associé à F.

(ii) Soient F et F' deux E-catégories fibrées et soit $f: F \to F'$ un E-foncteur cartésien. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(a) F' est un champ et F est bicouvrant

(b) (F', f) est un champ associé à F

(iii) Si E est un U-site, les conditions de (ii) équivalent à

(c) (F'^{+}, f^{+}) est un champ associé à F^{+} pour le site obtenu en munissant $\hat{E}$ de la topologie induite (0 3.5).

(iv) Si E est un U-site et si F est une E-catégorie fibrée vérifiant $(\mathrm{U}-P)$ ou $(\mathrm{U}-p)$, il en est de même de tout champ associé à F.

2.1.3.1. Les assertions (i) et (ii) seront prouvées dans (2.2.5). On en déduit immédiatement (iii), car les conditions de (a) sont stables par passage à $\hat{E}$ (1.3.1) et (1.4.3) et il suffit d'appliquer (ii) à $\hat{E}$. Par ailleurs, (iv) résulte de (ii) et de (1.4.4).

2.1.3.2. Sous les conditions de (ii), *si F est un préchamp le morphisme $f: F \to F'$ est pleinement fidèle* d'après (1.4.5).

2.1.3.3. Bien que la construction du champ associé fasse intervenir un univers, la condition (ii) se formule sans utiliser d'univers.

Corollaire 2.1.4. Soit E un site élément de V et soit $u: F \to G$ un E-foncteur cartésien, $(F, G \in \mathrm{Fib}(E))$.

(i) Les conditions suivantes sont équivalentes:

(a) u est bicouvrant;

(b) le morphisme de champs associé à u (2.1.1.2) est une équivalence;

(c) pour tout E-champ X le foncteur

$$\mathbf{Cart}_E(u, X): \mathbf{Cart}_E(G, X) \to \mathbf{Cart}_E(F, X)$$

est une équivalence de catégories;

(d) pour tout E-champ X le E-morphisme de catégories scindées

$$\mathrm{CART}(u, X): \mathrm{CART}(G, X) \to \mathrm{CART}(F, X)$$

est une E-équivalence.

(ii) Sous les conditions de (i), pour tout *E-préchamp X*, le morphisme de catégories scindées $\mathrm{CART}(u, X)$ est pleinement fidèle.

L'équivalence des conditions (a), (b) et (c) résulte immédiatement du théorème. Montrons qu'elles entrainent (d). Si u est bicouvrant, il en est de même, pour tout $P \in \mathrm{Ob}(E)$, du foncteur $u_{/P}: F_{/P} \to G_{/P}$. Donc, par (c), le foncteur

$$\mathbf{Cart}_{E_{/P}}(u_{/P}, X_{/P}) = \mathrm{CART}(u, X)(P) \qquad \text{(I 3.3.3)}$$

est une équivalence, ce qui prouve (d). Inversement, (d) entraine (c) d'après (I 3.3.5 (iii)), ou, plus simplement, par passage aux fibres en l'objet final de E s'il en existe un. Enfin (ii) résulte de (i), car si $f: X \to X'$ est un champ associé à X, le foncteur f est pleinement fidèle d'après (2.1.3.2).

Corollaire 2.1.5. Soient E un site, F et G deux E-catégories fibrées. Si G est un *champ* (resp. *préchamp*) il en est de même de $\mathrm{CART}(F, G)$. Si, de plus, E est un U-site et si E, F et G appartiennent à V, la $\hat{E}$-catégorie scindée $\mathrm{CART}^+(F, G)$ est un champ sur $\hat{E}$ pour la topologie induite (0 3.5).

2.1.5.1. Pour démontrer la première assertion, quitte à changer d'univers, on peut supposer que E est un U-site et que E, F et G appartiennent à V. D'après (I 3.3.5), $\mathrm{CART}^+(F, G)$ est alors $\hat{E}$-équivalente à l'extension canonique $\mathrm{CART}(F, G)^+$ de $\mathrm{CART}(F, G)$ à $\hat{E}$; d'après (1.3.1),

la seconde assertion est donc équivalente à la première. Pour prouver celle-ci, nous devons montrer que, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$ et tout raffinement $R \subset \eta(S)$ de S, le foncteur

$$\mathrm{CART}^+(F, G)(\eta(S)) \to \mathrm{CART}^+(F, G)(R)$$

est pleinement fidèle (resp. une équivalence), cf. (I 3.3.5 (2)). D'après (I 3.3.1.3 (2)), ceci signifie que le foncteur

$$\mathbf{Cart}_E(F_{/\eta(S)}, G) \dashrightarrow \mathbf{Cart}_E(F_{/R}, G)$$

est pleinement fidèle (resp. une équivalence). Ceci résulte du corollaire précédent, car le morphisme $F_{/R} \to F_{/\eta(S)}$ est *bicouvrant.*

2.2. Champ scindé associé à une catégorie fibrée

2.2.1. (Faisceaux de catégories.) On dira qu'une E-catégorie scindée est *un faisceau de catégories* s'il en est ainsi du préfaisceau de catégories (sur E) défini par les foncteurs image inverse (I 1.9.3). *Si F est un faisceau de catégories, ce n'est pas nécessairement un champ* (car les $\varprojlim$ ne sont pas les $\underline{\mathrm{Lim}}$), *mais c'est un préchamp.* Pour le voir il faut prouver que les préfaisceaux $\mathbf{Hom}_S(x, y)$ sont des faisceaux. Remarquons qu'un $x \in \mathrm{Ob}(F_S)$, $S \in \mathrm{Ob}(E)$, s'interprète comme une section sur S du préfaisceau des objets de F (I 1.9.4). En explicitant la définition, on voit que $\mathbf{Hom}_S(x, y)$ *est construit par des produits fibrés* évidents à partir des préfaisceaux d'objets et de flèches de F, des morphismes source et but entre ceux-ci et des sections définies par x et y. D'où ce point.

Lemme 2.2.2. Soient E un site élément de $\mathbf{V}$ et $F \in \mathrm{Scin}(E)$. Il existe une E-catégorie scindée $\mathbf{K}(F)$ et un morphisme de catégories scindées

$$\mathbf{k}(F)\colon F \to \mathbf{K}(F) \tag{1}$$

tels que

(i) $\mathbf{K}(F)$ est un faisceau de catégories,

(ii) $\mathbf{k}(F)$ est bicouvrant,

(iii) pour toute E-catégorie scindée X qui est un *faisceau* le foncteur

$$\mathbf{Scin}_E(\mathbf{k}(F), X)\colon \mathbf{Scin}_E(\mathbf{K}(F), X) \to \mathbf{Scin}_E(F, X) \tag{2}$$

est *un isomorphisme de catégories,*

(iv) si, de plus, F est *un préchamp* tel que, pour tout $P \in \mathrm{Ob}(\hat{E}_{\mathbf{V}})$, l'inclusion

$$\varprojlim(F_{/P}/E_{/P}) \subset \underline{\mathrm{Lim}}(F_{/P}/E_{/P}), \quad (\mathrm{I}\ 1.1.5\ (4)), \tag{3}$$

soit *une équivalence,* $\mathbf{K}(F)$ *est un champ.*

2.2.2.1. Par les généralités de [SGA 4 II] sur les préfaisceaux d'ensembles munis de structures algébriques, on est assuré de l'existence du faisceau associé à un préfaisceau de catégories. Traduit en termes de catégories scindées, ceci prouve l'existence d'un morphisme de catégories scindées $\mathsf{k}(F)\colon F \to \mathbf{K}(F)$ qui vérifie (i) et tel que (2) soit *bijectif sur les objets*. En utilisant (2.2.1) on voit que $k(F)$ est bicouvrant, ce qui prouve (ii), puis (iii) par (1.4.2 (ii)).

2.2.2.2. On notera que de (iii) il résulte qu'il existe un 2-adjoint à gauche $(\mathbf{K}, \mathsf{k})$ du 2-foncteur d'inclusion de la 2-catégorie «des catégories scindées qui sont des faisceaux de catégories» dans la 2-catégorie $\mathscr{S}ci\,n(E)$, (I 2.2 et 1.9).

2.2.2.3. Pour prouver (iv), notons d'abord que $\mathbf{K}(F)$ est un faisceau, donc un *préchamp*. Soit $\mathbf{W}$ un univers tel que $\mathbf{V} \in \mathbf{W}$. Par (1.1.1) il reste à prouver que, pour tout *monomorphisme couvrant* $f\colon P \to Q$ de $\hat{E}_{\mathbf{V}}$ le foncteur restriction

$$\mathbf{K}(F)^+(f)\colon \mathbf{K}(F)^+(Q) \to \mathbf{K}(F)^+(P) \tag{4}$$

est essentiellement surjectif, sachant déjà qu'il est pleinement fidèle. Soit $x \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K}(F)^+(P))$. Puisque F est *un préchamp* et que $\mathsf{k}(F)$ est bicouvrant, on a la propriété de (1.4.6) qui assure qu'il existe un monomorphisme couvrant $i\colon R \to P$ et un $x' \in \mathrm{Ob}(F^+(R))$ tels que la restriction $\mathbf{K}F^+(i)(x)$ de x à R soit isomorphe à l'image de x' par le foncteur

$$\mathsf{k}(F)^+(R)\colon F^+(R) \to \mathbf{K}F^+(R). \tag{5}$$

Par définition, x' est un objet de $\varprojlim(F_{/R}/E_{/R})$ et, puisque l'inclusion (3) est une équivalence, on peut supposer que x' est un objet de la «vraie» limite projective $\varprojlim(F_{/R}/E_{/R})$. Donc $\mathsf{k}F^+(R)(x')$ est un objet de $\varprojlim(\mathbf{K}F_{/R}/E_{/R})$. Puisque $\mathbf{K}F$ est un faisceau, x est donc isomorphe à un objet de $\varprojlim(\mathbf{K}F_{/P}/E_{/P})$ et, utilisant à nouveau le fait que $\mathbf{K}F$ est un faisceau, on en déduit que x appartient à l'image essentielle de $\varprojlim(\mathbf{K}F_{/Q}/E_{/Q})$, donc, à celle de $\mathbf{K}F^+(Q)$, d'où la conclusion.

Définition 2.2.3. Soit E un U-site appartenant à $\mathbf{V}$ et soit $F \in \mathrm{Fib}(E)$. On pose $\mathbf{A}F = \mathbf{KSKL}(F)$, (I 2.4.3) (I 2.4.5) (2.2.2). On note

$$\mathbf{a}F\colon F \to \mathbf{A}F \tag{1}$$

le E-foncteur cartésien composé des foncteurs

$$F \xrightarrow{\mathbf{l}F} \mathbf{L}F \xrightarrow{\mathsf{k}(\mathbf{L}F)} \mathbf{KL}F \xrightarrow{\mathbf{m}(F)} \mathbf{SKL}F \xrightarrow{\mathsf{k}(\mathbf{SKL}F)} \mathbf{KSKL}F \tag{2}$$

où $\mathsf{l}F$ est défini par (I 2.4.3), $k(*)$ par (2.2.2) et où $\mathsf{m}(F)$ est caractérisé par la relation

$$\mathsf{v}(\mathsf{KL}F)\cdot\mathsf{m}(F)=\mathrm{id}_{\mathsf{KL}F}, \qquad \text{(cf. I 2.4.5)}. \tag{3}$$

On dira que $(\mathsf{A}F, \mathsf{a}F)$ est *le champ scindé associé à* F.

2.2.3.1. Les formules explicites donnant S, L et K montrent que A et a ne dépendent pas de V, à isomorphisme canonique près.

2.2.3.2. Par construction $\mathsf{A}F$ est un faisceau de catégories. De plus, on sait que $\mathsf{l}F$ et $\mathsf{v}(\mathsf{KL}F)$ sont des équivalences (loc. cit.), donc aussi $\mathsf{m}F$. Donc, par (2.2.2 (ii)), $\mathsf{a}F$ est bicouvrant, comme composé de morphismes bicouvrants.

Théorème 2.2.4. Soit E un site élément de V.

(i) Le composé $\mathsf{A}=\mathsf{KSKL}$ est un 2-foncteur

$$\mathsf{A}\colon \mathscr{Fib}(E)\to\mathscr{Champsc}(E), \qquad (1.2.2.1), \tag{1}$$

(ii) L'application $F\to\mathsf{a}F$ est un morphisme de 2-foncteurs

$$\mathsf{a}\colon \mathrm{id}_{\mathscr{Fib}(E)}\to\mathsf{O}\cdot\mathsf{A}, \tag{2}$$

où $\mathsf{O}\colon \mathscr{Champsc}(E)\to\mathscr{Fib}(E)$ est le foncteur oubli du scindage, (I 1.9) (1.2.2.1).

(iii) Pour toute $F\in\mathrm{Fib}(E)$, le champ scindé associé à F est un champ associé à F.

2.2.4.1. Pour prouver que $\mathsf{A}F$ est un champ il suffit de voir que $\mathsf{SKL}F$ satisfait l'hypothèse de (2.2.2 (iv)). Or $\mathsf{KL}F$ est un faisceau, donc un préchamp. Donc aussi $\mathsf{SKL}F$ qui lui est équivalente. L'autre hypothèse de (2.2.2 (iv)) est vérifiée d'après (I 3.2.3 (3)). Donc $\mathsf{A}F$ est un objet de $\mathscr{Champsc}(E)$. Que A soit un 2-foncteur résulte du fait qu'il en est ainsi de K, S et L, ce qui prouve (i).

2.2.4.2. D'après les références données dans (2.2.3), on prouvera (ii) en montrant que $F\to\mathsf{m}F$ est un morphisme de 2-foncteurs, ce qui, résulte immédiatement de la propriété universelle de $\mathsf{S}(*)$ (I 2.4.5).

2.2.4.3. Prouvons (iii). Pour tout E-préchamp X, le foncteur $\mathsf{Cart}_E(\mathsf{a}F, X)$ est pleinement fidèle car $\mathsf{a}F$ est bicouvrant, donc couvrant (2.2.3.2) (1.4.2). Il reste à prouver que, pour tout E-champ X, le foncteur $\mathsf{Cart}_E(\mathsf{a}F, X)$ est essentiellement surjectif. Comme on a vu, $\mathsf{A}F$ ne dépend pas de l'univers V, du moins à isomorphisme près. Quitte à

changer d'univers, on peut donc supposer que X appartient à V, ce qui permet de former $\mathsf{A}X$. Ceci dit, pour tout E-foncteur cartésien $x: F \to X$, il existe un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\mathsf{a}F} & \mathsf{A}F \\ {\scriptstyle x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{A}x} \\ X & \xrightarrow[\mathsf{a}X]{} & \mathsf{A}X \end{array}$$

dans lequel $\mathsf{a}X$ est bicouvrant. Par (1.4.5), on sait donc que $\mathsf{a}X$ est une équivalence, car X est un champ, d'où la conclusion.

2.2.5. Preuve du théorème d'existence (2.1.3)

On choisit des univers U et V tels que E soit un U-site et tels que E et F appartiennent à V. L'assertion (i) résulte alors de (2.2.4 (iii)). Si l'une des conditions (a) ou (b) de (ii) est vérifiée, F' est un champ et, d'après (2.2.4(iii)), on a un triangle commutatif à isomorphisme près

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\mathsf{a}F} & \mathsf{A}F \\ & {\scriptstyle f}\searrow & \downarrow{\scriptstyle u} \\ & & F'. \end{array}$$

Si (F', f) est un champ associé à F, le foncteur u est une équivalence par unicité du champ associé, donc f est bicouvrant car $\mathsf{a}F$ l'est. Inversement, si f est bicouvrant il en est évidemment de même de u. Puisque $\mathsf{A}F$ et F' sont des champs, u est donc une équivalence d'après (1.4.5). Donc (a) $\Leftrightarrow$ (b), ce qui prouve (ii). Joint à (2.1.3.1), ceci prouve le théorème d'existence (2.1.3).

Corollaire 2.2.6. Soient E un site et F un *E-préchamp*. Si $\mathsf{c}F: F \to \mathsf{S}F$ est un foncteur quasi-inverse de l'équivalence $\mathsf{v}F: \mathsf{S}F \to F$ (I 2.4.5), le composé

$$F \xrightarrow{\mathsf{c}F} \mathsf{S}F \xrightarrow{\mathsf{k}(\mathsf{S}F)} \mathsf{K}\mathsf{S}F \qquad (1)$$

est un champ associé à F.

2.2.6.1. Si F est un préchamp scindé, on a une manière canonique de choisir $\mathsf{c}F$ en imposant que ce soit un morphisme de catégories scindées et que l'on ait $\mathsf{v}F \cdot \mathsf{c}F = \mathrm{id}_F$ (I 2.4.5). On a donc dans ce cas un champ associé à F canonique et plus simple que $\mathsf{A}F$.

2.2.6.2. D'après (2.2.2 (iv)) et (2.2.4.1), il est clair que $\mathsf{K}\mathsf{S}F$ est un champ. Par ailleurs, le foncteur (1) est bicouvrant d'après (2.2.2 (ii)), d'où la conclusion.

Corollaire 2.2.7. Le foncteur sous-jacent au 2-foncteur A commute à E-équivalence près aux produits finis et transforme un E-foncteur cartésien i-fidèle $(0 \leqq i \leqq 2)$ (l 1.5.1.1) en un E-foncteur cartésien (morphisme de champs) i-fidèle.

2.2.7.1. On prouve d'abord la seconde assertion. Pour $i=2$, elle est évidente car A est un 2-foncteur (prendre un quasi-inverse de m). Pour $i=0$ (resp. 1) il faut démontrer que, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$ et tout couple (x, y) d'objets de la fibre $(\mathsf{A}F)_S$ le morphisme de faisceaux sur $E_{/S}$ induit par $\mathsf{A}(m)$: $\mathsf{A}(F) \to \mathsf{A}(G)$

$$\mathsf{Hom}_S(x, y) \to \mathsf{Hom}_S(\mathsf{A}(m)(x), \mathsf{A}(m)(y))$$

est un monomorphisme (resp. isomorphisme). La question étant locale et le foncteur $\mathsf{a}(F)$: $F \to \mathsf{A}F$ bicouvrant (1.4.1 (ii)), on peut supposer que x et y appartiennent à l'image de $\mathsf{a}(F)$, d'où la conclusion (utiliser (1.4.1 (i)) et le fait que $F \mapsto \mathsf{a}(F)$ est un morphisme de foncteurs).

2.2.7.2. La première assertion signifie que si $F = \prod F_i$ est un produit fini dans la catégorie $\mathsf{Fib}(E)$ (I 1.8.2) le E-foncteur naturel

$$\mathsf{A}F \to \prod \mathsf{A}F_i \qquad (1)$$

est une E-équivalence. La limite projective de (1) est prise dans $\mathsf{Champ}(E)$, c'est donc une limite projective dans $\mathsf{Fib}(E)$ (1.2.4). Par (2.1.3 (ii)), il suffit de prouver que le E-foncteur naturel $F \to \prod \mathsf{A}F_i$ est *bicouvrant*. Cela est immédiat en notant que ses «composantes», à savoir les $\mathsf{a}(F_i)$: $F_i \to \mathsf{A}(F_i)$, sont bicouvrantes et en utilisant le fait que l'ensemble d'indices est fini.

§3. Images directe et inverse de champs

3.1. Image directe

Proposition 3.1.1. Soient E et E' deux sites et $f^{-1}: E \to E'$ un foncteur sous-jacent à un morphisme de sites

$$f: E' \to E, \quad (0\ 3.3). \qquad (1)$$

Pour tout E'-champ (resp. E'-préchamp) F' le produit fibré $F = F' \times_{E'} E$ est un E-champ (resp. E-préchamp).

3.1.2. Si les produits fibrés finis existent dans E et si le foncteur f^{-1} les respecte, l'assertion est évidente. En effet, on peut alors travailler avec des données de descente et il suffit de vérifier que, pour toute famille

couvrante $(S_i \to S)$ de E le foncteur Δ de (1.1.1.2 (4)) est une équivalence (resp. pleinement fidèle). Or il est immédiat qu'il s'identifie au foncteur analogue relatif à (F'/E') et à la famille image de $(S_i \to S)$ par f^{-1}, laquelle est couvrante.

3.1.3. Ce qui précède montre que, si E est un U-site, la proposition est démontrée pour les morphismes de sites définis par les foncteurs

$$\tilde{E}_{\mathsf{U}} \xrightarrow{i} \hat{E}_{\mathsf{U}} \quad \text{et} \quad \hat{E}_{\mathsf{U}} \xrightarrow{a} \tilde{E}_{\mathsf{U}} \qquad (0\,3.6) \tag{1}$$

où l'on munit $\hat{E}$ de la topologie induite (0 3.5). Pour le morphisme de sites défini par

$$\eta\colon E \to \hat{E}_{\mathsf{U}} \qquad (0\,3.6) \tag{2}$$

la proposition résulte de (1.3.1) et (1.3.2). Par transitivité du changement de base, elle est donc prouvée pour le morphisme de sites défini par

$$\varepsilon\colon E \to \tilde{E}_{\mathsf{U}} \qquad (0\,3.6). \tag{3}$$

3.1.4. Pour le cas général, on choisit un univers V tel que E et E' appartiennent à V. D'après (0 3.3.2 (5)), on a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varepsilon} & \tilde{E}_{\mathsf{V}} \\ {\scriptstyle f^{-1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\ E' & \xrightarrow{\varepsilon'} & \tilde{E}'_{\mathsf{V}}. \end{array}$$

D'après (1.3.3), il existe alors un champ F'^* sur $\tilde{E}'_{\mathsf{V}}$ tel que $F'^* \times_{\tilde{E}'} E'$ soit équivalent à F'. D'où la conclusion par transitivité du changement de base, car f^* satisfait aux conditions de (3.1.2).

Définition 3.1.5. Soit $f\colon E' \to E$ un morphisme de sites et soit $u\colon E \to E'$ le foncteur sous-jacent. Pour tout E'-champ F' on appelle *image directe de F' par f* et on note $f_*^{\mathrm{ch}}(F)$ le E-champ $F' \times_{E'} E$ déduit de F' par le changement de base $E \xrightarrow{u} E'$.

3.1.5.1. Si E et E' sont éléments d'un univers V, d'après (I 2.3.1), *l'image directe est un 2-foncteur*

$$f_*^{\mathrm{ch}}\colon \mathscr{C}\mathit{hamp}(E')_{\mathsf{V}} \to \mathscr{C}\mathit{hamp}(E)_{\mathsf{V}}, \qquad F' \rightsquigarrow F' \times_{E'} E, \tag{1}$$

qui est induit par le 2-foncteur $u_{\bullet}^{\mathrm{fib}}\colon \mathscr{F}\mathit{ib}(E') \to \mathscr{F}\mathit{ib}(E)$.

3.1.5.2. Par transitivité du changement de base, on a *transitivité à isomorphisme canonique près de l'image directe*, étant entendu que si $E \xleftarrow{f} E' \xleftarrow{g} E''$ sont des morphismes de sites dont les foncteurs sous-jacents sont $E \xrightarrow{u} E' \xrightarrow{v} E''$, le composé fg est défini par le foncteur vu.

3.1.5.3. Pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$ et tout E'-champ F' on a *un isomorphisme canonique entre les catégories fibres*

$$(f_*^{\mathrm{ch}}(F'))_S \xrightarrow{\approx} F'_{S'}, \quad \text{où} \quad S' = u(S), \tag{1}$$

qui est induit par la première projection du produit fibré. Soient alors (x', y') deux objets de $F'_{S'}$ et soient (x, y) les objets leur correspondant par (1). D'après (I 2.6.5.1), on a *un isomorphisme canonique de faisceaux sur* S

$$f_{S'*}(\mathbf{Hom}_S(x, y)) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Hom}_{S'}(x', y'), \tag{2}$$

où $f_{S'*}$ désigne l'image de faisceaux d'ensembles relative au morphisme de sites $E'_{/S'} \to E_{/S}$.

3.1.5.4. Bien entendu, si F' vérifie $(\mathsf{U} - P)$ ou $(\mathsf{U} - p)$ il en est de même de $f_*^{\mathrm{ch}}(F')$.

3.1.5.5. On notera que l'on a $f_*^{\mathrm{ch}}(E') \approx E$ et que, pour tout E'-champ F', le foncteur

$$\varprojlim(F'/E') \to \varprojlim(F/E), \qquad F = f_*^{\mathrm{ch}}(E') \tag{1}$$

induit par le changement de base $E \to E'$, c'est à dire par la 2-fonctorialité de l'image directe, *est une équivalence de catégories*. Si E admet un objet final e et si son image par le foncteur $E \to E'$ est un objet final de E' (ce qui est le cas le plus fréquent) notre assertion est triviale. Le cas général s'y ramène par le raisonnement de (3.1.3). Le détail est laissé au lecteur.

3.2. Image inverse de champs

Définition 3.2.1. Soit $f\colon E' \to E$ un morphisme de sites et soit F un E-champ. On appelle *image inverse de* F *par* f un couple (F', φ), où F' est un E'-champ et

$$\varphi\colon F \to f_*^{\mathrm{ch}}(F'), \qquad f_*^{\mathrm{ch}}(F') = F' \times_{E'} E, \tag{1}$$

un morphisme de E-champs, tel que, pour tout E'-champ G' le foncteur composé ci-dessous soit *une équivalence de catégories*

$$\mathbf{Cart}_{E'}(F', G') \xrightarrow{D} \mathbf{Cart}_E(f_*^{\mathrm{ch}}(F'), f_*^{\mathrm{ch}}(G')) \xrightarrow{\Phi} \mathbf{Cart}_E(F, f_*^{\mathrm{ch}}(G')), \tag{2}$$

où D est induit par le 2-foncteur image directe f_*^{ch} et Φ par la composition avec φ, c'est à dire

$$\Phi = \mathbf{Cart}_E(\varphi, f_*^{\mathrm{ch}}(G')). \tag{3}$$

3.2.1.1. L'image inverse est ainsi définie à équivalence près et le lecteur fera aisément un exemple montrant qu'on ne peut espérer l'existence si l'on impose que (2) soit un isomorphisme.

3.2.1.2. Soient F et G deux E-champs et soit (F', φ) (resp. (G', γ)) une image inverse de F (resp. G) par $f: E' \to E$. On appellera *image inverse d'un morphisme de E-champs* $u: F \to G$ un couple (u', i), où $u': F' \to G'$ est un morphisme de E'-champs et

$$i: f_*^{\mathrm{ch}}(u') \cdot \varphi \xrightarrow{\sim} \gamma \cdot u \tag{4}$$

est un *isomorphisme* de morphisme de E-champs. Bien entendu le couple (u', i) est unique à isomorphisme unique près. De plus, si l'on impose seulement l'existence d'un isomorphisme i comme plus haut, on caractérise u' à isomorphisme non unique près.

3.2.1.3. Sous les hypothèses de (3.2.1.2), on peut définir un foncteur

$$I: \mathbf{Cart}_E(F, G) \to \mathbf{Cart}_{E'}(F', G') \tag{5}$$

qui explicite *l'image inverse d'un morphisme de morphismes de champs.* En effet, considérons le diagramme de catégories

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Cart}_{E'}(F', G') & \xrightarrow{D} & \mathbf{Cart}_E\left(f_*^{\mathrm{ch}}(F'), f_*^{\mathrm{ch}}(G')\right) \\ \uparrow I & \overset{i}{\swarrow} & \downarrow \Phi \\ \mathbf{Cart}_E(F, G) & \xrightarrow[\Gamma]{} & \mathbf{Cart}_E\left(F, f_*^{\mathrm{ch}}(G')\right) \end{array} \tag{6}$$

où D est le foncteur induit par le 2-foncteur image directe et où $\Phi = \mathbf{Cart}_E(\varphi, f_*^{\mathrm{ch}}(G'))$, $\Gamma = \mathbf{Cart}_E(F, \gamma)$. Par définition de l'image inverse, le composé ΦD est une équivalence de catégories et, par suite, *il existe un couple* (I, i), *unique à isomorphisme* unique près, où I est comme dans (5) et i un *isomorphisme* de foncteurs

$$i: \Phi D I \xrightarrow{\sim} \Gamma.$$

Bien entendu, pour tout $u \in \mathrm{Cart}_E(F, G)$, le couple $\left(I(u), i(u)\right)$ est une image inverse de u par f au sens défini plus haut. Enfin, si l'on abandonne i, le foncteur I n'est plus défini qu'à isomorphisme non canonique près.

3.2.1.4. Nous laissons au lecteur le soin d'expliciter comment, à isomorphisme canonique près, la formation du couple (I, i) est compatible avec les accouplements de composition.

3.2.1.5. D'après (3.1.5.5.), il est immédiat que le couple (E', id_E) est une image inverse du E-champ E par $f: E' \to E$. Pour tout E-champ F et toute image inverse (F', φ) de F par f, *on a donc un foncteur*

$$A_F: \varprojlim(F/E) \to \varprojlim(F'/E') \tag{7}$$

et un isomorphisme de foncteurs

$$\lambda_F\colon\ D\cdot \Lambda_F \xrightarrow{\sim} \varprojlim (\varphi/E), \tag{8}$$

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim (F/E) & \xrightarrow{\Lambda_F} & \varprojlim (F'/E') \\ & {\scriptstyle \varprojlim(\varphi/E)}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \lambda_F} & \downarrow{\scriptstyle D} \\ & & \varprojlim \left(f_*^{\mathrm{ch}}(F')/E\right) \end{array} \tag{9}$$

où D est le foncteur de (3.1.5.5) et $\varprojlim(\varphi/E)$ est induit par la composition avec $\varphi\colon F \to f_*^{\mathrm{ch}}(F')$. Le couple (Λ_F, λ_F) est unique à isomorphisme unique près.

3.2.1.6. Notons enfin que, si e est un objet final de E dont l'image e' par le foncteur $E \to E'$ sous-jacent à $f\colon E' \to E$ est un objet final de E', on a un foncteur

$$F_e \xrightarrow{\varphi_e} \left(f_*^{\mathrm{ch}}(F')\right)_e \xrightarrow{\iota} F'_{e'}, \tag{10}$$

où φ_e est le foncteur induit par φ sur les catégories fibres en e et ι *l'isomorphisme canonique* induit par la première projection $F' \times_{E'} E \to F'$. Le carré ci-dessous est alors *commutatif, à isomorphisme canonique près*,

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim (F/E) & \xrightarrow{\Lambda_F} & \varprojlim (F'/E') \\ \downarrow{\scriptstyle v_e} & & \downarrow{\scriptstyle v_{e'}} \\ F_e & \xrightarrow{\approx} & F'_{e'}, \end{array}$$

où v_e et $v_{e'}$ sont les foncteurs «valeurs en l'objet final» et sont des équivalences (cf. [D 5.7]).

3.2.1.7. Soit F' un champ sur E' et soit

$$f_{\mathrm{ch}}^* f_*^{\mathrm{ch}}(F'), \qquad \varphi\colon f_*^{\mathrm{ch}}(F') \to f_*^{\mathrm{ch}} f_{\mathrm{ch}}^* f_*^{\mathrm{ch}}(F'), \tag{11}$$

une image inverse de $f_*^{\mathrm{ch}}(F')$. Par la «propriété universelle» de l'image inverse il existe un morphisme de E'-champ

$$\varphi'\colon f_{\mathrm{ch}}^* f_*^{\mathrm{ch}}(F') \to F' \tag{12}$$

et un E-isomorphisme de morphismes de E-champs

$$i\colon f_*^{\mathrm{ch}}(\varphi')\cdot\varphi \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{f_*^{\mathrm{ch}}(F')}, \tag{13}$$

le couple (φ', i) étant unique à isomorphisme unique près.

Explicitons la définition de l'image inverse d'une manière plus simple et parfois utile.

Proposition 3.2.2. Sous les hypothèses de (3.2.1), soit $u\colon E \to E'$ le foncteur sous-jacent à $f\colon E' \to E$ et soit φ',

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\varphi'} & F' \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \xrightarrow[u]{} & E' \end{array} \tag{1}$$

un u-foncteur cartésien (I 1.1.1), où F est un E-champ et F' un E'-champ. Soit enfin $\varphi\colon F \to f_*^{\mathrm{ch}}(F')$ le E-morphisme de champs défini par φ' grâce à la propriété universelle du produit fibré (I 1.6.1). Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) (F', φ) est une image inverse de F par f

(ii) Pour tout E'-champ G' le foncteur

$$\mathbf{Cart}_{E'}(F', G') \to \mathbf{Cart}_u(F, G'), \qquad \gamma \rightsquigarrow \gamma\,\varphi', \tag{2}$$

défini par la composition avec φ', est *une équivalence de catégories.*

Ceci résulte immédiatement de (I 1.6.1) et de la définition de f_*^{ch} (I 2.3.1).

Remarque 3.2.3. Par ce lemme on peut énoncer de manière simple *la transitivité de l'image inverse.* En effet, soient $E \xleftarrow{f} E' \xleftarrow{g} E''$ des morphismes de sites définis par des foncteurs $E \xrightarrow{u} E' \xrightarrow{v} E''$. Soient F, F', F'' des champs sur E, E' et E'', et soit $F \xrightarrow{\varphi'} F' \xrightarrow{\gamma''} F''$, où φ' est un u-foncteur cartésien et γ'' un v-foncteur cartésien. Supposons que φ' vérifie la condition du lemme, autrement dit «fasse de F' une image inverse de F par f». *Pour que $\gamma''\,\varphi'$ fasse de F'' une image inverse de F par fg il faut et il suffit que γ'' fasse de F'' une image inverse de F' par g.* Evidemment!

3.2.4.1. Sous les hypothèses de (3.2.1), soit F un E-champ. Désignons par

$$f_{\mathrm{ch}}^*(F) = \mathsf{A}\big(u_{\mathrm{fib}}^\bullet(F)\big) \tag{1}$$

le champ scindé associé à $u_{\mathrm{fib}}^\bullet(F)$, (2.2.3) et (I 2.5.1). Soit encore

$$\varphi(F)\colon\ F \to f_*^{\mathrm{ch}}\, f_{\mathrm{ch}}^*(F) \tag{2}$$

le morphisme de E-champs obtenu en composant

$$F \xrightarrow{g_u(F)} u_\bullet\, u^\bullet(F) \xrightarrow{u_\bullet(a)} u_\bullet\, \mathsf{A}\, u^\bullet(F), \tag{3}$$

où $g_u(F)$ est le morphisme de (I 2.5.1 (3)) et où

$$a = \mathsf{a}\big(u^\bullet(F)\big), \qquad a\colon\ u^\bullet(F) \to \mathsf{A}\big(u^\bullet(F)\big), \tag{4}$$

est le morphisme structural du champ associé (2.2.3). [On n'a pas mis les indices $_{\mathrm{fib}}$ par souci d'esthétique.]

3.2.4.2. D'après le calcul de $u^\bullet$ et A (I 2.4.2.1) et (2.2.3.1), on voit que, *à isomorphisme canonique près,* $f^*_{\mathrm{ch}}(F)$ *ne dépend pas de l'univers choisi.*

3.2.4.3. Supposons que *les limites projectives finies existent dans E et que le foncteur u sous-jacent à f les respecte.* Le foncteur image inverse de préfaisceaux d'ensembles respecte alors les limites projectives finies et transforme donc un préfaisceau de catégories F sur E en un préfaisceau de catégories sur E' que nous noterons $u^\bullet_{\mathrm{scin}}(F)$, (I 2.3.2.1). De plus, nous avons déjà remarqué que $u^\bullet_{\mathrm{fib}}(F) = u^\bullet_{\mathrm{scin}}(\mathsf{L}F)$, où $\mathsf{L}F$ est la catégorie scindée libre associée à F (I 2.5.2.2, 2.4.3). En conclusion, pour calculer $f^*_{\mathrm{ch}}(F)$, l'on peut remplacer F par le champ scindé libre $\mathsf{L}F$, (qui est équivalent à F), prendre l'image inverse comme préfaisceau de catégories de $\mathsf{L}F$ puis prendre le champ associé, ce que dit également la formule

$$f^*_{\mathrm{ch}}(F) = \mathsf{A}\big(u^\bullet_{\mathrm{scin}}(\mathsf{L}F)\big). \tag{1}$$

Proposition 3.2.5. Soit $f\colon E' \to E$ un morphisme de sites dont le foncteur sous-jacent est noté $u\colon E \to E'$. (On suppose E et E' éléments de V.)

(i) La formule (3.2.4.1 (1)) définit un 2-foncteur

$$f^*_{\mathrm{ch}}\colon \mathscr{C}hamp(E) \to \mathscr{C}hamp(E') \tag{1}$$

et la formule (3.2.4.1 (2)) un morphisme de 2-foncteurs

$$\varphi\colon \mathrm{id}_{\mathscr{C}hamp(E)} \to f^{\mathrm{ch}}_* f^*_{\mathrm{ch}}. \tag{2}$$

(ii) Pour tout E-champ F le couple $\big(f^*_{\mathrm{ch}}(F), \varphi(F)\big)$ est une image inverse de F par f.

(iii) Si f est un morphisme de U-sites et si F vérifie $(\mathsf{U}-P)$ (resp. $(\mathsf{U}-p)$) (1.3.3) il en est de même de $f^*_{\mathrm{ch}}(F)$.

L'assertion (i) résulte immédiatement de (I 2.5.1) et de (2.2.4). Pour (ii) il faut encore (I 2.5.2). Quant à (iii) elle est évidente si E et E' sont des sites éléments de U. Par transitivité de l'image inverse, elle résultera de (3.3.1) ci-dessous qui permet de remplacer f par le morphisme de topos associé puis celui-ci par un morphisme de sites éléments de U.

Corollaire 3.2.6. Soient $E \underset{u}{\overset{v}{\leftrightarrows}} E'$ un couple de foncteurs tels que v soit adjoint à gauche de u, ce dernier définissant un morphisme de sites $f\colon E' \to E$. Pour tout E-champ on a une E'-équivalence de champs

$$\mathsf{A}(F') \xrightarrow{\approx} f^*_{\mathrm{ch}}(F), \qquad F' = F \times_E E' = v_\bullet(F). \tag{1}$$

En effet, ceci résulte immédiatement de (I 2.5.6 (5)) qui fournit une équivalence $F' \to u^\bullet(F)$ et de la formule $f_{\mathrm{ch}}^*(F) = \mathsf{A}(u^\bullet(F))$ qui définit $f_{\mathrm{ch}}^*(F)$.

Exemple 3.2.7. Soient E un site et S un objet de E. On a un comorphisme de site [SGA 4 III 3.3.1]

$$E_{/S} \to E, \quad (X/S) \rightsquigarrow X, \tag{1}$$

où $E_{/S}$ est munie de la topologie induite. Si les produits finis existent dans E, on a un foncteur adjoint à droite du précédent

$$E \to E_{/S}, \quad X \rightsquigarrow (X \times S/S), \tag{2}$$

qui est sous-jacent à *un morphisme de sites*

$$\mathbf{s}\colon E_{/S} \to E. \tag{3}$$

Pour tout E-champ F, on a $\mathbf{s}^*(F) = F \times_E (E_{/S})$ et, pour tout $(E_{/S})$-champ G, on a $\mathbf{s}_*(F) = G \times_{(E_{/S})} E$, où le premier produit fibré est pris grâce au foncteur (2) et le second grâce au foncteur (1).

Proposition 3.2.8. Soient $f\colon E' \to E$ un morphisme de sites, F un E-champ et (F', φ) une *image inverse* de F par f. Soient encore $S \in \mathrm{Ob}(E)$ et $S' = u(S)$, où $u\colon E \to E'$ est le foncteur sous-jacent à f. Pour tout couple (x, y) d'objets de F_S, on a un isomorphisme canonique de faisceaux sur $E'_{/S'}$

$$f_S^*(\mathsf{Hom}_S(x, y)) \xrightarrow{\approx} \mathsf{Hom}_{S'}(x', y'), \tag{1}$$

où (x', y') est l'image du couple (x, y) par le foncteur composé

$$F_S \xrightarrow{\psi} F''_S \xrightarrow[\approx]{\theta} F'_{S'}, \quad S' = u(S), \tag{2}$$

où ψ est induit sur les catégories fibres par le E-morphisme structural

$$\varphi\colon F \to F'', \quad F'' = F' \times_{E'} E = f_*^{\mathrm{ch}}(F'), \tag{3}$$

et l'isomorphisme θ par la première projection de F''.

3.2.8.1. Dans (1), le symbole f_S^* désigne l'image inverse de faisceaux d'ensembles par le morphisme de sites $E'_{/S'} \to E_{/S}$. Par la propriété universelle de l'image inverse, pour définir un morphisme (1) il suffit de construire un morphisme de faisceaux sur S

$$\mathsf{Hom}_S(x, y) \to f_{S*}(\mathsf{Hom}_{S'}(x', y')), \tag{4}$$

où f_{S_*} désigne l'image directe relative au morphisme de sites $f_S\colon E'_{/S'} \to E_{/S}$ déduit de f. D'après (3.1.5.3), si (x'', y'') désigne le couple correspondant à

(x', y') par l'isomorphisme $F''_S \xrightarrow{\approx} F'_S$. défini par la première projection de $F'' = F' \times_{E'} E$, le but du morphisme (4) s'identifie à $\mathbf{Hom}_S(x'', y'')$, moyennant quoi, on prend pour (4) le morphisme $\mathbf{Hom}_S(x, y) \to \mathbf{Hom}_S(\varphi(x), \varphi(y))$ induit par $\varphi: F \to F''$, (I 2.6.3.2 (4)), ce qui est licite car, par définition de (x', y'), on a $(x'', y'') = (\varphi(x), \varphi(y))$.

3.2.8.2. Nous allons d'abord montrer que le morphisme (1) ainsi construit est un isomorphisme lorsque les produits fibrés finis existent dans E et que le foncteur u sous-jacent à f les respecte. On prend alors pour (F', φ) l'image inverse fournie par la formule (3.2.4.1 (1)), c'est à dire $F' = \mathbf{A}(u^\bullet(F))$, et on considère le couple (x_0, y_0), image de (x, y) par le u-morphisme $g'_u(F): F \to u^\bullet(F)$. D'après (I 2.6.5.3), on sait que $\mathbf{Hom}_{S'}(x_0, y_0)$ est isomorphe à $u^\bullet_S(\mathbf{Hom}_S(x, y))$ et, par (1.4.1) et (2.1.3 (ii)), on sait que $\mathbf{Hom}_{S'}(x_0, y_0) \to \mathbf{Hom}_{S'}(x', y')$ est bicouvrant, autrement dit que le second est le faisceau associé au premier. Par le calcul de l'image inverse d'un faisceau d'ensembles par le morphisme $f_S: E'_{/S'} \to E_{/S}$, on en déduit la proposition dans ce cas.

3.2.8.3. Si l'on ne suppose pas l'existence de produits fibrés finis dans E, on ne peut appliquer (I 2.6.5.3). Cependant, par le même raisonnement que dans (3.1.3), on est ramené à prouver la proposition pour le morphisme de sites défini par le foncteur $E \xrightarrow{\varepsilon} \tilde{E}$. Dans ce cas, comme on verra au numéro suivant, le foncteur $\varphi: F \to f_*^{\mathrm{ch}} f_{\mathrm{ch}}^*(F)$ est une E-équivalence et le morphisme (4) est alors un isomorphisme, ce qui donne la conclusion par [SGA 4 III 4.4 et 4.5].

3.2.8.4. Par passage aux sections l'isomorphisme (1) redonne l'action de φ sur les flèches des fibres du E-champ F. De plus (1) est compatible avec les accouplements de composition et la fonctorialité en F de $\mathbf{Hom}_S(x, y)$.

Corollaire 3.2.9. Soit $f: E' \to E$ un morphisme de U-sites éléments de V.

(i) Si $m: F \to G$ est un morphisme de E-champs, $m': F' \to G'$ une image inverse de m par f et si m est i-fidèle ($i = 0$, 1 ou 2 (I 1.5.1.1)) il en est de même de m'.

(ii) Le foncteur $\mathbf{Champ}(E) \to \mathbf{Champ}(E')$ sous-jacent au 2-foncteur image inverse f_{ch}^* (3.2.5 (1)) commute à équivalence près aux produits finis.

3.2.9.1. Nous supposerons pour simplifier que les limites projectives finies existent dans E et que le foncteur $u: E \to E'$ sous-jacent au morphisme de site f les respecte. Le cas général s'en déduit «par passage au topos», i.e. en utilisant (3.3.1) et (3.3.3) ci-dessous.

3.2.9.2. L'assertion (i) est évidemment indépendante du choix des images inverses, on peut donc supposer que $m' = f_{\mathrm{ch}}^*(m) = \mathsf{A}(u_{\mathrm{fib}}^\bullet(m))$. D'où (i) par (I 2.5.2.1 (ii)) et (2.2.7).

3.2.9.3. L'assertion (ii) signifie que si $F = \prod F_i$ est un produit fini de E-champs, le morphisme de E'-champs naturel

$$f_{\mathrm{ch}}^*(F) \to \prod (f_{\mathrm{ch}}^*(F_i)) \tag{1}$$

est une *E'-équivalence*. Le foncteur d'inclusion $\mathsf{Champ}(E) \subset \mathsf{Fib}(E)$ commute aux produits (1.2.4.1). L'assertion (ii) résulte donc de la définition de f_{ch}^*, $(f_{\mathrm{ch}}^* = \mathsf{A}\, u_{\mathrm{fib}}^\bullet)$, de (I 2.5.2.1 (i)) et de (2.2.7).

3.3. Champs sur un site et sur le topos associé

Théorème 3.3.1. Soit $f\colon E' \to E$ un morphisme de U-sites tel que le foncteur image directe $f_*\colon \tilde{E}'_{\mathsf{U}} \to \tilde{E}_{\mathsf{U}}$ soit une équivalence de catégories.

(i) Pour tout couple (F', G') de E'-champs le foncteur

$$\mathsf{Cart}_{E'}(F', G') \to \mathsf{Cart}_{E}(f_*^{\mathrm{ch}}(F'), f_*^{\mathrm{ch}}(G')) \tag{1}$$

induit par le 2-foncteur image directe f_*^{ch} est *une équivalence de catégories.*

(ii) Pour tout couple (F, G) de E-champs le foncteur

$$\mathsf{Cart}_{E}(F, G) \to \mathsf{Cart}_{E'}(f_{\mathrm{ch}}^*(F), f_{\mathrm{ch}}^*(G)) \tag{2}$$

induit par le 2-foncteur image inverse f_{ch}^* est *une équivalence de catégories.*

(iii) Si F est un E-champ, F' un E'-champ et $\varphi\colon F \to f_*^{\mathrm{ch}}(F')$ un morphisme de E-champs, les deux conditions suivantes sont équivalentes

(a) (F', φ) est une image inverse de F;

(b) φ est une E-équivalence.

(iv) Si F' est un E'-champ, le morphisme $\varphi'\colon f_{\mathrm{ch}}^* f_*^{\mathrm{ch}}(F') \to F'$ de (3.2.1.7) est une E'-équivalence.

(v) Pour qu'un E-champ F vérifie la condition $(\mathsf{U}-P)$ (resp. $\mathsf{U}-p)$) il faut et il suffit qu'il en soit ainsi de son image inverse. De plus, pour qu'un E'-champ F' vérifie la condition $(\mathsf{U}-P)$ (resp. $(\mathsf{U}-p)$) il faut et il suffit qu'il en soit ainsi de son image directe.

Lemme 3.3.2. Soit $f\colon E' \to E$ un morphisme de U-sites. Pour que les conditions (i) à (iv) de (3.3.1) soient vérifiées il suffit que la condition (i) le soit, ainsi que

(iii bis) pour tout E-champ F il existe un E'-champ F' et une E-équivalence $F \approx f_*(F')$.

3.3.2.1. En effet, (i) prouve que le E'-champ F' de (iii bis) est une image inverse de F par f, d'où (iii), par unicité de l'image inverse. Par ailleurs, (ii) résulte de (i) et (iii) car dans le diagramme (3.2.1.3 (6)) qui définit (3.3.1 (2)) tous les foncteurs sont des équivalences. Enfin, pour prouver (iv), il suffit de prouver que, pour tout E'-champ X', le foncteur $\mathbf{Cart}_{E'}(X', \varphi')$ est une équivalence. D'après (i), il suffit pour cela de prouver que le foncteur $f_*(\varphi')$ est une E-équivalence. Or, par construction (3.2.1.7), ce dernier est un quasi-inverse du morphisme «structural» φ: $f_*(F') \to f_* f'^* f_*(F')$, celui-ci étant une équivalence d'après (iii).

3.3.2.2. On notera que, d'après (iii), (v) est conséquence de

(v bis) pour qu'un E'-champ F' vérifie $(\mathsf{U}-P)$ (resp. $(\mathsf{U}-p)$) il suffit qu'il en soit ainsi de son image directe.

3.3.2.3. Notons maintenant que si f, g et h sont trois morphismes de sites vérifiant $fg = h$ et si deux d'entre eux vérifient les conditions de (3.3.2), il en est de même du troisième. Par ailleurs, si le foncteur sous-jacent à f: $E' \to E$ est une équivalence, on a trivialement (iii bis) et (v) et on a (i) d'après (I 2.5.7 et 2.5.8). Considérant le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varepsilon} & \tilde{E} \\ {\scriptstyle f^{-1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\ E' & \xrightarrow[\varepsilon']{} & \tilde{E}' \end{array}$$

de (0 3.3.2.5), on en déduit qu'il suffit de prouver (3.3.1) dans le cas particulier suivant.

Proposition 3.3.3. (Passage au topos.) Soient E un U-site et

$$\bar{\varepsilon}\colon\ \tilde{E} \to E \tag{1}$$

le morphisme de U-sites dont le foncteur sous-jacent est ε: $E \to \tilde{E}$ (0 3.6 (1)).

(i) $\bar{\varepsilon}$ vérifie l'hypothèse de (3.3.1).

(ii) Soit F un E-champ. Posons $F^* = F^+ \times_{\tilde{E}} \tilde{E}$ et soit f: $F \to F^* \times_{\tilde{E}} E$ un E-quasi-inverse de (3.1.4 (1)). Le couple (F^*, f) est une image inverse de F par $\bar{\varepsilon}$.

3.3.3.1. L'assertion (i) est ici pour mémoire (0 3.6). Prouvons que $\bar{\varepsilon}$ vérifie les conditions (i) – (v) de (3.3.1), ce qui achèvera de prouver (3.3.1), donc aussi (3.3.3), car (3.3.3 (ii)) résulte de (3.3.1 (iii)). Le morphisme de sites $\bar{\varepsilon}$ vérifie (v bis) d'après (1.3.5) et (iii bis) d'après (1.3.3). Prouvons

que $\bar{\varepsilon}$ vérifie (3.3.1 (i)). Si F et G sont deux $\tilde{E}$-champs, le foncteur

$$\mathbf{Cart}_{\hat{E}}(F, G) \to \mathbf{Cart}_{\hat{E}}(a_\bullet(F), a_\bullet(G))$$

induit par le changement de base $a\colon \hat{E} \to \tilde{E}$ (faisceau associé) est une équivalence d'après (I 2.5.7) où l'on remplace U par un univers convenable V. De plus, a est sous-jacent à un morphisme de sites pour les topologies canoniques, donc $a_\bullet(F)$ et $a_\bullet(G)$ sont des champs sur $\hat{E}$ pour la topologie canonique. D'après (1.3.2 (i)) et (I 3.2.5 (ii)) le foncteur induit par le changement de base $\eta\colon E \to \hat{E}$

$$\mathbf{Cart}_{E}(a_\bullet(F), a_\bullet(G)) \to \mathbf{Cart}_{E}(\eta_\bullet a_\bullet(F), \eta_\bullet a_\bullet(G))$$

est donc une équivalence. Par transitivité du changement de base, ceci prouve que $\bar{\varepsilon}$ vérifie (3.3.1 (i)) car, par définition, $\varepsilon = a\eta$. *Ce qui achève de prouver* (3.3.1).

3.3.3.2. Par définition F^* est la restriction à $\tilde{E}$ de l'extension canonique F^+ de F à $\hat{E}$ (1.3.3). C'est donc le $\tilde{E}$-champ scindé défini par

$$F^*(P) = \mathbf{Cart}_{E}(E_{/P}, F) \approx \varprojlim(F_{/P}/E_{/P}), \qquad P \in \mathrm{Ob}(\tilde{E}), \tag{2}$$

où

$$F_{/P} = F \times_{E}(E_{/P}), \qquad (\text{I } 3.2.1), \tag{3}$$

et où $E_{/P}$ est la catégorie dont les objets sont les couples (S, s), $S \in \mathrm{Ob}(E)$, $s \in \mathrm{Hom}_{\hat{E}}(\eta(S), P) \approx P(S)$.

3.3.3.3. Par ailleurs, lorsque la topologie canonique de E est plus fine que celle du site, on a $\varepsilon = i\eta$ (0 2.5.2 (4)) et $F^* \times_{\hat{E}} E$ est donc canoniquement isomorphe à $F^+ \times_{\hat{E}} E$. Le foncteur $f\colon F \xrightarrow{\approx} F^* \times_{\hat{E}} E$ s'explicite alors de façon plus commode comme un quasi-inverse de l'équivalence

$$F^+ \times_{\hat{E}} E \xrightarrow{\approx} F \qquad (\text{I } 3.2.3\ (2)). \tag{4}$$

Remarque 3.3.4. On résume (3.3.3) en disant que, par image directe et inverse, la donnée d'un champ sur E équivaut à la donnée d'un champ sur le topos associé $\tilde{E}$. Notons également que le *lemme de comparaison* [SGA 4 III § 3.4.4] (0 3.7) permet, en pratique, de vérifier les hypothèses de (3.3.1).

Proposition 3.3.5. (Passage à $\hat{E}$.) Soient E un U-site et

$$\bar{\eta}\colon \hat{E} \to E \tag{1}$$

le morphisme de sites [$\hat{E}$ est munie de la topologie induite par celle de E (0 3.5)] dont le foncteur sous-jacent est

$$\eta\colon E \to \hat{E}, \qquad \eta(S)(T) = \mathrm{Hom}(S, T). \tag{2}$$

(i) Le morphisme $\bar{\eta}$ vérifie les conditions (i) à (v) de (3.3.1).

(ii) Pour tout E-champ F, le couple (F^+, f'), où F^+ est l'extension canonique de F à $\hat{E}$ et où $f: F \to F^+ \times_{\hat{E}} E$ est un quasi-inverse de (I 3.2.3 (2)) est une image inverse de F par $\bar{\eta}$.

3.3.5.1. Si la topologie de E est *discrète*, la topologie induite sur $\hat{E}$ est *la topologie canonique*. Montrons d'abord que, pour ces topologies, les assertions de la proposition précédente, sauf (3.3.1 (v)), restent valables en supposant seulement que E est une U-catégorie. Elles sont indépendantes de l'univers U ; remplaçons U par un univers V tel que $U \in V$ et $E \in V$. Le morphisme $\bar{\eta}$ vérifie les hypothèses du lemme de comparaison (0 3.7) où V remplace U, d'où les assertions (i) à (iv) de (3.3.1). On déduit alors (3.3.5 (ii)) du fait que F^+ est un champ sur $\hat{E}$ pour la topologie canonique (1.1.3 (ii)) et de (3.3.1 (iii)).

3.3.5.2. Montrons comment (3.3.5) résulte de ce qui précède (on ne peut pas appliquer (3.3.1) car $\hat{E}$ n'est pas, en général, un U-site). La topologie induite de $\hat{E}$ étant plus fine que la topologie canonique, on a (3.3.1 (i)). D'où (3.3.5 (ii)), car F^+ est un champ sur $\hat{E}$ pour la topologie induite (1.3.2). Les 2-foncteurs image directe et inverse relatifs aux topologies de l'énoncé sont donc induits par les 2-foncteurs analogues obtenus en munissant E et $\hat{E}$ de la topologie discrète et de la topologie canonique. D'où les conditions (ii), (iii) et (iv) de (3.3.1). Quant à (v) elle résulte des précédentes et de (1.3.5).

3.3.5.3. En résumé, grâce au changement de base $\eta: E \to \hat{E}$ et au 2-foncteur $F \rightsquigarrow F^+$, *les E-catégories fibrées* (resp. *E-champs*) *correspondent aux champs sur* $\hat{E}$ *pour la topologie canonique* (resp. *induite*).

3.4. Le champ des faisceaux sur un site

Définition 3.4.1. Soient E un site et $\mathscr{V}$ une catégorie.

(i) On note

$$\mathbf{Faisc}(E; \mathscr{V}) \tag{1}$$

la *catégorie* des faisceaux sur E à valeurs dans $\mathscr{V}$ [SGA 4 II 5.1].

(ii) On appelle *catégorie scindée des faisceaux sur E à valeurs dans* $\mathscr{V}$ et on note

$$\mathrm{FAISCIN}(E; \mathscr{V}) \tag{2}$$

celle obtenue en associant à tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$ la catégorie $\mathbf{Faisc}(E_{/S}; V)$, où $E_{/S}$ est munie de la topologie induite (0 3.1.4), et à toute flèche $f: T \to S$ le foncteur

$$\mathbf{Faisc}(E_{/S}; \mathscr{V}) \to \mathbf{Faisc}(E_{/T}; \mathscr{V}) \tag{3}$$

obtenu par composition avec le foncteur $E_{/f}: E_{/T} \to E_{/S}$.

3.4.1.1. Si E est un U-site et si $\mathscr{V}$ est la catégorie

$$\mathsf{U}\text{-ens}, \quad \mathsf{U}\text{-gr} \quad \text{ou} \quad \mathsf{U}\text{-ab} \tag{4}$$

des ensembles, groupes ou groupes abéliens appartenant à U, on écrira

$$\tilde{E}, \quad \mathrm{Fagr}(E) \quad \text{ou} \quad \mathrm{Fab}(E) \tag{5}$$

au lieu de $\mathbf{Faisc}(E; \mathscr{V})$ et

$$\mathrm{FAISCIN}(E), \quad \mathrm{FAGRSC}(E) \quad \text{ou} \quad \mathrm{FABSC}(E) \tag{6}$$

au lieu de $\mathrm{FAISCIN}(E; \mathscr{V})$.

3.4.1.2. On notera que la définition ne nécessite aucune hypothèse sur E ou $\mathscr{V}$; de même pour le lemme que voici.

Lemme 3.4.2. Soient E un site et $\mathscr{V}$ une catégorie.

(i) Le foncteur

$$\mathbf{Faisc}(E, \mathscr{V}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim(\mathrm{FAISCIN}(E; \mathscr{V})/E) \tag{1}$$

est un *isomorphisme et l'inclusion*

$$\varprojlim(\mathrm{FAISCIN}(E; \mathscr{V})/E) \xrightarrow{\approx} \underleftarrow{\mathrm{Lim}}(\mathrm{FAISCIN}(E; \mathscr{V})/E) \tag{2}$$

est une équivalence de catégories.

(ii) Soit $x\colon X \to E$ une E-catégorie *discrète* munie de la topologie induite (0 3.1.4). On a un isomorphisme canonique de X-catégories scindées

$$\mathrm{FAISCIN}(X; \mathscr{V}) \approx \mathrm{FAISCIN}(E; \mathscr{V}) \times_E X. \tag{3}$$

3.4.2.1. Rappelons que l'inclusion (2) est définie par le scindage de $\mathrm{FAISCIN}(E; \mathscr{V})$ et qu'elle est pleinement fidèle, (I 1.1.4 (4)). Montrons seulement comment construire un foncteur quasi-inverse du composé de (2) et de (1). Si F est une section cartésienne de $\mathrm{FAISCIN}(E, \mathbf{V})$, on construira un préfaisceau F' sur E en posant, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$:

$$F'(S) = F(S)(\mathrm{id}_S),$$

ce qui est licite car ($F(S)$ est un faisceau sur $E_{/S}$ et id_S un objet de $E_{/S}$. De même, pour une flèche $f\colon T \to S$ de E, on posera

$$F'(f) = F(S)(\dot{f})\, F(f)(\mathrm{id}_T),$$

où $\dot{f}\colon (T/S) \to \mathrm{id}_S$ est, dans $E_{/S}$, le morphisme final. On achève alors la preuve de (i) sans difficulté.

3.4.2.2. Puisque $x\colon X \to E$ est discret, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(X)$, le foncteur $X_{/S} \to X_{/x(S)}$ est un isomorphisme [D 6.1 à 6.3] ce qui prouve (ii) par

(0 3.1.4). Ayant ainsi localisé au dessus d'un objet de E on procède de même au dessus d'un objet de $\hat{E}$.

Proposition 3.4.3. Soient E un site dont la catégorie sous-jacente est une U-catégorie et soit $\mathscr{V}$ une catégorie. Soit encore

$$\mathrm{FAISCIN}^{+}(E;\mathscr{V}) \tag{1}$$

la $\hat{E}$-catégorie scindée obtenue en associant à tout $P\in\mathrm{Ob}(\hat{E})$ la catégorie $\mathbf{Faisc}(E_{/P};\mathscr{V})$ des faisceaux sur $E_{/P}$ munie de la topologie induite (0 3.1.4) à valeurs dans $\mathscr{V}$.

(i) On a un *E-isomorphisme* canonique de E-catégories scindées

$$\mathrm{FAISCIN}^{+}(E;\mathbf{V})\times_{\hat{E}}E\approx\mathrm{FAISCIN}(E;\mathscr{V}) \tag{2}$$

induit par les isomorphismes $E_{/S}\approx E_{/\eta(S)}$, $S\in\mathrm{Ob}(E)$ (I 3.2.1 (4)).

(ii) On a une *$\hat{E}$-équivalence*

$$\mathrm{FAISCIN}^{+}(E;\mathscr{V})\xrightarrow{\approx}\mathrm{FAISCIN}(E;\mathscr{V})^{+}, \tag{3}$$

où la seconde catégorie est l'*extension canonique à $\hat{E}$ de* $\mathrm{FAISCIN}(E;\mathscr{V})$; de plus, (3) est un morphisme de catégories scindées.

(iii) Pour tout $P\in\mathrm{Ob}(\hat{E})$ on a une équivalence

$$\mathbf{Faisc}(E_{/P},\mathscr{V})\xrightarrow{\approx}\varprojlim(\mathrm{FAISCIN}(E;V)_{/P}/E_{/P}). \tag{4}$$

Les isomorphismes $E_{/S}\approx E_{/\eta(S)}$ sont fonctoriels en S (I 3.2.1 (4)), ce qui prouve (i). Pour définir (3), il suffit d'associer à tout faisceau F sur $E_{/P}$ la section cartésienne de $\mathrm{FAISCIN}(E;\mathscr{V})$ sur $E_{/P}$ définie par les restrictions de F aux $E_{/S}\to E_{/P}$, $(S,s)\in\mathrm{Ob}(E_{/P})$. On obtient trivialement un morphisme de $\hat{E}$-catégories scindées et c'est une équivalence d'après le lemme précédent. D'où (ii), puis (iii) par passage aux fibres.

Proposition 3.4.4. Soit E un U-site et $\mathscr{V}$ une catégorie où les limites projectives indexées par une catégorie élément de U existent. La catégorie scindée des faisceaux sur E à valeurs dans $\mathscr{V}$ est un *champ*.

D'après (3.4.3 (iii)), il suffit de prouver que, pour $X\in\mathrm{Ob}(E)$ et tout raffinement R de X, le foncteur restriction

$$\mathbf{Faisc}(E_{/X},\mathscr{V})\to\mathbf{Faisc}(R,\mathscr{V}) \tag{1}$$

obtenu par composition avec l'inclusion $R\to E_{/X}$ est une équivalence. Par (3.4.2 (ii)), on peut supposer que $E_{/X}=E$. On obtient un foncteur quasi-inverse de (1) en posant, pour tout faisceau F sur R

$$F'(S)=\varprojlim(F|R^{S}),\qquad S\in\mathrm{Ob}(E),\ R^{S}=R\times_{E}(E_{/S}). \tag{2}$$

En effet, la formule (2) a un sens bien que R^S ne soit pas nécessairement élément de U: prendre une U-famille de générateurs topologiques (S_i) de E et remplacer R^S par la sous-catégorie pleine S' de R^S dont les objets sont de la forme $S_i \to S$. On a $\varprojlim(F|S') = \varprojlim(F|R^S)$ car F est un faisceau sur R et $\varprojlim(F|S')$ existe car S' appartient à U. Pour voir que F' est un faisceau, on note que $(F'|R)$ est isomorphe à F, donc est un faisceau sur R pour la topologie induite par celle de E et que, d'après (2), R est un raffinement de E pour la topologie la plus fine sur E telle que F' soit un faisceau. Pour ces arguments, on a utilisé implicitement le fait que F est un faisceau si, et seulement si, pour tout $V \in \mathrm{Ob}(\mathscr{V})$, le préfaisceau d'ensembles $S \rightsquigarrow \mathrm{Hom}(V, F(S))$ est un faisceau. Les dernières vérifications sont triviales.

Corollaire 3.4.5. La $\hat{E}$-catégorie scindée $\mathrm{FAISCIN}^+(E, \mathscr{V})$ est un champ sur $\hat{E}$ pour la topologie induite (0 3.5).

En effet, elle est $\hat{E}$-équivalente à l'extension canonique à $\hat{E}$ du champ $\mathrm{FAISCIN}(E, \mathscr{V})$ en vertu de (3.4.3 (iii)) et l'on applique (1.3.1).

3.4.5.1. Lorsque $\mathscr{V} =$ U-ens, on l'omettra dans la notation. En particulier, la $\hat{E}$-catégorie scindée

$$\mathrm{FAISCIN}^+(E) \tag{1}$$

définie par

$$P \rightsquigarrow (E_{/P})^{\sim}, \quad P \in \mathrm{Ob}(\hat{E}), \tag{2}$$

où $E_{/P}$ est munie de la topologie induite, est un champ sur $\hat{E}$ pour la topologie induite. Lorsque E est munie de la topologie discrète, on retrouve la catégorie scindée des préfaisceaux d'ensembles (I 2.6.1). D'après (I 2.6.1.3), celle-ci est $\hat{E}$-équivalente à $FL(\hat{E})$, résultat que nous allons généraliser.

Proposition 3.4.6. Soient E un U-site et $X \to P$ une flèche de $\hat{E}$.

(i) Les conditions suivantes sont équivalentes

(a) le préfaisceau sur $E_{/P}$ représenté par X (à savoir $S \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_P(\eta(S), X)$) est un faisceau pour la topologie induite (0 3.1.4)

(b) le carré

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & a(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ P & \longrightarrow & a(P) \end{array}$$

est cartésien (où a est le foncteur faisceau associé).

(ii) Ces conditions sont stables par changement de base. Elles sont vérifiées si, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$ et tout morphisme $\eta(S) \to P$, la première projection $\eta(S) \times_P X \to \eta(S)$ les vérifie.

(iii) Si la topologie canonique de E est plus fine que celle du site, ces conditions équivalent à

(c) pour tout faisceau F sur E et tout morphisme $F \to P$, le produit fibré $F \times_P X$ est un faisceau.

3.4.6.1. Désignons par F la sous-catégorie pleine de $\mathrm{FL}(\hat{E})$ dont les objets sont les flèches $X \to P$ vérifiant la condition (a). D'après (I 2.6.1.3), on a une $\hat{E}$-équivalence

$$\mathsf{Fl}(\hat{E}) \xrightarrow{\approx} \mathrm{PREFSCIN}^+(E), \qquad (X/P) \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_P(*, X), \tag{1}$$

qui, par définition de F et de $\mathrm{FAISCIN}^+(E)$, induit une équivalence

$$\mathsf{F} \xrightarrow{\approx} \mathrm{FAISCIN}^+(E). \tag{2}$$

Il en résulte en particulier que F *est un champ sur* $\hat{E}$ *pour la topologie induite.*

3.4.6.2. *Si P est un faisceau*, la condition (a) signifie trivialement que X est un faisceau; elle est donc, dans ce cas, équivalente à (b). La fibre de F en P est alors

$$\mathsf{F}_P = \tilde{E_{/P}}. \tag{3}$$

En particulier, on a

$$\mathsf{F}|\tilde{E} = \mathsf{Fl}(\tilde{E}). \tag{4}$$

3.4.6.3. Prouvons (i). Puisque $P \to a(P)$ est bicouvrant et que F est un champ sur $\hat{E}$ pour la topologie induite, le foncteur changement de base

$$\mathsf{F}_{a(P)} \to F_P, \qquad Y \rightsquigarrow Y \times_{a(P)} P, \tag{5}$$

est une équivalence de catégories (1.3.2 (ii)). On a donc (b)⇒(a), car $a(X)$ est un objet de $\mathsf{F}_{a(P)}$ et F est une $\hat{E}$-catégorie fibrée. Prouvons que (a)⇒(b). Supposons donc que $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{F}_P)$. Puisque le foncteur changement de base (5) est une équivalence de catégories, il existe un faisceau X' et un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ P & \longrightarrow & a(P). \end{array} \tag{6}$$

Puisque le foncteur faisceau associé commute aux produits fibrés finis, $a(i)\colon a(X) \to a(X')$ est un isomorphisme, d'où l'on déduit (b) car (6) est cartésien.

3.4.6.4. Prouvons (ii). Ces conditions sont stables par changement de base car F est une $\hat{E}$-catégorie fibrée. La seconde assertion se vérifie aisément sur (a) grâce à la description de la topologie induite donnée dans (0 3.1.4). On peut aussi noter que F est un champ donc que la condition (a) est locale et que tout $P \in \mathrm{Ob}(\hat{E})$ est recouvert (pour la topologie induite) par des $\eta(S)$, $S \in \mathrm{Ob}(E)$. Prouvons (iii). On a (b)⇒(c) car la condition (b) est stable par changement de base et, lorsque P est un faisceau, elle signifie que X en est un. Inversement, si la topologie canonique de E est plus fine que celle du site, on a (c)⇒(b) d'après la seconde assertion de (ii), car les $\eta(S)$, $S \in \mathrm{Ob}(E)$, sont des faisceaux.

Définition 3.4.7. Soient E un U-site et $P \in \mathrm{Ob}(\hat{E})$. On appelle *faisceau sur* P une flèche $X \to P$ de $\hat{E}$ vérifiant les conditions de (3.4.6 (i)). On désigne par

$$\mathrm{FAISC}^+(E) \tag{1}$$

la sous-catégorie pleine de $\mathsf{Fl}(\hat{E})$ dont les objets de projection P sont les faisceaux sur P; on désigne par

$$\mathrm{FAISC}(E)$$

la E-catégorie fibrée qui s'en déduit par le changement de base $\eta\colon E \to \hat{E}$; cette dernière est appelée la *catégorie fibrée des faisceaux sur* E.

3.4.7.1. Bien entendu, (1) n'est autre que la catégorie appelée F dans la preuve de (3.4.6).

3.4.7.2. Si P est un faisceau, on a

$$\mathrm{FAISC}^+(E)_P = \tilde{E_{/P}}, \qquad P \in \mathrm{Ob}(\tilde{E}), \tag{2}$$

et donc

$$\mathsf{Fl}(\tilde{E}) = \mathrm{FAISC}^+(E) \times_{\hat{E}} \tilde{E} \tag{3}$$

car, lorsque P est un faisceau, la condition (b) signifie simplement que X est un faisceau.

Proposition 3.4.8. Soit E un U-site.

(i) On a une $\hat{E}$-équivalence de champs (pour la topologie induite)

$$\mathrm{FAISC}^+(E) \xrightarrow{\approx} \mathrm{FAISCIN}^+(E), \qquad (X/P) \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_P(\eta(*), X), \tag{1}$$

qui induit sur les fibres des équivalences de catégories

$$\mathrm{FAISC}^+(E)_P \xrightarrow{\approx} (E_{/P})^{\sim}, \qquad P \in \mathrm{Ob}(\hat{E}), \tag{2}$$

qui s'écrivent, lorsque P est un faisceau,

$$\tilde{E}_{/P} \xrightarrow{\approx} (E_{/P})^{\sim}, \qquad P \in \mathrm{Ob}(\tilde{E}). \tag{3}$$

(ii) Pour tout $P \in \mathrm{Ob}(\hat{E})$, le foncteur image inverse associé au morphisme $P \to a(P)$ (où $a(P)$ est le faisceau associé à P) est une équivalence de catégories

$$\mathrm{FAISC}^+(E)_{a(P)} \to \mathrm{FAISC}^+(E)_P, \qquad P \in \mathrm{Ob}(\hat{E}), \tag{4}$$

qui, composée avec (2), fournit une équivalence

$$(\tilde{E})_{/a(P)} \to (E_{/P})^{\sim}, \qquad P \in \mathrm{Ob}(\hat{E}). \tag{5}$$

3.4.8.1. On a (i) d'après (3.4.6.1) et (ii) d'après (3.4.6.3 (5)).

Corollaire 3.4.8.2. Pour tout U-topos E, la E-catégorie fibrée $\mathbf{Fl}(E)$ est un E-champ.

Corollaire 3.4.9. Soit E un U-site. Posons

$$\mathrm{FAISC}(E) = \mathbf{Fl}(\tilde{E}) \times_{\tilde{E}} E. \tag{1}$$

(i) On a des équivalences de E-champs

$$\mathrm{FAISC}(E) \xrightarrow{\approx} \mathrm{FAISC}^+(E) \times_{\hat{E}} E \xrightarrow{\approx} \mathrm{FAISCIN}(E), \tag{2}$$

la première étant un isomorphisme si E est un site standard.

(ii) Pour tout $P \in \mathrm{Ob}(\hat{E})$, on a une équivalence

$$\varprojlim(\mathrm{FAISC}(E)_{/P}/E_{/P}) \xrightarrow{\approx} (E_{/P})^{\sim}. \tag{3}$$

3.4.9.1. On a deux foncteurs $i\varepsilon,\ \eta\colon E \rightrightarrows \hat{E}$ et un morphisme de foncteurs $\mu\colon \eta \to i\varepsilon$, car, par définition, $\varepsilon(S) = a(\eta(S))$. D'où, par [D 1.17], un E-foncteur cartésien

$$(i\varepsilon)_\bullet(\mathrm{FAISC}^+(E)) \to \eta_\bullet(\mathrm{FAISC}^+(E)) \tag{4}$$

entre les catégories déduites de $\mathrm{FAISC}^+(E)$ par ces deux changements de base et le foncteur (4) induit sur les fibres en $S \in \mathrm{Ob}(E)$ le foncteur image inverse attaché à $\mu(S)\colon i\varepsilon(S) \to \eta(S)$. Celui-ci est une équivalence d'après (3.4.8 (ii)), d'où la première équivalence de (2), par définition de sa source et de son but. La seconde est fournie par (3.4.3 (i)) et (3.4.8 (i)).

3.4.9.2. Il reste à prouver (ii). Or le premier membre de (3) est la fibre en P de l'extension canonique de $\mathrm{FAISC}(E)$ à $\hat{E}$ et le second membre est celle de $\mathrm{FAISCIN}^+(E)$. Ces deux catégories sont $\hat{E}$-équivalentes d'après (3.4.9 (i)) et (3.4.3 (ii)).

Commentaire 3.4.10. D'après ce qui précède, un faisceau sur $P \in \mathrm{Ob}(\hat{E})$ s'interprète au choix comme

(1) une flèche $X \to P$ de $\hat{E}$ vérifiant (3.4.6 (i))
(2) (si P est un faisceau), une flèche $X \to P$ de $\tilde{E}$;
(3) un faisceau sur $E_{/P}$ pour la topologie induite (0 3.1.4);
(4) une section cartésienne au dessus de $E_{/P}$ du champ des faisceaux

FAISCIN(E) ou de FAISC(E). Dans le langage de (1) et (2) le foncteur changement de base associé à une flèche $Q \to P$ de $\hat{E}$ n'est autre que $X \rightsquigarrow X \times_P Q$ et dans le langage de (3) et (4) c'est la composition avec le foncteur $E_{/Q} \to E_{/P}$.

Notons que, sur la forme (3), il apparait que *ces foncteurs changement de base sont des morphismes de topos*, autrement dit ils commutent aux limites projectives finies et aux limites inductives quelconques.

Les considérations précédentes s'étendent aisément au cas des préfaisceaux d'ensembles munis de structure algébrique (III 1.1) [SGA 4 II 5.3]. Nous traiterons le cas des groupes.

3.4.11. Soit C une catégorie. On désigne par $\mathsf{Gr}(C)$ la catégorie des groupes de C (III 1.1.1). Si les produits finis existent dans C, on a, pour toute catégorie X un isomorphisme canonique

$$\mathsf{Gr}(\mathsf{Hom}(X, C)) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Hom}(X, \mathsf{Gr}(C)) \qquad (1)$$

fonctoriel en C. Profitant de cette remarque, nous allons construire, étant donné un E-champ F, un E-champ dont les fibres sont les $\mathsf{Gr}(F_S)$. Bien entendu, la proposition ci-dessous vaut pour toute espèce de structure algébrique, à condition d'y remplacer produit fini par limites projectives finies.

Proposition 3.4.11.1. Soit F une E-catégorie fibrée telle que les produits finis existent dans les fibres de F et soient respectés par les foncteurs image inverse.

(i) Il existe une E-catégorie fibrée $\mathsf{Gr}(F/E)$ et un isomorphisme entre foncteurs définis sur $(\mathrm{Cat}_{/E})^0$ à valeurs dans (Cat)

$$\mathsf{Gr}(\mathsf{Cart}_E(X, F)) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Cart}_E(X, \mathsf{Gr}(F/E)), \qquad (1)$$

[où $X \to E$ est une E-catégorie appartenant à V, c'est à dire un objet de $\mathrm{Cat}_{/E}$].

(ii) De plus, on a un E-foncteur cartésien fidèle et conservatif (0 3.8.1)

$$\mathsf{Gr}(F/E) \to F \qquad (2)$$

appelé foncteur objet sous-jacent.

(iii) Si F est complète (resp. précomplète) pour une topologie sur E, il en est de même de $\mathsf{Gr}(F/E)$.

3.4.11.2. On notera que (i) caractérise $\mathsf{Gr}(F/E)$ à isomorphisme unique près. En particulier, prenant pour X la E-catégorie finale $\{S\}$ définie par un objet S de E, on trouve un isomorphisme canonique

$$\mathsf{Gr}(F_S) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Gr}(F/E)_S, \qquad S \in \mathrm{Ob}(E). \tag{1}$$

Le détail de la preuve de (i) est laissé au lecteur.

3.4.11.3. Le foncteur (2) est défini grâce à la propriété universelle (i) à partir des foncteurs objets sous-jacents

$$\mathsf{Gr}(\mathsf{Cart}_E(X, F) \to \mathsf{Cart}_E(X, F). \tag{2}$$

Il est fidèle et conservatif car il en est ainsi de ceux-ci (I 1.5.1). Puisqu'il est fidèle et conservatif, le foncteur (2) permet de décrire les foncteurs image inverse de $\mathsf{Gr}(F/E)$ à partir de ceux de F.

3.4.11.4. L'assertion (iii) résulte immédiatement de (i) et de la définition (1.2.1).

3.4.11.5. Soit E une catégorie où les produits fibrés finis existent. On posera

$$\mathrm{GREL}(E) = \mathsf{Gr}(\mathsf{Fl}(E)/E) \tag{1}$$

et on l'appellera la *E-catégorie des groupes relatifs de E*. Sa fibre en $S \in \mathrm{Ob}(E)$ est donc la catégorie des groupes de $E_{/S}$, appelés aussi *S-groupes de E*. Si E est un *site standard*, c'est un E-préchamp et si E est un U-*topos*, c'est un E-champ en vertu de (3.4.8.2).

Proposition 3.4.12. Soit E un U site. On pose

$$\mathrm{FAGR}(E) = \mathrm{GREL}(\tilde{E}) \times_{\tilde{E}} E \tag{1}$$

et on l'appelle le champ de faisceaux de groupes sur E.

(i) On a des équivalences de catégories

$$\mathrm{FAGR}(E) \xrightarrow{\approx} \mathsf{Gr}(\mathrm{FAISCIN}(E)/E) \xrightarrow{\approx} \mathrm{FAGRSC}(E), \quad (3.4.1\,(6)). \tag{2}$$

(ii) L'extension canonique de $\mathrm{FAGR}(E)$ à $\hat{E}$ est $\hat{E}$-équivalente à

$$\mathsf{Gr}(\mathrm{FAISC}^+(E)/E) \quad \text{et à} \quad \mathrm{FAGRSC}^+(E), \tag{3}$$

où $\mathrm{FAGRSC}^+(E)$ est la $\hat{E}$-catégorie scindée obtenue en associant à tout $P \in \mathrm{Ob}(\hat{E})$ la catégorie des faisceaux de groupes sur $E_{/P}$ [(3.4.3) où $\mathscr{V}$ = catégorie des groupes appartenant à U].

3.4.12.1. La première équivalence figurant dans (2) est obtenue à partir de $\mathrm{FAISC}(E) \to \mathrm{FAISCIN}(E)$, (3.4.9 (2)) par passage aux catégories $\mathsf{Gr}(*/E)$.

La seconde exprime «qu'un faisceaux de groupes est un groupe de la catégorie des faisceaux» [SGA 4 II § 2.3.5], ainsi que diverses compatibilités. Pour prouver (ii), on utilise (3.4.3 (2)) qui fournit une $\hat{E}$-équivalence

$$\mathrm{FAGRSC}^+(E) \to \mathrm{FAGRSC}(E)^+ \tag{4}$$

et l'argument précédent, appliqué à (3.4.8 (1)).

3.4.12.2. Interprétons (ii). Soit $P \in \mathrm{Ob}(\hat{E})$. Un objet de

$$\mathsf{Gr}(\mathrm{FAISC}^+(E)/\hat{E})_P$$

est, d'après (3.4.11.2 (1)), *un groupe de la catégorie des faisceaux sur* P, (4.3.7) qui s'explicite comme un groupe G de la catégorie $\hat{E}_{/P}$ dont l'objet sous-jacent est un faisceau sur P. Si P est un faisceau, G «est» simplement un groupe de la catégorie $\tilde{E}_{/P}$. Son image par (3.4.12 (3)) est un objet de $\mathrm{FAGRSC}^+(E)_P$, à savoir *le faisceau de groupes* $\mathrm{Hom}_P(\eta(*), G)$ (sur le site $E_{/P}$). Enfin, ce dernier détermine *une section cartésienne de* $\mathrm{FAGRSC}(E)$ sur $E_{/P}$ (3.4.3 (ii)), autrement dit (I 3.2.2.2) un objet de la fibre en P de l'extension canonique à $\hat{E}$ de $\mathrm{FAGRSC}(E)$.

Remarque 3.4.13. En vertu de (3.3.1) et (3.4.12 (1)), $\mathrm{GREL}(\tilde{E})$ est une image inverse de $\mathrm{FAGR}(E)$ par le morphisme de sites défini par le foncteur $\varepsilon: E \to \tilde{E}$. Par ailleurs, en appliquant au U-topos $\tilde{E}$ la proposition précédente on trouve une $\tilde{E}$-équivalence

$$\mathrm{GREL}(\tilde{E}) \xrightarrow{\approx} \mathrm{FAGRSC}\,\tilde{E}) \tag{1}$$

qui interprète donc l'image inverse de $\mathrm{FAGR}(E)$ comme le champ scindé des faisceaux de groupes sur $\tilde{E}$. Enfin, en vertu de (3.3.8), on sait que

$$\mathrm{FAGRSC}(E)^* = \mathrm{FAGRSC}(E)^+ \times_{\hat{E}} \tilde{E} \tag{2}$$

est une image inverse de $\mathrm{FAGRSC}(E)$ laquelle est E-équivalente à $\mathrm{FAGR}(E)$. D'où une E-équivalence

$$\mathrm{FAGRSC}(\tilde{E}) \xrightarrow{\approx} \mathrm{FAGRSC}(E)^*, \tag{3}$$

qu'il est facile d'expliciter. Un objet de la première de projection $P \in \mathrm{Ob}(\tilde{E})$ est un faisceau de groupes G sur $\tilde{E}_{/P}$. Son image est la restriction de G à $E_{/P}$, considérée comme une section cartésienne de $\mathrm{FAGRSC}(E)$ sur $E_{/P}$ (3.3.3.2 (2)).

3.5. Les faisceaux $\mathbf{Aut}_S(x)$ des S-automorphismes

3.5.1. Soient E un U-site et F un E-champ. On désignera par

$$F^{\mathrm{cart}} \tag{1}$$

la sous-catégorie de F qui a mêmes objets et dont les flèches sont les flèches cartésiennes de F (donc, dans la fibre en $S \in \mathrm{Ob}(E)$, les S-isomorphismes). On dira que F^{cart} est *le champ de groupoïdes sous-jacent à F*; c'est en effet un champ dont les fibres sont des groupoïdes et le foncteur d'inclusion $F^{\mathrm{cart}} \to F$ est un morphisme de champs. Si $u: F \to G$ est un morphisme de E-champs, on notera

$$u^{\mathrm{cart}}: F^{\mathrm{cart}} \to G^{\mathrm{cart}} \tag{2}$$

le morphisme induit par u sur les champs de groupoïdes sous-jacents.

3.5.2. Supposons de plus que F vérifie $(\mathrm{U}-P)$ (1.3.4). Pour tout $x \in \mathrm{Ob}(F^{\mathrm{cart}})$ de projection $S \in \mathrm{Ob}(E)$, on obtient *un* U*-faisceau de groupes*

$$\mathbf{Aut}_S(x) \tag{1}$$

sur le site $E_{/S}$ (0 3.1.4) en munissant le fausceau $\mathbf{Hom}_S(x, x)$ calculé dans F^{cart} [(I 2.6.3.1) et (1.2.3 (i))] de la loi de composition définie par l'accouplement de composition (I 2.6.3.2 (2)). La bijection (I 2.6.3.2 (1)) induit *un isomorphisme de groupes*

$$\Gamma(S, \mathbf{Aut}_S(x)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}_S(x). \tag{2}$$

Pour tout S-isomorphisme $m: x \to y$ de F^{cart}, on a un morphisme de faisceaux de groupes sur $E_{/S}$

$$\mathbf{Int}(m): \mathbf{Aut}_S(x) \to \mathbf{Aut}_S(y) \tag{3}$$

défini par $\mathbf{Int}(m)(a) = mam^{-1}$, et (2) est fonctoriel en x. On en déduit un *E-foncteur cartésien*

$$\mathrm{AUT}(F): F^{\mathrm{cart}} \to \mathrm{FAGRSC}(E), \tag{4}$$

$$\mathrm{AUT}(F)(x) = \mathbf{Aut}_S(x), \quad x \in \mathrm{Ob}(F_S), \tag{4 bis}$$

dont le but est le champ scindé des faisceaux de groupes (3.4.1.1 (6)). En effet, si F est *scindée*, la formation de $\mathbf{Hom}_S(x, y)$ commute (sans isomor-

phisme canonique) à la formation de l'image inverse (I 2.6.2.1 (5)). Dans, ce cas, (4) est donc un morphisme de champs scindés. Dans le cas général, les $\mathbf{Aut}_S(x)$ sont définis en plongeant F^{cart} dans le catégorie scindée libre associée $\mathbf{L}(F^{\mathrm{cart}})$ (I 2.4.3), ce qui justifie (4).

3.5.3. Si $u\colon F \to G$ est un morphisme de champs, le morphisme u^{cart} induit pour tout $x \in \mathrm{Ob}(F_S)$, $S \in \mathrm{Ob}(E)$, un morphisme de faisceaux de groupes sur $E_{/S}$

$$\mathbf{Aut}_S(x) \to \mathbf{Aut}_S(u(x)), \quad (\text{I } 2.6.3.2\,(4)). \tag{1}$$

Par passage aux sections (3.5.2 (2)), celui-ci redonne l'action de u sur les S-isomorphismes. On résume les autres propriétés de compatibilité des morphismes (1) en disant qu'ils définissent *un morphisme de morphismes de champs*

$$\mathrm{AUT}(u)\colon\ \mathrm{AUT}(F) \to \mathrm{AUT}(G) \cdot u^{\mathrm{cart}}, \tag{2}$$

ce qui est aisé à vérifier.

Chapitre III

Torseurs. Cohomologie de degré 1

§ 1. Objets à opérateurs dans un topos

1.1. Introduction: Objets à opérateurs dans une catégorie

Nous nous contenterons de fixer nos conventions en renvoyant à [SGA 1] pour plus de détails.

Définition 1.1.1. Soit E une catégorie. On appelle groupe de E un couple (G, m) où G est un objet de E et m une application qui, à tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$, associe une loi de groupe sur l'ensemble $G(S) = \mathrm{Hom}(S, G)$ de telle sorte que, pour toute flèche $f: T \to S$ de E, l'application

$$G(f):\ G(S) \to G(T), \qquad G(f)(s) = sf,$$

soit un morphisme de groupes.

1.1.2. De même *un objet à groupe d'opérateurs à droite* (resp. *gauche*) de E est un (P, G, m), où G est un *groupe* de E et m une famille d'applications $m(S)$: $P(S) \times G(S) \to P(S)$, $S \in \mathrm{Ob}(E)$, vérifiant les conditions habituelles. Si G est un groupe de E, un *G-objet à droite* (resp. gauche) est un objet à groupe d'opérateurs à droite (resp. gauche) dont le groupe sous-jacent est égal à G. On désignera par

$$\mathbf{Opér}(E; G) \qquad (\text{resp. } \mathbf{Opér}(E; G^0)) \tag{1}$$

la catégorie des G-objets à droite (resp. gauche) de E et par

$$\mathbf{Opér}(E) \tag{2}$$

celle des objets à opérateurs à droite de E. *Comme il s'agira toujours de groupes d'opérateurs nous ne le précisons plus.*

Définition 1.1.3. Soit $F = (P, G, m)$ un objet à opérateurs à droite (resp. gauche) de E. On désigne par $\check{F}$ et on appelle *symétrique* de F, l'objet

à opérateurs à gauche (resp. droite) défini par

$$\check{F}=(P, G, m'), \quad m'(S)(p, g)=m(S)(m, g^{-1}), \qquad S\in \mathrm{Ob}(E). \tag{1}$$

On notera que si G est *abélien* on ne peut distinguer entre G-objets à droite et à gauche mais que $\check{F}$ n'est pas, en général, isomorphe à F.

1.1.4. D'un énoncé concernant les G-objets à droite, l'opération $F \rightsquigarrow \check{F}$ permet de déduire un énoncé concernant les G-objets à gauche. *Désormais, lorsque nous ne préciserons pas il sera toujours entendu que le groupe opère à droite.*

Définition 1.1.5. Soit (P, G, m) un objet à opérateurs de E. On dira que G *opère librement* (resp. que (P, G, m) est un *pseudo-torseur*) si, pour tout $S\in \mathrm{Ob}(E)$, le groupe $G(S)$ opère librement sur $P(S)$ (resp. librement et transitivement).

Ces conditions sont «algébriques», c'est-à-dire s'expriment à l'aide de limites projectives finies si celles-ci existent dans E. Ainsi pour que (P, G, m) soit un *pseudo-torseur* il faut et il suffit que le morphisme

$$u\colon\ P\times G\to P\times P, \quad u(S)(p, g)=\big(p, m(S)(p, g)\big), \qquad S\in \mathrm{Ob}(E), \tag{1}$$

soit un *isomorphisme*. On notera que cette condition n'empêche pas $P(S)$ d'être vide, d'où le préfixe pseudo, cf. (1.4.1).

1.1.6. *Jusqu'à la fin de ce numéro on suppose que les limites projectives existent dans E.*

Soit $S\in \mathrm{Ob}(E)$. On appelle *S-groupe* (resp. *S-objet à opérateurs*) *de E* un groupe (resp. objet à opérateurs) de la catégorie $E_{/S}$ des objets de E au-dessus de S. De même, si G est un S-groupe, on appellera S-G-objet de E un G-objet de $E_{/S}$. C'est donc objet $P\to S$ de $E_{/S}$ muni d'un morphisme $P\times_S G\to P$ assujetti à des conditions «algébriques» évidentes. Il en résulte que si $f\colon T\to S$ est une flèche de E, le changement de base $X \rightsquigarrow X\times_S T$ transforme S-objets à opérateurs en T-objets à opérateurs, ce qui permet de définir une *E-catégorie fibrée* (cf. II 3.4.11.1)

$$\mathrm{OPER}(E) \tag{1}$$

dont la fibre en $S\in \mathrm{Ob}(E)$ est la *catégorie* $\mathbf{Opér}(E_{/S})$ des objets à opérateurs (à droite) de $E_{/S}$. Si G est un groupe de E, on définit de même la *E-catégorie fibrée*

$$\mathrm{OPER}(E; G) \tag{2}$$

dont la fibre en S est la catégorie $\mathbf{Opér}(E_{/S}; G\times S)$ des S-$(G\times S)$-objets à opérateurs à droite, (par abus de langage on dira aussi *S-G-objet à opérateurs*).

1.1.7. Pour étudier les objets à opérateurs de E on munit E d'une topologie moins fine que la topologie canonique. Le foncteur

$$\varepsilon\colon E \to \tilde{E}, \quad \varepsilon(S) = \mathrm{Hom}(*, S), \quad (0\ 2.5\ (3)), \tag{1}$$

est alors pleinement fidèle et commute aux limites projectives finies. Il induit donc un *ε-foncteur cartésien pleinement fidèle*

$$\mathrm{OPER}(\varepsilon)\colon \mathrm{OPER}(E) \to \mathrm{OPER}(\tilde{E}), \tag{2}$$

qui «identifie» les S-objets à opérateurs aux $\varepsilon(S)$-objets à opérateurs du topos $\tilde{E}$ qui sont représentables. Par une variante triviale de (II 3.4.11), on voit que $\mathrm{OPER}(\tilde{E})$ *est un* $\tilde{E}$*-champ* ainsi que $\mathrm{OPER}(\tilde{E}; G)$ où G est un groupe de $\tilde{E}$, d'où il résulte que $\mathrm{OPER}(E)$ (resp. $\mathrm{OPER}(E; G)$, où G est un groupe de E) *est un E-préchamp.* Comme nous allons voir il est très aisé de calculer avec les objets à opérateurs d'un topos, ce qui permet de calculer avec ceux d'un site standard, à condition de disposer de critères de représentabilité (c'est-à-dire de critères d'effectivité pour certaines données de descente sur certains objets de E) pour suppléer au fait que $\mathrm{OPER}(E)$ n'est pas, en général, un champ.

1.2. Les objets $\mathbf{Hom}_G(P, Q)$ dans un topos

Soient T un U-topos, (I 3.1.3), fixé dans tout ce paragraphe.

Définition 1.2.1. Soient $S \in \mathrm{Ob}(\mathrm{T})$, G un S-groupe de T et P et Q des S-G-objets de P. On notera $\mathbf{Hom}_G(P, Q)$ (resp. $\mathrm{Hom}_G(P, Q)$) le faisceau (resp. l'ensemble) des S-morphismes de P dans Q dans le T-champ $\mathrm{OPER}(\mathrm{T}, G)$, (1.1.6.(2)).

1.2.2. Par définition, ce sont des faisceaux sur $\mathrm{T}_{/S}$, qui sont donc *représentables* par des objets de $\mathrm{T}_{/S}$ puisque T est un U-topos.

1.2.3. De même, si $u\colon G \to H$ est un morphisme de S-groupes de T, si P est un S-G-objet et Q un S-H-objet, on posera

$$\mathbf{Hom}_u(P, Q) = \mathbf{Hom}_G(P, Q^u) \quad \text{et} \quad \mathrm{Hom}_u(P, Q) = \mathrm{Hom}_G(P, Q^u) \tag{1}$$

où

$$Q^u \tag{2}$$

est le G-objet déduit de Q par u. On les appellera respectivement faisceau et ensemble des *u-morphismes* de P dans Q.

1.2.4. Le fait que les $\mathbf{Hom}_G(P, Q)$ sont *représentables* assure en particulier que, si P *est un* S-G-*objet à droite de* T, le S-groupe $\mathbf{Aut}_G(P) = \mathbf{Hom}_G(P, P)$ *opère à gauche sur* P *de façon naturelle.* De plus, pour tout

S-groupe A, il y a correspondance bijective entre les structures de A-objet à gauche de P telles que les opérations de A commutent à celles de G, et les morphismes de S-groupes $A \to \mathbf{Aut}_G(P)$. *On dira que A opère sur P par G-automorphismes* si l'on s'est donné un tel morphisme.

1.2.5. Sous ces conditions, soit encore Q un S-G-objet de $\mathbf{T}$. Par composition des S-morphismes dans le $\mathbf{T}$-champ $\mathrm{OPER}(\mathbf{T}, G)$, *le S-groupe* $\mathbf{Aut}_G(P)$ *opère à droite sur* $\mathbf{Hom}_G(P, Q)$; donc aussi A par le morphisme $u\colon A \to \mathbf{Aut}_G(P)$. Si l'on note

$$m\colon\ P \times_S A \to P \tag{1}$$

le morphisme définissant les opérations de A sur P, les opérations de A sur $\mathbf{Hom}_G(P, Q)$ que l'on vient de définir sont données par

$$\begin{aligned} &n\colon\ \mathbf{Hom}_G(P, Q) \times_S A \to \mathbf{Hom}_G(P, Q) \\ &n(S')(f, a)(p) = f\big(m(S')(p, a)\big), \qquad S' \in \mathrm{Ob}(T_{/S}). \end{aligned} \tag{2}$$

1.2.6. Supposons qu'un S- groupe B opère *à gauche* sur Q par G-automorphismes. Par composition des S-morphismes dans $\mathrm{OPER}(\mathbf{T}; G)$, on fait opérer B *à droité* sur $\mathbf{Hom}_G(P, Q)$; on prouve que le morphisme

$$\begin{aligned} &n'\colon\ \mathbf{Hom}_G(P, Q) \times_S B \to \mathbf{Hom}_G(P, Q) \\ &n'(S')(f, b) = m'(S')\big(f(p), b\big), \qquad S' \in \mathrm{Ob}(\mathbf{T}_{/S'}), \end{aligned} \tag{1}$$

donne les dites opérations, où $m'\colon Q \times_S B \to B$ définit les opérations de B sur Q. On notera que B *opère sur* $\mathbf{Hom}_G(P, Q)$ *par A-automorphismes.*

Proposition 1.2.7. Soient $\mathbf{T}$ un topos, G un groupe de $\mathbf{T}$ et P un G-objet de $\mathbf{T}$. Soit G_d le G-objet à droite obtenu en faisant opérer G sur lui-même par les translations à droite. Soit enfin $\mathbf{e}$ la section unité de G.

(i) le morphisme

$$\pi\colon\ \mathbf{Hom}_G(G_d, P) \dashrightarrow P, \qquad \pi(m) = m(\mathbf{e}), \tag{1}$$

est un isomorphisme de G-objets et de $\mathbf{Aut}_G(P)$-objets.

(i bis) On a une bijection canonique

$$\mathrm{Hom}_G(G_d, P) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(e, P) = P(e), \qquad m \mapsto m \cdot \mathbf{e}, \tag{2}$$

où e est l'objet final de $\mathbf{T}$.

(ii) Si $P = G_d$, le morphisme (1) est un isomorphisme de *groupes*

$$\mathbf{Aut}_G(G_d) \xrightarrow{\sim} G \tag{3}$$

dont l'inverse est fourni par les translations à gauche.

Evident.

Proposition 1.2.8. Soient T un U-topos et G un groupe de T. La catégorie $\mathsf{G}=\mathsf{Opér}(G;\mathsf{T})$ des G-objets *à gauche* de T est un U-topos. Le foncteur «oubli des opérations de G»:

$$\omega^*\colon\ \mathsf{G}\to\mathsf{T},\qquad \omega^*(X,m)=X, \tag{1}$$

est fidèle et conservatif; il commute aux limites inductives et aux limites projectives quelconques.

1.2.8.1. La seconde assertion explique donc comment calculer les limites inductives et projectives dans G. Notons déjà que G est une U-catégorie car ω^* est fidèle. Considérons le foncteur

$$\omega_*\colon\ \mathsf{T}\to\mathsf{G},\qquad \omega_*(E)=\mathsf{Hom}_{\mathsf{T}}(G,E), \tag{2}$$

où l'on fait opérer G à gauche sur $\omega_*(E)$ par la «formule»

$$(g\cdot f)(g')=f(g'\,g).$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que ω_* est *un adjoint à droite de* ω^* et plus précisemment que, pour tout $X\in\mathrm{Ob}(\mathsf{G})$ et tout $E\in\mathrm{Ob}(\mathsf{T})$, l'application

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{T}}(\omega^*(X),E)\to\mathrm{Hom}_{\mathsf{G}}(X,\mathsf{Hom}_{\mathsf{T}}(G,E))$$

$$f\mapsto F,\qquad F(x)(g)=f(g\,x),$$

fournit un isomorphisme bifonctoriel.

Lemme 1.2.8.3. Soit $\mathsf{X}\colon I\to\mathsf{G}$ un foncteur et soit X la limite projective (resp. inductive) du composé $\omega^*\,\mathsf{X}\colon I\to\mathsf{T}$.

(i) Il existe une unique action s de G sur X telle que, pour tout $i\in\mathrm{Ob}(I)$, le morphisme structural $X\to X(i)$ (resp. $X(i)\to X$) soit un G-morphisme.

(ii) Le couple (X,s) est une limite projective (resp. inductive) du foncteur X.

Dand le cas des limites inductives, on prouve (i) en utilisant le fait que, dans T, les limites inductives sont universelles (0 2.6.2), d'où il résulte que $G\times X$ est une limite inductive du foncteur $i\rightsquigarrow G\times\omega^*(X(i))$, ce qui fournit l'action $s\colon G\times X\to X$ par passage à la limite. On achève aisément la démonstration. On raisonne de même dans le cas des limites projectives en utilisant la «formule» évidente

$$\varinjlim(X\times X(i))=X\times\varinjlim(X(i)).$$

Ayant ainsi démontré l'existence des limites inductives et projectives indexées par une catégorie appartenant à U et le fait que ω^* les respecte,

on achève la preuve de (1.2.8) grâce au lemme (1.2.8.4) ci-dessous. On peut l'appliquer car ω^* est évidemment conservatif et admet un adjoint à gauche

$$\omega_!\colon \mathsf{T} \to \mathsf{G} \qquad \omega_!(E) = G \times E, \tag{1}$$

où G opère sur $G \times E$ grâce aux translations à gauche de G.

Lemme 1.2.8.4. Soit $f\colon C \to C'$ un foncteur *conservatif* commutant aux limites projectives finies et aux limites inductives. On suppose que C' est un U-topos et que, dans C, les limites projectives finies et les limites inductives indexées par une catégorie appartenant à U existent.

(i) La catégorie C vérifie les conditions (a), (b) et (c) de (0 2.6).

(ii) Si f admet un adjoint à gauche g, C est un U-topos et f est le foncteur image inverse sous-jacent à un morphisme de topos $C' \to C$.

Prouvons (i). La condition (a) (existence de limites projectives finies) fait partie des hypothèses. Prouvons que toute limite inductive de C est universelle. Son image par f est une limite inductive de C', elle est universelle car C' est un U-topos, d'où la conclusion car f commute aux produits fibrès finis et est conservatif. De la condition (b), il nous reste à prouver que les sommes directes sont disjointes. Soit $X = \coprod X_i$. Pour tout j, le morphisme structural; $X_j \to X$ est un monomorphisme car il en est ainsi de son image par f qui est le morphisme structural de $f(X_j) \to f(X) = \coprod f(X_i)$. Puisque les limites inductives existent dans C et que f les respecte, C admet un objet initial dont l'image par f est un objet initial de C'. Puisque f commute aux produits fibrés finis et est conservatif, le produit fibré $X_i \times_X X_j$, $i \neq j$, est un objet initial de C, ce qui prouve la condition (b). Nous laissons au lecteur le soin de vérifier la condition (c).

Prouvons (ii). Remarquons que, sous les hypothèses de (i), le foncteur f est fidèle car il est conservatif et le noyau d'un couple de flèches $X \rightrightarrows Y$ de C existe. Donc C est une U-catégorie. De plus, puisque les limites inductives sont universelles dans C, toute famille épimorphique de C est couvrante pour la topologie canonique, c'est-à-dire épimorphique effective universelle. Pour prouver que C admet une U-famille de générateurs topologiques, il suffit donc de trouver une famille (X_i), $i \in I$, $I \in \mathsf{U}$, d'objets de C, telle que, pour tout $X \in \mathrm{Ob}(E)$ la famille M de tous les morphismes d'un des X_i dans X soit épimorphique, ce qui sera vrai si son image par f est épimorphique car f est conservatif. Soit alors (X'_i), $i \in I$, $I \in \mathsf{U}$, une U-famille de générateurs topologiques de C' et soit $g\colon C' \to C$ l'adjoint à gauche de f. La famille $X_i = g(X'_i)$ convient car, pour tout $X \in \mathrm{Ob}(C)$, la famille $f(\mathsf{M})$ est couvrante. En effet, puisque g est adjoint à gauche de f, celle-ci est dominée par la famille de tous les morphismes $X'_i \to f(X)$, qui est couvrante par hypothèse.

Remarque 1.2.8.5. De la démonstration de (1.2.8.4), on déduit que si (E_i), $i \in I$, $I \in \mathsf{U}$, est une U-famille de générateurs topologiques du topos T, la famille des

$$\omega_!(E_i) = G \times E_i$$

est une U-famille de générateurs topologiques du topos G. Il serait bon de savoir si la conclusion de (1.2.8 (ii)) est vérifiée même lorsque l'on ne suppose pas que f admet un adjoint à gauche.

1.2.8.6. Puisque ω^* commute aux limites projectives et admet un adjoint à droite ω_*, c'est le foncteur image inverse d'un morphisme de topos

$$\omega : \mathsf{T} \to \mathsf{G} \tag{1}$$

dont le foncteur image directe est ω_*. On a ainsi trois foncteurs dont chacun est adjoint à gauche de celui qui est écrit sous lui

$$\mathsf{T} \underset{\omega_*}{\overset{\omega_!}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\omega^*}}}} \mathsf{G}$$

où

$$\omega_!(E) = G \times E \tag{2}$$

$$\omega^*(X) = X^\omega \qquad \text{(oubli des opérations de } G\text{)}$$

$$\omega_*(E) = \mathsf{Hom}_{\mathsf{T}}(G, E)$$

où G opère sur $\omega_!(E)$ grâce aux translations à gauche de G et sur $\omega_*(E)$ grâce aux translations *à droite* de G.

Lemme 1.2.8.7. On a trois foncteurs dont chacun est adjoint à gauche de celui qui est écrit sous lui

$$\mathsf{G} \underset{\tau_*}{\overset{\tau_!}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\tau^*}}}} \mathsf{T} \tag{1}$$

où

$$\tau_!(X) = G \backslash X$$

$$\tau^*(E) = E^\tau \qquad \text{(opérations triviales)}$$

$$\tau_*(X) = X^G$$

où X^G est plus le plus grand sous objet de X sur lequel G opère trivialement. De plus, τ^* est le foncteur image inverse et τ_* le foncteur image directe d'un morphisme de topos

$$\tau : \mathsf{G} - \mathsf{T}. \tag{2}$$

Enfin, le composé $\tau\omega$ est le morphisme identique du topos T.

La preuve de la première assertion est laissée au lecteur. La seconde en résulte car l'existence de $\omega_!$ prouve que ω^* commute aux limites projectives. Enfin la dernière s'exprime par l'égalité évidente entre foncteurs

$$\omega^* \tau^* = \mathrm{id}_{\mathsf{T}}, \tag{3}$$

que l'on exprime en disant que le morphisme ω est une *section* de $\tau: \mathsf{G} \to \mathsf{T}$.

Proposition 1.2.8.8. On a deux foncteurs quasi-inverses l'un de l'autre

$$\varepsilon_*: \mathsf{T} \to \mathsf{G}_{/G_g}$$
$$\varepsilon_*(E) = (\mathrm{pr}_1: G_g \times E \to G_g) \tag{1}$$

et

$$\varepsilon^*: \mathsf{G}_{/G_g} \to \mathsf{T}$$
$$\varepsilon^*(X) = X_e, \tag{2}$$

où X_e est la fibre de $X^\omega \to G_g^\omega$ en la section unité de G_g.

Pour une description en clair de ε_*, disons que l'on fait opérer G sur $G \times E$ par translation à gauche et que qu'on le considère comme un G_g-objet de G grâce à la première projection. La démonstration est laissée au lecteur, mais, en vue de calculs ultérieurs, donnons, pour tout objet $p: X \to G_g$ de $\mathsf{G}_{/G_g}$, l'isomorphisme naturel

$$\varepsilon_* \varepsilon^*(X) \xrightarrow{\sim} X.$$

C'est

$$G_g \times X_e \to X \qquad (g, x) \mapsto g\,x,$$

l'isomorphisme inverse étant $x \mapsto (p(x), p(x)^{-1} x)$. Bien entendu, ε^* et ε_* définissent un morphisme de topos

$$\varepsilon: \mathsf{T} \to \mathsf{G}_{/G_g}. \tag{3}$$

Proposition 1.2.8.9. On a trois foncteurs dont chacun est adjoint à gauche de celui qui est écrit sous lui

$$\mathsf{G}_{/G_g} \underset{\iota_*}{\overset{\iota_!}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longrightarrow}{\leftarrow}}}} \overset{\iota^*}{\mathsf{G}} \tag{1}$$

$$\iota_!(X \to G_g) = X \qquad \text{comme objet de } \mathsf{G}$$
$$\iota^*(X) = G_g \times X$$
$$\iota_*(X \to G_g) = \mathsf{Hom}_{\mathsf{T}}(G, X_e) = \mathsf{Hom}_{\mathsf{G}_{/G_g}}(G^{(1)}, X),$$

où $G^{(1)}$ est l'objet $G \times G$ sur lequel G opère par translations à gauche sur le premier facteur, considéré comme G_g-objet de G grâce à la première

projection. De plus, ι^* est le foncteur image inverse et ι_* le foncteur image directe d'un morphisme de topos

$$\iota\colon \mathsf{G}_{/G_g} \to \mathsf{G}; \tag{2}$$

Enfin, on a

$$\iota\,\varepsilon = \omega \quad \text{(c'est-à-dire } \varepsilon^*\,\iota^* = \omega^*\text{)}. \tag{3}$$

Démonstration. Notons déjà que le morphisme i n'est autre que le morphisme habituellement attaché à un objet d'un topos. On prouve d'abord que $\varepsilon^*\,\iota^* = \omega^*$, ce qui est évident. Il est évident que $\iota_!$ est adjoint à gauche de ι^*, ce qui, par unicité de l'adjoint, fournit un isomorphisme canonique

$$\iota_!\,\varepsilon_! \simeq \omega_!. \tag{4}$$

Puisque ε_* est quasi-inverse de ε^*, on sait que ι^* admet un adjoint à droite, noté

$$\iota_* = \omega_*\,\varepsilon^*, \tag{5}$$

qui s'explicite comme il est dit dans l'énoncé, la seconde expression étant justifiée par le fait que ε_* est une équivalence de catégories. A ce propos, précisons que, la structure de G-objet de $i_*(X \to G_g) = \mathsf{Hom}_{\mathsf{G}_{/G_g}}(G^{(1)}, X)$ est donnée par les translations *à droite* de G sur le second facteur de $G^{(1)} = G \times G$.

Remarque 1.2.8.10. Puisque $\varepsilon^*\colon \mathsf{G}_{/G_g} \to \mathsf{T}$ est une équivalence de catégories et que $\varepsilon^*\,\iota^* = \omega^*$, le foncteur *oubli* $\omega^*\colon \mathsf{G} \to \mathsf{T}$ s'interprète comme le foncteur ι^*, $\iota^*(X) = X \times G_g$, c'est-à-dire comme *un foncteur localisation* puisque le morphisme final $G_g \to e$ est couvrant dans G.

1.3. Le produit contracté $P \overset{G}{\wedge} Q$; extension du groupe structural

Définition 1.3.1. Soient G un groupe de T et P (resp. Q) un G-objet à droite (resp. gauche) de T. On désigne par $P \overset{G}{\wedge} Q$ le quotient du produit $P \times Q$ par le groupe G opérant «diagonalement»

$$P \times Q \times G \to P \times Q, \qquad (p, q, g) \rightsquigarrow (p\,g, g^{-1}\,q). \tag{1}$$

1.3.1.1. Comme toutes les limites inductives, le produit contracté $P \overset{G}{\wedge} Q$ existe dans T et représente le foncteur

$$T \rightsquigarrow \mathrm{Hom}(P \times Q, T)^G, \qquad T \in \mathrm{Ob}(\mathsf{T}), \tag{1}$$

où l'exposant G désigne l'ensemble des éléments invariants par G. De plus, les limites inductives étant universelles (0 2.6.1) (0 2.7), le produit

contracté existe dans les fibres du T-champ OPER[T] et il est stable par les foncteurs image inverse.

1.3.1.2. Si un groupe A opère à gauche sur P (resp. sur Q), par G-automorphismes, il opère sur $P \times Q$ de manière compatible avec la relation d'équivalence définie par G. Il opère donc sur $P \overset{G}{\wedge} Q$.

1.3.1.3. Soient G un groupe de T et P un G-objet de T. D'après ce qui précède, le groupe G opère à droite sur le produit contracté $P \overset{G}{\wedge} G$ obtenu en faisant opérer G sur lui-même par translations à gauche. De même, $\mathbf{Aut}_G(P)$ opère à gauche sur $P \overset{G}{\wedge} G$, par G-automorphismes. Ceci dit, on a un isomorphisme compatible avec ces structures d'objets à opérateurs

$$P \xrightarrow{\sim} P \overset{G}{\wedge} G, \tag{1}$$

obtenu en composant $(\mathrm{id}_P, \mathbf{e})$: $P \to P \times G$, où $\mathbf{e}$ est la section unité de G, et la projection structurale $P \times G \dashrightarrow P \overset{G}{\wedge} G$.

Proposition 1.3.2. Soient u: $G \to G'$ un morphisme de groupes de T, m: $P \to P'$ un u-morphisme d'objets à opérateurs à droite et n: $Q \to Q'$ un u-morphisme d'objets à opérateurs à gauche. Le morphisme $m \times n$: $P \times Q \to P' \times Q'$ passe au quotient et définit un morphisme

$$\pi\colon\ P \overset{G}{\wedge} Q \to P' \overset{G}{\wedge} Q'. \tag{1}$$

Si, de plus, v: $A \to A'$ est un morphisme de groupes, si A opère sur P par G-automorphismes, si A' opère sur P' par G'-automorphismes et si m: $P \to P'$ est un v-morphisme, le morphisme π est un v-morphisme pour les opérations de A et A' obtenues par passage au quotient.

Remarque 1.3.3. Sous les hypothèses de (1.3.1), le groupe $\mathbf{Aut}_G(P)$ *opère par fonctorialité* sur le produit $P \overset{G}{\wedge} Q$. En effet, on a vu que la formation de $P \overset{G}{\wedge} Q$ commute au changement de base. On voit aisément que l'on retrouve ainsi les opérations obtenues par passage au quotient à partir de l'action de $\mathbf{Aut}_G(P)$ sur P.

Proposition 1.3.4. (Symétrie.) Soit P un G-objet à droite et Q un G-objet à gauche sur lequel opère à droite par G-automorphismes un groupe H. On a un H-isomorphisme canonique de H-objets à gauche

$$(P \overset{G}{\wedge} Q)^{\check{}} \xrightarrow{\sim} \check{Q} \overset{G}{\wedge} \check{P}. \tag{1}$$

Proposition 1.3.5. (Associativité.) Sous les hypothéses de (1.3.4), soit encore R un H-objet à gauche. On a un isomorphisme canonique

$$(P \overset{G}{\wedge} Q) \overset{H}{\wedge} R \xrightarrow{\sim} P \overset{G}{\wedge} (Q \overset{H}{\wedge} R). \tag{1}$$

La démonstration est laissée au lecteur.

Proposition 1.3.6. (Extension du groupe structural.) Soit $u: F \to G$ un morphisme de groupes de T. Pour tout F-objet P, désignons par

$$Pu: P \to {}^{u}P, \qquad {}^{u}P = P \overset{F}{\wedge} G_d, \tag{1}$$

le composé

$$P \cdot \xrightarrow{(\mathrm{id}_P, \mathbf{e})} P \times G_d \to P \overset{F}{\wedge} G_d$$

où $\mathbf{e}$ est la section unité de G et où le produit contracté $P \overset{F}{\wedge} G_d$ est défini en faisant opérer F à gauche sur G_d par les translations à gauche.

(i) Pu est un u-morphisme.

(ii) Pour tout morphisme de groupes (de T) $v: G \to H$ et tout H-objet R le morphisme

$$\pi: \mathbf{Hom}_v({}^{u}P, R) \to \mathbf{Hom}_{vu}(P, R), \qquad \pi(n) = n \cdot Pu, \tag{2}$$

est un isomorphisme pour les structures de $\mathbf{Aut}_H(R)$-objets définies dans (1.2.5).

(iii) Pour tout G-objet Q l'application

$$\mathrm{Hom}_G({}^{u}P, Q) \to \mathrm{Hom}_F(P, Q^{u}), \qquad n \mapsto n \cdot Pu, \tag{3}$$

est *bijective*, (pour Q^{u} cf. 1.2.3 (2)).

On dira que ${}^{u}P$ *est déduit de* P *par extension à* G *de son groupe structural* F, (au moyen de $u: F \to G$).

Les assertions (i) et (iii) résultent de la propriété universelle qui définit $P \overset{F}{\wedge} G_d$. Elles montrent que $P \rightsquigarrow {}^{u}P$ est *un adjoint à gauche* du foncteur $Q \rightsquigarrow Q^{u}$, (restriction à F du groupe structural), le morphisme d'adjonction étant $Pu: P \to ({}^{u}P)^{u}$. Enfin, puisque le produit contracté est stable par changement de base, (ii) résulte de (iii).

1.3.7. On résume les propriétés de stabilité en disant que l'on a défini un morphisme de T-champs

$$\mathrm{OPER}(\mathsf{T}; u): \mathrm{OPER}(\mathsf{T}; F) \to \mathrm{OPER}(\mathsf{T}; G), \qquad P \rightsquigarrow {}^{u}P, \tag{1}$$

(1.1.6 (1)) et un morphisme de morphisme de champs

$$P \rightsquigarrow Pu, \qquad Pu: P \to ({}^{u}P)^{u}, \tag{2}$$

tels que, pour tout S-G-objet Q et tout S-F-objet P l'application (1.3.6 (3)) soit bijective. Il est évident que la donnée de (2) avec la propriété susdite caractérise (1) à isomorphisme unique près parmi les morphismes de champs.

Définition 1.3.8. On dit que F opère *transitivement* sur P (ou mieux que P est un F-espace *pseudo-homogène*) si le morphisme

$$P \times F \to P \times P, \quad (p, f) \mapsto (p, pf), \tag{1}$$

est un épimorphisme de T. On dit que P est un F-espace *homogène* de T si, de plus, le morphisme final $P \to e$ est *un épimorphisme.*

Corollaire 1.3.8.1. Sous les hypothèses de (1.3.7), si F opère librement (resp. transitivement) sur P alors G opère librement (resp. transitivement) sur ${}^uP$. Si P est un pseudo-torseur (resp. un F-espace homogène) il en est de même de ${}^uP$.

1.3.8.2. La preuve est laissée à la sagacité du lecteur qui utilisera (3.1.1) ci-dessous et remarquera que P est pseudo-homogène (resp. homogène) si, et seulement si, le quotient P/F est un sous-objet de l'objet final de T (resp. un objet final de T), (3.1.1.2).

Corollaire 1.3.9. Soit $u: F \to G$ un morphisme de groupes de T. Soient P et Q deux S-F-objets. Le morphisme de champs $\mathrm{OPER}(u)$ induit sur les faisceaux de S-morphismes des morphismes

$$\mu: \mathsf{Hom}_F(P, Q) \to \mathsf{Hom}_G({}^uP, {}^uQ) \tag{1}$$

$$\delta: \mathsf{Aut}_F(P) \to \mathsf{Aut}_G({}^uP) \tag{2}$$

$$\gamma: \mathsf{Aut}_F(Q) \to \mathsf{Aut}_G({}^uQ). \tag{3}$$

De plus, μ est un γ-morphisme et un δ-morphisme pour les opérations décrites dans (1.2.5) et (1.2.6).

Evidemment. C'est une manière de dire comment un groupe A opérant sur P par G-automorphismes opère sur ${}^uP$. Les formules (1.3.6 (1)) et (1.3.3) permettent de décrire autrement les dites opérations. En utilisant (1.2.5), le lecteur explicitera en ces termes les compatibilités résumées par le corollaire.

1.4. Torseurs dans un topos

Définition 1.4.1. Soient T un U-topos et $S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{T})$. On appelle *torseur* à droite (resp. gauche) de T sur S un S-objet à opérateurs à droite (resp. gauche) de T, soit (P, G, m), tel que:

(a) le morphisme $P \to S$ est un épimorphisme

(b) le morphisme

$$u\colon\ P \times_S G \to P \times_S P, \qquad u(p, g) = (p, m(p, g)), \tag{1}$$

est un isomorphisme.

1.4.1.1. On rappelle que la seconde condition signifie que P est un *pseudo-torseur* (1.1.5). La première condition n'est pas «algébrique». Elle signifie qu'il existe une famille épimorphique $\{S_i \to S\}$ telle que les ensembles $P(S_i) = \mathrm{Hom}_S(S_i, P)$ soient non vides.

1.4.1.2. On appellera *torseur de* T un e-torseur, où e est l'objet final de T. Moyennant quoi, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{T})$, un S-torseur est la même chose qu'un torseur de $\mathsf{T}_{/S}$.

1.4.1.3. Un morphisme de topos $f\colon \mathsf{T} \to \mathsf{T}'$ commute aux limites projectives finies et transforme donc objets à opérateurs en objets à opérateurs. De plus il commute aux limites inductives et transforme donc épimorphismes en épimorphismes, donc torseurs en torseurs.

Définition 1.4.2. Soient $S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{T})$, et G un S-groupe de T. On appelle G-torseur à droite (resp. gauche) sur S un torseur à droite (resp. gauche) sur S dont le groupe sous-jacent est égal à G.

Conformément à nos conventions (1.1.4) *nous dirons souvent torseur pour torseur à droite.* Le G-objet G_d est un torseur car il admet une section, donc vérifie (a). On dira que c'est *le torseur trivial.*

Lemme 1.4.3. Soient $S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{T})$ et G un S-groupe de T. Pour qu'un pseudo-torseur P sous G sur S soit G-isomorphe à G_d il faut et il suffit qu'il admette une section. Pour qu'un G-objet P soit un torseur il faut et il suffit qu'il soit localement isomorphe à l'objet trivial G_d.

La première assertion résulte immédiatement de (1.2.7 (i bis)) et de la définition (1.1.5). La seconde également, par descente.

1.4.4. Les conditions de (1.4.1) sont donc locales. La sous-catégorie pleine du T-champ $\mathrm{OPER}(T)$, (1.1.6 (1)), dont les objets de projection $S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{T})$ sont les S-torseurs est donc un T-champ que l'on appellera *le champ des torseurs de* T et que l'on notera

$$\mathrm{TORS}(\mathsf{T}) \quad \text{(ou parfois TORS)}. \tag{1}$$

Si G est un groupe de T on désignera par

$$\mathrm{TORS}(\mathsf{T}; G) \quad \text{(ou encore TORS}(G)\text{)} \tag{2}$$

le champ des G-torseurs (à droite) défini de manière évidente à partir de OPER(T; G), (1.1.6 (2)).

Enfin on désignera par

$$\mathbf{Tors}(\mathsf{T}) \quad (\text{resp. } \mathbf{Tors}(\mathsf{T}; G)) \tag{3}$$

la *catégorie* des torseurs (resp. G-torseurs) de T, isomorphe à la fibre de (1) (resp. (2)) en un objet final de T.

Théorème 1.4.5. («TORS(T; G) est une gerbe».) Soit G un groupe de T.

(i) Deux G-torseurs sont localement G-isomorphes.

(ii) Tout G-morphisme de G-torseurs est un isomorphisme.

Le sous-titre est expliqué par (2.1.1) ci-dessous. L'assertion (i) résulte de (1.4.3) car tout G-torseur admet localement une section d'après (1.4.1 (a)). Puisque TORS(G) est un *champ*, on peut supposer dans (ii) que les torseurs sont triviaux et l'on conclut par (1.2.7 (i bis)).

Proposition 1.4.6. Soit $u\colon F \to G$ un morphisme de groupes de T.

(i) Pour tout F-torseur P, le G-objet $P \overset{F}{\wedge} G_d$ de (1.3.6) est un G-torseur.

(ii) Le foncteur OPER(T, u) de (1.3.7 (1)) induit un morphisme de T-champs

$$\mathrm{TORS}(\mathsf{T}, u)\colon\ \mathrm{TORS}(\mathsf{T}, F) \to \mathrm{TORS}(\mathsf{T}, G), \qquad P \rightsquigarrow P \overset{F}{\wedge} G_d. \tag{1}$$

(iii) Soient P un F-torseur, Q un G-pseudo-torseur et $m\colon P \to Q$ un u-morphisme. Le morphisme naturel $P \overset{F}{\wedge} G_d \to Q$ est un G-isomorphisme. En particulier, Q est un *G-torseur*.

(iv) Sous les hypothèses de (iii), pour tout morphisme de groupes $v\colon G \to H$ et tout H-objet R, le morphisme

$$\mathsf{m}\colon\ \mathbf{Hom}_v(Q, R) \to \mathbf{Hom}_{vu}(P, R), \qquad \mathsf{m}(n) = n\,m, \tag{2}$$

est un *isomorphisme* de $\mathbf{Aut}_H(R)$-objet à gauche.

(i) résulte de (1.3.8) et prouve (ii). Sous les hypothèses de (iii), le morphisme final $P \to e$ est couvrant et domine $Q \to e$, donc Q est un torseur, ce qui prouve (iii) car tout G-morphisme de torseurs est un isomorphisme. De (iii) on déduit (iv) par (1.3.6 (ii)).

Corollaire 1.4.7. Soit $u\colon F \to G$ un morphisme de groupes de T. Soient P un F-torseur et Q un G-torseur.

(i) $\mathbf{Hom}_u(P, Q)$ est un torseur à gauche sous $\mathbf{Aut}_G(Q)$ opérant par composition des morphismes.

(ii) Si $m\colon P \to Q$ est un u-morphisme, il existe un unique morphisme de groupes de T

$$U\colon\ \mathbf{Aut}_F(P) \dashrightarrow \mathbf{Aut}_G(Q) \tag{1}$$

tel que m soit un U-morphisme pour les opérations décrites dans (1.2.4).

(iii) Sous les conditions de (ii) le morphisme U s'identifie au morphisme induit par $\mathbf{Tors}(u)$, (cf. 1.3.9 (2)), quand on identifie Q et $P \overset{F}{\wedge} G = {}^uP$ grâce à $m\colon P \to Q$.

(iv) Sous les hypothèses de (1.4.6 (iv)) le morphisme (2) qui y figure est un *isomorphisme de* $\mathbf{Aut}_H(R)$*-torseurs* à gauche lorsque R est un *H-torseur.*

Prouvons (i). On peut localiser et supposer que P et Q sont triviaux auquel cas il existe un u-morphisme $m\colon P \to Q$. En supposant que $v = \mathrm{id}_G$ et $Q = R$ dans (1.4.6 (iv)), le morphisme m qui y figure donne un isomorphisme de $\mathbf{Aut}_G(Q)$-objets à gauche

$$\mathbf{Aut}_G(Q)_d \xrightarrow{\sim} \mathbf{Hom}_u(P, Q), \qquad n \longmapsto n\,m,$$

car tout G-morphisme de Q est un isomorphisme. D'où (i). Dans (ii), l'unicité de U est évidente car on peut localiser et appliquer (1.2.7 (ii)). On achève de prouver (ii) et (iii) en vérifiant que, d'après (1.4.6 (iii)), la condition «m est un U-morphisme» signifie précisément que U s'identifie au morphisme induit par $\mathbf{Tors}(u)$ quand on identifie Q et $P \overset{F}{\wedge} G_d$ grâce à m. Bien entendu, (iv) est juste un commentaire.

Définition 1.4.8. Soient A un groupe de T et P un A-torseur (à droite). On appelle *groupe adjoint de P* et l'on note

$$\mathbf{ad}(P) = \mathbf{Aut}_G(P) \tag{1}$$

le faisceau des G-automorphismes de P. Soient encore

$$u\colon\ A \to B \quad \text{et} \quad m\colon\ P \to Q \tag{2}$$

un morphisme de groupes et un u-morphisme de torseurs. On appelle morphisme adjoint de m et l'on note

$$\mathbf{ad}(m)\colon\ \mathbf{ad}(P) \dashrightarrow \mathbf{ad}(Q) \tag{3}$$

l'unique morphisme de groupes de T tel que m soit un $\mathbf{ad}(m)$-morphisme de torseurs à gauche (1.4.7 (iii)).

1.5. Opposé d'un torseur; bitorseurs

Proposition 1.5.1. Soient A et B deux groupes de T et P un B-objet à droite où A opère à gauche par B-automorphismes (1.2.4) (on dira que P est un A-B-biobjet). Les conditions suivantes sont équivalentes

(i) P est un B-torseur à droite et le morphisme $A \to \mathbf{Aut}_B(P)$ est un isomorphisme;

(ii) P est un B-torseur à droite et un A-torseur à gauche.

1.5.2. Chacune des conditions implique que P est localement B-isomorphe à B_d, d'où la conclusion par (1.2.7 (ii)) et (1.4.3). On obtient évidemment une autre condition équivalente à (i) en y échangeant les rôles de A et B, car (ii) est symétrique.

Définition 1.5.3. On appelle bitorseur de T un triplet (A, P, B), où A et B sont des groupes de T et où P est un A-B-biobjet satisfaisant les conditions de (1.5.1). On dira également que P est un A-B-bitorseur. Si G est un groupe de T, on appelle *G-bitorseur* un bitorseur dont les deux groupes sous-jacents sont égaux à G.

1.5.3.1. D'après un (1.4.8), un B-torseur à droite P définit un $\mathbf{ad}(P)$-B-bitorseur.

1.5.3.2. Si F est un T-préchamp et si x et y sont deux objets de la fibre de F en l'objet final e de T, le faisceau $\mathbf{Isom}_e(x, y)$ est un pseudo-torseur à droite sous $\mathbf{Aut}_e(x)$ et un pseudo-torseur à gauche sous $\mathbf{Aut}_e(y)$ opérant par composition des morphismes. Par suite, pour que x soit *localement isomorphe* à y il faut et il suffit que $\mathbf{Isom}_e(x, y)$ soit un $\mathbf{Aut}_e(y)$-$\mathbf{Aut}_e(x)$-*bitorseur*.

Proposition 1.5.4. Soit BITORS(T) le champ des bitorseurs de T.

(i) Le morphisme de T-champs

$$\mathrm{BITORS}(\mathsf{T}) \to \mathrm{TORS}(\mathsf{T}), \quad (A, P, B) \rightsquigarrow (P, B) \tag{1}$$

est une T-équivalence.

(ii) On obtient un foncteur quasi-inverse en associant à tout torseur (P, A) le bitorseur $(\mathbf{ad}(P), P, A)$ et à tout morphisme de torseurs (m, u): $(P, A) \to (Q, B)$, le morphisme de bitorseurs

$$(\mathbf{ad}(m), m, u)\colon\ (\mathbf{ad}(P), P, A) \to (\mathbf{ad}(Q), Q, B).$$

Résulte immédiatement de (1.5.3) et de (1.4.7 (iv)).

Convention 1.5.5.

1.5.5.1. Soit $\mathscr{P}=(A, P, B)$ un bitorseur. Nous désignerons par

$$\mathscr{P}^0=(B, P, A) \quad \text{(et dans les formules par } P^0\text{)} \tag{1}$$

le bitorseur obtenu en faisant opérer B à gauche et A à droite par le procédé de (1.1.3).

1.5.5.2. Soit $\mathsf{P}=(P, A)$ un torseur à droite. Soit $\mathscr{P}=(\mathbf{ad}(P), P, A)$ le bitorseur qui lui est associé canoniquement. Nous désignerons par

$$\mathsf{P}^0=(P, \mathbf{ad}(P)) \quad \text{(et dans les formules par } P^0\text{)} \tag{2}$$

le torseur *à droite* sous-jacent au bitorseur $\mathscr{P}^0$. (On l'appellera l'*opposé* de P).

1.5.5.3. Bien entendu, G s'identifie canoniquement à $\mathbf{Aut}_{\mathbf{ad}(P)}(P^0)=\mathbf{ad}(P^0)$ et c'est pourquoi nous *conviendrons* de le faire opérer à *gauche* sur P^0.

1.5.5.4. Bien entendu, $\mathsf{P} \rightsquigarrow \mathsf{P}^0$ est une auto-équivalence du champ TORS(T), mais ne conserve pas les sous-catégories TORS(T, A).

Proposition 1.5.6. Soient A un groupe de T et P un A-torseur. Soit Z le centre de A.

(i) Le morphisme

$$U: Z \to \mathbf{Hom}(P, P), \quad U(z)(p)=p\,z, \tag{1}$$

identifie Z et le centre $\mathbf{ad}(P)$. Ce dernier est également le faisceau des automorphismes de P qui sont compatibles avec les opérations de A et de $\mathbf{ad}(P)$.

(ii) Pour que A soit *abélien* il faut et il suffit que le morphisme de champs

$$\mathrm{BITORS}(\mathsf{T}; A) \to \mathrm{TORS}(\mathsf{T}; A), \quad (A, P, A) \rightsquigarrow (P, A), \tag{2}$$

soit une T-équivalence, où BITORS(T; A) est le T-champ des A-bitorseurs.

La preuve est laissée au lecteur.

Corollaire 1.5.7. Soit A un groupe abélien de T. Pour tout A-torseur P, on a un isomorphisme de groupes de T

$$U: A \xrightarrow{\sim} \mathbf{ad}(P), \quad U(a)(p)=p\,a, \tag{1}$$

par lequel on identifie le $\mathbf{ad}(P)$-torseur P^0 au A-torseur $\check{P}$ de (1.1.3).

1.6. Produit contracté par un torseur

Soit T un U-topos fixé dans tout ce numéro.

Théorème 1.6.1. Soient (P, G) un torseur de T et X un G-objet à gauche.
(i) Il existe un morphisme d'objets de T

$$\mathsf{a}\colon\ P\times X\to \mathsf{Hom}_G(P,\check{X}) \tag{1}$$

caractérisé par la condition

$$\mathsf{a}(p,x)(p)=x,\qquad \text{pour tout } (p,x)\in P\times X\,. \tag{2}$$

(ii) De plus a passe au quotient et définit un *isomorphisme* de $\mathsf{Aut}_G(X)$-objets à gauche

$$a'\colon\ P\overset{G}{\wedge}X\xrightarrow{\sim}\mathsf{Hom}_G(P,\check{X}) \tag{3}$$

et un *isomorphisme* de $\mathsf{Aut}_G(P)$-objets à gauche

$$a''\colon\ P\overset{G}{\wedge}X\xrightarrow{\sim}\mathsf{Hom}_G(P,\check{X})^{\check{}}. \tag{4}$$

1.6.1.1. Rappelons que $\check{X}$ désigne le G-objet à droite déduit de X par (1.1.3). Bien entendu $\mathsf{Aut}_G(X)$ opère à gauche sur X et sur $\check{X}$ par G-automorphismes. Les structures en cause dans (3) sont décrites par (1.3.1.2) et (1.2.6). De même, $\mathsf{Aut}_G(P)$ opère à gauche sur $P\overset{G}{\wedge}X$ par (1.3.1.2) et *à droite* sur $\mathsf{Hom}_G(P,\check{X})$ par (1.2.5). Ce qui explique que (4) s'écrive autrement que (3) bien que les morphismes de T sous-jacents soient les mêmes.

1.6.1.2. La première assertion est triviale car P est un *G-torseur* et le seul morphisme possible est

$$\mathsf{a}\colon\ P\times X\to\mathsf{Hom}_G(P,\check{X}),\qquad \mathsf{a}(p,x)(q)=g^{-1}x, \tag{5}$$

où $g\in G$ est défini par $q=p\,g$; il convient évidemment. De plus il passe au quotient et définit un morphisme (de T pour l'instant):

$$b\colon\ P\overset{G}{\wedge}X\to\mathsf{Hom}_G(P,X). \tag{6}$$

1.6.1.3. Prouvons que b est un *isomorphisme*. On peut localiser et supposer que $P=G_d$. Soit

$$c\colon\ \mathsf{Hom}_G(G_d,X)\to X,\qquad c(m)=m(\mathsf{e}), \tag{7}$$

où e est la section unité de G, *l'isomorphisme d'objets de* T *sous-jacent* à (1.2.7 (1)). Le composé

$$G_d \times X \xrightarrow{\mathsf{a}} \mathsf{Hom}_G(G_d, X) \xrightarrow{\mathsf{c}} X \tag{8}$$

n'est autre que $c\,\mathsf{a}(g, x) = g\,x$, d'où l'on déduit que $c\,b$ est un isomorphisme, donc aussi b.

1.6.1.4. Les assertions de (ii) résultent maintenant de vérifications triviales.

Remarque 1.6.2. Sous les hypothèses du théorème, soit $u\colon G \to G'$ un morphisme de groupes de T, $m\colon P \dashrightarrow P'$ un u-morphisme de *torseurs* et $n\colon X \to X'$ un u-morphisme d'objets à gauche. Par la fonctorialité du produit, (cf. 1.3.2), on en déduit un morphisme

$$P \overset{G}{\wedge} X \to P' \overset{G'}{\wedge} X' \tag{1}$$

et par le théorème, un morphisme

$$\mathsf{Hom}_G(P, X) \to \mathsf{Hom}_{G'}(P', X') \tag{2}$$

qui fait apparaître Hom comme un foncteur *covariant* en son premier argument lorsque celui-ci est un *torseur*. Ceci s'explique en vérifiant que (2) est égal au composé

$$\mathsf{Hom}_G(P, X) \xrightarrow{\nu} \mathsf{Hom}_u(P, X') \xrightarrow{\mu} \mathrm{Hom}_{G'}(P', X') \tag{3}$$

où ν est induit par la composition avec n et où μ est *l'inverse de l'isomorphisme* induit par la composition avec m, (1.4.6 (iv)).

Corollaire 1.6.3. Soient G un groupe, X un G-objet, $u\colon A \to \mathsf{Aut}_G(X)$ un morphisme de groupes et P un A-torseur.

(i) Le G-objet $P \overset{A}{\wedge} X$ est localement G-isomorphe à X.

(ii) On a un isomorphisme canonique de $\mathsf{Aut}_G(X)$-torseurs à droite

$$P \overset{A}{\wedge} B \to \mathsf{Isom}_G(X, P \overset{A}{\wedge} X), \qquad B = \mathsf{Aut}_G(X), \tag{1}$$

induit par le u-morphisme de torseurs

$$m\colon\ P \to \mathsf{Isom}_G(X, P \overset{A}{\wedge} X), \qquad m(p)(x) = (p, x)', \tag{2}$$

où $(p, x)'$ désigne l'image de (p, x) par la projection $P \times X \to P \overset{A}{\wedge} X$.

La première assertion résulte immédiatement de (1.3.1.3). Ceci prouve que le but de (1), qui est évidemment un pseudo-torseur sous $\mathsf{Aut}_G(X)$

opérant par composition des morphismes, est en fait un torseur. Par ailleurs, il est immédiat que $m(p)$ est bien un *G-isomorphisme*, donc que l'écriture de (2) est licite. D'où la conclusion par (1.4.6 (iii)).

Comme on verra dans (2.3.6), *ce corollaire montre comment* $P \overset{A}{\wedge} X$ *est obtenu «en tordant* X *par* P».

Proposition 1.6.4. Soient $u\colon G \to H$ un morphisme de groupes, P un G-torseur et Q un H-torseur.

(i) On a un isomorphisme de $\mathbf{Aut}_G(Q)$-*torseurs* à gauche

$$h\colon\ Q \overset{G}{\wedge} P^0 \xrightarrow{\sim} \mathbf{Hom}_u(P, Q), \tag{1}$$

pour les structures décrites par (1.3.1.2) et (1.2.6).

(ii) De plus, h est compatible avec les opérations de $\mathbf{Aut}_G(P)$ décrites par (1.3.1.2) et (1.2.5).

(ii bis) Si u est un *isomorphisme*, h est un isomorphisme de $\mathbf{Aut}_G(Q)$-$\mathbf{Aut}_G(P)$-*bitorseurs*.

Ceci résulte immédiatement de (1.6.1) et (1.6.3).

Corollaire 1.6.5. Soit (A, P, B) un bitorseur. On a un isomorphisme de A-*bitorseurs*

$$P \overset{B}{\wedge} P^0 \approx A_b, \tag{1}$$

et un isomorphisme de B-bitorseurs

$$P^0 \overset{A}{\wedge} P \approx B_b, \tag{2}$$

où A_b (resp. B_b) est le A-bitorseur obtenu en faisant opérer A sur lui-même de façon évidente.

Corollaire 1.6.6. Soient G un groupe et P un G-torseur. On a un *isomorphisme*

$$P^0 \xrightarrow{\sim} \mathbf{Hom}_G(P, G_d), \tag{1}$$

compatible avec les structures naturelles de G-torseur à gauche et de $\mathbf{Aut}_G(P)$-torseur à droite.

Ces corollaires résultent immédiatement de la proposition.

Remarque 1.6.7. Soient G un groupe de T et P un G-torseur. Pour tout G-objet à gauche X de T, le groupe adjoint $\mathbf{ad}(P)$ de P opère à gauche sur le produit contracté $P \overset{G}{\wedge} X$. On a donc d'après (1.3.2) un foncteur

$$\mathbf{Opér}(\mathsf{T}, G^0) \to \mathbf{Opér}(\mathsf{T}, \mathbf{ad}(P)^0), \quad P \rightsquigarrow P \overset{G}{\wedge} X. \tag{1}$$

Celui-ci est une *équivalence* car $Y \rightsquigarrow P^0 \overset{B}{\wedge} Y$ est un foncteur quasi-inverse de (1), où $B = \mathbf{ad}(P)$. En particulier, (1) commute aux limites projectives et inductives quelconques. (Pour le calcul de celles-ci, cf. (1.2.8).) En particulier il transforme groupes en groupes, ce qui permet de «tordre» par P un groupe A de T sur lequel G opère par automorphismes de groupes. C'est un cas particulier d'un phénomène général (2.3). On peut récrire l'équivalence (1) avec les notations de (VIII §4). Soit P un G'-G-bitorseur et soit $B_{G'}$ (resp. B_G) la catégorie des G'-objets (resp. G-objets) de T. On a *une équivalence de topos*

$$\pi\colon B_G \xrightarrow{\approx} B_{G'}, \qquad X \rightsquigarrow P \overset{G}{\wedge} X. \tag{2}$$

De plus, si G opère trivialement sur X, la seconde projection de $P \times X$ induit un isomorphisme $P \overset{G}{\wedge} X \to X^t$, où X^t est le G'-objet obtenu en faisant opérer G' trivialement sur X. Ces isomorphismes définissent un isomorphisme de foncteurs

$$\pi \tau_G^* \xrightarrow{\sim} \tau_{G'}^* \tag{3}$$

où $\tau_G^*\colon \mathsf{T} \to B_G$ et $\tau_{G'}^*\colon \mathsf{T} \to B_{G'}$ sont les foncteurs «opérations triviales». Ceux-ci munissent B_G et $B_{G'}$ d'une structure de T-topos et (3) montre que (2) est une équivalence de T-topos (VIII §0).

1.7. Torseurs sur un site

Définition 1.7.1. Soit E un U-site.

(i) On appelle torseur sur E un torseur du topos $\tilde{E}$ des U-faisceaux d'ensembles sur E (1.4.1).

(ii) Soit $S \in \mathrm{Ob}(E)$, on appelle S-torseur sur E un $\varepsilon(S)$-torseur du topos $\tilde{E}$ ($\varepsilon\colon E \to \tilde{E}$, (0 2.5.2)).

(iii) Soit G un faisceau de groupes sur E. On appelle G-torseur (resp. S-G-torseur, $S \in \mathrm{Ob}(\mathrm{E})$), un G-torseur (resp. $\varepsilon(S)$-G-torseur) du topos $\tilde{E}$.

1.7.1.1. On posera

$$\mathbf{Tors}(E) = \mathbf{Tors}(\tilde{E}), \qquad (1.4.4\,(3)), \tag{1}$$

et on l'appellera *catégorie* des torseurs sur E. On posera

$$\mathrm{TORS}(E) = \mathrm{TORS}(\tilde{E}) \times_{\tilde{E}} E, \qquad (1.4.4\,(1)), \tag{2}$$

et on l'appellera *champ* des torseurs sur E. De même, si G est un faisceau de groupes sur E (autrement dit [SGA 4 II 2.5.3] un groupe du topos $\tilde{E}$) on définira encore par référence à $\tilde{E}$ la *catégorie*

$$\mathbf{Tors}(E; G) = \mathbf{Tors}(\tilde{E}; G) \tag{3}$$

et le *champ*

$$\mathrm{TORS}(E;G)=\mathrm{TORS}(\tilde{E};G)\times_{\tilde{E}}E \tag{4}$$

des G-torseurs sur E.

1.7.1.2. Un objet de la fibre en $S\in\mathrm{Ob}(E)$ de $\mathrm{TORS}(E)$ est donc un S-torseur sur E, c'est-à-dire un torseur de $\tilde{E}_{/\varepsilon(S)}$. Par l'équivalence $\tilde{E}_{/\varepsilon(S)}\to(E_{/S})^{\sim}$ on en déduit *un torseur sur le site* $E_{/S}$. Plus précisément, de (II 3.4.8 (ii)), on déduit des *E-équivalences de champs*

$$\mathrm{TORS}(E)\xrightarrow{\approx}\mathrm{TORSC}(E) \tag{5}$$

$$\mathrm{TORS}(E;G)\xrightarrow{\approx}\mathrm{TORSC}(E;G), \tag{6}$$

où G est un faisceau de groupes sur E et où l'on a défini le champ *scindé* des torseurs et le champ scindé des G-torseurs par

$$\mathrm{TORSC}(E),\quad S\rightsquigarrow\mathbf{Tors}(E_{/S}),\quad S\in\mathrm{Ob}(E), \tag{5'}$$

$$\mathrm{TORSC}(E;G),\quad S\rightsquigarrow\mathbf{Tors}(E_{/S};G^S),\quad S\in\mathrm{Ob}(E), \tag{6'}$$

où G^S désigne la restriction de G au site $E_{/S}$.

1.7.1.3. Par une conséquence facile de (II 3.4.2) on a des équivalences de catégories

$$\mathbf{Tors}(E)\xrightarrow{\approx}\varprojlim(\mathrm{TORS}(E)/E) \tag{7}$$

$$\mathbf{Tors}(E;G)\xrightarrow{\approx}\varprojlim(\mathrm{TORS}(E;G)/E). \tag{8}$$

Remarque 1.7.2. (Site standard.) Si E est un site standard (I 3.1.5), on appelle torseur *de* E un objet à opérateurs $\mathsf{P}=(P,G,m)$ (1.1.2) de E dont l'image par le foncteur $\varepsilon\colon E\to\tilde{E}$ est un torseur de $\tilde{E}$, autrement dit $\varepsilon(\mathsf{P})$ est un torseur *sur* E. Ceci signifie que P est un *pseudo-torseur* et que le morphisme final $P\to e$ est *couvrant* pour la topologie du site. En effet, le foncteur ε est pleinement fidèle et, de plus, pour qu'un morphisme de E soit couvrant il faut et il suffit que son image par ε soit un épimorphisme de $\tilde{E}$. Le foncteur ε induit un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des torseurs *de* E dans celle des torseurs *sur* E, qui permet «d'identifier» la première à la sous-catégorie pleine de la seconde formée des *torseurs représentables. Si* E *est un* U*-topos* (donc un U-site [SGA 4 VI 7.3.1]) le foncteur ε est une équivalence [SGA 4 II 2.4.14] ce qui nous permettra de ne pas distinguer entre torseurs de E (1.4.1 ou 1.7.2) et torseurs sur E (1.7.1).

En utilisant les résultats acquis pour le champ des faisceaux d'ensembles nous allons indiquer rapidement comment décrire à $\hat{E}$-équivalence près l'extension canonique à $\hat{E}$ du champ des torseurs sur un U-site E.

Proposition 1.7.3. Soient E un U-site et $X \in \mathrm{Ob}(\hat{E})$. Soit encore $\mathsf{P} = (P, G, m)$ un objet à opérateurs de $\hat{E}_{/X}$. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) l'image de P par le foncteur

$$\hat{E}_{/X} \to (E_{/X})\hat{}, \quad (Y/X) \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_X(\eta(*), Y), \tag{1}$$

(I 2.6.1.3) est un torseur sur le site $E_{/X}$;

(ii) P est un *pseudo-torseur*, G est un *faisceau de groupes sur* X (II 3.4.12.2) et le morphisme $P \dashrightarrow X$ est couvrant (pour la topologie induite par E sur $\hat{E}$ (0 3.5)).

1.7.3.1. On dira alors que P *est un torseur sur* X. Si X est un *faisceau* il est immédiat (cf. (ii)) que ces conditions signifient que P est un X-torseur de $\tilde{E}$.

1.7.3.2. Le lemme résulte de (II 3.4.8 (2)) qui assure que (1) induit une équivalence entre la catégorie des faisceaux sur X (II 3.4.7) et celle des faisceaux sur le site $E_{/X}$. On notera que (ii) entraîne que $P \to X$ est un faisceau sur X car il est localement isomorphe au morphisme $G \to X$ obtenu en oubliant la structure de groupe de G.

1.7.3.3. Soit $X \in \mathrm{Ob}(\hat{E})$. Par une conséquence facile de (II 3.4.10) on trouve des équivalences entre les catégories

1) des torseurs sur X (1.7.3)
2) (si $X \in \mathrm{Ob}(\tilde{E})$), des X-torseurs de $\tilde{E}$
3) des torseurs sur le site $E_{/X}$
4) des sections cartésiennes au-dessus de $E_{/X}$ du champ $\mathrm{TORS}(E)$ des torseurs sur E.

Nous donnerons un seul énoncé en forme:

Proposition 1.7.4. Soit E un U-site. Soit

$$\mathrm{TORS}^+(E) \tag{1}$$

la sous-catégorie pleine de la $\hat{E}$-catégorie fibrée $\mathrm{OPER}(\hat{E})$ (1.1.6 (1)) dont les objets de projection $X \in \mathrm{Ob}(\hat{E})$ sont les torseurs sur X (1.7.3). Le foncteur $\mathrm{FAISC}^+(E) \to \mathrm{FAISC}(E)^+$ de (II 3.4.3 (3)) induit une $\hat{E}$-équivalence de champs

$$\mathrm{TORS}^+(E) \xrightarrow{\approx} \mathrm{TORS}(E)^+ \tag{2}$$

où la seconde désigne l'extension canonique à $\hat{E}$ de $\mathrm{TORS}(E)$.

Résulte immédiatement du lemme précédent, [passage de 1) à 4)].

§ 2. Torseurs et objets à faisceaux d'opérateurs dans un champ

Jusqu'à la fin du chapitre, E désigne un U-site.

2.1. Gerbes. Factorisation canonique d'un champ

Définition 2.1.1. Soit E un site. On appelle *E-gerbe* un E-champ de *groupoïdes* G tel que

(i) il existe un raffinement R de E tel que, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(R)$ la catégorie fibre G_S soit non vide

(ii) pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$ deux objets quelconques de la catégorie fibre G_S sont localement isomorphes.

2.1.1.1. On notera que la seconde assertion signifie que, pour tous $x, y \in \mathrm{Ob}(G_S)$, le faisceau d'ensembles $\mathbf{Hom}_S(x, y)$ $(= \mathbf{Isom}_S(x, y))$ qui est à priori un pseudo-torseur (à droite) sous $\mathbf{Aut}_S(x)$ est en fait un *torseur* (sur S).

2.1.1.2. La condition (i) est évidemment vérifiée si G admet une *section* s [*nécessairement cartésienne* puisque tous les morphismes de G sont E-cartésiens]. Dans ce cas on dit que G est *une gerbe triviale* ou encore que (G, s) est *une gerbe trivialisée*. Bien entendu, si E admet un objet final e l'existence d'une section de G équivaut à $\mathrm{Ob}(G_e) \neq \emptyset$.

2.1.1.3. On notera enfin que les conditions (i) et (ii) signifient que la projection $G \to E$ est couvrante (II 1.4.1).

2.1.1.4. On appelle *morphisme de gerbes* un morphisme de champs (II 1.2.1) dont la source et le but sont des gerbes; de même pour les *morphismes de morphismes de gerbes*.

Exemple 2.1.2. Si A est un faisceau de groupes sur E, le champ $\mathrm{TORS}(E; A)$ des A-torseurs est une E-gerbe (1.4.5). Elle est *trivialisée* par la section définie par le torseur trivial A_d.

Proposition 2.1.2.1. Soient E un U-site et G un E-champ. Pour que G soit une E-gerbe il faut et il suffit que G^* soit une $\tilde{E}_U$-gerbe.

2.1.2.2. La condition est suffisante, car on a une E-équivalence $G \xrightarrow{\approx} G^* \times_{\tilde{E}} E$ (II 1.3.3) et car le foncteur $\varepsilon\colon E \to \tilde{E}$ transforme famille couvrante en famille couvrante. Inversement, si G est un champ de groupoïdes, il en est de même de G^* d'après les formules (II 3.3.3.2 (2)). Si, de plus, G est une gerbe, on montre que G^* vérifie les conditions (i) et

(ii) de (2.1.1) en notant que tout objet de E est couvert par une famille $\varepsilon(S_i)$, $S_i \in \mathrm{Ob}(E)$.

2.1.2.3. En vertu de (II 3.3.3 et 3.3.1), la donnée d'une gerbe G sur E est donc équivalente à celle d'une gerbe G^* sur le topos associé $\tilde{E}$, les carégories de sections de G et G^* étant équivalentes d'après (II 3.3.1 (i)).

Définition 2.1.3. Soient E un site et C un E-champ. On appelle *sous-gerbe* de C une sous-catégorie G de C telle que la restriction à G de la projection $C \to E$ fasse de G une E-gerbe et telle que l'inclusion $G \to C$ soit un foncteur E-cartésien. On dit qu'une sous-gerbe de C est *pleine* si, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$ et tout couple (x, y) d'objets de G_S, tout S-*isomorphisme* $x \to y$ de C appartient à G. On dit qu'une sous-gerbe est *maximale* si elle l'est pour l'inclusion.

2.1.3.1. On notera l'abus de langage: une sous-gerbe pleine est une sous-catégorie pleine de C^{cart} (II 3.5.1 (1)), et non de C. Si $G \subset G'$ sont deux sous-gerbes pleines de C, l'inclusion est un foncteur bicouvrant comme on voit aisément, donc est une équivalence (II 1.4.5). Par ailleurs, toute sous-gerbe G de C est contenue dans une sous-gerbe maximale dont les objets de projection $S \in \mathrm{Ob}(E)$ sont les $x \in \mathrm{Ob}(C_S)$ qui sont localement isomorphes à un objet de G_S. Ceci permet de ne considérer que des sous-gerbes maximales.

2.1.3.2. Soit s une section cartésienne de C. On appelle *gerbe engendrée par* s la sous-gerbe maximale $G(s)$ de C dont les objets de projection $S \in \mathrm{Ob}(E)$ sont les objets de C_S qui sont localement S-isomorphe à $s(S)$. Elle est évidemment *triviale*. Si t est localement isomorphe à s, on a $G(s) = G(t)$.

2.1.3.3. Pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$, désignons par

$$\mathrm{Obis}(C)(S) \tag{1}$$

l'ensemble des classes à S-isomorphisme près d'objets de C_S. et par

$$\mathrm{Oblocis}(C)(S) \tag{2}$$

l'ensemble des classes d'objets de C_S localement S-isomorphes. Les foncteurs changement de base

$$f^*\colon\ C_S \to C_T, \quad f\colon\ T \to S, \quad f \in \mathrm{Fl}(E),$$

en font deux préfaisceaux d'ensembles $\mathrm{Obis}(C)$ et Oblocis (C) sur E. De plus, on a un morphisme de préfaisceaux d'ensembles

$$\mathrm{Obis}(C) \to \mathrm{Oblocis}(C). \tag{3}$$

Par ailleurs, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(C)$, soit

$$\mathrm{Ger}(C)(S) \tag{4}$$

l'ensemble des sous-gerbes *maximales* du $(E_{/S})$-champ $C_{/S} = C \times_E (E_{/S})$. Si $f\colon T \to S$ est une flèche de E et si $G \in \mathrm{Ger}(C)(S)$, il est immédiat que la $(E_{/T})$-catégorie déduite de G par le changement de base $E_{/f}\colon E_{/T} \to E_{/S}$ appartient à $\mathrm{Ger}(C)(T)$, d'où un préfaisceau d'ensembles $\mathrm{Ger}(C)$ sur E appelé *faisceau des sous-gerbes maximales de G*.

Proposition 2.1.4. Soient E un site et G un E-champ.

(i) Le morphisme (3) fait de $\mathrm{Oblocis}(C)$ un préfaisceau séparé associé à $\mathrm{Obis}(C)$.

(ii) En associant à tout $x \in \mathrm{Ob}(C_S)$, $S \in \mathrm{Ob}(E)$, la sous-gerbe de $C_{/S}$ engendrée par x on définit un morphisme de préfaisceau d'ensembles

$$\mathrm{Obis}(C) \to \mathrm{Ger}(C) \tag{1}$$

qui fait de $\mathrm{Ger}(C)$ un *faisceau associé* à $\mathrm{Obis}(C)$.

(iii) On a un monomorphisme de préfaisceaux d'ensembles $\mathrm{Oblocis}(C) \to \mathrm{Ger}(C)$.

(iv) On a un isomorphisme canonique entre l'ensemble des sous-gerbes maximales de C et $H^0(E, \mathrm{Ger}(C))$.

La démonstration est laissée au lecteur.

2.1.5. Factorisation canonique d'un champ

2.1.5.1. Soient E un U-site et F un faisceau d'ensembles sur E; à F correspond un E-champ scindé à fibres discrètes F' dont la fibre en $S \in \mathrm{Ob}(E)$ a pour ensemble d'objets et pour ensemble de flèches $F(S)$. Pour tout E-champ C, la catégorie $\mathbf{Cart}_E(C, F')$ est évidemment discrète, donc déterminée par son ensemble d'objets $\mathrm{Cart}_E(C, F')$. En particulier, le *faisceau* $\mathrm{Ger}(C)$ des sous-gerbes maximales de C définit un E-champ scindé à fibres discrètes noté

$$\mathbf{Ger}(C). \tag{1}$$

En attachant à tout objet x de C de projection $S \in \mathrm{Ob}(E)$ la sous-gerbe maximale de $C_{/S}$ qu'il engendre, on définit un E-foncteur cartésien

$$g\colon\ C^{\mathrm{cart}} \to \mathbf{Ger}(C) \tag{2}$$

où C^{cart} désigne le champ de groupoïdes sous-jacent à C (II 3.5.1). Grâce à g, nous allons caractériser $\mathbf{Ger}(C)$ par *la propriété universelle* suivante

Proposition 2.1.5.2. Soit C un champ sur un U-site E. Pour tout faisceau d'ensembles F sur E, si F' désigne le champ de groupoïdes attaché à F, les applications

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Ger}(C), F) \to \mathrm{Cart}_E(\mathrm{Ger}(C), F') \to \mathrm{Cart}_E(C^{\mathrm{cart}}, F')$$

sont bijectives.

Pour la première, cela est immédiat, pour la seconde on note que $\mathsf{Ger}(C)$ est le champ associé à la catégorie scindée à fibres discrètes G' attachée au préfaisceau $\mathrm{Obis}(C)$ de (2.1.3.3) et que l'application ci-dessous est bijective

$$\mathrm{Cart}_E(G', F') \to \mathrm{Cart}_E(C^{\mathrm{cart}}, F').$$

Notons maintenant que $\mathsf{Ger}(C)$ muni de la topologie induite par celle de E est un site, isomorphe à $E_{/\mathrm{Ger}(C)}$ (0 3.1.4).

Proposition 2.1.5.3. Soit C un champ sur un U-site E. Le foncteur $g\colon C^{\mathrm{cart}} \to \mathsf{Ger}(C)$ fait de C^{cart} une *gerbe* sur le site $\mathsf{Ger}(C)$.

Puisque $\mathsf{Ger}(C)$ et g ne dépendent manifestement que de C^{cart}, on peut supposer que $C = C^{\mathrm{cart}}$, autrement dit que C est un champ de groupoïdes, ce qui simplifie les notations. Il suffit de prouver que, pour tout $\gamma \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Ger}(C))$, le foncteur $g_{/\gamma}\colon C_{/\gamma} \to \mathsf{Ger}(C)_{/\gamma}$ fait de $C_{/\gamma}$ une gerbe. Or, puisque $\mathsf{Ger}(C)$ est scindée à fibres discrètes, le foncteur naturel $\varphi\colon \mathsf{Ger}(C)_{/\gamma} \to E_{/S}$ est un isomorphisme de sites, où S est la projection de γ. Il nous suffit donc de prouver que $\varphi \cdot g_{/\gamma}\colon C_{/\gamma} \to E_{/S}$ est une gerbe. Cela est clair: à isomorphisme près, c'est la sous-gerbe maximale de $C_{/S}$ correspondant à γ.

Remarque 2.1.5.4. Les constructions précédentes prennent un aspect plus séduisant lorque E est un U-topos et C un E-champ de groupoïdes dont les fibres sont U-petites. Dans ce cas, $\mathrm{Ger}(C)$ est un objet du topos E, noté G pour simplifier, défini par la propriété universelle que l'on a dite et $\mathsf{Ger}(C)$ est le «topos induit» $E_{/G}$. Le foncteur $g\colon C \to E_{/G}$ définit une gerbe sur $E_{/G}$. On vérifie aisément que la donnée de $G \in \mathrm{Ob}(E)$ et d'une gerbe C sur $E_{/G}$ permet de construire un champ de groupoïdes sur E en composant la projection $C \to E_{/G}$ et le foncteur d'oubli $E_{/G} \to E$. On précise sans peine ce résultat en décrivant la 2-catégorie des E-champs de groupoïdes à fibres U-petites en termes d'objets de E et de gerbes U-petites sur ces objets.

Proposition 2.1.5.5. Soit $f\colon E' \to E$ un morphisme de U-sites et soit C un E-champ.

(i) Si les fibres de C sont des groupoïdes ou des catégories discrètes, il en est de même de celles de $f^*(C)$.

(ii) Le foncteur naturel

$$f^*(C^{\mathrm{cart}}) \to f^*(C)^{\mathrm{cart}} \tag{1}$$

est une équivalence de champs sur E'.

(iii) Le morphisme naturel

$$\mathrm{Ger}(f^*(C)) \to f^*(\mathrm{Ger}(C)) \tag{2}$$

est un isomorphisme de faisceaux sur E'.

Les morphismes (1) et (2) sont définis grâce à (i), à l'aide des propriétés universelles de $f^*(C)^{\mathrm{cart}}$ et de $\mathrm{Ger}(f^*(C))$. Soit $\tilde{E}$ le topos associé à E. La proposition est évidente si l'on prend pour f le morphisme $\tilde{E} \to E$ défini par le foncteur $\varepsilon: E \to \tilde{E}$; en effet, cela résulte du calcul de l'image inverse dans ce cas et du fait que les champs sur un site sont les mêmes que ceux sur le topos associé (II 3.3.3). Ceci permet de supposer que f est un morphisme de topos, donc que le foncteur sous-jacent $u: E \to E'$ commute aux limites projectives finies. On peut alors utiliser la formule

$$f^*(C) = \mathsf{A}(u^{\bullet}_{\mathrm{scin}}(\mathsf{L}F)), \quad (\text{II } 3.2.4.3\,(1)), \tag{3}$$

pour calculer l'image inverse de C. Puisque F est équivalente à $\mathsf{L}F$, l'assertion (i) est évidente. On démontre ensuite (ii) en utilisant le fait que, pour une E-catégorie scindée C, la catégorie scindée C^{cart} se calcule par limites projectives finies à partir des préfaisceaux d'objets et de flèches de C; ceci permet d'établir que $u^{\bullet}_{\mathrm{scin}}(\mathsf{L}(C^{\mathrm{cart}}))$ est équivalente à $(u^{\bullet}_{\mathrm{scin}}(\mathsf{L}C))^{\mathrm{cart}}$; on conclut alors en utilisant le fait que, pour toute E'-catégorie fibrée F, on a une équivalence $\mathsf{A}(F^{\mathrm{cart}}) \to (\mathsf{A}F)^{\mathrm{cart}}$, où A désigne le 2-foncteur champ associé, ce qui résulte des propriétés des morphismes bicouvrants (II 1.4.1, 2.1.3). Ayant ainsi prouvé (i) et (ii), on en déduit (iii) formellement en utilisant la propriété universelle (2.1.5.2) de $f^*(\mathrm{Ger}(C))$.

Corollaire 2.1.5.6. L'image inverse d'une gerbe par un morphisme de sites est une gerbe.

En effet, si C est une gerbe, son image inverse est un champ de groupoïdes d'après (2.1.5.5 (i)). De plus, les conditions (i) et (ii) de (2.1.1) signifient que $\mathrm{Ger}(C)$ est le faisceau final. D'après (2.1.5.5 (iii)), il en est donc de même de $f^*(\mathrm{Ger}(C)) = \mathrm{Ger}(f^*(C))$, d'où la conclusion.

Corollaire 2.1.5.7. Soit $f: E' \to E$ un morphisme de U-sites et soit A un faisceau de groupes sur E. L'image inverse de la gerbe $\mathrm{TORS}(E, A)$

des A-torseurs sur E est la gerbe des A'-torseurs sur E', où $A'=f^*(A)$, et le foncteur naturel $\mathbf{Tors}(E, A)\to\mathbf{Tors}(E', A')$ de (II 3.2.1.5 (7)) est $P\rightsquigarrow f^*(P)$.

Soit s la section cartésienne de $T=\mathrm{TORS}(E, A)$ définie par le torseur trivial et soit s' la section cartésienne de l'image inverse T' de T qui lui correspond par fonctorialité de l'image inverse de champs. D'après (II 3.2.8), on a un isomorphisme canonique $A'\simeq\mathbf{Aut}(s')$. D'après (2.2.6) ci-dessous, on en déduit une équivalence de E'-champs

$$T'\to\mathrm{TORS}(E', A'),\qquad (x/S)\rightsquigarrow\mathbf{Isom}_S(s'(S), x),$$

ce qui prouve la première assertion. (On vérifiera sans peine que l'utilisation de (2.2.6) n'introduit pas de cercle vicieux.) Soit p la section cartésienne de T correspondant à un A-torseur P. D'après (II 3.2.8) et (1.2.7), on a des isomorphismes

$$\mathbf{Isom}(s', p')\approx f^*(\mathbf{Isom}(s, p))\approx f^*(P),$$

d'où la conclusion. Le lecteur aura noté que nous avons omis un certain nombre de vérifications; il pourra consulter (V 1.3.4) qu'il trouvera peut-être plus satisfaisant de ce point de vue.

Remarque 2.1.5.7.1. Le morphisme (2.1.5.5 (2)) définit une application de l'ensemble des sous-gerbes maximales de C dans celui des sous-gerbes maximales de $f^*(C)$ que l'on peut décrire comme suit. Si G est une sous-gerbe maximale de C, l'image inverse de l'inclusion $G\to C$ est un morphisme $i: f^*(G)\to f^*(C)$. Puisque $G\to C^{\mathrm{cart}}$ est pleinement fidèle, il en est de même de son image inverse d'après (II 3.2.9); en vertu de (2.1.5.5 (i)), le morphisme i induit donc une équivalence entre $f^*(G)$ et une sous-gerbe maximale de $f^*(C)$. Cette dernière est l'image de G par l'application envisagée plus haut comme on voit en considérant le morphisme $\mathrm{Ger}(G)\to\mathrm{Ger}(C)$ induit par $G\to C$.

Corollaire 2.1.5.8. Soient X un U-topos et $\mathbf{X}$ une famille conservative de points de X (0 3.13). Pour qu'un morphisme de X-champs $m: C\to C'$ soit i-fidèle, $i=0, 1, 2$, il faut et il suffit que, pour tout $x\in\mathbf{X}$, il en soit ainsi du morphisme $m_x: C_x\to C'_x$ induit par m entre les fibres en x de C et C'.

Par définition, la *fibre en x d'un X-champ C* est la catégorie des sections de l'image inverse de C par x: U-ens $\to X$ [1]. Puisque U-ens est le topos associé au site final $\mathbf{e}$, les champs sur U-ens s'interprètent comme

[1] On ne confondra pas cette notion avec celle de *fibre de C au dessus d'un objet de X* (I I.0.1) bien que la fibre de C au point x soit la fibre au dessus de l'objet final de U-ens de l'image inverse de C par x.

les champs sur $\mathbf{e}$ et la fibre C_x permet donc de reconstruire $x^*(C)$ à équivalence près (cf. II 3.3); de plus, la condition de l'énoncé signifie aussi que, pour tout $x \in \mathbf{X}$, l'image inverse de m par x est i-fidèle (II 3.3). D'après (II 3.2.9), la condition est nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante pour $i=0$ (resp. $i=1$), il suffit de montrer que, pour tout couple (u, v) d'objets de C de projection $S \in \mathrm{Ob}(X)$, le morphisme de faisceaux μ: $\mathbf{Hom}_S(u, v) \to \mathbf{Hom}_S(m(u), m(v))$ est un monomorphisme (resp. un isomorphisme), ce qui se vérifie fibre par fibre, d'où la conclusion par (II 3.2.8). Dans le cas où $i=2$, d'après (II 1.4.5), il reste à prouver que m est localement surjectif sur les objets, et pour cela, il suffit de prouver que $\mathrm{Ger}(m)$: $\mathrm{Ger}(C) \to \mathrm{Ger}(C')$ est un isomorphisme, ce qui se vérifie fibre par fibre, d'où la conclusion par (2.1.5.5 (ii)).

Aux chapitres VII et VIII, les constructions qui précèdent nous serviront comme un procédé de «dévissage» dont le principe est expliqué par les propositions ci-dessous.

Proposition 2.1.5.9. Soit f: $X_0 \to X$ un morphisme de U-sites.

(i) Si, pour tout faisceau d'ensembles F sur X, l'application $F(X) \to F_0(X_0)$ est bijective, alors, pour tout X-champ C, le foncteur $C(X) \to C_0(X_0)$ est pleinement fidèle et l'application $\mathrm{Ger}(C)(X) \to \mathrm{Ger}(C_0)(X_0)$ est bijective, où $F_0 = f^*(F)$ et $C_0 = f^*(C)$.

(ii) Sous les conditions de (i), soit C un X-champ. Pour que le foncteur $C(X) \to C_0(X_0)$ soit une équivalence, il suffit que, pour toute sous-gerbe maximale G de C, le foncteur $G(X) \to G_0(X_0)$ soit une équivalence.

Pour prouver la première assertion de (i), on considère le faisceau $\mathbf{Hom}(x, y)$ attaché à deux objets de $C(X)$ et l'on applique (II 3.2.8). On achève la preuve de (i) grâce à (2.1.5.5 (iii)). Pour prouver (ii), il suffit de considérer un objet x_0 de $C_0(X_0)$, la sous-gerbe maximale G' qu'il engendre et la sous-gerbe maximale G de C dont l'image inverse est G' et d'appliquer l'hypothèse à G.

2.1.5.10. Soit f: $X_0 \to X$ un morphisme de U-sites et soit $\mathbf{P}$ un sous-champ plein (II 1.2.5.1) du champ des faisceaux de groupes sur X, c'est à dire essentiellement une propriété de nature locale $\mathbf{P}$ portant sur les couples (S, A), où $S \in \mathrm{Ob}(X)$ et où A est un faisceau de groupes sur S. On dira qu'un X-champ C est un $\mathbf{P}$-champ si, pour tout objet x de C se projettant sur un objet S de X, le faisceau $\mathbf{Aut}_S(x)$ est un $\mathbf{P}$-groupe, c'est à dire est tel que $\mathbf{P}(S, A)$. On suppose que le groupe nul est un $\mathbf{P}$-groupe. Pour tout faisceau (resp. champ) F sur X, on pose $F_0 = f^*(F)$.

Proposition 2.1.5.11. Avec les notations de (2.1.5.10), les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) Pour tout $S \in \mathrm{Ob}(X)$ et tout **P**-champ C sur $X_{/S}$, le foncteur $C(S) \to C_0(S_0)$ est une équivalence;

(ii) Pour tout $S \in \mathrm{Ob}(X)$ et tout **P**-champ C sur $X_{/S}$, si $s: X_{0/S_0} \to X_{/S}$ désigne le morphisme induit par f, le morphisme de champs $C \to s_* s^*(C)$ est une équivalence;

(iii) (a) Pour tout $S \in \mathrm{Ob}(X)$ et tout faisceau d'ensembles F sur S, l'application $F(S) \to F_0(S_0)$ est bijective,

(b) Pour tout $S \in \mathrm{Ob}(X)$ et tout **P**-faisceau de groupes A sur S, le foncteur

$$\mathbf{Tors}(S, A) \to \mathbf{Tors}(S_0, A_0)$$

est une équivalence de catégories.

Notons que, d'après (2.1.5.7), la condition (iii)(b) n'est autre que (i) où l'on impose que C soit une **P**-gerbe triviale. Par ailleurs, puisque tout champ à fibres discrètes est un **P**-champ, car le groupe nul est un **P**-groupe, la condition (iii)(a) est la forme que prend (i) lorsque l'on y impose que C soit à fibres discrètes. Donc (i) $\Rightarrow$ (iii). Puisque le morphisme $u: C \to s_* s^*(C)$ induit sur les fibres en S le foncteur $C(S) \to C_0(S_0)$, on a (ii) $\Rightarrow$ (i). Prouvons que (iii) $\Rightarrow$ (ii). Pour tout champ C sur un objet S de X et tout objet S' de $X_{/S}$, le foncteur induit par $u: C \to s_* s^*(S)$ entre les fibres en S' n'est autre que le foncteur $u': C'(S') \to C'_0(S'_0)$, où $C' = C_{/S'}$; ceci d'après (II 3.2.7) et la transitivité de l'image inverse de champs. D'après la proposition précédente, (iii) implique que les foncteurs u' sont tous pleinement fidèles, donc aussi u. Il reste à prouver que u est une équivalence. D'après (2.1.5.9 (ii)), on peut supposer que C est une **P**-gerbe. D'après (II 2.1.5), l'assertion (ii) est *de nature locale*. On peut donc supposer que C est une gerbe triviale, d'où la conclusion.

Remarque 2.1.5.12. Bien que les définitions et énoncés nécessaires ne soient donnés que plus bas, expliquons dès maintenant comment les propositions ci-dessus s'interprètent en termes de cohomologie. Tout d'abord, (2.1.5.9 (i)) assure que, si pour tout faisceau d'ensembles F sur X, l'application $H^0(X, F) \to H^0(X_0, F_0)$ est bijective, alors, pour tout faisceau de groupes F sur X, l'application $H^1(X, F) \to H^1(X_0, F_0)$ est injective. Dans (2.1.5.11) la condition (iii)(a) signifie que cette condition reste satisfaite après restriction à tout objet de X. La condition (iii)(b) signifie alors que, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(X)$ et tout **P**-groupe A sur S, l'application injective $H^1(S, A) \to H^1(S_0, A_0)$ est également surjective. De (i) on déduit que ceci implique que toute **P**-gerbe sur un objet S de X dont l'image inverse sur S_0 est triviale est elle-même triviale. Ceci assure que, pour tout **P**-groupe *commutatif* A, l'application $H^2(S, A) \to H^2(S_0, A_0)$ est injective. Ceci assure également que, pour tout **P**-lien L, l'image inverse de l'ensemble $H^2(S_0, L_0)'$ des classes neutres de $H^2(S_0, L_0)$ par

l'application $H^2(S, L) \to H^2(S_0, L_0)$ est $H^2(S, L)'$, ce qui est encore un résultat «d'injectivité». En résumé, d'un résultat de bijectivité pour les H^i, $i=0, 1$, *stable par localisation*, on déduit un résultat d'injectivité pour H^2. Les résultats ci-dessus seront utilisés pour le théorème de changement de base propre, les hypothèses ne sont plus stables par localisation et nous devrons utiliser une variante plus subtile de (2.1.5.11) dans laquelle on «localise» grâce à des morphismes entiers.

2.2. Morphismes d'une gerbe triviale dans un champ

Définition 2.2.1. Soient E un site, C un E-champ, $S \in \mathrm{Ob}(E)$ et A un faisceau de groupes sur E.

(i) Un S-A-objet à opérateurs de C est un couple (x, u), où $x \in \mathrm{Ob}(C_S)$ et où $u: A^S \to \mathbf{Aut}_S(x)$ est un morphisme de faisceaux de groupes sur $E_{/S}$, ($A^S =$ la restriction de A à $E_{/S}$).

(ii) Si (x, u) et (y, v) sont deux S-A-objets à opérateurs de C on désigne par

$$\mathrm{Hom}_{S,A}(x, y) \quad (\text{resp. } \mathbf{Hom}_{S,A}(x, y)) \tag{1}$$

l'ensemble (resp. le faisceau) des S-morphismes $x \to y$ qui sont compatibles avec les opérations de A (lesquels sont appelés morphismes d'objets à opérateurs).

2.2.1.1. On définit de manière évidente *le champ des A-objets à opérateurs de C*

$$\mathrm{OPER}(A; C), \tag{2}$$

les faisceaux (1) n'étant autres que les faisceaux de S-morphismes dans celui-ci

2.2.1.2. On pose encore

$$\mathbf{Opér}(A; C) = \varprojlim(\mathrm{OPER}(A; C)/E) \tag{3}$$

et on l'appelle *catégorie* des A-objets à opérateurs de C. A isomorphisme canonique près elle s'interprète comme la catégorie des couples (x, u), où x est une section cartésienne de C et $u: A \to \mathbf{Aut}(s)$ un morphisme de faisceaux de groupes sur E. Si E admet un *objet final* e, on a comme toujours une équivalence

$$\mathbf{Opér}(A; C) \xrightarrow{\approx} \mathrm{OPER}(A; C)_e. \tag{4}$$

2.2.1.3. Soit $m: G \to C$ un morphisme de champs. Soient encore $S \in \mathrm{Ob}(E)$ et $x \in \mathrm{Ob}(G_S)$. On traduira le fait que m induit un morphisme de

faisceaux de groupes

$$\mathbf{Aut}_S(x) \to \mathbf{Aut}_S(m(x)) \qquad \text{(II 3.5.3)}$$

en disant que *m fait opérer* $\mathrm{Aut}_S(x)$ *sur* $m(x)$.

Théorème 2.2.2. Soient C un E-champ, (G, s) une E-gerbe trivialisée et posons

$$A = \mathbf{Aut}(s). \qquad (1)$$

On a une équivalence de catégories

$$\mathbf{Cart}_E(G, C) \xrightarrow{\approx} \mathbf{Opér}(A; C) \qquad (2)$$

qui à tout E-morphisme de champs $m\colon G \to C$ associe (ms, u), où ms est la section image de s par m et où $u\colon \mathbf{Aut}(s) \to \mathbf{Aut}(ms)$ est le morphisme de faisceaux de groupes induit par m.

2.2.2.1. Nous laisserons au lecteur le soin de définir un morphisme de E-champs

$$\mathrm{CART}(G, C) \to \mathrm{OPER}(A; C) \qquad (3)$$

qui sera une *E-équivalence* par une conséquence facile de la définition (compatibilité avec la restriction à $E_{/S}$, $S \in \mathrm{Ob}(E)$).

2.2.2.2. Considérons la sous-catégorie pleine $\mathbf{s}$ de G dont les objets sont les $s(S)$, $S \in \mathrm{Ob}(E)$. Il est immédiat que le foncteur d'inclusion $\mathbf{s} \to G$ est *bicouvrant* (I 1.4.1) autrement dit que G *est le champ associé* à $\mathbf{s}$. Par la «propriété universelle» du champ associé (II 2.1.1), le foncteur $\mathbf{Cart}_E(G, C) \to \mathbf{Cart}_E(\mathbf{s}, C)$ est une équivalence et il reste à montrer que le foncteur

$$\mathbf{Cart}_E(\mathbf{s}, C) \to \mathbf{Opér}(A; C) \qquad (4)$$

est une équivalence de catégories, ce qui résulte aisément des définitions.

Corollaire 2.2.3. Sous les hypothèses de (2.2.2), soit $m\colon G \to C$ un morphisme de champs. Soit encore

$$\mathbf{Aut}(m) \qquad (1)$$

le faisceau des automorphismes de m dans le champ $\mathrm{CART}(G, C)$. On a un monomorphisme

$$\mathbf{Aut}(m) \to \mathbf{Aut}(ms), \qquad \alpha \rightsquigarrow \alpha(s), \qquad (2)$$

qui identifie $\mathbf{Aut}(m)$ au centralisateur du morphisme $A = \mathbf{Aut}(s) \to \mathbf{Aut}(ms)$ induit par m.

Ceci n'est que la traduction en termes de faisceaux de la remarque suivante qui explicite en partie le fait que (2.2.2 (2)) est pleinement fidèle.

Corollaire 2.2.4. Sous les hypothèses de (2.2.2), soient $m, n\colon G \rightrightarrows C$ deux morphismes de champs et soient (x, u) et (y, v) leurs images par (2.2.2 (2)). Soit encore $i\colon x \to y$ un isomorphisme de sections cartésiennes. Pour qu'il existe un isomorphisme de morphismes de champs $I\colon m \xrightarrow{\sim} n$ tel que $I * s = i$ il faut et il suffit que i soit un A-morphisme c'est-à-dire que le diagramme de faisceaux de groupes ci-dessous soit commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Aut}(s) & \xrightarrow{u} & \mathbf{Aut}(ms) \\ & \searrow^{v} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Int}(i)} \\ & & \mathbf{Aut}(ns), \qquad (x = ms,\ y = ns). \end{array}$$

Corollaire 2.2.5. (Compatibilité.) Soit $f\colon C \to C'$ un morphisme de champs, soit (G, s) une gerbe trivialisée et posons $A = \mathbf{Aut}(s)$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Cart}_E(G, C) & \xrightarrow{\approx} & \mathbf{Opér}(A; C) \\ {\scriptstyle F}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F'} \\ \mathbf{Cart}_E(G, C') & \xrightarrow{\approx} & \mathbf{Opér}(A; C'), \end{array} \tag{1}$$

où les flèches horizontales sont les *équivalences* de (2.2.2 (2)), où $F = \mathbf{Cart}_E(G, f)$ et où F' est induit de manière évidente par la composition avec $f\colon C \to C'$.

Corollaire 2.2.6. Soit (G, s) une gerbe trivialisée. Posons $A = \mathbf{Aut}(s)$. On a une E-équivalence

$$\mathbf{P}\colon G \to \mathrm{TORS}(E; A) \tag{1}$$

$$\mathbf{P}(x) = \mathbf{Isom}_S(s(S), x), \qquad x \in \mathrm{Ob}(G_S), \qquad S \in \mathrm{Ob}(E), \tag{2}$$

où $\mathbf{P}(x)$ est considéré comme un torseur à droite sous $A^S = \mathbf{Aut}_S(s(S))$ grâce à la composition des morphismes.

2.2.6.1. On peut vérifier directement que la formule (2) «définit» un morphisme de champs; il est plus rapide d'appliquer (2.2.2) et de définir $\mathbf{P}$ (à isomorphisme unique près) en lui imposant d'appliquer s sur la section définie par le torseur trivial A_d et d'induire sur les faisceaux de S-automorphismes l'isomorphisme $A = \mathbf{Aut}(s) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Aut}_A(A_d)$ défini par les translations à gauche (1.2.7 (ii)).

2.2.6.2. Dans les deux cas il est immédiat que P est bicouvrant (II 1.4.1) donc une équivalence (II 1.4.5). Donc, *toute gerbe trivialisée est E-équivalente* (de manière «essentiellement canonique») *à la gerbe des A-torseurs.*

2.2.6.3. Ayant défini (1) par (2.2.2), on en déduit la formule (2). En effet, on a des isomorphismes canoniques

$$\mathsf{Isom}_S(s(S), x) \dashrightarrow \mathsf{Isom}_S(\mathsf{P}(s(S)), \mathsf{P}(x)) \longrightarrow \mathsf{P}(x) \qquad (3)$$

où le premier est induit par P et où le second est celui de (1.2.7 (1)). Le composé est un isomorphisme de A-torseurs en vertu des conditions imposées à P.

Le numéro suivant n'est qu'un long commentaire de la proposition (2.2.2). De même, les numéros 5 et 6 commentent le corollaire (2.2.6).

2.3. Objets tordus

Proposition 2.3.1. Soient E un U-site, C un E-champ et A un faisceau de groupes sur E. Il existe un couple (Tw, i), unique à isomorphisme unique près, tel que

(i) Tw est un morphisme de champs

$$Tw\colon\ \mathrm{TORS}(E, A) \times_E \mathrm{OPER}(A, C) \to C, \quad \text{«twist»}, \qquad (1)$$

(ii) i est un isomorphisme de morphismes de champs

$$\mathrm{OPER}(A; C) \underset{Tw(A_d,\ )}{\overset{s}{\rightrightarrows}} C \qquad (2)$$

où A_d est le torseur trivial et où $s(x, u) = x$ est le foncteur oubli des opérations de A,

(iii) pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$ et tout A-objet (x, u) de C_S (2.2.1 (i)), le morphisme $u\colon A \to \mathsf{Aut}_S(x)$ qui définit les opérations de A sur x est égal au composé

$$A \longrightarrow \mathsf{Aut}_A(A_d) \to \mathsf{Aut}_S(Tw(A_d, (x, u))) \to \mathsf{Aut}_S(x) \qquad (3)$$

où le premier morphisme est défini par les translations à gauche de A, le second par le foncteur Tw et le troisième par l'isomorphisme $i(x, u)$.

2.3.1.1. Soit T la sous-catégorie pleine du champ des A-torseurs $\mathrm{TORS}(E, A)$ (1.7.1.1 (4)) dont l'unique objet de chaque fibre est le torseur trivial. On a un morphisme de champs

$$s'\colon\ T \times_E \mathrm{OPER}(A; C) \to C \qquad (1)$$

qui, à un objet $(A_d, (x, u))$ associe x et qui, à une flèche (a, f), $a: A_d \to A_d$, $f: (x, u) \to (y, v)$, associe le morphisme $f \cdot u(a) = v(a) \cdot f$, où $u(a)$ et $v(a)$ sont obtenus en identifiant a à un élément de $A(S)$ grâce aux translations à gauche (1.2.7 (iii)). Soit maintenant $Tw: \mathrm{TORS}(E, A) \times_E \mathrm{OPER}(A; C) \to C$ un morphisme de champs et soit $Tw': T \times_E \mathrm{OPER}(A; C) \to C$ sa restriction. On a une bijection canonique entre l'ensemble des isomorphismes de morphisme de champs $i': s' \to Tw'$ et celui des isomorphismes de morphismes de champs $i: s \xrightarrow{\sim} Tw(A_d, \ )$ vérifiant la condition (iii) de l'énoncé. La démonstration est facile: noter que T n'a qu'un objet dans chaque fibre. Le théorème à démontrer affirme donc l'existence et l'unicité d'un couple (Tw, i') prolongeant s'. Par la *propriété universelle du champ associé* (II 2.1.1), on conclut en notant que l'inclusion $T \times_E \mathrm{OPER}(A, C) \to \mathrm{TORS}(E; A) \times_E \mathrm{OPER}(A, C)$ fait du second un champ associé au premier. En effet, ce foncteur est bicouvrant (II 1.4.1) car il en est ainsi de l'inclusion de T dans $\mathrm{TORS}(E; A)$ et la conclusion résulte de (II 2.1.3 (ii)).

2.3.1.2. En résumé, on a défini Tw par la condition d'être fonctoriel, compatible avec la localisation (morphisme de champs) et par la donnée pour tout A-objet (x, u) de C, d'un isomorphisme $i(x, u): x \xrightarrow{\sim} Tw(A_d, (x, u))$, fonctoriel en (x, u), compatible avec la localisation et tel que (2.3.1 (3)) redonne les opérations de A sur x. Nous allons maintenant caractériser individuellement les objets $Tw(P, x)$.

Proposition 2.3.2. Soient E un U-site, C un E-champ, A un faisceau de groupes sur E, $S \in \mathrm{Ob}(E)$, P un S-A-torseur sur E et $\mathsf{x} = (x, u)$, $u: A^S \to \mathsf{Aut}_S(x)$ un S-A-objet à opérateurs de C.

(i) Il existe ${}^P x \in \mathrm{Ob}(C_S)$, localement isomorphe à x et un A-morphisme

$$m_P: P \to \mathsf{Isom}_S(x, {}^P x), \tag{1}$$

où A opère sur $\mathsf{Isom}_S(x, {}^P x)$ grâce à u et à la composition des S-morphismes.

(ii) Etant donné $({}^P x, m_P)$ comme dans (i) il existe un unique S-isomorphisme

$${}^P x \xrightarrow{\sim} Tw(P, \mathsf{x}) \tag{2}$$

tel que (1) soit égal au composé

$$P \xrightarrow{\sim} \mathsf{Isom}_A(A_d, P) \to \mathsf{Isom}_S(Tw(A_d, \mathsf{x}), Tw(P, \mathsf{x})) \to \mathsf{Isom}_S(x, {}^P x) \tag{3}$$

où le premier morphisme est celui de (1.2.7 (i)), le second est induit par le morphisme de champs Tw et le troisième par les isomorphismes (2) et $i(\mathsf{x}): x \xrightarrow{\sim} Tw(A_d, \mathsf{x})$ (2.3.1 (2) et 2.3.1.2).

(iii) *(Opérations adjointes)*. Sous les conditions de (ii), le morphisme de faisceaux de groupes

$$\mathbf{Aut}_A(P) \to \mathbf{Aut}_S(Tw(P, \mathsf{x})) \tag{4}$$

induit par le morphisme de champs Tw (2.3.1 (1)) est identifié par (2) au morphisme adjoint (1.4.8)

$$\mathbf{ad}(P) \to \mathbf{Aut}_S({}^P x), \quad (\mathbf{ad}(P) = \mathbf{Aut}_A(P)), \tag{5}$$

du morphisme de torseurs (1).

2.3.2.1. Soit ${}^P x \in \mathrm{Ob}(C_S)$. D'après (1.4.6 (iii)), l'existence d'un A-morphisme $m_P: P \to \mathbf{Isom}_S(x, {}^P x)$ implique que $\mathbf{Isom}_S(x, {}^P x)$ est un $\mathbf{Aut}_S(x)$-torseur, donc que ${}^P x$ est localement isomorphe à x. De plus, (loc. cit.), la donnée d'un A-morphisme m_P équivaut à celle d'un isomorphisme de $\mathbf{Aut}_S(x)$-torseurs

$$P \overset{A}{\wedge} \mathbf{Aut}_S(x) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Isom}_S(x, {}^P x). \tag{6}$$

Prouvons (i), et pour cela posons ${}^P x = Tw(P, \mathsf{x})$ et prenons pour m_P le composé (3). Il suffit de vérifier que (3) est un A-morphisme, ce qui résulte de (2.3.1 (iii)), comme on voit en explicitant et en utilisant le fait que Tw est un foncteur. Prouvons (ii). D'après (6), on aura un isomorphisme canonique de $\mathbf{Aut}_S(x)$-torseurs

$$\mathbf{Isom}_S(x, {}^P x) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Isom}_S(x, Tw(P, \mathsf{x})) \tag{7}$$

donc, d'après (2.2.6) un unique S-isomorphisme $j: {}^P x \xrightarrow{\sim} Tw(P, \mathsf{x})$ tel que la composition avec j induise (7), ce qui n'est autre que la condition de (ii).

2.3.2.2. Il reste à prouver (iii). Par définition, (5) est le morphisme de groupes v caractérisé par la condition que (1) soit un v-morphisme. Il suffit donc de vérifier que (4) possède cette propriété. Par définition de l'isomorphisme (2), cela revient à dire que (4) est le morphisme adjoint (1.4.8) de (3), ce qui résulte du fait que Tw est un foncteur. On appelle opérations adjointes celle que définit (5).

Définition 2.3.3. Sous les hypothèses de (2.3.2), on appelle *objet tordu de* x *par* P sous l'action de A un couple $({}^P x, m_P)$, $x \in \mathrm{Ob}(C_S)$, où $m_P: P \to \mathbf{Isom}_S(x, {}^P x)$ est un A-morphisme.

2.3.3.1. On n'oubliera pas que le groupe adjoint $\mathbf{ad}(P)$ de P opère naturellement sur l'objet tordu ${}^P x$ (2.3.2 (iii)). Soit $f: x \to y$ un morphisme de S-A-objets de C. Si ${}^P x$ et ${}^P y$ sont des objets tordus de x et y par P,

on notera

$$ {}^{P}f\colon {}^{P}x \to {}^{P}y \tag{1} $$

le morphisme déduit de $Tw(\mathrm{id}_P, f)$ par les isomorphismes (2.3.2 (2)) et on l'appellera *morphisme tordu de* f par P. Il est *compatible avec les opérations adjointes* puisque celles-ci peuvent se définir grâce au foncteur Tw. Pour calculer ${}^{P}f$ sans recours au foncteur Tw, on note qu'il est *caractérisé parmi les S-morphismes* ${}^{P}x \to {}^{P}y$ par la condition que le carré ci-dessous soit commutatif

$$ \begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{m} & \mathsf{Isom}_S(x, {}^{P}x) \\ {\scriptstyle n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ \mathsf{Isom}_S(y, {}^{P}y) & \xrightarrow[f]{} & \mathsf{Isom}_S(x, {}^{P}y) \end{array} \tag{2} $$

où m et n définissent respectivement les structures d'objet tordu ${}^{P}x$ et ${}^{P}y$ et où f et f′ sont induits par la composition, avec f et ${}^{P}f$. Signalons dès maintenant que l'application

$$ \mathrm{Hom}_{S,A}(x, y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{S,\,\mathsf{ad}(P)}({}^{P}x, {}^{P}y), \quad f \mapsto {}^{P}f, \tag{3} $$

est *bijective* (2.3.4 (i)).

Proposition 2.3.3.2. Sous les hypothèses de (2.3.2), soit $({}^{P}x, m_P)$ un objet tordu de x par P. Pour tout $z \in \mathrm{Ob}(C_S)$ on a des isomorphismes fonctoriels en z

$$ \mathsf{Hom}_S(x, z) \overset{A}{\wedge} P^0 \xrightarrow{\sim} \mathsf{Hom}_S({}^{P}x, z) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Hom}_A(P, \mathsf{Hom}_S(x, z)) \tag{1} $$

$$ P \overset{A}{\wedge} \mathsf{Hom}_S(z, x) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Hom}_S(z, {}^{P}x) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Hom}_A(P^0, \mathsf{Hom}_S(z, x)) \tag{2} $$

qui sont compatibles avec les opérations de $\mathsf{Aut}_S(z)$ (resp. $\mathsf{ad}(P)$) définies par la composition des morphismes (resp. et par les opérations adjointes).

2.3.3.3. Notons déjà que, par passage aux sections, ces isomorphismes caractérisent l'objet tordu ${}^{P}x$ par quatre *propriétés universelles* dans la catégorie fibre C_S. Par ailleurs ils sont décrits en utilisant seulement $({}^{P}x, m_P)$, sans recours au foncteur Tw. Nous nous contenterons de donner une démonstration pour l'un d'entre eux. L'accouplement de composition (I 2.6.3.2 (2)):

$$ \mathsf{Isom}_S(x, {}^{P}x) \times \mathsf{Hom}_S(z, x) \to \mathsf{Hom}_S(z, {}^{P}x), \quad (a, b) \rightsquigarrow a\,b, \tag{3} $$

induit, grâce à m_P: $P \to \mathsf{Isom}_S(x, {}^{P}x)$, un morphisme

$$ P \times \mathsf{Hom}_S(z, x) \to \mathsf{Hom}_S(z, {}^{P}x) \tag{4} $$

qui, par associativité de la composition dans C_S, passe au quotient (1.3.1.1 (1)) et définit un morphisme

$$P \overset{A}{\wedge} \mathbf{Hom}_S(z, x) \to \mathbf{Hom}_S(z, {}^P x). \tag{5}$$

On vérifie aisément que (5) est un isomorphisme, en utilisant la définition d'un torseur. Par ailleurs (5) est compatible avec les opérations de $\mathbf{Aut}_S(z)$ car la composition «à droite» commute à la composition «à gauche» (associativité). Enfin (5) est compatible avec les opérations de $\mathbf{ad}(P)$ car le morphisme (2.3.2 (5)) qui définit les opérations adjointes de $\mathbf{ad}(P)$ sur ${}^P x$ est compatible avec m_P.

2.3.3.4. Pour références ultérieures, notons que si A opère *trivialement* sur x, on définit *canoniquement* une structure d'objet tordu sur x en prenant pour m_P: $P \to \mathbf{Isom}_S(x, x)$ le morphisme dont l'image est la section définie par le morphisme identique de x.

Proposition 2.3.4. Soient E un U-site, C un E-champ, A un faisceau de groupes sur E et P un A-torseur. On a un morphisme de champs

$$Tw^P\colon \mathrm{OPER}(A; C) \to \mathrm{OPER}(\mathbf{ad}(P); C), \tag{1}$$

où $Tw^P(x)$ est l'objet $Tw(P, x)$ muni des opérations adjointes (2.3.2 (iii)). De plus, on a ce qui suit.

(i) Tw^P est une *E-équivalence.*

(ii) Si (C, Q, B) et (B, P, A) sont deux bitorseurs et si (C, R, A), $R = Q \overset{B}{\wedge} P$, est leur produit contracté, on a un isomorphisme canonique de morphismes de champs

$$Tw^R \xrightarrow{\sim} Tw^Q \cdot Tw^P. \tag{2}$$

2.3.4.1. Pour définir correctement Tw^P, on considère P comme une section cartésienne P du champ des A-torseurs sur E (1.7.1.3 (8)) et, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$ et tout S-A-objet à opérateurs x de C, on prend pour $Tw^P(\mathsf{x})$ l'objet $Tw(P(S), \mathsf{x})$ muni des opérations adjointes. Pour tout S-A-morphisme $f\colon \mathsf{x} \to \mathsf{y}$, on pose $Tw^P(f) = Tw(\mathrm{id}_{P(S)}, f)$, ce qui est licite car ce morphisme est compatible avec les opérations adjointes (2.3.3.1). Il reste à vérifier que Tw^P est un morphisme de champs, autrement dit est compatible avec la localisation, ce qui est aisé. Pour prouver (i), il suffit évidemment de prouver (ii), mais l'on peut également noter que si $P = A_d$ le foncteur Tw^P est canoniquement isomorphe à l'identité en vertu de la définition même de Tw (2.3.1). Par suite, Tw^P *est localement isomorphe à l'identité* d'où l'on déduit que c'est une E-équivalence en utilisant par exemple [D 6.16].

2.3.4.2. Pour prouver (ii), il faut définir, pour tout S-A-objet x de C un isomorphisme compatible avec les opérations adjointes

$$ {}^{R}x \xrightarrow{\sim} {}^{Q}({}^{P}x). \tag{3} $$

D'après (2.3.3.2 (5)), on a des isomorphismes

$$ \mathsf{Hom}_S(x, {}^{Q}({}^{P}x)) \xrightarrow{\sim} Q \overset{B}{\wedge} \mathsf{Hom}_S(x, {}^{P}x) \xrightarrow{\sim} Q \overset{B}{\wedge} (P \overset{A}{\wedge} \mathsf{Hom}_S(x, x)) \tag{4} $$

dont le composé induit un isomorphisme

$$ \mathsf{Isom}_S(x, {}^{Q}({}^{P}x)) \xrightarrow{\sim} Q \overset{B}{\wedge} P \overset{A}{\wedge} \mathsf{Aut}_S(x), \tag{5} $$

qui, d'après (2.3.2 (ii)), fournit l'isomorphisme (3) cherché. Il reste à vérifier que (3) satisfait à certaines conditions de compatibilité, cc qui est laissé au lectcur.

Remarque 2.3.5. Nous désigncrons également par

$$ P \overset{A}{\wedge} x \quad (= {}^{P}x = Tw^{P}(x)) \tag{1} $$

l'objet tordu de x par P, ce qui permet d'écrire plus agréablement la formule (3):

$$ (Q \overset{B}{\wedge} P) \overset{A}{\wedge} x \xrightarrow{\sim} Q \overset{B}{\wedge} (P \overset{A}{\wedge} x). \tag{2} $$

Le commentaire suggéré par la formule (2.3.3.3 (5)) est laissé au lecteur.

Exemple 2.3.6. (Torsion de faisceaux d'ensembles.) La notation que l'on vient d'introduire est en accord avec celle adoptée pour le produit contracté de deux faisceaux à groupes d'opérateurs. En effet, soit X un faisceau d'ensembles sur E où opère à gauche un faisceau de groupes A. Pour tout A-torseur P le morphisme

$$ \xi\colon\ P \dashrightarrow \mathsf{Isom}(X, P \overset{A}{\wedge} X), \qquad \xi(p)(x) = (p, x)', \tag{1} $$

où $(p, x)'$ est l'image de (p, x) par $P \times X \to P \overset{A}{\wedge} X$, *munit* $P \overset{A}{\wedge} X$ *d'une structure d'objet tordu de* X *par* P comme il résulte de (1.6.3 (ii)). On vérifie de plus que les opérations adjointes de $\mathsf{ad}(P)$ sur l'objet tordu sont obtenues par passage au quotient à partir des opérations de $\mathsf{ad}(P)$ sur P. Le foncteur $X \rightsquigarrow P \overset{A}{\wedge} X$ étant une équivalence de catégories (2.3.4) (1.6.7), transforme groupes en groupes. Notons à ce propos que d'après le calcul des limites projectives dans le topos des A-objets de $\tilde{E}$ (1.2.8), un groupe de celui-ci est essentiellement un faisceau de groupes sur lequel A opère par automorphismes de groupes. Explicitons le calcul du «groupe tordu» dans un cas particulier important.

Proposition 2.3.7. (Torsion de faisceaux de groupes.) Soient E un U-site et $u: A \to B$ un morphisme de faisceaux de groupes

(i) Pour tout A-torseur P il existe un unique morphisme de faisceaux d'ensembles

$$f: P \to \mathbf{Isom}_{gr}(A, \mathbf{ad}(P)) \tag{1}$$

tel que $f(p)(a)(p\,a') = p\,a\,a'$, $p \in P(S)$, $a, a' \in A(S)$, $S \in \mathrm{Ob}(E)$. De plus, f munit $\mathbf{ad}(P)$ d'une structure *d'objet tordu* de A par P (dans le champ des faisceaux de groupes) A opérant sur lui-même par automorphismes intérieurs. D'où un isomorphisme

$$\mathbf{ad}(P) \xrightarrow{\sim} {}^{P}A.$$

(ii) Pour tout A-torseur P, le morphisme de faisceaux de groupes ${}^{P}u: {}^{P}A \to {}^{P}B$ obtenu en tordant u par P (2.3.3.1) s'identifie au morphisme adjoint

$$\mathbf{ad}(m): \mathbf{ad}(P) \to \mathbf{ad}(Q) \quad (1.4.8) \tag{2}$$

du morphisme naturel $m: P \to Q$, où l'on a posé $Q = P \overset{A}{\wedge} B$.

2.3.7.1. La preuve de (i) se réduit à des vérifications triviales, ainsi que celle de (ii), quand on précise que l'on identifie ${}^{P}B$ et ${}^{Q}B$ par transitivité de la torsion (2.3.5 (2)), puis ${}^{Q}B$ et $\mathbf{ad}(Q)$ par (i).

2.3.7.2. Il nous sera utile d'avoir noté que l'on peut caractériser (1) par la condition que le composé

$$\mathbf{Isom}_{A}(A_d, P) \xrightarrow{i} P \xrightarrow{f} \mathbf{Isom}_{gr}(A, \mathbf{ad}(P)) \tag{3}$$

soit le morphisme $m \mapsto \mathbf{ad}(m)$, $(m: A_d \to P)$, où i est l'isomorphisme (1.2.7 (1)): $i(m) = m(e)$.

Corollaire 2.3.8. Soient C un E-champ, A un faisceau de groupes sur E, x un A-objet à opérateurs de C et ${}^{P}x$ l'objet tordu de x par P sous l'action de A. Le morphisme $\mathbf{ad}(P) \to \mathbf{Aut}_{S}({}^{P}x)$ qui définit les opérations adjointes (2.3.2 (iii)) s'obtient en tordant par P le morphisme de faisceaux de groupes $u: A \to \mathbf{Aut}_{S}(x)$ qui définit les opérations de A sur x.

Résulte immédiatement de (2.3.7) et de la définition des opérations adjointes (2.3.2 (iii)). Ayant étudié ce qu'il advient du foncteur *Tw* quand on y fixe le premier argument, fixons le second.

Proposition 2.3.9. Soient E un U-site, C un E-champ, A un faisceau de groupes sur E et (x, u) un A-objet à opérateurs de C.

(i) Il existe un morphisme de champs

$$Tw_x\colon \mathrm{TORS}(E, A) \to C \tag{1}$$

et un isomorphisme compatible avec les opérations de A

$$i\colon Tw_x(A_d) \xrightarrow{\sim} x. \tag{2}$$

Le couple (Tw_x, i) est unique à isomorphisme unique près.

(ii) Soit $f\colon (x, u) \to (y, v)$ un morphisme de A-objets de C. Il existe un unique morphisme de morphismes de champs

$$Tw_f\colon Tw_x \to Tw_y \tag{3}$$

tel que $Tw_f(A)$ s'identifie à f par (2).

Cet énoncé n'est autre que (2.2.2) appliqué à la gerbe des A-torseurs, trivialisée par la section définie par le torseur trivial A_d. On dira parfois que Tw_x est le foncteur torsion de x sous l'action de A. D'après l'assertion d'unicité de (i), on peut poser

$$Tw_x(P) = Tw(P, x), \quad (= P \overset{A}{\wedge} x = {}^P x), \tag{4}$$

où Tw est le foncteur de (2.3.1), car la condition (iii) de (2.3.1) signifie précisément que $i(x)\colon Tw(A_d, x) \xrightarrow{\sim} x$ (2.3.1 (2)) est compatible avec les opérations de A sur $Tw_x(A_d)$ définies par fonctorialité à partir des translations à gauche et les opérations de A sur x. On calcule de même Tw_f grâce à Tw.

Corollaire 2.3.10. Soient C un E-champ, $T, T'\colon \mathrm{TORS}(E, A) \rightrightarrows C$ deux morphismes de E-champs et P un A-torseur. L'application

$$\mathrm{Hom}(T, T') \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{ad}(P)}(T(P), T'(P)), \quad m \mapsto m(P), \tag{1}$$

est *bijective*, où l'on fait opérer $\mathbf{ad}(P)$ par fonctorialité.

Ceci résulte à nouveau de (2.2.2), en prenant pour origine dans $\mathrm{TORS}(E, A)$ la section définie par P.

Proposition 2.3.11. (Principe de compatibilité.) Soient $m\colon C \to C'$ un morphisme de champs, A un faisceau de groupes sur E et P un A-torseur. Pour tout A-objet x de C, on a un isomorphisme canonique, compatible avec les opérations adjointes

$$m(P \overset{A}{\wedge} x) \xrightarrow{\sim} P \overset{A}{\wedge} m(x). \tag{1}$$

Pour donner un sens à cet énoncé, on fait opérer A sur $m(x)$ et $\mathbf{ad}(P)$ sur $m(P \overset{A}{\wedge} x)$ par fonctorialité. Soit $p\colon P \to \mathbf{Isom}_S(x, {}^P x)$ le morphisme qui définit la structure d'objet tordu de $P \overset{A}{\wedge} x$. En composant p avec le

morphisme $\mathbf{Isom}_S(x, P \overset{A}{\wedge} x) \xrightarrow{u} \mathbf{Isom}_S(m(x), m(P \overset{A}{\wedge} x))$ on obtient un morphisme compatible avec les opérations de A et $\mathbf{ad}(P)$. En effet, p est compatible avec les dites opérations (par définition) et u aussi, car m est un foncteur. Par (2.3.2), le composé $u\,p$ définit donc l'isomorphisme (1) cherché. Nous laissons au lecteur le soin d'expliciter les propriétés de fonctorialité et de compatibilité avec la localisation dont jouit (1): elles s'expriment commodément en termes du morphisme de champ Tw de (2.3.1) et de l'analogue relatif à C'.

2.4. L'ensemble pointé $H^1(A)$ associé à un faisceau de groupes

2.4.1. Soit E un U-site. Pour tout U-faisceau d'ensembles A sur E on pose

$$H^0(E, A) = \varprojlim A \tag{1}$$

que l'on notera parfois $H^0(A)$ et qui est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Hom}(e, A)$, où e est le faisceau final. L'application associée à une flèche $u\colon A \to B$ de $\tilde{E}$ sera désignée par

$$H^0(E, u)\colon H^0(E, A) \to H^0(E, B) \quad \text{ou} \quad u^{(0)}\colon H^0(A) \to H^0(B) \tag{2}$$

s'il n'y a pas d'ambiguité sur E.

On appelle *ensemble pointé* un couple (X, x), $x \in X$.

Définition 2.4.2. Soit A un U-faisceau de groupes sur un U-site E. On désignera par

$$H^1(E, A) \quad \text{ou par} \quad H^1(A) \tag{1}$$

l'ensemble des classes à isomorphisme près de A-torseurs sur E (c'est-à-dire de A-torseurs du topos $\tilde{E}$ (1.7.1)) *pointé* par la classe du torseur trivial A_d, appelée classe unité.

2.4.2.1. On obtient un foncteur défini sur la catégorie des faisceaux de groupes, à valeurs dans celle des ensembles pointés en associant de plus à tout morphisme de faisceaux de groupes $u\colon A \to B$ le morphisme d'ensembles pointés

$$H^1(E, u)\colon H^1(E, A) \dashrightarrow H^1(E, B) \quad \text{aussi noté} \quad u^{(1)}\colon H^1(A) \to H^1(B) \tag{2}$$

défini par le foncteur extension du groupe structural (1.4.6).

2.4.2.2. D'après (1.4.6 (iii)), si $x \in H^1(A)$ et $y \in H^1(B)$ sont les classes de torseurs X et Y sous A et B, la relation

$$u^{(1)}(x) = y \tag{3}$$

équivaut à l'existence d'un u-morphisme de torseurs $X \to Y$.

Remarque 2.4.3. On notera que l'ensemble $H^0(E, A)$ appartient à U car E admet une U-famille de générateurs topologiques (0 1.6) et qu'il est indépendant de l'univers.

Nous montrerons plus bas (3.6.6.1) que $H^1(E, A) \in \mathsf{U}$ mais nous pouvons déjà remarquer qu'il ne dépend pas de U car un A-torseur P à valeurs dans un univers $\mathsf{V} \supset \mathsf{U}$ est nécessairement isomorphe à un U-faisceau puisque $P(S) = \emptyset$ ou $P(S) \approx G(S)$, $S \in \mathrm{Ob}(E)$.

Remarque 2.4.4. Si A et B sont deux faisceaux de groupes sur E, on a une *E-équivalence*

$$\mathrm{TORS}(E; A \times B) \xrightarrow{\approx} \mathrm{TORS}(E; A) \times_E \mathrm{TORS}(E; B) \qquad (1)$$

dont les composantes sont les foncteurs extension du groupe structural relatifs aux projections de $A \times B$. En effet, on obtient un *E-quasi-inverse* de (1) en associant à tout couple (P, Q), où P est un A-torseur et Q un B-torseur, le produit $P \times Q$ muni des opérations évidentes de $A \times B$. On peut aussi noter que (1) est une E-équivalence car il est visiblement *bicouvrant* (II 1.4.5). Il en résulte que le foncteur $A \rightsquigarrow H^1(A)$ respecte les produits finis donc transforme groupes en groupes. En explicitant on trouve ce qui suit.

Proposition 2.4.5. Soient E un U-site et A un faisceau de groupes *abéliens*. L'ensemble sous-jacent à $H^1(E, A)$ est muni d'une *structure de groupe abélien* dont l'élément neutre est le point marqué de $H^1(E, A)$. De plus

(i) Si P et Q sont deux A-torseurs, le produit des classes de P et Q est celle du produit contracté $P \overset{A}{\wedge} Q$, c'est-à-dire du quotient de $P \times Q$ par A opérant par

$$P \times Q \times A \to P \times Q, \qquad (p, q, a) \rightsquigarrow (p\,a, q\,a^{-1}), \qquad (1)$$

les opérations étant obtenues par passage au quotient à partir de

$$P \times Q \times A \to P \times Q, \qquad (p, q, a) \rightsquigarrow (p\,a, q). \qquad (2)$$

(ii) L'inverse de la classe d'un A-torseur P est celle de l'opposé $\check{P}$ de P (1.1.3 et 1.5.7).

2.4.5.1. On rappelle de plus que, par un raisonnement général, si $u\colon A \to B$ est un morphisme de faisceaux de groupes abéliens (i.e. de groupes de $\mathbf{Fagr}(E)$) l'application $u^{(1)}$ est un morphisme de groupes. Le groupe $H^1(E, A)$ s'identifie canoniquement à celui défini en algèbre homologique (3.5.4).

Définition 2.4.6. (Localisation.) Soient E un U-site, $S \in \mathrm{Ob}(E)$ et A un U-faisceau d'ensembles (resp. de groupes) sur E. On posera

$$H^0(E_{/S}, A) = H^0(E_{/S}, A^S) \approx \mathrm{Hom}_{\tilde{E}}(\varepsilon(S), A) \tag{1}$$

$$H^1(E_{/S}, A) = H^1(E_{/S}, A^S); \tag{2}$$

où $E_{/S}$ est muni de la topologie induite (0 3.1.4) et où A^S désigne la restriction de A à $E_{/S}$.

2.4.6.1. Donc $H^1(E_{/S}, A)$ est l'ensemble des classes à isomorphisme près de A^S torseurs sur le site $E_{/S}$, canoniquement isomorphe d'après (1.7.1.2) à l'ensemble des classes à isomorphisme près de $\varepsilon(S)$-A-torseurs du topos $\tilde{E}$.

2.4.6.2. Si $f: T \to S$ est une flèche de E, la composition avec le foncteur $E_{/f}: E_{/T} \to E_{/S}$ induit un morphisme de topos $(E_{/S})^{\sim} \to (E_{/T})^{\sim}$, d'où une application

$$H^1(E_{/S}, A) \to H^1(E_{/T}, A). \tag{3}$$

Si on interprète un élément de $H^1(E_{/S}, A)$ comme la classe d'un $\varepsilon(S)$-A-torseur P de $\tilde{E}$, son image par (3) est la classe du $\varepsilon(T)$-A-torseur déduit de P par le changement de base $\varepsilon(T): \varepsilon(T) \to \varepsilon(S)$, car (1.7.1.2 (6)) est un morphisme de champs, donc est «compatible» avec les foncteurs image inverse définis par $f: T \to S$.

2.4.6.3. Les morphismes (3) permettent de définir *un préfaisceau d'ensembles pointés*

$$\mathsf{H}^1(A) \quad \text{par} \quad \mathsf{H}^1(A)(S) = H^1(E_{/S}, A). \tag{4}$$

En associant à un A-torseur P sur E ses restrictions aux $E_{/S}$, $S \in \mathrm{Ob}(E)$, on définit une application

$$H^1(E, A) \to \varprojlim \mathsf{H}^1(A) \tag{5}$$

qui est *bijective si E admet un objet final.* Enfin, puisque tout torseur est localement trivial, *le faisceau associé à* $\mathsf{H}^1(A)$ *est le faisceau final.*

Remarque 2.4.7. (Fonctorialité par isomorphisme.) Par fonctorialité, le groupe $\mathrm{Aut}(A)$ des automorphismes du faisceau de groupes A opère dans $H^1(A)$ en respectant le point marqué et, si A est abélien, la loi de groupe de $H^1(A)$. Soient P un A-torseur, $p \in H^1(A)$ sa classe et $u \in \mathrm{Aut}(A)$. L'image de p par $u^{(1)}: H^1(A) \to H^1(A)$ est la classe du A-torseur $P^{u^{-1}}$ obtenu en faisant opérer A sur P par $(p, a) \mapsto p\,u^{-1}(a)$. En effet, le morphisme identique de P est un u-morphisme $P \to P^{u^{-1}}$, (2.4.2.2).

Plus généralement, si $u: A \xrightarrow{\sim} B$ est un *isomorphisme* de faisceaux de groupes sur E, on a un isomorphisme canonique de morphismes de $\tilde{E}$-champs

$$\mathrm{OPER}(\tilde{E}; A) \rightrightarrows \mathrm{OPER}(\tilde{E}; B) \quad (1.1.6 \text{ et } 7)$$

entre le foncteur *extension* du groupe structural suivant $u: A \to B$ et le foncteur *restriction* du groupe structural suivant $u^{-1}: B \to A$.

Corollaire 2.4.8. Soient A un faisceau de groupes sur un site E. Soit $a \in H^0(E, A)$ et soit $\mathrm{Int}(a)$ l'automorphisme intérieur défini par a. L'application $\mathrm{Int}(a)^{(1)}: H^1(A) \to H^1(A)$ est *l'identité*.

Posons $u = \mathrm{Int}(a)$. Avec les notations de la remarque précédente, il suffit de remarquer que le morphisme $P \to P^{u^{-1}}$, $p \mapsto pa$, est un A-morphisme.

2.5. Classification d'objets localement isomorphes à un objet donné

Théorème 2.5.1. Soient E un U-site, S un objet final de E et C un E-champ. Soit encore $x \in \mathrm{Ob}(C_S)$, posons $A = \mathsf{Aut}_S(x)$ et désignons par $C(x)$ la sous-gerbe maximale de C engendrée par x (2.1.3.2). On a une E-équivalence de gerbes

$$C(x) \xrightarrow{\approx} \mathrm{TORS}(E; A), \quad (y/T) \rightsquigarrow \mathsf{Isom}_S(x^T, y); \qquad (1)$$

le foncteur torsion de x sous l'action de A (2.3.9 (1)) est quasi-inverse du précédent.

2.5.1.1. On choisit une section cartésienne s de C telle que $s(S) = x$ et l'on définit (1) par (2.2.6), la formule (1) n'étant qu'un commentaire un peu imprécis, (où x^T désigne l'image inverse de x par le morphisme final $T \to S$). Par définition, le composé du foncteur torsion Tw_x et de (1) applique x sur lui-même et induit sur les faisceaux de S-morphismes le morphisme identique. Par (2.2.2) il est donc canoniquement isomorphe au foncteur identique de $C(x)$, d'où la conclusion.

2.5.1.2. Puisque (1) est une E-équivalence, il induit *un isomorphisme de préfaisceaux d'ensembles* entre $\mathsf{H}^1(A)$ et le préfaisceau

$$\mathrm{Obis}(C(x)), \quad (2.1.3.3\,(1)), \qquad (2)$$

des classes à T-isomorphisme près d'objets localement isomorphes à x^T. En particulier on a ce qui suit.

Corollaire 2.5.2. Sous les hypothèses de (2.5.1).

(i) On a une bijection canonique entre l'ensemble des classes à S-isomorphisme près d'objets de C_S localement S-isomorphes à x et l'ensemble $H^1(E, A)$, qui applique la classe de x sur l'élément marqué.

(ii) Soit encore $u\colon A' \to A$ un morphisme de faisceaux de groupes sur E (qui fait donc opérer A' sur x). Pour tout A'-torseur P, la classe de $P \overset{A'}{\wedge} x$ est l'image par $u^{(1)}\colon H^1(A') \to H^1(A)$ de celle de P.

L'assertion (i) résulte de la proposition en notant que $H^1(E, A) = H^1(E_{/S}, A)$, puisque S est objet final de E. De même pour (ii), en utilisant de plus (2.3.5 (2)). La bijection de (i) est donc définie en associant à un $y \in \mathrm{Ob}(C_S)$ localement isomorphe à x la classe de $\mathbf{Isom}_S(x, y)$, qui est un A-torseur à droite sous $A = \mathbf{Aut}_S(x)$ opérant par composition des morphismes. La bijection inverse s'obtient en associant à un A-torseur P l'objet tordu $P \overset{A}{\wedge} x$, (2.3.3 et 2.3.5).

Corollaire 2.5.3. (Compatibilité.) Sous les hypothèses de (2.5.1), soit $m\colon C \to C'$ un morphisme de E-champs. Posons $y = m(x)$, $B = \mathbf{Aut}_S(y)$ et notons $u\colon A \to B$ le morphisme induit par m.

(i) Si $x' \in \mathrm{Ob}(C_S)$ est localement isomorphe à x, la classe de $m(x')$ est l'image de celle de x' par

$$u^{(1)}\colon H^1(A) \to H^1(B).$$

(ii) Si $x' \in \mathrm{Ob}(C_S)$ est localement isomorphe à x et si Q est un B-torseur, pour que la classe de Q soit celle de $m(x')$ il faut et il suffit qu'il existe un u-morphisme de torseurs $\mathbf{Isom}_S(x, x') \to Q$.

Bien entendu, (ii) est une conséquence triviale de (i), qui résulte du fait que l'on a un isomorphisme canonique de morphismes de champs, rendant commutatif le carré:

$$\begin{array}{ccc} C(x) & \xrightarrow{m'} & C'(y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{TORS}(E; A) & \xrightarrow[T]{} & \mathrm{TORS}(E; B), \end{array} \tag{1}$$

où m' est la restriction de $m\colon C \to C'$ aux gerbes engendrées par x et y où les flèches verticales sont les équivalences de (2.5.1 (1)), et où T est le foncteur extension du groupe structural. En effet, il suffit d'appliquer (2.2.2).

Corollaire 2.5.4. Sous les hypothèses de (2.5.1), soit $I\colon A \to \mathbf{Aut}(A)$ le morphisme de faisceaux de groupes défini par les automorphismes intérieurs. Si y est un objet de C_S localement isomorphe à x, le faisceau de groupes $\mathbf{Aut}_S(y)$ est localement isomorphe à $\mathbf{Aut}_S(x) = A$ et sa classe dans $H^1(\mathbf{Aut}(A))$ est l'image de celle de y par l'application induite par I

$$H^1(A) \to H^1(\mathbf{Aut}(A)).$$

En effet, il suffit d'appliquer le corollaire précédent au morphisme de champs

$$C^{\mathrm{cart}} \to \mathrm{FAGR}(E), \quad (x/S) \rightsquigarrow \mathbf{Aut}_S(x).$$

Bien entendu, on a mieux : posant $P = \mathbf{Isom}_S(x, y)$, le morphisme identique de P munit y d'une structure d'objet tordu de x par P, donc (2.3.8) $\mathbf{Aut}_S(y)$ d'une structure *de faisceau de groupes tordu de A par P* (A opérant sur lui-même par automorphismes intérieurs).

2.6. Changement d'origine

Proposition 2.6.1. Soient E un U-site, A un faisceau de groupes et P un A-torseur.

(i) On a une E-équivalence de gerbes

$$\Theta_P : \mathrm{TORS}(E, A) \to \mathrm{TORS}(E, \mathbf{ad}(P)) \tag{1}$$

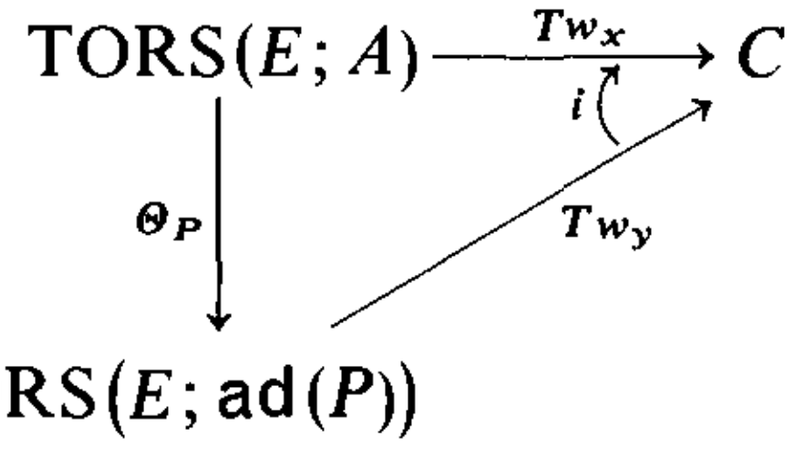
où $\Theta_P = Tw_{P^0}$ est le foncteur torsion (2.3.9 (1)) du $\mathbf{ad}(P)$-torseur à droite P^0 (1.5.5) sous l'action de A. Pour tout A-torseur X, on a

$$\Theta_P(X) = X \overset{A}{\wedge} P^0 \xrightarrow{\sim} \mathbf{Hom}_A(P, X) \quad (1.6.4). \tag{2}$$

(ii) Soient encore S un objet final de E, C un E-champ et (x, u) un S-A-objet de C (2.2.1). Posons

$$y = P \overset{A}{\wedge} x \quad (2.3.5). \tag{3}$$

On a un isomorphisme canonique de morphismes de champs i rendant commutatif le diagramme



où Tw_x (resp. Tw_y) est le foncteur torsion (2.3.9) de x (resp. y) sous l'action de A (resp. sous l'action de $\mathbf{ad}(P)$ définie par (2.3.2 (iii))).

D'après (2.3.9), Θ_P est défini par $\Theta_P(A_d) = P^0$ et par la condition d'induire l'identité sur A quand on identifie celui-ci au faisceau des A-automorphismes de A_d et au faisceau des $\mathbf{ad}(P)$-automorphismes de P^0. La formule (2) résulte de (2.3.9 (4)) (2.3.6) et (1.6.4). Par ailleurs, Tw_y est le foncteur torsion de y sous l'action de $\mathbf{ad}(P)$ (2.3.9). On a donc un isomorphisme $Tw_y(P^0) \approx P^0 \overset{\mathbf{ad}(P)}{\wedge} y \approx x$, les opérations de $A = \mathbf{Aut}_{\mathbf{ad}(P)}(P^0)$ sur x ainsi obtenues n'étant autres que les opérations données. On en

déduit que $Tw_y \cdot \Theta_P$ est un foncteur torsion de x sous l'action de A donc est canoniquement isomorphe à Tw_x (2.3.9 (i)). Il reste à montrer que Θ_P est une E-équivalence. On peut invoquer (II 1.4.5) car Θ_P est bicouvrant ou encore remarquer que

$$\Theta_{P0}\colon \mathrm{TORS}(E; \mathbf{ad}(P)) \to \mathrm{TORS}(E; A) \tag{4}$$

est quasi-inverse de Θ_P, qui résulte du corollaire suivant.

Corollaire 2.6.2. Soient E un U-site, (C, Q, B) et (B, P, A) deux bitorseurs sur E. On a un isomorphisme canonique α de morphismes de champs rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{TORS}(E; A) & \xrightarrow{\Theta_P} & \mathrm{TORS}(E, B) \\ & {\scriptstyle \Theta_R} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \Theta_Q} & \\ & \mathrm{TORS}(E, C) & \end{array} \qquad (\alpha) \tag{1}$$

où l'on a posé $R = Q \overset{B}{\wedge} P$.

Remplacer dans (2.6.1) le champ C par $\mathrm{TORS}(E; C)$.

Remarque 2.6.3. Soient A un faisceau de groupes et P un A-torseur. Désignons par

$$\theta_P\colon H^1(A) \xrightarrow{\sim} H^1({}^PA), \qquad {}^PA = \mathbf{ad}(P), \tag{1}$$

la bijection induite par Θ_P (2.6.1 (1)). L'image de la classe neutre est celle de P^0 et l'image de celle de P est la classe neutre (2.6.1 (2)). *Si* A *est abélien* il s'identifie canoniquement à $\mathbf{ad}(P)$ (1.5.7) et l'on a

$$0_P(q) = q - p, \qquad q \in H^1(A), \tag{2}$$

si p désigne la classe de P.

2.6.3.1. Si l'on part d'une classe $p \in H^1(A)$, le faisceau de groupes ${}^PA$, où P est un représentant de p, n'est défini qu'à isomorphisme non canonique près. Mais si $m\colon P \to Q$ est un A-isomorphisme l'isomorphisme adjoint $\mathbf{ad}(m)\colon \mathbf{ad}(P) \to \mathbf{ad}(Q)$ induit, par fonctorialité du H^1, une bijection $\mathsf{m}\colon H^1({}^PA) \xrightarrow{\sim} H^1({}^QA)$ *qui ne dépend pas de* m en vertu de (2.4.8); de plus on a

$$\mathsf{m} \cdot \theta_P = \theta_Q, \tag{3}$$

en vertu de (2.3.9 (ii)). Ceci autorise l'écriture

$$\theta_P\colon H^1(A) \to H^1({}^PA), \qquad p \in H^1(A), \tag{4}$$

pour la bijection (1), étant entendu que l'on identifie les $H^1({}^PA)$, pour les représentants P de p, grâce aux isomorphismes ci-dessus et que l'on note $H^1({}^pA)$ la valeur commune.

2.6.3.2. Soit $u\colon A \to B$ un morphisme de faisceaux de groupes et P un A-torseur. Soit encore

$$ {}^Pu\colon {}^PA \to {}^PB \tag{5}$$

le morphisme obtenu en tordant u par P sous l'action de A opérant par automorphismes intérieurs (2.3.3.1). On a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1(A) & \xrightarrow{u^{(1)}} & H^1(B) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \theta_P} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \theta_Q} \quad Q = P \overset{A}{\wedge} B \\ H^1({}^PA) & \xrightarrow[{}^Pu(1)]{} & H^1({}^PB). \end{array} \tag{6}$$

On rappelle (2.3.7) que l'on a identifié ${}^Pu$ au morphisme $\mathbf{ad}(m)\colon \mathbf{ad}(P) \to \mathbf{ad}(Q)$, où $m\colon P \to Q$, est le morphisme naturel, ce qui donne un sens à notre assertion. La commutativité résulte aux moindres frais de la commutativité à isomorphisme près du diagramme de morphisme de champs

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{TORS}(E; A) & \longrightarrow & \mathrm{TORS}(E; B) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \Theta_P} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Theta_Q} \\ \mathrm{TORS}(E; \mathbf{ad}(P)) & \longrightarrow & \mathrm{TORS}(E; \mathbf{ad}(Q)) \end{array} \tag{7}$$

[où les flèches horizontales désignent l'extension du groupe structural suivant u et ${}^Pu$] laquelle résulte à son tour de (2.3.10), en notant que l'on a $\mathrm{P}^{0\,\mathbf{ad}(P)}\!\wedge\, \mathbf{ad}(Q) = Q^0$, puisque $\mathbf{ad}(m)$ est précisément défini par la condition $m\colon P \to Q$ soit un $\mathbf{ad}(m)$-morphisme.

Corollaire 2.6.4. Soient E un U-site, C un E-champ, S un objet final de E et enfin x et y deux objets localement S-isomorphes de C_S. Posons

$$A = \mathbf{Aut}_S(x), \qquad B = \mathbf{Aut}_S(y), \qquad P = \mathbf{Isom}_S(x, y). \tag{1}$$

La composition des S-morphismes fait de P un B-A-bitorseur ce qui donne un isomorphisme canonique $B \approx {}^PA$. De plus, pour tout $z \in \mathrm{Ob}(C_S)$ localement S-isomorphe à x et y, on a

$$\theta_P(\xi) = \eta$$

où $\theta_P\colon H^1(A) \to H^1({}^PA)$ est la bijection de (2.6.3 (1)) et où $\xi \in H^1(A)$ (resp. $\eta \in H^1({}^PA)$) est la classe de z quand on prend x (resp. y) comme origine (2.5.2).

En effet, ξ (resp. η) est la classe du torseur $\mathbf{Isom}_S(x, z)$ (resp. $\mathbf{Isom}_S(y, z)$) et la composition des S-morphismes induit un accouplement

$$\mathbf{Isom}_S(x, z) \times \mathbf{Isom}_S(y, x) \to \mathbf{Isom}_S(y, z)$$

qui, compte tenu de l'isomorphisme évident $P^0 \approx \mathbf{Isom}_S(y, x)$, passe au quotient (1.3.1) et définit un isomorphisme

$$\mathbf{Isom}_S(x, z) \overset{A}{\wedge} P^0 \xrightarrow{\sim} \mathbf{Isom}_S(y, z)$$

qui prouve le corollaire par (2.6.1 (2)).

§3. La suite exacte en degré 1

3.1. Le premier opérateur cobord

Proposition 3.1.1. (Sections d'un quotient.) Soient E un site, A un faisceau de groupes, X un faisceau d'ensembles sur E et $m\colon X \times A \to X$ un morphisme faisant opérer A à droite sur X. Désignons par

$$q\colon X \dashrightarrow Y \quad (\text{donc } Y = X/A) \tag{1}$$

le conoyau du couple $\mathrm{pr}_1, m\colon X \times A \rightrightarrows X$.

(i) Le morphisme

$$X \times A \to X \times_Y X \tag{2}$$

de composantes pr_1 et m est un *épimorphisme*.

(i bis) Pour que deux sections s et t de X aient même image par $q\colon X \to Y$ il faut et il suffit que *localement* elles soient congrues modulo A.

(ii) Soit $\mathbf{P}$ le quotient de l'ensemble des couples (P, p), [où P est un A-espace homogène à droite (1.3.8) et $p\colon P \to X$ un *monomorphisme* compatible avec les opérations de A], par la relation «il existe un A-morphisme $f\colon P \to P'$ tel que $p' f = p$». On définit une bijection

$$H^0(E, Y) \xrightarrow{\sim} \mathbf{P} \tag{3}$$

en associant à toute section s de Y son *image inverse* par $q\colon X \to Y$. On définit la bijection inverse en associant à la classe de (P, p) *l'image* du composé $q\,p\colon X \to Y$.

3.1.1.1. Dans tout ce qui suit on travaille dans le topos $\tilde{E}$. Pour prouver (i), considérons l'image R du composé $X \times A \to X \times_Y X \to X \times X$. Il est immédiat que c'est une relation d'équivalence dans X. De plus, le quotient X/R est Y car $X \times A \to R$ est un épimorphisme. Il faut montrer que le monomorphisme $R \to X \times_Y X$ est un isomorphisme. Or, puisque $\tilde{E}$ est

un topos, Y est également le quotient de X par la relation d'équivalence définie par $X \times_Y X$. Puisque $\tilde{E}$ est un topos, les quotients de X correspondent «biunivoquement» aux relations d'équivalence et ceci prouve (i).

3.1.1.2. On en déduit que X est un espace *pseudo-homogène sous A si, et seulement si, $Y = X/A$ est un sous-objet de l'objet final e de E*, (à savoir l'image de $X \to e$). En effet, par définition (1.3.8) et par (i), la première condition signifie que $X \times_Y X = X \times X$, qui équivaut à la seconde par l'argument déjà invoqué. De même, *X est un espace homogène si et seulement si $X/A \approx e$.*

3.1.1.3. Bien entendu (i bis) résulte immédiatement de (i). De même, de (i) et du fait que, dans un topos les épimorphismes sont universels on déduit que *si $s: e \to Y$ est une section de Y, l'image inverse $q^{-1}(s)$ de s par q: $X \to Y$ est un A-espace homogène.* Inversement, si (P, p) est un couple comme dans (ii), le composé $q\,p$: $P \to Y$ se factorise par $P/A \approx e$ car p est un A-morphisme. D'où une section $s: e \to Y$ de Y. Il est immédiat que s est une image de $q\,p$, ce qui achève de donner un sens à (ii). Il reste à le démontrer ce qui est aisé.

Proposition 3.1.2. Soit A un faisceau de groupes opérant *librement* (1.1.5) sur un faisceau d'ensembles X et soit $Y = X/A$ le quotient de X par A.

(i) Le morphisme $X \times A \to X \times_Y X$ (3.1.1 (2)) est un *isomorphisme.*

(i bis) Le *préfaisceau* quotient X/A est séparé.

(i ter) Le groupe $H^0(E, A)$ opère librement dans $H^0(E, X)$ et l'application naturelle

$$H^0(E, X)/H^0(E, A) \to H^0(E, X/A) \tag{1}$$

est *injective.*

(ii) On obtient une bijection entre $H^0(E, Y)$ et l'ensemble des classes de sous-A-torseurs de X en associant à $s \in H^0(E, Y)$ son image inverse par q: $X \to Y$.

3.1.2.1. Par définition, $X \times A \to X \times_Y X$ est un monomorphisme et par (3.1.1 (i)) c'est un épimorphisme, d'où (i). On en déduit immédiatement (i ter) et même, par localisation, que le morphisme naturel $Y' \to Y$, où Y' est le *préfaisceau* quotient de X par A, est un monomorphisme, ce qui prouve (i bis). Enfin (ii) résulte de (3.1.1 (ii)) car tout sous-espace homogène de X est un A-torseur, car A y opère librement.

3.1.2.2. Si P est un A-torseur, p: $P \to X$ un A-morphisme (donc un monomorphisme) et s: $e \to Y$ une section de $Y = X/A$, pour que P soit

l'image inverse de s il faut et il suffit que le carré

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{q} & Y \\ \uparrow{\scriptstyle p} & & \uparrow{\scriptstyle s} \\ P & \longrightarrow & e \end{array}$$

soit *commutatif*, auquel cas il est *cartésien*.

Définition 3.1.3. Soit A un faisceau de groupes opérant librement sur un faisceau d'ensembles X. On appelle *application cobord* l'application

$$d\colon\ H^0(E, X/A) \to H^1(E, A) \tag{1}$$

obtenue en associant à toute section de X/A la classe de son image inverse par la projection $X \to X/A$.

3.1.3.1. Soient encore $u\colon A \to A'$ un morphisme de faisceaux de groupes, X' un faisceau d'ensembles où A' opère librement et $m\colon X \to X'$ un u-morphisme. Le diagramme ci-dessous est *commutatif*

$$\begin{array}{ccc} H^0(X/A) & \xrightarrow{d} & H^1(A) \\ {\scriptstyle n^{(0)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u^{(1)}} \\ H^0(X'/A') & \xrightarrow[d']{} & H^1(A') \end{array} \tag{2}$$

où d et d' sont les cobords et $n\colon X/A \to X'/A'$ le morphisme déduit de m par passage au quotient. Cela est clair.

Proposition 3.1.4. Sous les hypothèses de (3.1.3), soit $q\colon X \to Y$, $Y = X/A$, la projection.

(i) On a des applications

$$H^0(X) \xrightarrow{q^{(0)}} H^0(Y) \xrightarrow{d} H^1(A). \tag{1}$$

Pour qu'un élément x de $H^0(Y)$ appartienne à l'image de $q^{(0)}$ il faut et il suffit que $d(x)$ soit la classe neutre.

(ii) Soit encore P un A-torseur et soit $p \in H^1(A)$ sa classe. Pour que p appartienne à l'image de d, il faut et il suffit que $X \overset{A}{\wedge} P^0$ ait une section.

3.1.4.1. L'assertion (i) résulte immédiatement de (3.1.2.2).

3.1.4.2. D'après (3.1.2 (ii)), pour que p appartienne à l'image du cobord il faut et il suffit qu'il existe un A-morphisme $P \to X$. Par passage aux sections, l'isomorphisme $\mathsf{Hom}_A(P, X) \approx X \overset{A}{\wedge} P^0$ de (1.6.1) prouve donc (ii).

3.1.4.3. On peut préciser (ii) en tordant par P le morphisme $q: X \to Y$. Soit $q': X' \to Y'$ le morphisme ainsi obtenu ($X' = X \overset{A}{\wedge} P^0$, $Y' = Y \overset{A}{\wedge} P^0$). Puisque A opère trivialement sur Y, on a un isomorphisme canonique $i: Y \xrightarrow{\sim} Y'$ (2.3.3.4). Il est immédiat que $A' = \mathbf{ad}(P)$ opère *librement* sur X' et que $q': X' \to Y'$ est un quotient X'/A', car il en est ainsi localement. On a donc un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} H^0(X) & \xrightarrow{q^{(0)}} & H^0(Y) & \xrightarrow{d} & H^1(A) \\ \downarrow{\scriptstyle i^{(0)}} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta_P} \\ H^0(X') & \xrightarrow[q'^{(0)}]{} & H^0(Y') & \xrightarrow[d']{} & H^1(A') \end{array} \qquad (2)$$

où la ligne du bas est relative à $Y' \approx X'/A'$ et où θ_P est la bijection de (2.6.3 (1)). Ce diagramme est *commutatif*. En effet, soit $s: e \to Y$ une section de Y et Q son image inverse par $q: X \to Y$. Par (3.1.2.2) on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{q} & Y \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s} \\ Q & \longrightarrow & e \end{array}$$

où tous les morphismes sont des A-morphismes puisque A opère trivialement sur Y et e. Tordant ce carré par P (2.3.4) (2.3.6), on obtient un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{q'} & Y' \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s'} \\ Q' & \longrightarrow & e' \end{array}$$

et il est immédiat que $s' = i(s)$, ce qui donne la conclusion par (3.1.2.2).

3.2. Cas d'un sous-groupe

Définition 3.2.0. Soient $u: A \to B$ un morphisme de faisceaux de groupes et Q un B-torseur. On appelle *relèvement* de Q à A un couple (P, p), où P est un A-torseur et $p: P \to Q$ un u-morphisme. Si (P, p) et (P', p') sont deux relèvements de Q, un morphisme $(P, p) \to (P', p')$ est un A-morphisme $f: P \to P'$ tel que $p' f = p$.

On notera que tout morphisme de relèvements est un *isomorphisme*. Si $u: A \to B$ est un *monomorphisme*, deux relèvements isomorphes le sont canoniquement car, si (P, p) est un relèvement de Q, alors p est un monomorphisme, puisqu'il en est ainsi localement.

Proposition 3.2.1. Soit $u: A \to B$ un monomorphisme de faisceaux de groupes.

(i) La catégorie $\mathbf{Tors}(E; A)$ des A-torseurs sur E est équivalente à la catégorie des couples (Q, q), où Q est un B-torseur et où $q \in H^0(E, Q/A)$.

(ii) Soit Q un B-torseur. L'ensemble $H^0(E, Q/A)$ est isomorphe à l'ensemble des classes à isomorphisme près de relèvements de Q à A.

3.2.1.1. Soit P un A-torseur. Posons ${}^uP = P \overset{A}{\wedge} B$ et soit $Pu\colon P \to {}^uP$ le morphisme naturel (1.3.6). L'image du composé $P \to {}^uP \dashrightarrow {}^uP/A$ est une section p de ${}^uP/A$ (3.1.1.3). On définit donc un foncteur en associant à tout A-torseur P le couple $({}^uP, p)$. On obtient ainsi une équivalence de catégories car P s'identifie à l'image inverse de p par la projection ${}^uP \to {}^uP/A$, ce qui prouve (i).

3.2.1.2. L'assertion (ii) résulte de (3.1.2 (ii)), car si P est un A-torseur, la donnée d'un u-morphisme $p\colon P \dashrightarrow Q$ (qui fait de (P, p) un *relèvement* de Q à A) équivaut d'après (1.4.6) à celle d'un B-isomorphisme $P \overset{A}{\wedge} B \xrightarrow{\sim} Q$.

Proposition 3.2.2. Soit $u\colon A \dashrightarrow B$ un monomorphisme de faisceaux de groupes et soit $v\colon B \to B/A$ la projection sur B. La suite d'ensembles pointés

$$1 \to H^0(A) \xrightarrow{u^{(0)}} H^0(B) \xrightarrow{v^{(0)}} H^0(B/A) \xrightarrow{d} H^1(A) \xrightarrow{u^{(1)}} H^1(B) \quad (1)$$

est exacte.

3.2.2.1. Dans (1), le symbole 1 désigne l'ensemble pointé à un élément. Ceci dit, la proposition résulte de (3.1.2 (i ter)) et (3.1.4). On rappelle à ce propos qu'*une suite de morphismes d'ensembles pointés* $L \xrightarrow{a} M \xrightarrow{b} N$ *est dite exacte* si l'image inverse par b de l'élément marqué de N est l'image de a. De plus, puisque le foncteur H^0 commute aux limites projectives, $v^{(0)}$ est un monomorphisme de groupes et, par (3.1.2 (i ter)), $v^{(0)}$ induit une *injection* $H^0(B)/H^0(A) \subset H^0(B/A)$.

Corollaire 3.2.3. (Exactitude en $H^0(B/A)$.) Par translations à gauche, $H^0(B)$ opère sur $H^0(B/A)$. Le cobord d induit une *injection*

$$H^0(B) \backslash H^0(B/A) \to H^1(A). \quad (1)$$

De plus, l'image de (1) est l'ensemble des $p \in H^1(A)$ tels que $u^{(1)}(p)$ soit la classe neutre.

En effet, soient x et y deux éléments de $H^0(B/A)$ et soient X et Y leurs images inverses par $v\colon B \to B/A$. Désignons par T le sous-préfaisceau de B défini par

$$T(S) = \{b \in B(S),\ v(S)(b)\, x^S = y^S\}, \qquad S \in \mathrm{Ob}(E), \quad (2)$$

où x^S et y^S désignent les restrictions de x et y à S. En fait T est un faisceau et les translations à gauche définissent un morphisme

$$T \to \mathbf{Isom}_A(X, Y), \qquad t \mapsto (x \mapsto t\,x). \tag{3}$$

Celui-ci est un *isomorphisme* comme on voit en localisant et en supposant que X a une section. Il en résulte que (1) est injective et la proposition résulte de (3.2.2).

Corollaire 3.2.4. (Exactitude en $H^1(A)$.) Soient P un A-torseur, $p \in H^1(A)$ sa classe et ${}^P u\colon {}^P A \to {}^P B$ le morphisme de faisceaux de groupes obtenu en tordant $u\colon A \to B$ par P sous l'action de A opérant par automorphismes intérieurs (2.3.7). On a une *bijection*

$$H^0({}^P B) \backslash H^0({}^P B/{}^P A) \xrightarrow{\sim} \{p' \in H^1(A) \mid u^{(1)}(p') = u^{(1)}(p)\}. \tag{1}$$

En effet, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(B) \to & H^0(B/A) & \xrightarrow{d} & H^1(A) & \longrightarrow & H^1(B) \\ & & & \downarrow{\scriptstyle \theta_P} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_Q} \\ H^0({}^P B) \to & H^0({}^P B/{}^P A) & \xrightarrow[d']{} & H^1({}^P A) & \longrightarrow & H^1({}^P B), \qquad Q = P \overset{A}{\wedge} B, \end{array} \tag{2}$$

où la ligne du bas est définie car ${}^P u$ est un monomorphisme (puisqu'il est «égal» à u si P est trivial) et où le carré de droite est défini par (2.6.3.2 (6)). Il reste à appliquer le corollaire précédent.

Remarque 3.2.5. (Exactitude en $H^1(B)$.) Soit Q un B-torseur. D'après (3.2.1 (ii)), pour que l'on puisse restreindre à A le groupe structural de Q il faut et il suffit que Q/A ait une section. On notera que Q/A est un espace homogène à gauche sous $\mathbf{ad}(Q)$ qui peut s'obtenir de la façon suivante. Faisant opérer B sur B/A par translations à gauche, on peut tordre ce dernier par Q. On trouve évidemment un isomorphisme $Q/A \approx {}^Q(B/A)$, les opérations de $\mathbf{ad}(Q)$ sur ${}^Q(B/A)$ obtenues par transport de structure étant les opérations adjointes (2.3.3.1) (2.3.6).

3.3. Cas d'un sous-groupe invariant

3.3.0. On fixe dans tout ce numéro une suite exacte de faisceaux de groupes

$$1 \to A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \to 1. \tag{*}$$

On entend par là que u et v sont des morphismes de faisceaux de groupes, que u est un noyau de v et que le morphisme de faisceaux d'ensembles sous-jacents à v est un épimorphisme, ce qui entraîne que v identifie C au quotient de B par A.

Proposition 3.3.1. Soit $1 \to A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \to 1$ une suite exacte de faisceaux de groupes.

(i) La suite d'ensembles pointés

$$1 \to H^0(A) \xrightarrow{u^{(0)}} H^0(B) \xrightarrow{v^{(0)}} H^0(C) \xrightarrow{d} H^1(A) \xrightarrow{u^{(1)}} H^1(B) \xrightarrow{v^{(1)}} H^1(C) \quad (1)$$

est exacte.

(ii) $v^{(0)}$ est un morphisme de groupes dont le noyau est $u^{(0)}$.

L'assertion (i) résulte de (3.2.2) et (3.2.4). L'assertion (ii) résulte de (i) et du fait que le foncteur H^0 commute aux limites projectives.

Remarque 3.3.2. Soit $c \in H^0(C)$. L'image inverse X de c par $v: B \to C$ est ici un A-bitorseur, ce qui permet de définir

$$p \times c, \qquad p \in H^1(A),\ c \in H^0(C), \quad (1)$$

comme la classe du produit contracté $P \overset{A}{\wedge} X$, où P est un représentant de p. Si $c' \in H^0(C)$ et si X' est son image inverse par $v: B \to C$, la loi de composition de B induit un morphisme $X \times X' \to X''$, où X'' est l'image inverse de $c\,c'$. Il est immédiat que ce morphisme induit un isomorphisme de A-bitorseurs $X \overset{A}{\wedge} X' \xrightarrow{\sim} X''$, d'où l'on déduit que (1) fait opérer le groupe $H^0(C)$ à droite sur $H^1(A)$, ce qui va permettre d'améliorer la proposition précédente.

Proposition 3.3.3. (Opérations de $H^0(C)$ sur $H^1(A)$.) Sous les hypothèses de 3.3.1, le groupe $H^0(C)$ opère à droite sur $H^1(A)$ par la formule (3.3.2 (1)).

(i) Le cobord est compatible avec ces opérations, autrement dit on a

$$d(c\,c') = d(c) \times c', \qquad c, c' \in H^0(C). \quad (1)$$

(ii) Par automorphismes intérieurs, B opère sur A donc, par fonctorialité, $H^0(B)$ opère sur $H^1(A)$, opérations désignées par

$$b(p) = H^1(\mathrm{Int}(b))(p), \qquad b \in H^0(B),\ p \in H^1(A), \quad (2)$$

et qui vérifient

$$b(p) = p \times c, \qquad c = v^{(0)}(b^{-1}). \quad (3)$$

(iii) (Exactitude en $H^0(C)$.) Pour tout $p \in H^1(A)$, le stabilisateur de p dans $H^0(C)$ est l'image du morphisme $v'^{(0)}: H^0(B') \to H^0(C)$ où $v': B' \to C$ est le morphisme de faisceaux de groupes abtenu en tordant $v: B \to C$ par un représentant P de p et en identifiant ${}^P C$ à C par (2.3.3.4) puisque A opère trivialement sur C.

(iv) (Exactitude en $H^1(A)$.) L'application $u^{(1)}$ induit une *injection*

$$H^1(A)/H^0(C) \to H^1(B). \tag{4}$$

3.3.3.1. Si x, y et z sont trois éléments de $H^0(C)$ vérifiant $z = x\,y$, et si X, Y et Z sont leurs images inverses par $v\colon B \to C$, la loi de composition de B induit un A-isomorphisme $X \overset{A}{\wedge} Y \to Z$, d'où, pour tout A-torseur P, un A-isomorphisme $P \overset{A}{\wedge} X \overset{A}{\wedge} Y \to P \overset{A}{\wedge} Z$, ce qui prouve à la fois que $H^0(C)$ opère sur $H^1(A)$ et la formule (1).

3.3.3.2. Prouvons (3). L'image inverse de c par $v\colon B \to C$ est $X = A\,b^{-1} = b^{-1}A$. Par ailleurs, si P est un représentant de p, on définit un représentant P' de $b(p)$ en faisant agir A sur P par

$$P \times A \to P, \qquad (p, a) \mapsto p\,b^{-1}\,a\,b, \qquad (2.4.7).$$

Il reste à vérifier que le composé de

$$P \to P \times X, \qquad p \mapsto (p, b^{-1}),$$

et de la projection $P \times X \to P \overset{A}{\wedge} X$ définit un A-morphisme $P' \to P \overset{A}{\wedge} X$, ce qui est immédiat.

Pour prouver (iii) et (iv) nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme 3.3.4. Sous les hypothèses de (3.3.1), soient P un A-torseur et $A' \xrightarrow{u'} B' \xrightarrow{v'} C$ la suite de morphismes de faisceaux de groupes obtenue en tordant $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ par P. On a un diagramme commutatif, où $Q = P \overset{A}{\wedge} B$ et où θ_P et θ_Q sont définis par (2.6.3 (1))

$$\begin{array}{ccccccccc}
H^0(B) & \xrightarrow{v^{(0)}} & H^0(C) & \xrightarrow{d} & H^1(A) & \xrightarrow{u^{(1)}} & H^1(B) & \xrightarrow{v^{(1)}} & H^1(C) \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle \theta_P} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_Q} & & \Vert{\scriptstyle \mathrm{id}} \\
H^0(B') & \xrightarrow{v'^{(0)}} & H^0(C) & \xrightarrow{d'} & H^1(A') & \xrightarrow{u'^{(1)}} & H^1(B') & \xrightarrow{v'^{(1)}} & H^1(C).
\end{array} \tag{1}$$

De plus, si p désigne la classe de P, on a

$$\theta_P(p \times c) = d'(c), \qquad c \in H^0(C). \tag{2}$$

3.3.4.1. Puisque A opère trivialement sur C, on identifie C' à C par (2.3.3.4). Si on calcule la suite tordue par (2.3.7), ceci signifie que u' est le morphisme $\mathbf{ad}(m)$, où $m\colon P \to Q = P \overset{A}{\wedge} B$ est le morphisme naturel et que $v' = \mathbf{ad}(n)$, où $n\colon Q \to C_d$ est le v-morphisme défini par la condition que le composé $n\,m\colon P \to C_d$ ait pour image la section unité. Ceci dit, la suite $1 \to A' \to B' \to C \to 1$ est exacte. En effet, on peut localiser, supposer P trivial et on trouve alors la suite donnée. Ceci définit d' dans

la ligne du bas de (1). La commutativité de (1) résulte de (2.6.3.2 (6)) car θ_{C_d} est l'identité d'après (2.6.1 (2)).

3.3.4.2. On notera que (1) ne reste pas nécessairement commutatif si l'on y rajoute la flèche identique de $H^0(C)$. C'est ce qu'indique la formule (2) que nous allons démontrer. Pour cela, désignant par X et X' les images inverses de c par v et v', il nous suffira (2.6.1 (4)) de trouver un A-morphisme

$$P \overset{A}{\wedge} X \to X' \overset{A'}{\wedge} P. \tag{3}$$

Soient $P \xrightarrow{m} Q \xrightarrow{n} C_d$ les morphismes utilisés dans (3.3.4.1) pour décrire la suite exacte tordue. Le morphisme de faisceaux $P \times X \to Q$, $(p, x) \rightsquigarrow m(p)\, x$, définit un u-morphisme $f\colon P \overset{A}{\wedge} X \to Q$. De même, le morphisme $X' \times P \to Q$, $(x, p) \mapsto x\, m(p)$, définit un u-morphisme $g\colon X' \overset{A'}{\wedge} P \to Q$. D'après (3.2.1 (ii)), il suffit de démontrer que les composés $n f$ et $n g$ (qui «sont» des sections de C_d) sont égaux. On vérifie qu'ils sont égaux à c, ce qui prouve (2).

3.3.4.3. Prouvons maintenant (3.3.3 (iii)). Par la formule (2), la relation $p \times c = p$ signifie que $d'(c)$ est la classe neutre, ce qui, par (3.3.1 (i)) appliqué à $C = B'/A'$, équivaut à $c = v'^{(0)}(b)$, $b \in H^0(B)$. On prouve de même (3.3.3 (iv)), en utilisant de plus la commutativité de (1).

Corollaire 3.3.5. (Exactitude en $H^1(B)$.) Sous les hypothèses de (3.3.1), soit Q un B-torseur. Désignons par $1 \to A' \to B' \to C' \to 1$ la suite exacte obtenue en tordant par Q la suite exacte donnée. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H^1(A) & \xrightarrow{u^{(1)}} & H^1(B) & \xrightarrow{v^{(1)}} & H^1(C) \\ & & \downarrow{\scriptstyle \theta_Q} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_R} \\ H^1(A') & \xrightarrow[u'^{(1)}]{} & H^1(B') & \xrightarrow[v'^{(1)}]{} & H^1(C') \end{array} \tag{1}$$

où $R = Q \overset{B}{\wedge} C$ et où θ_P et θ_Q sont définis par (2.6.3 (1)).

3.3.5.1. Rappelons (2.3.7) que l'on calcule la suite tordue en prenant $v' = \mathbf{ad}(n)$, où $n\colon Q \to R = Q \overset{B}{\wedge} C$ est le morphisme naturel. La suite tordue devant être exacte par un raisonnement déjà vu, on peut prendre pour $u'\colon A' \to B'$ le noyau de $v'\colon B' \to C'$. Ceci dit, l'énoncé ne fait que reprendre (2.6.3.2 (6)) et permet de décrire les fibres de l'application $v^{(1)}$.

3.4. Cas d'un sous-groupe abélien ou central

Proposition 3.4.1. Soit $1 \to A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \to 1$ une suite exacte de faisceaux de groupes telle que *A soit abélien.*

(i) C opère sur A grâce aux automorphismes intérieurs de B, donc, par fonctorialité, le groupe $H^0(C)$ opère sur $H^1(A)$ par automorphismes de groupe, opérations notées

$$c(p), \quad c\in H^0(C),\ p\in H^1(A), \tag{1}$$

et reliées à celles de (3.3.2 (1)) par

$$p\times c=c^{-1}(p)+d(c), \quad c\in H^0(C),\ p\in H^1(A), \tag{2}$$

le groupe $H^1(A)$ étant noté additivement.

(ii) Le cobord $d\colon H^0(C)\to H^1(A)$ est *un morphisme croisé*, autrement dit

$$d(c\,c')=c'^{-1}(d(c))+d(c'), \quad c, c'\in H^0(C). \tag{3}$$

La formule (3), qui résulte de (2) et de (3.3.3 (1)), montre que *le cobord n'est pas nécessairement un morphisme de groupes*. Prouvons (2) et pour cela choisissons un représentant P et p et désignons par X l'image inverse de c par $v\colon B\to C$. D'après (2.4.7), $c^{-1}(p)$ est la classe du A-torseur obtenu en faisant opérer A sur P par

$$P\times A\to P, \quad (\pi, a)\mapsto \pi\, I(a), \tag{4}$$

où I est l'automorphisme de A défini par c. D'après (2.4.5), $c^{-1}(p)+d(c)$ est donc la classe du quotient de $P\times X$ par A opérant par

$$P\times X\times A\to P\times X, \quad (\pi, x, a)\mapsto (\pi\, I(a), x\, u(a^{-1})), \tag{5}$$

muni des opérations de A obtenues par passage au quotient à partir de

$$P\times X\times A\to P\times X, \quad (\pi, x, a)\mapsto (\pi, x\, u(a)). \tag{6}$$

Par ailleurs, $p\times c$ est la classe du quotient de $P\times X$ par A opérant par

$$P\times X\times A\to P\times X, \quad (\pi, x, a)\mapsto (\pi\, a, u(a^{-1})\, x), \tag{7}$$

muni des opérations de A obtenues par passage au quotient à partir de celles de (6). On conclut en notant que (5) se déduit de (7) par l'automorphisme I de A car, par définition de X, on a

$$u(I(a))=x\, u(a)\, x^{-1}.$$

Corollaire 3.4.2. Sous les hypothèses de (3.4.1), si P est un A-torseur, la formule (3.3.4 (2)) devient (avec les mêmes notations)

$$d(c)-d'(c)=p-c^{-1}(p), \quad p\in H^1(A),\ c\in H^0(C), \tag{1}$$

où p est le classe de p.

En effet, dans ces cas, on a (2.6.3 (2))

$$\theta_P(q)=q-p, \quad \theta_P\colon H^1(A)\xrightarrow{\sim}H^1(A), \tag{2}$$

ce qui prouve (1) par (3.4.1 (2)) et (3.3.4 (2)).

Proposition 3.4.3. Soit $1\to A\xrightarrow{u}B\xrightarrow{v}C\to 1$ une suite exacte de faisceaux de groupes telle que A soit *central.*

(i) La suite

$$1\to H^0(A)\to H^0(B)\to H^0(C)\xrightarrow{d}H^1(A) \tag{1}$$

est une suite exacte de groupes.

(ii) On a

$$p\times c=p+d(c), \quad p\in H^1(A),\ c\in H^0(C), \tag{2}$$

où $p\times c$ est défini par (3.3.2 (1)).

(iii) L'application $v^{(1)}\colon H^1(A)\to H^1(B)$ induit une *injection* du groupe quotient $H^1(A)/H^0(C)$ dans $H^1(B)$.

Par (3.4.1 (3)), le cobord est un morphisme de groupes, d'où (i), par (3.2.2). On a (ii) par (3.4.1 (2)), d'où (iii) par (3.3.3 (iv)).

Remarque 3.4.4. Supposant encore que A est *central* dans B, on a pour tout B-torseur Q, un morphisme de faisceaux de groupes

$$u'\colon A\to \mathbf{ad}(Q), \quad u'(a)(q)=q\,u(a), \tag{1}$$

qui fait opérer A dans Q par B-automorphismes. Ceci permet, pour tout A-torseur P, de définir le produit contracté $P\overset{A}{\wedge}Q$, lequel est un B-torseur de façon naturelle. On notera

$$p\cdot q, \quad p\in H^1(A),\ q\in H^1(B), \tag{2}$$

la classe de $P\overset{A}{\wedge}Q$ si p et q désignent celles de P et Q.

3.4.4.1. Le groupe B opère par automorphismes intérieurs sur la suite $A\xrightarrow{u}B\xrightarrow{v}C$. En tordant celle-ci par Q on trouve une suite exacte

$$1\to A\xrightarrow{u'}B'\xrightarrow{v'}C'\to 1 \tag{3}$$

car B opère trivialement sur A. Il est aisé de vérifier que si l'on identifie B' à $\mathbf{ad}(Q)$ comme il est dit dans (2.3.7) *le morphisme u' de* (3) *s'identifie à celui de* (1).

3.4.4.2. Puisque A est central, C opère sur B par automorphismes intérieurs, donc, par fonctorialité, $H^0(C)$ opère à gauche sur $H^1(B)$,

opérations notées

$$c(q), \quad c\in H^0(c),\ q\in H^1(B). \tag{4}$$

Proposition 3.4.5. (Opérations de $H^1(A)$ sur $H^1(B)$.) Supposons A central dans B.

(i) Par (3.4.4 (2)), le groupe $H^1(A)$ opère dans $H^1(B)$ en respectant le point marqué et on a

$$u^{(1)}(p+q)=p\cdot u^{(1)}(q), \quad p,q\in H^1(A), \tag{1}$$

$$u^{(1)}(p)=p\cdot 1, \quad p\in H^1(A), \tag{2}$$

où 1 est l'élément marqué de $H^1(A)$ et

$$d(c)\cdot q=c(q), \quad c\in H^0(C),\ q\in H^1(B), \tag{3}$$

cf. (3.4.4 (4)).

(ii) Soient Q un B torseur et $q\in H^1(B)$ sa classe. On a

$$u'^{(1)}(p)=\theta_q(p\cdot q), \quad p\in H^1(A), \tag{4}$$

où $u'\colon A\to \mathbf{ad}(Q)$ est le morphisme de (3.4.4 (1) et (3)) et où $\theta_q\colon H^1(B)\to H^1(\mathbf{ad}(Q))$ est la bijection de (2.6.3 (1)).

(iii) Sous les hypothèses de (ii), le stabilisateur de q dans $H^1(A)$ est l'image du cobord $d'\colon H^0(C')\to H^1(A)$ attaché à la suite exacte (3.4.4 (3)) obtenue en tordant par Q la suite donnée.

(iv) L'application $v^{(1)}\colon H^1(B)\to H^1(C)$ induit *une injection*

$$H^1(A)\backslash H^1(B)\to H^1(C). \tag{5}$$

3.4.5.1. L'associativité du produit contracté montre que $(p,q)\mapsto p\cdot q$ fait opérer $H^1(A)$ sur $H^1(B)$ et aussi la formule (1); de celle-ci on déduit (2). Pour prouver (3), choisissons un représentant Q de q et désignons par X l'image inverse de c par $v\colon B\to C$. Le morphisme $X\times Q\to Q$, $(x,\kappa)\mapsto \kappa x$, passe au quotient, car A est central, et définit un morphisme $X\overset{A}{\wedge} Q\to Q$. Par définition de X, ce dernier est un I-morphisme, où $I\colon B\to B$ est l'automorphisme défini par c^{-1}, ce qui achève de prouver (i).

3.4.5.2. Prouvons (ii). Soit P un représentant de p. Il suffit de montrer que l'on a un B'-isomorphisme $P\overset{A}{\wedge} B'\approx (P\overset{A}{\wedge} Q)\overset{B}{\wedge} Q^0$, où Q^0 est l'opposé de Q. Ceci résulte de l'associativité du produit contracté et du fait que les morphismes (1) et (3) de (3.4.4) sont égaux (cf. supra).

3.4.5.3. Par torsion par Q (cf. 3.3.5), les assertions (iii) et (iv) résultent de l'exactitude de la suite (3.3.1 (1)) attachée à $A\to B'\to C'$. Nous caractériserons au chapitre suivant l'image du morphisme $H^1(B)\to H^1(C)$.

3.5. Effaçabilité; cohomologie abélienne

Proposition 3.5.1. (Effaçabilité.) Soient T un U-topos, A un groupe (non nécessairement commutatif) de T et P un A-torseur. Il existe un monomorphisme de groupes de T, $u\colon A \to B$, tel que $P \overset{A}{\wedge} B$ soit trivial.

3.5.1.1. Soit $\mathsf{S} = \{S_i \to e\}$, $i \in I$, $I \in U$, une famille de flèches de T qui couvre l'objet final e de T. A tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{T})$ associons le préfaisceau d'ensembles sur T

$$X'(Y) = \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}(Y_i, X), \qquad Y_i = Y \times S_i. \tag{1}$$

C'est un U-faisceau sur T; désignons par

$$\mathsf{C}^0(\mathsf{S}; X) \tag{2}$$

l'objet de T qui le représente. Le morphisme évident

$$r(X)\colon\ X \to \mathsf{C}^0(\mathsf{S}; X) \tag{3}$$

est un monomorphisme car S est *couvrante*. De plus, $\mathsf{C}^0(\mathsf{S}; *)$ est un foncteur de T dans T qui commute aux limites projectives; donc $\mathsf{C}^0(\mathsf{S}; A)$ est un groupe de T et $\mathsf{C}^0(\mathsf{S}; P)$ est un $\mathsf{C}^0(\mathsf{S}; A)$-*pseudo-torseur*. Par ailleurs, $r(*)$ est un morphisme de foncteurs, donc $r(A)$ est un morphisme de groupes et $r(P)$ un $r(A)$-morphisme. D'après (1.4.6 (iii)), $\mathsf{C}^0(\mathsf{S}; P)$ est donc déduit de P par extension à $\mathsf{C}^0(\mathsf{S}; A)$ de son groupe structural: c'est donc un torseur.

3.5.1.2. En vertu de $\mathsf{C}^0(\mathsf{S}; P)(e) = \prod_{i \in I} P(S_i)$, il est clair que $\mathsf{C}^0(\mathsf{S}; P)$ *est trivial si, et seulement si, les* $S_i \to e$ trivialisent P, d'où la proposition.

Proposition 3.5.3. (Effaçabilité.) Soit T un U-topos admettant suffisamment de foncteurs fibres, soit

$$\mathsf{x}^*\colon\ \mathsf{T} \to \mathsf{X}, \qquad \mathsf{X} = \prod_{x \in X} \mathsf{U}\text{-ens}, \tag{1}$$

le foncteur produit de ceux-ci (0 3.13) et soit $\mathsf{x}_*\colon \mathsf{X} \to \mathsf{T}$ l'adjoint à droite de celui-ci (foncteur image directe). Pour tout groupe non nécessairement commutatif A de T, le morphisme d'adjonction $A \to \mathsf{x}_* \mathsf{x}^*(A)$ est un monomorphisme de groupes de T et l'ensemble $H^1(\mathsf{T}, \mathsf{x}_* \mathsf{x}^*(A))$ est réduit à son point marqué.

3.5.3.1. Par définition, x^* est conservatif, donc $F \to \mathsf{x}_* \mathsf{x}^*(F)$ est un monomorphisme pour tout $F \in \mathrm{Ob}(\mathsf{T})$, (0 3.9 (ii)). Par ailleurs, pour tout groupe G de X, on a $H^1(\mathsf{X}, G) = 0$ car X est équivalente au topos des

U-préfaisceaux d'ensembles sur la catégorie *discrète* associée à l'ensemble X des foncteurs fibres. Par (V 3.1.3) ci-dessous, on a

$$H^1(\mathsf{T}, \mathsf{x}_*(G)) \subset H^1(\mathsf{X}, G) = \{0\}$$

ce qui achève la démonstration.

Remarque 3.5.4. (Cohomologie abélienne.) Soient E un U-site et $\tilde{E}^{ab}$ la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur E. D'après [SGA 4 V §5.2.1], tout objet de $\tilde{E}^{ab}$ admet un effacement injectif et l'on peut définir les dérivés droits

$$H^i_\bullet(E, *), \qquad i \in \mathcal{N}, \tag{1}$$

du foncteur $H^0(E, *)\colon \tilde{E}^{ab} \to \mathsf{U}-ab$ (2.4.1 (1)). Par ailleurs, d'après (2.4.5), la restriction à $\tilde{E}^{ab}$ du foncteur $H^1(E, *)$ défini «géométriquement» par (2.4.2) est un foncteur additif et d'après (3.1.3.1), (3.4.3) et (3.3.1 (i)) les opérateurs cobords munissent le couple (H^0, H^1) d'une structure de δ-foncteur exact, limité aux degrés 0 et 1, de $\tilde{E}^{ab}$ dans $\mathsf{U}-ab$. Le foncteur $H^1(E, *)$ est *effaçable* d'après (3.5.1), donc *universel* d'après ([17] 2.2.2). Il existe donc un isomorphisme canonique de *δ-foncteurs*

$$\alpha_i\colon\ H^i_\bullet(E, *) \xrightarrow{\sim} H^i(E, *), \qquad i = 0, 1, \tag{2}$$

caractérisé par la condition d'être l'identité en degré 0. Explicitons-le.

Proposition 3.5.5. Soient E un U-site,

$$1 \to A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \to 1 \tag{1}$$

une suite exacte de $\tilde{E}^{ab}$ et $c \in H^0(E, C)$. Soit encore $c' \in H^1_\bullet(E, A)$ la classe obtenue en plongeant (1) dans une résolution injective de A. L'image c'' de c' par l'isomorphisme (2) est la classe du A-torseur obtenu en faisant opérer A sur l'image inverse X de c par $v\colon B \to C$ au moyen de

$$X \times A \to X, \qquad (x, a) \rightsquigarrow x - u(a). \tag{2}$$

3.5.5.1. Il revient au même de dire que l'on a

$$c'' = -d(c) \tag{3}$$

où d est le cobord défini «géométriquement» (i.e. par (3.1.3)), ou encore que, si B est *injectif, le composé*

$$H^0(E, C)/H^0(E, B) \xrightarrow{\omega} H^1_\bullet(E, A) \xrightarrow{\alpha_1} H^1(E, A), \tag{4}$$

[où ω est l'isomorphisme contenu dans la définition de $H^1_\bullet$ et α_1 celui de (3.5.4 (2))] est *l'opposé* du morphisme induit par le cobord défini géométriquement. Puisque α_1 est un morphisme de δ-foncteurs il revient au même de montrer que ω est l'*opposé* du morphisme induit par le cobord défini par résolutions injectives, ce qui résulte de [4] chap. V § 7.1.

Remarque 3.5.6. (Torseurs droits et torseurs gauches.) On aurait pu faire la théorie de ce paragraphe en associant à tout faisceau de groupes A l'ensemble pointé

$$H^1_g(E, A) \tag{1}$$

des classes à isomorphisme près de A-torseurs à *gauche* et à toute suite exacte de faisceaux de groupes $1 \to A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \to 1$ le cobord

$$d_g\colon\ H^0(E, C) \to H^1_g(E, A) \tag{2}$$

obtenu en faisant opérer A par translations à gauche sur l'image inverse par $v\colon B \to C$ d'une section c de C. L'opération $P \rightsquigarrow \check{P}$ (1.1.3) définit un isomorphisme d'ensembles pointés

$$\beta_1\colon\ H^1(E, A) \xrightarrow{\sim} H^1_g(E, A) \tag{3}$$

qui est évidemment fonctoriel en A. Par ailleurs,

$$d_g(c) = \beta_1\big(d(c^{-1})\big), \qquad c \in H^0(C), \tag{4}$$

car le morphisme $C \to C$, $x \rightsquigarrow x^{-1}$, transforme l'image inverse de c en celle de c^{-1} et les translations à gauche en les translations à droite.

3.5.7. Appliquons ce qui précède aux faisceaux *abéliens*. Un torseur à droite est un torseur à gauche et l'on a donc

$$H^1_g(E, A) = H^1(E, A) \quad \text{et} \quad d_g = d, \tag{1}$$

Par (2.4.5 (ii)), on voit que l'isomorphisme β_1 est alors *le changement de signe*

$$\beta_1\colon\ H^1(E, A) \to H^1(E, A), \qquad \beta_1(x) = -x, \tag{2}$$

la formule (3.5.6 (4)) exprimant simplement que (β_0, β_1) est un isomorphisme de δ-foncteurs, où

$$\beta_0\colon\ H^0(E, A) \to H^0(E, A), \qquad \beta_0(x) = -x. \tag{3}$$

3.6. Cohomologie de Čech

Définition 3.6.1. Soient E un U-site où les produits fibrés finis existent, $\mathsf{S} = \{S_i \to S\}$, $i \in I$, $I \in \mathsf{U}$, une famille couvrante de E et A un faisceau de groupes sur E.

(i) On appelle 1-cocycle de $\mathbf{S}$ à valeurs dans A une famille

$$u_{ij}\in A(S_{ij}),\quad S_{ij}=S_i\times_S S_j,\quad (i,j)\in I^2, \tag{1}$$

telle que l'on ait [dans $A(S_{ijk})$, où $S_{ijk}=S_i\times_S S_j\times_S S_k$]

$$u_i{}^j{}_k=u_{ij}{}^k\cdot u^i{}_{jk},\quad (i,j,k)\in I^3. \tag{2}$$

(ii) On dira que deux cocycles u_{ij} et v_{ij} sont *cohomologues* s'il existe une famille

$$a_i\in A(S_i),\quad i\in I, \tag{3}$$

telle que l'on ait (dans $A(S_{ij})$)

$$v_{ij}=a_i{}^j\cdot u_{ij}\cdot (a^i{}_j)^{-1},\quad (i,j)\in I^2. \tag{4}$$

(iii) On désignera par

$$H^1(\mathbf{S};A) \tag{5}$$

l'ensemble des classes de 1-cocycles cohomologues, *pointé* par la classe du cocycle unité.

3.6.1.1. Pour tout $\mathrm{i}=(i_1,\ldots,i_n)\in I^n$, on pose

$$S_{\mathrm{i}}=S_{i_1}\times_S S_{i_2}\ldots\times_S S_{i_n}.$$

Soit $x_{\mathrm{i}}\in A(S_{\mathrm{i}})$, $\mathrm{i}\in I^n$, une famille, soit $\mathrm{j}=(j_1,\ldots,j_{n+1})$, $\mathrm{j}\in I^{n+1}$ et soit r un entier, $1\leqq r\leqq n+1$. Posons

$$\mathrm{u}=(j_1,\ldots,j_{r-1},j_{r+1},\ldots,j_{n+1}),\quad \mathrm{u}\in I^n,$$

et désignons par

$$p\colon\ S_{\mathrm{j}}\to S_{\mathrm{u}}$$

la projection évidente. On désignera par

$$x_{j_1,\ldots,j_{r-1}}{}^{j_r}{}_{j_{r+1},\ldots,j_{n+1}} \tag{6}$$

l'image de x_{u} par $A(p)\colon A(S_{\mathrm{u}})\to A(S_{\mathrm{j}})$. En particulier, dans la formule (2), on a posé

$$u_{ij}{}^k=A(p)(u_{ij})$$

où $p\colon S_{ijk}\to S_{ij}$ est la projection évidente. Nous utiliserons ce procédé de notations jusqu'à la fin de ce numéro. Si E est le site des ouverts d'un espace topologique, ou, plus généralement, si les $S_i\to S$ sont des monomorphismes, on peut se dispenser d'écrire les indices supérieurs, mais dans le cas général il faut être plus prudent, comme on voit en supposant la famille $\{S_i\to S\}$ réduite à un seul morphisme.

3.6.2. Si R est un raffinement d'un objet S de E, on désignera par

$$H^1(E_{/S};\, A)^R \tag{1}$$

l'ensemble des classes à isomorphisme près de A-torseurs sur S qui sont trivialisés par tous les changements de base $T \to S$ appartenant à R. Par définition, on a

$$H^1(E_{/S};\, A)^R \subset H^1(E_{/S};\, A) \tag{2}$$

et, puisque tout A-torseur est localement trivial,

$$H^1(E_{/S};\, A) = \varinjlim_{R \in J(S)} H^1(E_{/S};\, A)^R, \tag{3}$$

où $J(S)$ désigne l'ensemble des raffinements de S.

Proposition 3.6.3. Sous les hypothèses de (3.6.1), soit R le raffinement de S engendré par $\mathbf{S}$.

(i) En associant à tout A-torseur P sur S muni de sections $p_i \in A(S_i)$, $i \in I$, le 1-cocycle défini par

$$p_i{}^j \cdot u_{ij} = p^i{}_j, \qquad (i, j) \in I^2, \tag{1}$$

on définit une bijection

$$i_{\mathbf{S}}\colon\ H^1(E_{/S};\, A)^R \xrightarrow{\sim} H^1(\mathbf{S};\, A) \tag{2}$$

qui est fonctorielle en A et respecte le point marqué.

(ii) Si $1 \to A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \to 1$ est une suite exacte de faisceaux de groupes sur E, si $c \in H^0(E_{/S};\, C)$ et si $b_i \in H^0(E_{/S_i};\, B)$, $i \in I$, a pour image par $v\colon B \to C$ la restriction de c à $E_{/S_i}$, on a $d(c) \in H^1(E_{/S};\, A)^R$ et $\mathrm{i}_{\mathbf{S}}(d(c))$ est la classe du cocycle u_{ij} défini par

$$u(S_{ij})(u_{ij}) = (b_i{}^j)^{-1}\, b^i{}_j, \tag{3}$$

où $b_i{}^j$ est la restriction de b_i suivant la première projection $S_{ij} \to S_i$, (cf. (3.6.1.1 (6))).

3.6.3.1. Un calcul immédiat prouve que (1) définit bien un cocycle et que sa classe de cohomologie est indépendante du choix des sections p_i donc ne dépend que de la classe à isomorphisme près de P. Enfin, la formule (1) définit bien un morphisme d'ensembles pointés (2), fonctoriel en A.

3.6.3.2. On déduit (ii) de (i) en notant que les b_i sont des sections sur les S_i de l'image inverse de c par $v\colon B \to C$, (3.1.3).

3.6.3.3. Nous allons donner une démonstration de (i) en exhibant la bijection inverse. Notons

$$Z^1(\mathbf{S};\, A) \tag{4}$$

l'ensemble des 1-cocycles de $\mathbf{S}$ à valeurs dans A, posons

$$C^0(\mathbf{S};\, A)=\prod_{i\in I} A(S_i) \tag{5}$$

et considérons l'application

$$f:\ C^0(\mathbf{S};\, A)\to Z^1(S;\, A),\qquad f(a)_{ij}=(a_i{}^j)^{-1}\cdot a^i{}_j. \tag{6}$$

Par localisation, on déduit de f un morphisme de faisceaux d'ensembles sur le site $E_{/S}$

$$\mathsf{f}:\ \mathsf{C}^0(\mathbf{S};\, A)\to \mathsf{Z}^1(\mathbf{S};\, A). \tag{7}$$

Par ailleurs, on a un monomorphisme de faisceaux de groupes

$$\mathsf{a}:\ A^S\to \mathsf{C}^0(\mathbf{S};\, A),\qquad \mathsf{a}(a)_i=a^i. \tag{8}$$

Faisons opérer A^S sur $\mathsf{C}^0(\mathbf{S};\, A)$ par translations à *gauche*. Il est immédiat que (7) induit un *isomorphisme*

$$A^S\backslash \mathsf{C}^0(\mathbf{S};\, A)\xrightarrow{\sim} \mathsf{Z}^1(\mathbf{S};\, A). \tag{9}$$

Corollaire 3.6.4. Sous les hypothèses de (3.6.3), en associant à tout cocycle $u\in Z^1(\mathbf{S};\, A)$ la classe du *symétrique* $\check{P}$ (1.1.3) de l'image inverse P de u par $\mathsf{f}:\mathsf{C}^0(\mathbf{S};\, A)\to \mathsf{Z}^1(\mathbf{S};\, A)$, (3.6.3 (7)), on définit un monomorphisme d'ensembles pointés

$$j_{\mathbf{S}}:\ H^1(\mathbf{S};\, A)\to H^1(E_{/S};\, A). \tag{1}$$

L'image de $j_{\mathbf{S}}$ est égale à $H^1(E_{/S};\, A)^R$ et l'application $i_{\mathbf{S}}$ de (3.6.3 (2)) est la bijection inverse de celle induite par $j_{\mathbf{S}}$.

3.6.4.1. D'après (3.6.3 (9)), P est un A-torseur *à gauche* sur S et $\check{P}$ est donc bien un A-torseur à droite. Modulo le passage des torseurs à gauche aux torseurs à droite, le cobord attaché au quotient (3.6.3 (9)) induit d'après (3.2.3) un *monomorphisme*

$$H^0(E_{/S};\, \mathsf{Z}^1(\mathbf{S};\, A))/H^0(E_{/S};\, \mathsf{C}^0(S;\, A))\to H^1(E_{/S};\, A). \tag{2}$$

Le premier terme s'identifie visiblement à $H^1(\mathbf{S};\, A)$, ce qui fournit un *monomorphisme* (1) qui s'explicite comme il est dit dans l'énoncé. D'après (3.2.3), l'image de $j_{\mathbf{S}}$ est formée des classes des torseurs qui par extension à $\mathsf{C}^0(\mathbf{S};\, A)$ de leur groupe structural deviennent triviaux. Aux notations près, (3.5.1.2) prouve que ce sont ceux qui sont trivialisés par les $S_i\to S$

et, par suite, $j_{\mathbf{S}}$ induit un *isomorphisme*

$$j'_{\mathbf{S}}\colon\ H^1(\mathbf{S}; A) \xrightarrow{\sim} H^1(E_{/S}; A)^{\mathbf{R}}. \tag{3}$$

3.6.4.2. Il reste à prouver que l'inverse de $j'_{\mathbf{S}}$ est $i_{\mathbf{S}}$; avec les notations de l'énoncé, il suffit donc de prouver que le cocycle attaché à $\check{P}$ est égal à u. Or on a des sections

$$p_i \in \mathbf{C}^0(\mathbf{S}; A)(S_i) \approx \prod_{j\in I} A(S_{ij}) \tag{4}$$

définies par

$$(p_i)_j = u_{ij}. \tag{5}$$

Du fait que u est un cocycle on déduit que $p_i \in P(S_i)$, autrement dit que l'image de p_i par $\mathbf{f}$ (3.6.3 (7)) est la restriction de u à S_i. On conclut par un petit calcul en utilisant à nouveau le fait que u est un cocycle et la définition de $i_{\mathbf{S}}$ (3.6.3 (1)).

Remarque 3.6.5. D'après ce qui précède, les $H^1(\mathbf{S}; A)$ ne dépendent, à isomorphisme canonique près, que du raffinement R de S engendré par $\mathbf{S}$. On peut expliciter ces isomorphismes grâce à la notion de *morphisme de familles couvrantes*. Soit encore $\mathbf{T} = \{T_j \to S\}$, $j\in J$, $J\in\mathbf{U}$, une famille couvrante et soit un morphisme $\mathbf{f}\colon \mathbf{T} \to \mathbf{S}$:

$$f\colon\ J \to I, \quad f_j\colon\ T_j \to S_{f(j)}, \quad j\in J, \tag{1}$$

où f est une application et où les f_j sont des S-morphismes. On a un morphisme

$$H^1(\mathbf{f}; A)\colon\ H^1(\mathbf{S}; A) \to H^1(\mathbf{T}; A) \tag{2}$$

induit par les morphismes naturels $f_{ij}\colon\ T_{ij} \to S_{f(i)f(j)}$, $(i, j)\in J^2$. Si l'on désigne par R (resp. R') le raffinement de S engendré par $\mathbf{S}$ (resp. $\mathbf{T}$), on a $R' \subset R$ et *le* morphisme (2) s'identifie par les isomorphismes (3.6.4 (3)) à l'inclusion

$$H^1(E_{/S}; A)^{R} \subset H^1(E_{/S}; A)^{R'}, \tag{3}$$

comme il résulte de (3.6.3 (i)) ou de (3.6.4), au choix. L'application $H^1(\mathbf{f}; A)$ est donc *injective* et ne dépend pas du choix de $\mathbf{f}$; de plus, c'est un isomorphisme lorsque $R = R'$, (i.e. lorsque $\mathbf{S}$ et $\mathbf{T}$ sont «équivalents»). Enfin, si l'on pose

$$\check{H}^1(E_{/S}; A) = \varinjlim H^1(\mathbf{S}; A), \tag{4}$$

la limite inductive étant prise suivant la catégorie des familles qui couvrent S, on a un isomorphisme canonique (induit par les $j'_{\mathbf{S}}$)

$$\check{H}^1(E_{/S}; A) \xrightarrow{\sim} H^1(E_{/S}; A), \quad (3.6.2\,(3)). \tag{5}$$

Corollaire 3.6.6. Sous les hypothèses de (3.6.3), soient encore C un E-champ, $x \in \mathrm{Ob}(C_S)$ et $u\colon A^S \xrightarrow{\sim} \mathbf{Aut}_S(x)$ un isomorphisme de faisceaux de groupes sur $E_{/S}$. Soit enfin $y \in \mathrm{Ob}(C_S)$ et soient

$$a_i\colon x^i \to y^i, \qquad i \in I, \tag{1}$$

des S_i-isomorphismes entre les images inverses de x et y par les $S_i \to S$. *La classe de y dans $H^1(E_{/S}; A)$*, (2.5.2), appartient à $H^1(E_{/S}; A)^R$ et son image par $i_{\mathbf{S}}$, (3.6.3 (2)), *est la classe du cocycle*

$$u_{ij} = (a_i{}^j)^{-1}\, a^i{}_j, \qquad u_{ij} \in A(S_{ij}), \tag{2}$$

où $a_i{}^j$ (resp. $a^i{}_j$) désigne l'image inverse de a_i (resp. a_j) par la première (resp. seconde) projection de S_{ij}.

En effet, par définition, la classe de y est celle du torseur $\mathbf{Isom}_S(x, y)$ et les a_i sont des sections de celui-ci au-dessus des S_i.

Proposition 3.6.6.1. Soient E un U-site et A un U-faisceau de groupes sur E. L'ensemble $H^1(E, A)$ est isomorphe à un élément de U.

Par définition (2.4.2), l'ensemble $H^1(E, A)$ ne dépend que du topos $\tilde{E}_{\mathsf{U}}$ associé à E. En vertu de (0 2.6), on peut donc supposer que E est un site standard (0 2.5.2) appartenant à U. Soit S un objet final de E. L'ensemble $J(S)$ des raffinements de S appartient à U. En vertu de (3.6.2 (2)), il suffit donc de prouver que, pour tout $R \in J(S)$, l'ensemble $H^1(E_{/S}; A)^R$ est isomorphe à un élément de U. Puisque E est une catégorie élément de U, il existe une famille $\{S_i \to S\}$, $i \in I$, $I \in \mathsf{U}$ qui engendre R (0 1.1.2), d'où la conclusion, par (3.6.3 (2)).

Remarque 3.6.7. (Le cas abélien.) Soient E un U-site où les produits fibrés finis existent et $\mathbf{S} = \{S_i \xrightarrow{i} S\}$, $i \in I$, $I \in \mathsf{U}$, une famille couvrante de E. A tout faisceau de groupes abéliens A sur E on associe classiquement ([SGA 4 V § 5.1.5] et [15] page 204) *le complexe de faisceaux sur $E_{/S}$*

$$\mathbf{C}^n(\mathbf{S}; A)(T/S) = \prod_{\mathsf{i} \in I^{n+1}} A(T_{\mathsf{i}}), \qquad n \in \mathcal{N}, \tag{1}$$

où l'on a posé

$$T_{\mathsf{i}} = T \times_S S_{i_0} \times_S \cdots \times_S S_{i_n}, \qquad \mathsf{i} = (i_0, \ldots, i_n) \in I^{n+1}, \tag{2}$$

la différentielle étant donnée par la «formule»

$$d(x)_{\mathsf{i}} = \sum_{0 \leqq k \leqq n+1} (-1)^k\, x_{i_0, \ldots, \overset{i_k}{\ldots}, \ldots, i_n}, \tag{3}$$

dont la signification est expliquée par (3.6.1.1 (6)). On a de plus un morphisme

$$\mathbf{a}\colon A^S \to \mathbf{C}^0(\mathbf{S}; A), \qquad (3.6.3.3\ (8)), \tag{4}$$

et celui-ci fait de (1) *une résolution de* A^S *dans la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur le site* $E_{/S}$, ([15] chap. II, [17] 5.2.1). Ceci dit, posons

$$C^*(\mathbf{S}; A) = H^0(E_{/S}; \mathbf{C}^*(\mathbf{S}; A)) \tag{5}$$

et

$$H^n(\mathbf{S}; A) = H^n(\mathbf{C}^*(\mathbf{S}; A)), \quad n \in \mathcal{N}. \tag{6}$$

Un calcul immédiat montre que, pour $n=1$, on a égalité entre l'ensemble pointé $H^1(\mathbf{S}; A)$ sous-jacent à (6) et celui défini par (3.6.1 (5)). Par ailleurs, en plongeant (1) dans une résolution injective de A^S, on définit des morphismes

$$\gamma_n: \ H^n(\mathbf{S}; A) \to H^n_\bullet(E_{/S}; A), \quad n \in \mathcal{N}, \tag{7}$$

où $H^n_\bullet(E_{/S}; A)$ désigne les foncteurs dérivés de $H^0(E_{/S}; A)$ définis à l'aide de résolutions injectives (3.5.4 (1)).

Proposition 3.6.8. Sous les hypothèses de (3.6.3) pour tout faisceau de groupes *abéliens* A sur E l'isomorphisme $\alpha_1: H^1_\bullet(E_{/S}; A) \xrightarrow{\sim} H^1(E_{/S}; A)$ de (3.5.4 (2)) vérifie

$$\alpha_1 \cdot \gamma_1 = j_{\mathbf{S}}, \quad \text{(3.6.7 (7))} \text{ et } \text{(3.6.4.1 (3))}. \tag{1}$$

En effet, d'après [4] chap. V prop. 7.1, le morphisme γ_1 est l'*opposé* du morphisme

$$m: \ H^1(\mathbf{S}; A) \to H^1_\bullet(E_{/S}; A) \tag{2}$$

induit par le cobord attaché (par résolutions injectives) à la suite exacte

$$0 \to A \to \mathbf{C}^0(\mathbf{S}; A) \to \mathbf{Z}^1(\mathbf{S}; A) \to 0 \tag{3}$$

où $\mathbf{Z}^1(\mathbf{S}; A)$ désigne le faisceaux des cycles de degré 1 du complexe $\mathbf{C}^*(\mathbf{S}; A)$. Puisque α_1 est un morphisme de δ-foncteurs, il en résulte que le composé $\alpha_1 \cdot \gamma_1$ est l'opposé du morphisme

$$H^1(\mathbf{S}; A) \to H^1(E_{/S}; A) \tag{4}$$

induit par le cobord «géométrique» (3.1.3) attaché à la suite exacte (3). Or (4) est l'opposé de j_S par définition, (3.6.4).

Remarque 3.6.9. Sous les hypothèses de (3.6.3), considérons le morphisme de topos f dont *le foncteur image directe* est le foncteur restriction

$$f_*: \ (\widetilde{E_{/S}}) \to \hat{R}, \tag{1}$$

où le raffinement R de S engendré par $\mathbf{S}$ est considéré comme une sous-catégorie de $E_{/S}$ (II 1.1.1 (iv)). La suite spectrale de Leray de f [SGA 4 V § 5.5.3]

$$H^p(\hat{R}; R^q f_*(A)) \Rightarrow H^{p+q}(E_{/S}; A) \tag{2}$$

s'identifie à la suite spectrale reliant la cohomologie de la famille couvrante $\mathbf{S}$ à celle de S [SGA 4 V § 5.2.4], car toutes deux sont égales à la suite spectrale des foncteurs composés

$$(\widetilde{E_{/S}})^{ab} \xrightarrow{f_*} \hat{R}^{ab} \xrightarrow{H^0(R;*)} \mathsf{U}-ab.$$

En vertu des isomorphismes

$$H^n(\hat{R}; f_*(A)) \approx H^n(\mathbf{S}, A), \quad A \in \mathrm{Ob}(\hat{R}^{ab}), \text{ [SGA 4 V § 5.2.1 (19)]}, \quad (3)$$

la suite spectrale (2) fournit des morphismes fonctoriels

$$\varepsilon_n\colon H^n(\mathbf{S}; A) \to H^n(E_{/S}; A), \quad A \in \mathrm{Ob}(E_{/S})^{ab}. \quad (4)$$

Proposition 3.6.10. Sous les hypothèses de (3.6.8), les morphismes ε_n de (3.6.9 (4)) sont égaux aux morphismes γ_n de (3.6.7 (7)).

La démonstration est essentiellement celle de [15] chap. II 5.5. On note que l'on peut définir $C^*(\mathbf{S}; A)$ pour tout $A \in \mathrm{Ob}(\hat{R}^{ab})$ et que l'on obtient ainsi *un foncteur résolvant* pour $H^0(R; *)$: $\hat{R}^{ab} \to \mathsf{U}-ab$. Ceci explicite les isomorphismes (3.6.9 (3)) et permet, d'après [17] 2.5.3, de calculer (2) comme la deuxième suite spectrale du bicomplexe $C^*(\mathbf{S}; f_*(A^*))$, où A^* est une résolution injective de $A \in \mathrm{Ob}(\widetilde{E_{/S}})^{ab}$. On conclut alors comme dans [15].

Corollaire 3.6.11. Sous les hypothèses de (3.6.8) l'isomorphisme $\check{H}^1(E_{/S}; A) \xrightarrow{\sim} H^1(E_{/S}; A)$ de (3.6.5 (5)) est égal à celui de [SGA 4 V § 5.2.5].

En effet, (loc. cit.), le morphisme de [SGA 4] s'obtient par passage à la limite inductive suivant les familles qui couvrent S à partir des morphismes ε_1 de (3.6.9 (4)), d'où la conclusion par (3.6.10).

Remarque 3.6.12. (Cobord en cohomologie de Čech.) Les isomorphismes du corollaire précédent munissent le couple $(H^0, \check{H}^1)$ d'une structure de δ-foncteur limité aux degrés 0 et 1. Les opérateurs cobords ainsi obtenus s'explicitent immédiatement à l'aide de (3.6.3 (ii)), car les $i_{\mathbf{S}}$ sont les inverses des $j'_{\mathbf{S}}$ (3.6.4). En s'inspirant de [15] chap. II § 5 n° 11, on vérifie directement que la structure de δ-foncteur dont les isomorphismes (3.6.5 (5)) munissent le couple $(H^0, \check{H}^1)$ est la même que celle obtenue par les isomorphismes de [SGA 4 V § 5.2.5]; on obtient ainsi une autre démonstration du corollaire précédent.

3.7. Calculs galoisiens

Ce qui suit est bien classique (cf. [28]); nous n'y revenons que pour faire le lien avec ce qui précède et fixer nos conventions quant aux cocycles et données de descente dans le cas galoisien.

Proposition 3.7.1. (Cohomologie des groupes.) Soient G un groupe appartenant à U, $\mathbf{G}$ le U-topos des ensembles appartenant à U où G opère *à gauche* et A un groupe de $\mathbf{G}$. On pose

$$Z^1(G, A)=\{(a_s)_{s\in G},\ a_s\in A | a_{st}=a_s\cdot s(a_t),\ s, t\in G\} \tag{1}$$

et on note

$$H^1(G; A) \tag{2}$$

le quotient $Z^1(G, A)/A$, où le groupe A opère par

$$a_s\times b=b^{-1}\cdot a_s\cdot s(b). \tag{3}$$

En associant à tout A-torseur *à droite* P de $\mathbf{G}$ muni d'un $p\in P$ le «1-cocycle» $(a_s)\in Z^1(G, A)$ défini par

$$s(p)=p\cdot a_s,\qquad a_s\in A,\ s\in G, \tag{4}$$

on définit une bijection

$$H^1(\mathbf{G}; A)\xrightarrow{\sim} H^1(G; A) \tag{5}$$

qui applique l'élément unité sur la classe du cocycle unité $a_s=1$, $s\in G$.

La démonstration est laissée au lecteur. Grâce à cet isomorphisme, on peut transcrire en termes de cocycles les constructions exposées ci-dessus. On retrouve celle de [28] que l'on consultera pour plus de détails.

3.7.1.1. On peut munir l'ensemble $Z^1(G, A)$ d'une structure de groupoïde noté $\mathbf{Z}^1(G, A)$ en décidant qu'une flèche m: $a\to b$, où a et b sont deux cocycles, est un $m\in A$ tel que

$$m\cdot a_s=b_s\cdot s(m),\qquad s\in G, \tag{6}$$

et que la loi de composition est induite par la loi de composition de A. Par ailleurs, soit $T(A)$ la catégorie dont les objets sont les couples (P, p), où P est un A-torseur et où $p\in P$, les morphismes étant *tous* les morphismes des torseurs sous jacents. Bien entendu, $T(A)$ est équivalente à $\mathbf{Tors}(\mathbf{G}, A)$. De plus, on a un foncteur

$$T(A)\xrightarrow{\approx}\mathbf{Z}^1(G, A) \tag{7}$$

dont l'action sur les objets est donnée par (4) et qui, à toute flèche m: $(P, p)\to(Q, q)$ de $T(A)$, associe la flèche m' définie par

$$m(p)=q\cdot m'. \tag{8}$$

Il est immédiat que (7) est une équivalence qui, par passage aux classes d'objets à isomorphisme près, fournit la bijection (5). Nous utiliserons cette remarque plus bas.

Définition 3.7.2. *(Sites à objets constants.)* On dit qu'un U-site standard E admet des objets constants si, pour tout $I \in \mathsf{U}$, le faisceau associé au préfaisceau constant défini par I est représentable.

3.7.2.1. Tout U-topos admet des objets constants. Soit E un site standard qui admet des objets constants et soit e son objet final. Pour tout $I \in \mathsf{U}$, on notera

$$I_e \text{ (ou encore } I) \tag{1}$$

l'objet constant correspondant. Il est muni d'une famille de morphismes $s_i : e \to I_e$, $i \in I$, qui font de I_e *une somme directe de I copies de e*; ceci résulte de la définition du faisceau associé à un préfaisceau. Puisque la formation du faisceau associé commute à la localisation, les sites $E_{/X}$, $X \in \mathrm{Ob}(E)$, admettent également des objets constants et l'on a

$$I_X = X \times I_e = X^{(I)}, \qquad X \in \mathrm{Ob}(E), \tag{2}$$

où $X^{(I)}$ est la somme directe de I copies de X. De plus, la somme directe $X^{(I)}$ est disjointe et universelle (0 2.6.2) car il en est ainsi de son image dans le topos $\tilde{E}$.

On a une réciproque:

Proposition 3.7.3. Pour qu'un U-site standard E admette des objets constants, il faut et il suffit que, pour tout $I \in \mathsf{U}$ et tout $X \in \mathrm{Ob}(E)$, la somme directe $(s_i : X \to X^{(I)})$, $i \in I$, de I copies de X existe, soit disjointe et universelle (0 2.6.2) et que la famille des s_i soit couvrante.

3.7.3.1. On vient de voir que la condition est nécessaire. Elle est suffisante car, par définition d'un faisceau, la famille $(\varepsilon(s_i) : \varepsilon(X) \to \varepsilon(X^{(I)}))$, $i \in I$, où $\varepsilon : E \to \tilde{E}$ est le foncteur habituel, sera une somme directe. En prenant pour X l'objet final de E, on en déduit que E admet des objets constants.

3.7.3.2. La formule (3.7.2 (2)) montre que, pour tout $I \in \mathsf{U}$ et tout couple (X, Y) d'objets de E, on a un isomorphisme canonique

$$(X \times Y)^{(I)} \simeq X^{(I)} \times Y. \tag{1}$$

De plus, nous venons de voir que si E admet des objets constants, *le foncteur* $\varepsilon : E \to \tilde{E}$ *respecte les objets constants.*

Proposition 3.7.4. Soient E un site standard à objets constants, $f : T \to S$ une flèche de E et G un groupe opérant à droite sur T par S-automorphismes. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) T est un torseur sur S sous le Groupe constant G défini par G.

(ii) Le morphisme $f\colon T\to S$ est couvrant et, pour tout entier $n\geqq 0$, les morphismes

$$(\mathrm{id}_T, g_1, \ldots, g_n)\colon\ T\to (T/S)^{n+1},\qquad (g_1, \ldots, g_n)\in G^n, \tag{1}$$

font du produit fibré $(T/S)^{n+1}$ une somme directe de G^n copies de T.

3.7.4.1. Sous les conditions de l'énoncé, on dira que (T/S) est *galoisien de groupe* G. Example: E est le site étale du spectre d'un corps K et T est le spectre d'une extension galoisienne finie de K de groupe de Galois G.

3.7.4.2. La première condition est équivalente à la conjonction de

(a) $f\colon T\to S$ est couvrant

(b) pour tout entier $n\geqq 1$, le morphisme

$$T\times G^n\to (T/S)^{n+1} \tag{2}$$

$$(t, g_1, \ldots, g_n)\mapsto (t, t\,g_1, \ldots, t\,g_n)$$

est un isomorphisme.

En effet, par associativité du produit, la condition (b) est vérifiée dès que (2) est un isomorphisme pour $n=1$ et l'on reconnait la définition d'un torseur. Or, d'après (3.7.2 (2)), les morphismes

$$T\to T\times G^n,\qquad t\mapsto (t, g_1, \ldots, g_n), \tag{3}$$

où $(g_1, \ldots, g_n)\in G^n$ font de $T\times G^n$ une somme directe de G^n copies de T, d'où la conclusion.

Proposition 3.7.5. Soient E un site standard à objets constants, $f\colon T\to S$ un objet galoisien de groupe G et F un *E-champ*. Soit encore c un clivage de F (choix des images inverses).

(i) Pour tout $X\in \mathrm{Ob}(E)$ et tout $I\in \mathsf{U}$, le produit

$$F_{T\times I}\to \prod_{i\in I} F_T,\qquad x\rightsquigarrow (s_i{}^*(x)), \tag{1}$$

des foncteurs image inverse attachés aux morphismes structuraux $s_i\colon X\to X\times I=X^{(I)}$ est une équivalence de catégories.

(ii) Pour tout $x_0\in \mathrm{Ob}(F_S)$, le groupe G opère à gauche sur $A=\mathrm{Aut}_T(x)$, où $x=f^*(x_0)$ est l'image inverse de x_0 par $f\colon T\to S$. De plus, la catégorie des données de descente sur x relatives à $f\colon T\to S$ est équivalente à la catégorie $\mathbf{Z}^1(G, A)$ de (3.7.1.1).

(iii) Sous les conditions de (ii), soit $C(x_0)$ la sous-catégorie pleine de F_S dont les objets sont les $y_0\in \mathrm{Ob}(F_S)$ tels que $f^*(y_0)$ soit T-isomorphe

à $x = f^*(x_0)$. On a une équivalence

$$C(x_0) \xrightarrow{\approx} \mathbf{Z}^1(G, A) \tag{2}$$

obtenue en choisissant pour tout $y_0 \in \mathrm{Ob}(C(x_0))$ un T-isomorphisme $r: f^*(x_0) \xrightarrow{\sim} f^*(y_0)$ et en attachant à y_0 le cocycle

$$r^{-1} \cdot {}^s r. \tag{3}$$

3.7.5.1. Puisque la famille $\{s_i: X \to I_X\}$ est couvrante et que cette somme directe est disjointe, le foncteur (1) est une équivalence d'après [D 9.24] car F est un champ. Pour prouver (ii) et (iii) nous supposerons que le clivage est un scindage (on a transitivité vraie des foncteurs image inverse), le cas général étant laissé au lecteur. Pour tout $s \in G$, on a un S-isomorphisme $s: T \dashrightarrow T$ défini par les opérations de G sur T, d'où un foncteur image inverse

$$s^*: F_T \to F_T. \tag{4}$$

Pour tout objet (ou flèche) x de F_T, on posera

$${}^s x = s^*(x). \tag{5}$$

Par transitivité des images inverse et puisque G opère à droite sur T, on a

$${}^{st}x = {}^s({}^t x), \quad s \in G,\ t \in G, \tag{6}$$

car $T \rightsquigarrow F_T$ est contravariant en T. Par transitivité de l'image inverse, pour tout $x_0 \in \mathrm{Ob}(F_S)$ et tout $s \in G$, on a $f^*(x_0) = s^* f^*(x_0)$ car G opère sur T par S-automorphismes; ceci s'écrit

$${}^s x = x, \quad s \in G, \quad x = f^*(x_0), \quad x_0 \in \mathrm{Ob}(F_S), \tag{7}$$

d'où l'on déduit que *l'on fait opérer G à gauche sur $A = \mathrm{Aut}_T(x)$ par* $(s, u) \mapsto {}^s u$. Pour achever de prouver (ii), notons que, d'après (3.7.4), les morphismes

$$p_0, p_1: T \times G \rightrightarrows T, \quad p_0(t, g) = t,\ p_1(t, g) = t\,g, \tag{8}$$

s'interprètent comme les deux projections du produit fibré $T \times_S T$ et, d'après (i), les foncteurs image inverse correspondant s'écrivent

$$p_0^*, p_1^*: F_T \rightrightarrows (F_T)^G \tag{9}$$

$$\big(p_0^*(x)\big)_s = x,\ \big(p_1^*(x)\big)_s = {}^s x,\ s \in G.$$

Par définition, une *donnée de recollement* [D 9.2] sur un objet x de F_T est un $(T \times_S T)$-isomorphisme $p_1^*(x) \xrightarrow{\sim} p_0^*(x)$ et s'interprète donc comme une famille de T-isomorphismes

$$a_s: {}^s x \xrightarrow{\sim} x, \quad s \in G. \tag{10}$$

En interprétant grâce à (3.7.4 (1)) les projections de $T\times_S T\times_S T$, on voit que pour que (10) soit *une donnée de descente* [D 9.2], il faut et il suffit que l'on ait

$$a_{st}=a_s\cdot {}^s a_t,\qquad s\in G,\ t\in G. \tag{11}$$

Si $x=f^*(x_0)$, $x_0\in \mathrm{Ob}(F_S)$, on a ${}^s x=x$ et une donnée de descente sur x s'interprète comme un 1-cocycle $(a_s)\in Z^1(G, A)$. On procède de même pour les morphismes, ce qui prouve (ii).

3.7.5.2. Prouvons (iii). Soit y_0 un objet de F_S muni d'un T-isomorphisme

$$r:\ f^*(x_0)\xrightarrow{\sim} f^*(y_0).$$

D'après [D 9.10], il lui correspond une donnée de descente naturelle sur $x=f^*(x_0)$ qui est

$$p_0^*(r)^{-1}\, p_1^*(r),$$

c'est-à-dire, d'après (9),

$$a_s=r^{-1}\cdot {}^s r. \tag{12}$$

Puisque F est un champ, on obtient ainsi une équivalence entre $C(x_0)$ et la catégorie des données de descente sur x relatives à f: $T\to S$, ce qui prouve (iii) grâce à (ii).

Proposition 3.7.6. Soient E un U-site standard et f: $T\to S$ un objet galoisien de groupe G. Pour tout faisceau de groupes A sur S, on a une équivalence de catégories

$$\mathbf{Tors}(E_{/S}, A)^T\xrightarrow{\approx}\mathbf{Tors}(\mathbf{G}, A(T)),\qquad P\rightsquigarrow P(T), \tag{1}$$

dont la source est la catégorie des A-torseurs sur S dont la restriction à T est triviale et dont le but est la catégorie des torseurs sous le groupe $A(T)$ du topos $\mathbf{G}$ des G-ensembles à gauche.

Puisque G opère à droite sur T par S-automorphismes, il opère à gauche sur $X(T)$, pour tout faisceau d'ensembles X sur S. D'après (3.7.1.1 (7)), le but de (1) s'interprète à équivalence près comme la catégorie $\mathbf{Z}^1(\mathbf{G}, A(T))$ des 1-cocycles de G à valeurs dans $A(T)$. La catégorie fibrée des torseurs est un champ; d'après (3.7.5 (iii)), la source de (1) est donc équivalente à $\mathbf{Z}^1(G, A(T))$, car les translations à gauche identifient $A(T)$ et le groupe $\mathrm{Aut}_T(A_T)$ des T-automorphismes du A-torseur trivial A_T sur T. On conclut en vérifiant que le 1-cocycle (a_s), $s\in G$, attaché par (3.7.5 (3)) à un A-torseur P sur S muni d'un T-isomorphisme r: $A_T\xrightarrow{\sim} P|T$ est égal au cocycle attaché par (3.7.1 (4)) au $A(T)$-torseur $P(T)$ muni de l'image $r(e)\in P(T)$ de la section canonique e de A_T par le morphisme r.

Pour cela, on note que a_s est caractérisé par la condition que la translation à gauche $L(a_s)$ vérifie $L(a_s)=r^{-1}\cdot {}^s r$, ce qui équivaut à $r\big(L(a_s)(e)\big)={}^s r(e)$. Puisque ${}^s e=e$, on a

$$ {}^s r(e)={}^s\big(r(e)\big)$$

et par ailleurs, on a

$$r\big(L(a_s)(e)\big)=r(a_s)=r(e\cdot a_s)=r(e)\cdot a_s,$$

d'où ${}^s\big(r(e)\big)=r(e)\cdot a_s$, ce qui donne la conclusion.

Remarque 3.7.7. (G-objets tordus.) Soient G un groupe (abstrait) et A un groupe du topos B_G des G-ensembles, c'est à dire un groupe sur lequel opère G. Soit encore F un objet de B_G sur lequel A opère à gauche et soit P un A-torseur à droite de B_G. Soit encore $p\in P$ et soit $(a_s)_{s\in G}$ le cocycle correspondant. L'objet tordu ${}^P F=P\overset{A}{\wedge}F$ défini au début de ce chapitre n'est autre que l'ensemble sous-jacent à F muni des opérations de G définies par

$$s\cdot f=a_s\cdot s(f),\qquad s\in G,\ f\in F. \tag{1}$$

On vérifie immédiatement que l'on a bien défini un G-objet F' et, d'après (2.3.6), pour vérifier que $F'=F^P$, il suffit de construire un G-morphisme $r\colon P\times F\to F'$ qui fasse de F' un quotient de $P\times F$ par A opérant par $(p',f)\,a=(p'\,a,a^{-1}f)$, $(p',a,f)\in P\times A\times F$. Pour tout $(p',f)\in P\times F$, on définit $a\in A$ par $p'=p\,a$ et on pose $r(p',f)=a\cdot f$, d'où la conclusion. On voit ainsi que l'objet tordu F^P défini ici s'identifie à l'objet tordu ${}_a F$ attaché par [28] p. I—59, au cocycle a défini par le couple (P,p).

Chapitre IV

Liens et Gerbes. (Cohomologie de degré 2)

Les conventions d'univers sont celles de (I 3.1.1).
La lettre E désigne un U-site appartenant à V.

§ 1. Liens sur un site

1.1. Le champ des liens

1.1.1. Si deux objets X et Y d'une catégorie sont isomorphes il existe un isomorphisme $\mathrm{Aut}(X) \approx \mathrm{Aut}(Y)$, *unique* modulo composition avec un automorphisme intérieur de $\mathrm{Aut}(X)$ ou de $\mathrm{Aut}(Y)$. Etant donné un site E, ceci nous conduit à introduire la catégorie obtenue à partir de celle des faisceaux de groupes sur E en identifiant deux morphismes qui sont congrus modulo un automorphisme intérieur. Bien entendu, il faut pouvoir «recoller» les objets ainsi obtenus, autrement dit passer au champ associé que l'on appellera *le champ des liens*. Nous verrons ensuite comment certaines constructions habituelles pour les faisceaux de groupes se propagent aux liens.

1.1.2. Pour tout faisceau de groupes G sur E, nous noterons

$$\mathbf{Z}(G) \quad (\text{resp. } \mathbf{Int}(G)) \tag{1}$$

le centre de G (resp. le faisceau image de

$$\mathrm{Int}: \quad G \to \mathbf{Aut}(G), \qquad \mathrm{Int}(g)(g') = g\, g'\, g^{-1}). \tag{2}$$

On a un isomorphisme canonique

$$G/\mathbf{Z}(G) \approx \mathbf{Int}(G). \tag{3}$$

Une section de $\mathbf{Int}(G)$ sera appelée *un automorphisme intérieur*. Parmi ceux-ci on prendra soin de distinguer ceux qui sont induits par une section de G.

1.1.3. Pour tout couple (F, G) de faisceaux de groupes sur E, nous noterons $\mathbf{Hom}(F, G)$ le faisceau des morphismes de faisceaux de groupes

de F dans G et

$$\mathsf{Hex}(F, G) = G\backslash\mathsf{Hom}(F, G)/F \tag{1}$$

le *faisceau* d'ensembles quotient, où F et G opèrent par automorphismes intérieurs. D'après (III 3.1.1 (i bis)), on a des isomorphismes canoniques

$$\mathsf{Hex}(F, G) \approx G\backslash\mathsf{Hom}(F, G) \approx \mathsf{Int}(G)\backslash\mathsf{Hom}(F, G) \tag{2}$$

où $\mathsf{Int}(G)$ opère par composition des morphismes. L'image dans $\mathsf{Hex}(F, G)$ du faisceau $\mathsf{Isom}(F, G)$ des isomorphismes de faisceaux de groupes de F dans G sera notée

$$\mathsf{Isex}(F, G) \tag{3}$$

et on posera

$$\mathsf{Autex}(F) = \mathsf{Isex}(F, E), \quad (\mathsf{Out}(F)). \tag{4}$$

1.1.4. Pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$, désignons par

$$\mathrm{LI}(E)(S) \tag{1}$$

la catégorie dont *les objets* sont ceux de la catégorie scindée

$$\mathrm{FAGRSC}(E)_S \tag{2}$$

des U-faisceaux de groupes sur $E_{/S}$ (II 3.4.1.1 (6)), l'ensemble des *morphismes* étant l'ensemble

$$\mathrm{Hex}(F, G) = H^0(E_{/S}, \mathsf{Hex}(F, G)) \tag{3}$$

des sections sur $E_{/S}$ du faisceau $\mathsf{Hex}(F, G)$ et dont la loi de composition est définie par passage au quotient à partir de celle des morphismes de faisceaux, ce qui est permis par (1.1.3 (2)). Il est immédiat que *les morphismes inversibles* de F dans G sont les éléments de

$$\mathrm{Isex}(F, G) = H^0(S, \mathsf{Isex}(F, G)). \tag{4}$$

1.1.5. Si $f\colon T \to S$ est une flèche de E, la formation du quotient $\mathsf{Hex}(F, G)$ commute à la restriction de S à T ce qui permet de définir *une E-catégorie scindée*

$$\mathrm{LI}(E). \tag{1}$$

Par construction, on a un morphisme de catégories scindées

$$\mathrm{FAGRSC}(E) \to \mathrm{LI}(E) \tag{2}$$

de la catégorie scindée des U-faisceaux de groupes sur E, (II 3.4.1.1 (6)) à valeurs dans $\mathrm{LI}(E)$. Celle-ci est un *préchamp* car, si F et G sont deux

objets de $\mathrm{LI}(E)(S)$, $S\in\mathrm{Ob}(E)$, le préfaisceau $\mathsf{Hom}_S(F,G)$ des S-morphismes de F dans G dans la catégorie $\mathrm{LI}(E)$ s'identifie au faisceau $\mathsf{Hex}(F,G)$. Puisque $\mathrm{LI}(E)$ est un préchamp scindé, on obtient un champ associé

$$\mathrm{LI}(E)\to\mathrm{LIEN}(E) \tag{3}$$

en posant

$$\mathrm{LIEN}(E)=\mathsf{KS}(\mathrm{LI}(E)),\qquad \text{cf. (II 2.2.6.1).} \tag{4}$$

En composant (2) et (3) on obtient *un morphisme de champs scindés*

$$\mathsf{lien}(E)\colon\ \mathrm{FAGRSC}(E)\to\mathrm{LIEN}(E). \tag{5}$$

Définition 1.1.6. Soit E un U-site.

(i) Le E-champ scindé $\mathrm{LIEN}(E)$ sera appelé le *champ* des liens sur E, [ou, si besoin est, le champ des U-liens].

(ii) On appellera *lien sur* E une section cartésienne du champ des liens, c'est à dire un objet de la *catégorie* des liens sur E, définie par

$$\mathsf{Lien}(E)=\varprojlim(\mathrm{LIEN}(E)/E). \tag{1}$$

On notera encore $\mathsf{lien}(E)$ le *foncteur*

$$\mathsf{lien}(E)\colon\ \mathsf{Fagr}(E)\to\mathsf{Lien}(E) \tag{2}$$

déduit du morphisme de champs $\mathsf{lien}(E)$, (1.1.5 (5)), par passage aux catégories de sections cartésiennes et composition avec l'équivalence, (II 3.4.2 (i)),

$$\mathsf{Fagr}(E)\xrightarrow{\approx}\varprojlim(\mathrm{FAGRSC}(E)/E). \tag{3}$$

(iii) Pour tout $S\in\mathrm{Ob}(E)$, on appellera *lien sur* S un objet de la catégorie $\mathrm{LIEN}(E)_S$, fibre en S du champ des liens, elle-même appelée *catégorie des liens sur* S.

1.1.6.1. On sous-entendra parfois E dans la notation. Comme toujours, si e est un objet final de E, on a une équivalence de catégories

$$\mathsf{Lien}(E)\to\mathrm{LIEN}(E)_e. \tag{4}$$

1.1.6.2. (Changement d'univers.) Soit U' un univers contenant U. Par définition, $\mathrm{FAGRSC}(E)_{\mathsf{U}}$ est contenue dans $\mathrm{FAGRSC}(E)_{\mathsf{U}'}$ et, par fonctorialité de la construction du champ des liens (I 2.4.5) (II 2.2.2.2), on a un morphisme de champs

$$\mathrm{LIEN}(E)_{\mathsf{U}}\to\mathrm{LIEN}(E)_{\mathsf{U}'} \tag{4}$$

tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{FAGRSC}(E)_{\mathsf{U}} & \longrightarrow & \mathrm{FARGSC}(E)_{\mathsf{U}'} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathsf{lien}(E)_{\mathsf{U}}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathsf{lien}(E)_{\mathsf{U}'}} \\ \mathrm{LIEN}(E)_{\mathsf{U}} & \longrightarrow & \mathrm{LIEN}(E)_{\mathsf{U}'} \end{array} \tag{5}$$

soit commutatif à isomorphisme canonique près. Par passage aux sections, on en déduit un foncteur

$$\mathsf{Lien}(E)_{\mathsf{U}} \to \mathsf{Lien}(E)_{\mathsf{U}'}. \tag{6}$$

Il est aisé de démontrer que (4) (donc (6)) est pleinement fidèle et que l'image essentielle de (6) est formée des liens qui, localement, sont de la forme $\mathsf{lien}(E)_{\mathsf{U}'}(A)$ où A est un U-faisceau de groupes.

Proposition 1.1.7. Soit E un U-site.

(i) Le morphisme de champs $\mathsf{lien}(E)$ de (1.1.5 (5)) est *couvrant* (II 1.4.1).

(ii) Pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$ et tout couple (F, G) de faisceaux de groupes sur $E_{/S}$, le morphisme induit par $\mathsf{lien}(E)$ sur les faisceaux de S-morphismes

$$\mathsf{Hom}(F, G) \to \mathsf{Hom}(\mathsf{lien}(F), \mathsf{lien}(G)) \tag{1}$$

fait du second un quotient $G \backslash \mathsf{Hom}(F, G)$.

1.1.7.1. Puisque $\mathrm{LI}(E)$ est un préchamp, le foncteur $\mathrm{LI}(E) \to \mathrm{LIEN}(E)$, (1.1.5 (3)), est pleinement fidèle, (II 2.1.3 (ii) et 1.4.5) et l'assertion (ii) résulte de la construction de $\mathrm{LI}(E)$.

1.1.7.2. Pour prouver (i) il reste à prouver que $\mathsf{lien}(E)$ est «localement surjectif sur les objets» (condition II 1.4.1 (ii)) car (1) est évidemment un épimorphisme. Or c'est le composé de $\mathrm{LI}(E) \to \mathrm{LIEN}(E)$ qui est bi-couvrant (II 2.1.3 (ii)) et de $\mathrm{FAGRSC}(E) \to \mathrm{LI}(E)$ qui est bijectif sur les objets, d'où ce point.

Corollaire 1.1.7.3. Soit A un faisceau de groupes et soit $L = \mathsf{lien}(A)$ le lien qu'il définit. On a un isomorphisme (1) de faisceaux de groupes

$$\mathsf{Aut}(L) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Out}(A) \tag{1}$$

où $\mathsf{Out}(A)$ est le quotient de $\mathsf{Aut}(A)$ par A opérant par automorphismes intérieurs. L'ensemble des liens localement isomorphes à $\mathsf{lien}(A)$ est isomorphe à

$$H^1(E, \mathsf{Out}(A)). \tag{2}$$

Si B est un faisceau de groupes, pour que les liens $\mathsf{lien}(A)$ et $\mathsf{lien}(B)$ soient isomorphes il faut et il suffit qu'il existe un $\mathsf{Int}(A)$-torseur P tel

que $B \approx {}^P A$, où $\mathsf{Int}(A)$ est le quotient de A par son centre et où ${}^P A$ est obtenu en tordant A par P grâce aux opérations de $\mathsf{Int}(A)$ sur A définies par les automorphismes intérieurs.

La première assertion est un cas particulier de (1.1.7 (ii)). La seconde en résulte par (III 2.5.2). Prouvons la troisième. La condition est suffisante; en effet, si P est un $\mathsf{Int}(A)$-torseur, on a un isomorphisme de liens $\mathsf{lien}({}^P A) \xrightarrow{\sim} {}^P\mathsf{lien}(A)$ d'après (III 2.3.11) et un isomorphisme ${}^P\mathsf{lien}(A) \xrightarrow{\sim} \mathsf{lien}(A)$ car $\mathsf{Int}(A)$ opère trivialement sur $\mathsf{lien}(A)$. Elle est nécessaire, en effet, si u: $\mathsf{lien}(A) \to \mathsf{lien}(B)$ est un isomorphisme de liens, le faisceau $P = \mathsf{Isom}_u(A, B)$ des isomorphismes de groupes qui induisent u est un torseur sous $\mathsf{Int}(A)$ d'après (1.1.7 (ii)). D'après (III 2.3.2), ceci suffit à assurer que B s'obtient en tordant A par P.

Corollaire 1.1.8. Soit E un U-site. Pour tout E-champ X le foncteur de composition

$$\mathsf{Cart}_E(\mathsf{lien}, X)\colon\ \mathsf{Cart}_E(\mathrm{LIEN}, X) \to \mathsf{Cart}_E(\mathrm{FAGRSC}, X) \qquad (1)$$

est pleinement fidèle. Son image essentielle est formée des morphismes de champs x: $\mathrm{FAGRSC}(E) \to X$ qui transforment tout automorphisme intérieur en une flèche identique.

Puisque lien est couvrant, (1) est pleinement fidèle (II 1.4.2). D'autre part, lien transforme tout automorphisme intérieur en une flèche identique, car il en est ainsi de $\mathrm{FAGRSC} \to \mathrm{LI}$. Il reste à montrer qu'un morphisme de champs x: $\mathrm{FAGRSC} \to X$ ayant la propriété de l'énoncé se factorise par LIEN, à isomorphisme près. Par construction de LI, il se factorise par LI, donc par le champ associé, c'est à dire LIEN.

Corollaire 1.1.9. Soit E un U-site et soit x: $\mathrm{FAGRSC} \to X$ un morphisme de champs. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) il existe une E-équivalence L: $\mathrm{LIEN} \to X$ telle que $L.\,\mathsf{Lien}$ soit E-isomorphe à x;

(ii) x est *couvrant* et, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$ et tout couple (F, G) de faisceaux de groupes sur S, le morphisme induit par x sur les faisceaux de S-morphismes

$$\mathsf{Hom}(F, G) \to \mathsf{Hom}_S(x(F), x(G)) \qquad (1)$$

fait du second un quotient $G \backslash \mathsf{Hom}(F, G)$, $(\approx \mathsf{Hex}(F, G))$.

1.1.9.1. D'après (1.1.8), sous les conditions de (i), *L est unique à isomorphisme unique près.* Par (1.1.7), on sait que (i)$\Rightarrow$(ii). Inversement, si on a (ii), x se factorise par LIEN d'après (1.1.8) et $\mathrm{LIEN} \to X$ est bicouvrant d'après (1.1.7), donc une équivalence.

1.1.9.2. D'après ce qui précède, on peut *caractériser le champ des liens à E-équivalence près* par les propriétés de (1.1.9) ou (1.1.8). Le lecteur constatera à l'usage que ce sont les seules que nous utiliserons, le choix que nous avons fait d'un champ scindé étant commode techniquement, sans plus. Dans certains cas, le corollaire précédent nous permettra de donner une description «géométrique» d'un champ équivalent au champ des liens, adaptée à la situation.

Remarque 1.1.10. (Extension à $\hat{E}$.) Avec le champ des liens il s'impose de considérer son extension à $\hat{E}$

$$\mathrm{LIEN}(E)^{+}, \quad (\mathrm{I}\ 3.2.2), \tag{1}$$

dont la fibre en $P \in \mathrm{Ob}(\hat{E})$ est, par définition, la catégorie

$$\mathrm{LIEN}(E)^{+}_{P} = \mathbf{Cart}_{E}(E_{/P}, \mathrm{LIEN}(E)) \approx \varprojlim(\mathrm{LIEN}(E)_{/P}/E_{/P}) \tag{2}$$

des sections cartésiennes de $\mathrm{LIEN}(E)$ au dessus de $E_{/P}$. Un objet de (2) sera appelé *un lien sur P*. Si P est représentable par un $S \in \mathrm{Ob}(E)$, on retrouve à équivalence près la catégorie des liens sur S. Plus précisément, le foncteur «valeur en P»

$$\mathrm{LIEN}(E)^{+}_{P} \dashrightarrow \mathrm{LIEN}(E)_{S}, \quad L \rightsquigarrow L(\mathrm{id}_{P}), \quad (P = \eta(S)), \tag{3}$$

est *une équivalence*; de plus, celle-ci est compatible avec les foncteurs images inverses associés à une flèche $f\colon T \dashrightarrow S$ de E et à son image $\eta(f)$: $\eta(T) \to \eta(S)$ dans $\hat{E}$. En effet, comme pour tout E-champ (I 3.2.3), on a une E-équivalence

$$\mathrm{LIEN}(E)^{+} \times_{\hat{E}} E \to \mathrm{LIEN}(E) \tag{4}$$

dont la restriction aux fibres en S n'est autre que (3).

Remarque 1.1.11. (Extension à $\tilde{E}$.) Pour tout E-champ F, posons

$$F^{*} = F^{+} \times_{\hat{E}} \tilde{E} = i_{\bullet}(F^{+}), \quad (\mathrm{II}\ 3.3.3) \tag{1}$$

d'où un $\tilde{E}$-champ (pour la topologie canonique)

$$\mathrm{LIEN}(E)^{*}. \tag{2}$$

D'après (II 3.4.13 (3)), on a une E-équivalence

$$\mathrm{FAGRSC}(\tilde{E}) \xrightarrow{\approx} \mathrm{FAGRSC}(E)^{*}, \tag{3}$$

d'où, par composition avec le morphisme de champs

$$\mathbf{lien}(E)^{*}\colon\ \mathrm{FAGRSC}(E)^{*} \to \mathrm{LIEN}(E)^{*} \tag{4}$$

déduit de (1.1.5 (5)) par (1), un morphisme de champs

$$\mu\colon \mathrm{FAGRSC}(\tilde{E}) \to \mathrm{LIEN}(E)^*. \tag{5}$$

Celui-ci vérifie les conditions de (1.1.9 (ii)), ce qui prouve l'existence d'une E-équivalence de champs

$$v\colon \mathrm{LIEN}(\tilde{E}) \xrightarrow{\approx} \mathrm{LIEN}(E)^* \tag{6}$$

et d'un isomorphisme

$$\mathsf{l}\colon \mu \xrightarrow{\sim} v \cdot \mathsf{lien}(\tilde{E}), \tag{7}$$

le couple (v, l) étant unique à isomorphisme unique près. Par passage aux fibres en l'objet final de $\tilde{E}$, on trouve une équivalence

$$\mathsf{Lien}(\tilde{E}) \xrightarrow{\approx} \mathsf{Lien}(E) \tag{8}$$

et, d'après (II 1.3.3), pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$, on a une équivalence

$$\mathrm{LIEN}(\tilde{E})_{S'} \xrightarrow{\approx} \mathrm{LIEN}(E)_S, \qquad S' = \varepsilon(S), \tag{9}$$

où $\varepsilon\colon E \to \tilde{E}$ est le foncteur habituel.

Corollaire 1.1.12. Soient E un U-site et $P \in \mathrm{Ob}(\tilde{E})$. On a une équivalence de champs sur $E_{/P}$ (pour la topologie induite (0 3.1.4))

$$\mathrm{LIEN}(E_{/P}) \xrightarrow{\approx} \mathrm{LIEN}(E)_{/P} \tag{1}$$

et une équivalence de catégories

$$\mathsf{Lien}(E_{/P}) \to \mathrm{LIEN}(E)^+_P. \tag{2}$$

1.1.12.1. La source de (1) est le champ des liens sur $E_{/P}$, (1.1.6 (i)), et son but est le champ déduit de $\mathrm{LIEN}(E)$ par le changement de base $E_{/P} \to E$, (I 3.2.1). Autrement dit, *un lien sur P s'interprète comme un lien sur $E_{/P}$.*

1.1.12.2. Remarquons d'abord que l'on a un isomorphisme de champs scindés sur $E_{/P}$

$$\mathrm{FAGRSC}(E_{/P}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{FAGRSC}(E)_{/P}, \qquad \text{(II 3.4.2)}. \tag{3}$$

Or il est immédiat que le morphisme de champs sur $E_{/P}$

$$\mathsf{lien}(E)_{/P}\colon \mathrm{FAGRSC}(E)_{/P} \to \mathrm{LIEN}(E)_{/P} \tag{4}$$

déduit de $\mathsf{lien}(E)$ par le changement de base $E_{/P} \to E$ vérifie les conditions de (1.1.9 (ii)), d'où (3), puis (4) par passage aux fibres en l'objet final id_P de $E_{/P}$. En fait on peut montrer que $\mathrm{LIEN}(E_{/P})$ et $\mathrm{LIEN}(E)_{/P}$ sont canoniquement *isomorphes*, mais cela n'a guère d'intérêt.

Terminologie 1.1.13. Soit $f\colon T\to S$ une flèche de E et soit L un lien sur S. Par analogie avec le cas des faisceaux, l'image inverse de L par f sera appelée la *restriction* de L à T; on la notera souvent L^T ou L^f. De même, si L est un lien sur E, autrement dit une section cartésienne de $\mathrm{LIEN}(E)$, pour tout $S\in\mathrm{Ob}(E)$, on appellera *restriction de L à S* la valeur de L en S, notée $L(S)$ ou encore L^S. D'après (1.1.10), celle-ci s'interprète également comme la restriction à $E_{/S}$ de la section cartésienne L, c'est à dire, (1.1.12), comme un lien sur $E_{/S}$ pour la topologie induite. Les compatibilités désirables sont résumées par les morphismes de champs décrits ci-dessus.

1.2. Propriétés locales des liens

Définition 1.2.1. On appelle *représentant* d'un lien L sur E un couple (A, a) où A est un faisceau de groupes sur E et $a\colon \mathbf{lien}(A)\xrightarrow{\sim} L$ un isomorphisme de liens. On dit qu'un lien L sur E est *représentable* s'il existe un représentant de L. De même un représentant d'un morphisme de liens $f\colon L\to M$ est un (A, a, g, B, b), où (A, a) et (B, b) sont des représentants de L et M et où $g\colon A\to B$ est un morphisme de faisceaux de groupes tel que $b\cdot\mathbf{lien}(g)=f\cdot\mathbf{lien}(a)$.

On notera qu'un morphisme de liens $u\colon L\to M$ peut n'être pas représentable même si L et M le sont. En effet, si F et G sont deux faisceaux de groupes sur E, l'application

$$\mathrm{Hom}(F, G)\to \mathrm{Hex}(F, G)\approx\mathrm{Hom}(\mathbf{lien}(F), \mathbf{lien}(G))$$

induite par le foncteur $\mathbf{lien}(E)$ peut n'être pas surjective car on sait seulement que

$$\mathbf{Hom}(F, G)\to \mathbf{Hex}(F, G)$$

est un épimorphisme de faisceaux, (1.1.7). Bien entendu, la même terminologie est employée pour les diagrammes de la fibre $\mathrm{LIEN}(E)_S$ en $S\in\mathrm{Ob}(E)$ du champ des liens. Ceci dit, d'après (1.1.7), *tout lien est localement représentable* ainsi que tout morphisme de liens.

Exemple 1.2.2. Prenons pour E la catégorie finale munie de la topologie discrète. Un E-champ est simplement une catégorie, le champ des faisceaux de groupes n'est autre que la catégorie des groupes dont l'ensemble sous-jacent appartient à U à partir de laquelle on obtient le champ des liens en identifiant deux morphismes congrus modulo un automorphisme intérieur. Soit D_0 un diagramme de groupes:

$$A \underset{\mathrm{id}_A}{\overset{u}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{i} B, \quad (D_0),$$

où A est invariant dans B, où i est l'inclusion et où u est un automorphisme non intérieur de A induit par un automorphisme intérieur de B. Soit D l'image de D_0 dans la catégorie des liens. Les deux composés possibles sont égaux. L'on ne peut représenter D par un diagramme vérifiant la même condition, car cela signifie que u est intérieur. On notera au passage que $\mathbf{lien}(i)$ *n'est pas un monomorphisme.*

Proposition 1.2.3. (Liens abéliens.)

(i) Pour qu'un lien soit représentable par un faisceau de groupes abéliens il faut et il suffit qu'il le soit localement. On dit alors qu'il est *abélien.*

(ii) Soit $\mathrm{FABSC}(E)$ le champ scindé des faisceaux de groupes abéliens sur E (II 3.4.1.1 (6)). La restriction

$$\mathrm{FABSC}(E) \to \mathrm{LIEN}(E) \tag{1}$$

du morphisme $\mathbf{lien}(E)$: $\mathrm{FAGRSC}(E) \to \mathrm{LIEN}(E)$ induit une *E-équivalence* entre $\mathrm{FABSC}(E)$ et le sous-champ plein $\mathrm{LIAB}(E)$ de $\mathrm{LIEN}(E)$ dont les objets sont les liens abéliens.

Il est immédiat que (1) est pleinement fidèle, que $\mathrm{LIAB}(E)$ est un champ et que $\mathrm{FABSC}(E) \dashrightarrow \mathrm{LIAB}(E)$ est couvrant, d'où (ii) puis (i).

Proposition 1.2.4. (Lien unité.) Le lien représenté par le groupe unité est un objet unité de $\mathbf{Lien}(E)$ (c'est à dire à la fois initial et final).

Evidemment. On l'appelle *lien unité* et on le notera 1. Par abus de langage, si L et M sont deux liens, on notera

$$L \xrightarrow{1} M \tag{1}$$

le morphisme unité, composé du morphisme initial $1 \to M$ et du morphisme final $L \to 1$.

Remarque 1.2.5. (Opposé d'un lien.) En associant à tout faisceau de groupes G son opposé G^0, on définit un automorphisme de champs

$$\mathbf{Op}\colon\ \mathrm{FAGRSC}(E) \to \mathrm{FAGRSC}(E), \qquad \mathbf{Op}(G) = G^0, \tag{1}$$

qui transforme tout automorphisme intérieur en un automorphisme intérieur, (car $\mathbf{Op}$ est l'identité sur les faisceaux d'ensembles sous-jacents). Donc $\mathbf{Op}$ induit un automorphisme de champs $\mathrm{LI}(E) \to \mathrm{LI}(E)$, d'où, par fonctorialité de $(F/E) \rightsquigarrow \mathbf{KS}(F)$, (1.1.5 (4)), (I 2.4.5) et (II 2.2.2), un automorphisme de champs

$$\mathbf{Liop}\colon\ \mathrm{LIEN}(E) \to \mathrm{LIEN}(E) \tag{2}$$

tel que

$$\mathsf{Liop}\cdot\mathsf{lien}(E)=\mathsf{lien}(E)\cdot\mathsf{Op}, \tag{3}$$

(égalité de morphismes de champs). On appellera *opposé* d'un lien L et on notera L^0 son image par le foncteur déduit de Liop par passage aux sections cartésiennes. De plus, on a un isomorphisme de morphisme de champs

$$\mathrm{id}_{\mathbf{FAGRSC}(E)} \xrightarrow{\sim} \mathsf{Op} \tag{4}$$

obtenu en associant à tout faisceau de groupes G l'isomorphisme $G \xrightarrow{\sim} G^0$ défini sur les sections par $x \mapsto x^{-1}$. D'où, par (1.1.8), un isomorphisme canonique de morphismes de champs

$$\mathrm{id}_{\mathbf{LIEN}(E)} \xrightarrow{\sim} \mathsf{Liop} \tag{5}$$

c'est à dire, pour tout lien L sur E un isomorphisme canonique («de *symétrie*»)

$$L \xrightarrow{\sim} L^0 \tag{6}$$

fonctoriel et compatible avec la localisation.

Définition 1.2.6. Soit $u: L \to M$ un morphisme de liens. On dira qu'il est *injectif*, ou *surjectif*, ou *central*, ou *normal* s'il existe un raffinement R de E et, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(R)$, un représentant $u': A' \to B'$ de la restriction u^S de u à S, qui soit un monomorphisme de faisceaux de groupes, ou un épimorphisme, ou qui applique A' dans le centre de B' ou qui soit tel que $u'(A')$ soit invariant dans B'.

On notera que ces conditions sont stables par localisation et de nature locale car si u vérifie l'une d'elles, tout représentant u'' de u vérifie la condition correspondante pour les faisceaux de groupes.

Proposition 1.2.6.1. Pour qu'un morphisme de faisceaux de groupes soit un épimorphisme (resp. monomorphisme) il faut et il suffit qu'il en soit de même du morphisme de faisceaux d'ensembles sous-jacent.

Seul le cas des épimorphismes présente quelque difficulté; par le raisonnement habituel, on voit qu'il suffit de traiter le cas des groupes ordinaires. On utilise l'astuce que voici, qui m'a été communiquée par P. Gabriel mais dont l'auteur m'est inconnu. Montrons qu'un épimorphisme de groupes $i: H \to G$ qui est injectif est un isomorphisme.

Soit h un ensemble. On pose $E = G/H \cup \{h\}$. On définit deux morphismes $r, t: G \rightrightarrows \mathrm{Aut}(E)$, par $r(g)(p(x)) = p(g\,x)$, où $x \in G$ et où $p: G \to G/H$ est la projection, $r(g)(h) = h$, et $t = s\,r\,s$, où s est la permutation de E qui échange les éléments h et $p(e)$, où e est l'élément unité de G. Les restrictions de r et t à H sont égales, ce qui impose que $H = G$.

Proposition 1.2.7. Un morphisme de liens $u: L \to M$

(i) qui est injectif et surjectif est un isomorphisme, et réciproquement,

(ii) qui est surjectif est un épimorphisme (et réciproquement (cf. (1.3.4))),

(iii) qui est central est un monomorphisme si, et seulement si, il est injectif.

L'assertion (i) est évidente. Prouvons (ii). Soit $L \xrightarrow{u} M \underset{w}{\overset{v}{\rightrightarrows}} N$ un diagramme de $\mathbf{Lien}(E)$ avec $v\,u = w\,u$ et u surjectif. Puisque $\mathrm{LIEN}(E)$ est un champ, pour prouver que $u = w$ on peut localiser et représenter le diagramme ci-dessus par un diagramme de $\mathrm{Fagr}(E)$ $A \xrightarrow{a} B \underset{c}{\overset{b}{\rightrightarrows}} C$, à ceci près que l'on est seulement assuré de l'existence d'un automorphisme intérieur I de C tel que $I\,c\,a = b\,a$. Puisque a est un épimorphisme, on en déduit $I\,c = b$, donc $v = w$. Ceci prouve (ii), la réciproque étant assurée par (1.3.4). Par descente, on déduit (iii) du lemme suivant qui assure qu'*un morphisme central dont la source et le but sont représentables est uniquement représentable.*

Lemme 1.2.8. Soient A et B deux faisceaux de groupes. L'application induite par $\mathbf{lien}(E)$

$$\mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(\mathbf{lien}(A), \mathbf{lien}(B))$$

induit une *bijection* entre les sous-ensembles formés des morphismes *centraux*.

Résulte de (1.1.7 (ii)).

Remarque 1.2.9. L'exemple (1.2.2) montre qu'*un morphisme injectif n'est pas en général un monomorphisme de liens* car le foncteur $\mathbf{lien}$ ne transforme pas monomorphismes en monomorphismes. Il en résulte que l'on ne sait rien sur les monomorphismes de liens, voir cependant (4.1.7).

1.3. Quotients de liens

Nous commençons l'étude des catégories fibres du champ des liens par référence à celui des faisceaux de groupes. Le lecteur nous pardonnera d'omettre un sorite sur le recollement de solutions d'un «problème universel de nature locale», les énoncés ci-dessous précisant suffisamment ce qu'il faut entendre par là.

Proposition 1.3.1.

(i) Le conoyau d'un morphisme de liens $u: L \to M$ [i.e. celui du couple $L \underset{1}{\overset{u}{\rightrightarrows}} M$, où 1 est le morphisme unité, (1.2.4 (1))] existe.

(ii) Un conoyau de u reste un conoyau après localisation.

(iii) Le foncteur $\mathsf{lien}\colon \mathsf{Fagr} \to \mathsf{Lien}$ transforme un conoyau en un conoyau.

Corollaire 1.3.2. Soit $L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N$ deux morphismes de liens. Les conditions suivantes sont équivalentes

(i) v est un conoyau de u

(ii) pour tout lien X le diagramme de *faisceaux* d'ensembles

$$\mathsf{Hom}(N, X) \xrightarrow{\mathsf{v}} \mathsf{Hom}(M, X) \underset{\mathsf{1}}{\overset{\mathsf{u}}{\rightrightarrows}} \mathsf{Hom}(L, X)$$

est *exact*, où v, u et $\mathsf{1}$ sont induits par la composition avec u, v et le morphisme unité.

1.3.3.1. Par passage aux sections, l'assertion (ii) du corollaire entraine (i). La réciproque résulte de l'assertion (ii) de la proposition.

1.3.3.2. Prouvons (1.3.1 (iii)). Pour cela, considérons deux morphismes de faisceaux de groupes $A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C$ tels que b soit le conoyau de a et prouvons que leurs images

$$u = \mathsf{lien}(a), \quad v = \mathsf{lien}(b), \quad L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N, \tag{1}$$

vérifient (1.3.2 (ii)). Cette condition est locale car les Hom sont des faisceaux et, dans Fagr, les conoyaux sont stables par localisation. On peut donc supposer que X est représenté par un faisceau de groupes G. Il reste à prouver que la suite de faisceaux d'ensembles

$$\mathsf{Hex}(C, G) \xrightarrow{\mathsf{b}} \mathsf{Hex}(B, G) \underset{\mathsf{1}}{\overset{\mathsf{a}}{\rightrightarrows}} \mathsf{Hex}(A, G) \tag{2}$$

est exacte. On sait que b est un épimorphisme de faisceaux donc v un épimorphisme de liens, donc b un *monomorphisme*, (cf. 1.2.7 (ii)). De plus, si $\mathsf{x} \in \mathrm{Hex}(B, G)$ vérifie $\mathsf{x}\,u = 1$, tout représentant x de x vérifie $x\,a = 1$, car, localement, il existe une section g de G avec $\mathrm{Int}(g)\,x\,a = 1$. D'où l'exactitude de (2).

1.3.3.3. On en déduit trivialement que le conoyau d'un morphisme *représentable* existe et est stable par localisation. Prouvons maintenant l'assertion (i) de la proposition. Par définition, $u\colon L \to M$ est un morphisme de sections cartésiennes du champ des liens, $\mathrm{LIEN}(E)$. Soit R le raffinement de E tel que, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(R)$, la valeur en S de u, $u(S)\colon L(S) \to M(S)$ soit représentable. Pour tout $S \in \mathrm{Ob}(R)$ choisissons un conoyau $v(S)\colon M(S) \to N(S)$ de $u(S)$ (dans la fibre $\mathrm{LIEN}(E)_S$). Pour toute flèche

$f\colon T\to S$ de R on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} L(S) & \xrightarrow{u(S)} & M(S) & \xrightarrow{v(S)} & N(S) \\ {\scriptstyle L(f)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle M(f)} & & \\ L(T) & \xrightarrow[u(T)]{} & M(T) & \xrightarrow[v(T)]{} & N(T) \end{array} \tag{3}$$

où $L(f)$ et $M(f)$ sont cartésiens. Puisque $u(S)$ est représentable, l'image inverse de $v(S)$ par f est un conoyau de $u(T)$, d'où un unique morphisme f-cartésien

$$N(f)\colon\ N(T)\dashrightarrow N(S)$$

tel que $N(f)\,v(T)=v(S)\,M(f)$. D'où une section cartésienne N de $\mathrm{LIEN}(E)$ sur R et un morphisme $v\colon M^R\to N$, dont on montre aisément que c'est un conoyau (dans la catégorie $\mathbf{Cart}_E(R, \mathrm{LIEN}(E))$) de la restriction $u^R\colon L^R\to M^R$ de u à R. Puisque $\mathrm{LIEN}(E)$ est un champ, le foncteur restriction

$$\mathbf{Cart}_E(E, \mathrm{LIEN}(E))\to \mathbf{Cart}_E(R, \mathrm{LIEN}(E))$$

est une équivalence, d'où la conclusion, i.e. (1.3.1 (i)). Ce dernier argument prouve également (1.3.1 (ii)) car on en déduit que v est un conoyau de u pourvu qu'il en soit ainsi localement.

1.3.3.4. On remarquera que le conoyau d'un couple quelconque $L\overset{u'}{\underset{u}{\rightrightarrows}}M$ de morphismes de liens *n'existe pas* en général, cf. la fin de (1.3.3.2).

Corollaire 1.3.4. Soit $u\colon L\to M$ un morphisme de liens. Les conditions suivantes sont équivalentes

(i) u est un épimorphisme de liens
(ii) u est localement un épimorphisme de liens
(iii) u est surjectif.

De plus, sous ces conditions, u est *normal*.

Considérer le conoyau de u.

Corollaire 1.3.5. Soient A un faisceau de groupes et $u\colon L\to M$, $M=\mathbf{lien}(A)$, un morphisme de liens. Le foncteur qui, à tout faisceau de groupes X, associe

$$\{x\in\mathrm{Hom}(A, X)\,|\,\mathbf{lien}(x)\cdot u=1\}$$

est représentable (par un faisceau de groupes, évidemment).

Le problème est de nature locale et l'on peut supposer que u est représenté par un morphisme $a\colon B\to A$; auquel cas la condition $\mathbf{lien}(x)\cdot u=1$

équivaut à $x\,a=1$ ce qui prouve que le foncteur est représentable par le conoyau de a.

Corollaire 1.3.6. (Plus grand quotient abélien.) Soit L un lien. Le foncteur qui, à tout faisceau de groupes abéliens A, associe l'ensemble

$$\mathrm{Hom}(L, \mathsf{lien}(A))$$

est représentable (par un faisceau de groupes abéliens, évidemment).

Même démonstration (1.2.3) et (1.2.8); on peut également invoquer le corollaire ci-dessous.

Corollaire 1.3.7. Soit L un lien. Supposons donnés un raffinement R de E et, pour tout $S\in\mathrm{Ob}(R)$ et tout représentant $(A, u\colon \mathsf{lien}(A)\cdot \xrightarrow{\sim} L^S)$ de la restriction de L à S, *un sous-faisceau de groupes* A_0 *de* A, de telle sorte que

(i) pour tout $S\in\mathrm{Ob}(R)$ et tout isomorphisme $i\colon (A,u) \to (A',u')$ de représentants de L^S on ait

$$i(A_0)=A'_0, \tag{1}$$

(ii) pour toute flèche $f\colon T\to S$ de R et tout représentant (A,u) de L^S, le sous-faisceau de groupes attaché à la restriction (A^T,u^T) de (A,u) à T soit la restriction de celui attaché à (A,u).

Alors le foncteur qui, à tout lien X associe l'ensemble

$$M(X) \tag{2}$$

des $x\in\mathrm{Hom}(L,X)$ tels que, pour tout $S\in\mathrm{Ob}(R)$ et tout représentant (A,u) de L^S, le composé

$$\mathsf{lien}(A)\xrightarrow{\mathsf{lien}(u)} L^S \xrightarrow{x^S} X^S \tag{3}$$

soit le morphisme unité, est *représentable*, (par un lien, évidemment).

1.3.7.1. Bien entendu, le problème est de nature locale et l'on peut supposer L représentable, auquel cas le corollaire résulte aisément de (1.3.1 (iii)), car le quotient $\mathsf{lien}(A/A_0)$, où A représente L, convient évidemment, (noter que A_0 est invariant dans A d'après (i)).

1.3.7.2. Soit $(S_i)_{i\in I}$ une famille d'objets de E engendrant le raffinement R et soit, pour tout $i\in I$, un représentant A^i de la restriction L^i de L à S_i. Les sous-faisceaux de groupes A^i_0 attachés aux A^i suffisent à déterminer le foncteur (2) et donc le lien qu'il représente. Nous laissons au lecteur

le soin de traduire les conditions (i) et (ii) en termes des A^i et de leurs restrictions aux produits $S_i \times S_j$ et $S_i \times S_j \times S_k$.

1.4. Produits finis de liens

Proposition 1.4.1. (i) Les produits finis existent dans la catégorie des liens (et dans les fibres du champ des liens).

(ii) Le foncteur restriction à un objet du site (1.1.13) commute aux produits finis.

(iii) Le foncteur **lien**: **Fagr** $\to$ **Lien** commute aux produits finis.

Commentaire 1.4.1.1. L'assertion (ii) montre que, si L et M sont des liens, pour tout lien X, les projections structurales du produit $L \times M$ définissent un isomorphisme de *faisceaux*

$$\mathsf{Hom}(X, L \times M) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Hom}(X, L) \times \mathsf{Hom}(X, M). \tag{1}$$

Bien entendu, inversement, cette propriété caractérise le produit. Si $(a, b) \in \mathrm{Hom}(X, L) \times \mathrm{Hom}(X, M)$, on désignera encore par

$$(a, b): X \to L \times M \tag{2}$$

le morphisme correspondant. Comme à l'ordinaire, si $a: L \to L'$ et $b: M \to M'$ sont des morphismes de liens, on désignera par

$$a \times b: L \times M \to L' \times M' \tag{3}$$

le morphisme défini de manière évidente.

1.4.1.2. Prouvons (iii). Soient F et G deux faisceaux de groupes, L et M les liens qu'ils représentent et $L \times M$ le lien représenté par le produit $F \times G$. Nous devons prouver que, pour tout lien X, le morphisme (1) est un isomorphisme. Pour les faisceaux, le foncteur restriction à un objet du site commute aux produits finis. On peut donc localiser et supposer X représentable. Il est immédiat que (1) est un épimorphisme de faisceaux. Pour prouver que c'est un monomorphisme (donc un isomorphisme) il suffit de noter que si $a, b: A \rightrightarrows F \times G$ sont deux morphismes de faisceaux de groupes et s'il existe des sections f et g de F et G telles que

$$\mathrm{Int}(f) \cdot \mathrm{pr}_1 \cdot a = \mathrm{pr}_1 \cdot b \qquad \mathrm{Int}(g) \cdot \mathrm{pr}_2 \cdot a = \mathrm{pr}_2 \cdot b$$

on a trivialement $\mathrm{Int}(f, g)\, a = b$. On en déduit (ii) pour des liens représentables, d'où (i) et (ii) par descente.

1.4.1.3. Il est immédiat qu'un diagramme $L \leftarrow P \to M$ est un produit si, et seulement si, il en est ainsi localement.

Remarque 1.4.2. $(L_i)_{i\in I}$, I fini, est une famille de liens, par la propriété universelle on a des morphismes

$$\mathrm{inj}_i\colon\ L_i\to\prod_{i\in I}L_i, \tag{1}$$

définis par

$$\mathrm{pr}_j\cdot\mathrm{inj}_i=1\quad\text{si}\quad i\neq j,\qquad \mathrm{pr}_i\cdot\mathrm{inj}_i=\mathrm{id}_{L_i}, \tag{2}$$

où 1 est le morphisme unité. Si L, M et X sont des liens, on a ainsi une application

$$\mathrm{Hom}(L\times M, X)\to\mathrm{Hom}(L, X)\times\mathrm{Hom}(M, X) \tag{3}$$

mais elle n'est pas toujours injective, et la propriété habituelle pour les morphismes de groupes ne s'étend pas

On a cependant un résultat partiel.

Proposition 1.4.3. Soient $u\colon L\to X$ et $v\colon M\to X$ des morphismes de liens. Supposons que u soit *central*. Il existe un unique morphisme de liens

$$u+v\colon\ L\times M\dashrightarrow X \tag{1}$$

tel que

$$(u+v)\cdot\mathrm{inj}_1=u\qquad(u+v)\cdot\mathrm{inj}_2=v. \tag{2}$$

Si, de plus, u et v sont centraux il en est de même de $u+$v.

La preuve est immédiate en localisant: utiliser (1.2.8).

1.5. Centralisateur d'un morphisme de liens

Définition 1.5.1. Soit $u\colon L\to M$ un morphisme de liens. On appelle centralisateur de u un représentant du foncteur (contravariant) qui, à tout lien X, associe l'ensemble

$$C_u(X)=\{x\in\mathrm{Hom}(L\times X, M),\ x\cdot\mathrm{inj}_1=u\}. \tag{1}$$

1.5.1.1. Un centralisateur de u est donc un couple (C_u, c_u), où C_u est un lien et $c_u\colon L\times C_u\to M$ un morphisme de liens, tel que, pour tout lien X, l'application

$$c\colon\ \mathrm{Hom}(X, C_u)\to\mathrm{Hom}(L\times X, M),\qquad c(x)=c_u\cdot(\mathrm{id}_L\times x), \tag{2}$$

induise une bijection

$$\mathrm{Hom}(X, C_u)\xrightarrow{\sim}C_u(X). \tag{3}$$

1.5.1.2. Bien entendu on a une application

$$d\colon\ C_u(X)\to\mathrm{Hom}(X, M),\qquad d(x)=x\cdot\mathrm{inj}_2, \tag{4}$$

et $d(x)$ «commute» à u en un sens que le lecteur précisera. Mais cette application *n'est pas injective* en général (1.4.2). On se gardera donc de croire qu'un morphisme $X \to C_u$ est défini par un morphisme $X \to M$ qui «commute à u». De même, γ_u *ne détermine pas* c_u, (1.5.2 (2)).

Proposition 1.5.2. Soit $u\colon L \to M$ un morphisme de liens.

(i) Il existe un centralisateur $(C_u, c_u\colon L \times C_u \to M)$ de u. On a

$$c_u \cdot \mathrm{inj}_1 = u \tag{1}$$

et le morphisme

$$\gamma_u\colon\ C_u \to M, \qquad \gamma_u = c_u \cdot \mathrm{inj}_2, \tag{2}$$

est *injectif.*

(ii) Pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$, la restriction de (C_u, c_u) à S est un centralisateur de celle de u.

(iii) Si $a\colon A \to B$ est un représentant de u, si C_a est un centralisateur de a, (au sens des faisceaux de groupes), si

$$\gamma_a\colon\ C_a \to B \tag{3}$$

est l'injection canonique et si l'on pose

$$c_a = u + \gamma_a, \qquad c_a\colon\ A \times C_a \to B, \tag{4}$$

alors

$$(C_u, c_u) = (\mathsf{lien}(C_a), \mathsf{lien}(c_a)) \tag{5}$$

est un centralisateur de u.

(iv) Pour que (C_u, c_u) soit un centralisateur de u il faut et il suffit qu'il en soit ainsi localement.

Par un raisonnement facile de descente, il suffit de prouver (iii). Soit X un lien. Par passage aux faisceaux, l'application (1.5.1 (3)) fournit un morphisme de faisceaux

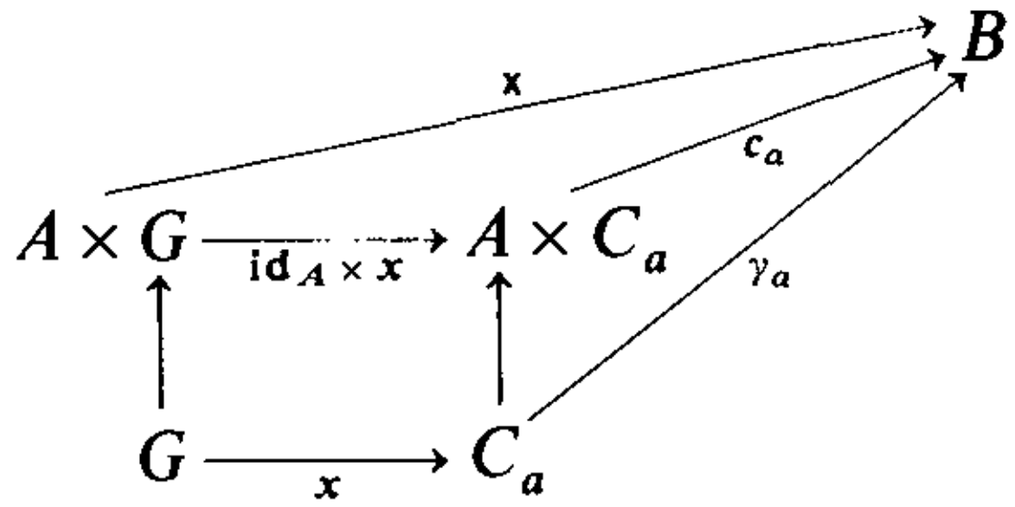
$$\mathsf{Hom}(X, C_u) \to \mathsf{C}_u(X). \tag{6}$$

Nous devons prouver que c'est un isomorphisme. La question est locale, on peut donc supposer que X est représentable par un faisceau de groupes G. Prouvons que (6) est un monomorphisme. Cela résulte aisément de l'énoncé suivant que nous allons prouver. Soient $x, y\colon G \rightrightarrows C_a$ deux morphismes de faisceaux de groupes tels qu'il existe une section m de B avec

$$\mathrm{Int}(m) \cdot c_a \cdot (\mathrm{id}_A \times x) = c_a \cdot (\mathrm{id}_A \times y) \tag{7}$$

alors il existe une section n de C_a telle que

$$\mathrm{Int}(n)\cdot x = y. \tag{8}$$



Par composition avec $\mathrm{inj}_1 : A \to A\times G$ on déduit de (7) que $\mathrm{Int}(m)\cdot a = a$. Puisque C_a est le centralisateur de a, il en résulte l'existence d'une section n de C_a telle que $m=\gamma_a(n)$. Par composition avec $\mathrm{inj}_2 : G\to A\times G$, on en déduit

$$\mathrm{Int}\big(\gamma_a(n)\big)\cdot\gamma_a\cdot x=\gamma_a\cdot y, \tag{9}$$

d'où la conclusion, car γ_a est un monomorphisme de faisceaux de groupes. Prouvons maintenant que (6) est un épimorphisme de faisceaux. Soit x une section de $\mathsf{C}_u(X)$, nous devons prouver qu'elle appartient *localement* à l'image de (6) et nous pouvons donc supposer qu'elle est représentable par un morphisme de faisceaux de groupes x: $A\times G\to B$ tel qu'il existe une section m de B avec

$$\mathrm{Int}(m)\cdot\mathsf{x}\cdot\mathrm{inj}_1 = a \qquad (\mathrm{inj}_1 :\ A \dashrightarrow A\times G). \tag{10}$$

En fait, $\mathrm{Int}(m)\,\mathsf{x}$ représente aussi x et l'on peut supposer que $\mathsf{x}\cdot\mathrm{inj}_1 = a$. Il en résulte immédiatement que $\mathsf{x}\cdot\mathrm{inj}_2$ ($\mathrm{inj}_2 :\ G\to A\times G$) centralise a donc qu'il existe un morphisme

$$x :\ G\to C_a \tag{11}$$

tel que $\gamma_a\cdot x = \mathsf{x}\cdot\mathrm{inj}_2$. Puisque x et a commutent on en déduit que $\mathsf{x} = a+(\gamma_a\cdot x) = c_a\cdot(\mathrm{id}_A\times x)$, d'où la conclusion.

Corollaire 1.5.3. (Centre d'un lien.) Soit L un lien.

(i) Le foncteur qui, à tout lien X associe l'ensemble $C_L(X)$ des morphismes centraux de X dans L est représentable.

(ii) Soit $(C_L, \gamma_L :\ C_L \dashrightarrow L)$ un représentant du foncteur $C_L(X)$. Le lien C_L est abélien et le morphisme γ_L est injectif et central. De plus, si on pose

$$c_L = \mathrm{id}_L+\gamma_L, \qquad c_L :\ L\times C_L\to L, \tag{1}$$

(ce que (1.4.3) autorise), le couple (C_L, c_L) est un centralisateur du morphisme identique de L.

(iii) Si L est représenté par un faisceau de groupes G, le centre de G représente C_L.

1.5.3.1. Ce corollaire peut se démontrer directement mais on le déduit immédiatement de la proposition précédente en considérant le centralisateur (C_L, c_L) de id_L, en posant

$$\gamma_L = c_L \cdot \mathrm{inj}_2 \tag{2}$$

et en utilisant (1.4.3).

1.5.3.2. Sous les conditions de (ii), on dit que (C_L, c_L) est *le centre* de L. D'après (1.2.3), «c'est» un faisceau de groupes abéliens. Plus précisément, le foncteur qui, à tout faisceau de groupes abéliens A, associe l'ensemble $C_L(\mathbf{lien}(A))$ des morphismes centraux $\mathbf{lien}(A) \to L$ est représentable par un faisceau de groupes abéliens C'_L et l'on a un isomorphisme canonique $\mathbf{lien}(C'_L) \xrightarrow{\sim} C_L$.

Corollaire 1.5.4. (Fonctorialité du centralisateur.) Soient $L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N$ des morphismes de liens et soient respectivement (C_u, c_u), (C_v, c_v) et (C_{vu}, c_{vu}) des centralisateurs de u, v et vu.

(i) Par la propriété universelle de C_{vu}, le composé

$$L \times C_u \times C_v \xrightarrow{c_u \times \mathrm{id}_{C_v}} M \times C_v \xrightarrow{c_v} N \tag{1}$$

détermine un morphisme de liens

$$c_{u,v}\colon\ C_u \times C_v \to C_{vu}. \tag{2}$$

(ii) On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{v} & N & & \\ {\scriptstyle\gamma_u}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\gamma_{vu}} & \nwarrow^{\gamma_v} & \\ C_u & \xrightarrow[i]{} & C_{vu} & \xleftarrow[j]{} & C_v \end{array} \tag{3}$$

où l'on a posé

$$i = c_{u,v} \cdot \mathrm{inj}_1 \quad \text{et} \quad j = c_{u,v} \cdot \mathrm{inj}_2. \tag{4}$$

De plus, j est injectif.

La preuve est évidente. Si u et v sont représentés, on décrit aisément le diagramme qui représente (3). Notons que pour tout morphisme de liens $u\colon L \to M$ on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} L & \xrightarrow{u} & M & & \\ {\scriptstyle\gamma_L}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\gamma_u} & \nwarrow^{\gamma_M} & \\ C_L & \xrightarrow[l]{} & C_u & \xleftarrow{m} & C_M \end{array} \tag{5}$$

où l (resp. m) est l'analogue de i (resp. j) pour le composé $u \cdot \mathrm{id}_L$ (resp. $\mathrm{id}_M \cdot u$).

Corollaire 1.5.5. Soit $u: L \to M$ un morphisme de liens.

(i) Les conditions suivantes sont équivalentes

(a) u est central

(b) $\gamma_u: C_u \to M$ est un isomorphisme

(c) $(M, \mathrm{pr}_2: L \times M \to M)$ est un centralisateur de u.

(ii) Si u est normal il en est de même de $\gamma_u: C_u \to M$

(iii) Si u est un épimorphisme (i.e. surjectif), pour tout morphisme de liens $v: M \to N$ le morphisme $C_v \to C_{vu}$ est un isomorphisme et, en particulier, $C_M \to C_u$ est un isomorphisme.

La démonstration est laissée au lecteur.

Remarque 1.5.6. On dira qu'un morphisme de liens $u: L \to M$ *respecte les centres* s'il existe un morphisme $v: C_L \to C_M$ tel que $\gamma_M \cdot v = u \cdot \gamma_L$, (1.5.3). On notera que v est nécessairement unique car γ_M est un monomorphisme (1.2.7); on dira que v est le morphisme induit par u sur les centres.

Lemme 1.5.7. Soit $u: L \to M$ un morphisme de liens, soit $(C_u, c_u: L \times C_u \to M)$ le centralisateur de u, soit $x: X \to C_u$ un morphisme de liens et soit enfin

$$s = c_u \cdot (\mathrm{id}_L \times x), \qquad s: L \times X \to M, \tag{1}$$

le morphisme correspondant à x par la propriété universelle de C_u. On a un isomorphisme

$$i: C_x \xrightarrow{\sim} C_s \tag{2}$$

caractérisé par

$$c_s \cdot (\mathrm{id}_{L \times X} \times i) = c_u \cdot (\mathrm{id}_L \times c_x), \tag{3}$$

où (C_s, c_s) et (C_x, c_x) sont les centralisateurs de s et x.

1.5.7.1. Ce lemme n'est que la généralisation aux liens de la formule $C_{a+b} = C_a \cap C_b$, où $a+b: A \times B \to D$ est un morphisme de groupes (ordinaires), où C_a et C_b sont les centralisateurs de $a: A \to D$ et $b: B \to D$ et où C_{a+b} est le centralisateur de $a+b$.

1.5.7.2. Par définition, C_x représente le foncteur qui, à tout lien V associe

$$C_x(V) = \{v: X \times V \to C_u,\ v \cdot \mathrm{inj}_X = x\}. \tag{4}$$

Par la propriété universelle de C_u, on a un isomorphisme de foncteurs en V

$$C_x(V) \xrightarrow{\sim} C'_s(V), \qquad v \rightsquigarrow c_u \cdot (\mathrm{id}_L \times v), \tag{5}$$

où l'on a posé

$$C'_s(V) = \{w\colon\ L \times X \times V \to M,\ w \cdot \mathrm{inj}_L = u, w \cdot \mathrm{inj}_{L\times X} = s\}\,. \tag{6}$$

En effet, la seconde condition de (6) traduit la condition de (4) comme on voit immédiatement. Or il est immédiat que la première condition de (6) résulte de la seconde donc C'_s est égal au foncteur représenté par C_s. D'où l'existence de l'isomorphisme i qui vérifie (3) d'après (5). Enfin (3) caractérise i d'après la propriété universelle de C_s.

1.6. Le produit contracté $L \overset{c}{\wedge} M$ de deux liens

Définition 1.6.1. Soient $u\colon C \to L$ et $v\colon C \to M$ deux morphismes de liens. On appelle produit contracté et l'on note $L \overset{c}{\wedge} M$ le conoyau du couple

$$(u, 1), (1, v)\colon\ C \rightrightarrows L \times M\,, \tag{1}$$

où 1 désigne le morphisme unité et $L \times M$ le produit.

1.6.1.1. Le conoyau d'un couple n'existe pas toujours. Pourtant, si l'on suppose que v est *central* il est immédiat que le conoyau de (1) est égal à celui du morphisme

$$(u, v^{-1})\colon\ C \to L \times M\,, \tag{2}$$

où v^{-1} est défini par référence au cas des faisceaux (où l'on pose $v^{-1}(x) = v(x)^{-1}$). *Le produit contracté existe donc si v (ou u) est central.*

1.6.1.2. Bien entendu, la notation $L \overset{c}{\wedge} M$ est abusive car le conoyau comporte également la donnée d'un morphisme

$$\pi\colon\ L \times M \to L \overset{c}{\wedge} M\,. \tag{3}$$

Si v est central, pour tout morphisme de liens $x\colon L \times M \to X$ tel que $x(u, v^{-1}) = 1$, il existe un unique morphisme $y\colon L \overset{c}{\wedge} M \to X$ tel que $y\pi = x$.

1.6.1.3. Bien entendu, si v est central, le produit contracté est stable par localisation, car il en est ainsi du produit et du conoyau. De plus, si $a\colon Z \to A$ et $b\colon Z \to B$ sont des morphismes de faisceaux de groupes représentant u et v on a un isomorphisme canonique

$$\mathsf{lien}(A \overset{z}{\wedge} B) \approx L \overset{c}{\wedge} M\,, \tag{4}$$

en définissant de manière analogue le produit contracté $A \overset{Z}{\wedge} B$ pour des faisceaux de groupes. On se gardera de croire que le produit contracté soit une somme amalgamée. Ceci est pourtant vrai si L, M et C sont des liens *abéliens*.

Exemple 1.6.2. Soit $u: C \to L$ un morphisme de liens *central*. Le morphisme $u + \mathrm{id}_L: C \times L \to L$ induit un isomorphisme

$$C \overset{C}{\wedge} L \xrightarrow{\sim} L, \tag{1}$$

où le produit contracté est relatif au couple (id_C, u).

Puisque u est central, le morphisme $u + \mathrm{id}_L$ existe, (cf. 1.4.3) et il suffit de prouver que c'est un conoyau de $(\mathrm{id}_C, u^{-1}): C \dashrightarrow C \times L$, ce qui est trivial par réduction au cas des faisceaux.

Proposition 1.6.3. Soient $u: C \to L$ et $v: C \to M$ deux morphismes de liens.

(i) Si u et v sont *centraux*, $(u, v^{-1}): C \dashrightarrow L \times M$. est *normal*. La réciproque est vraie si u et v sont injectifs.

(ii) Si u ou v est central, la symétrie $L \times M \approx M \times L$ induit un isomorphisme

$$L \overset{C}{\wedge} M \approx M \overset{C}{\wedge} L. \tag{1}$$

(iii) Si v est central et si $w: C \to N$ est un morphisme de liens, on a un isomorphisme canonique

$$(L \overset{C}{\wedge} M) \overset{C}{\wedge} N \approx L \overset{C}{\wedge} (M \overset{C}{\wedge} N) \tag{2}$$

où le composé

$$C \xrightarrow{(1,v)} L \times M \xrightarrow{p} L \overset{C}{\wedge} M \qquad [\text{resp. } C \xrightarrow{(v,1)} M \times N \xrightarrow{p} M \overset{C}{\wedge} N]$$

sert à définir le premier (resp. second) produit.

Bien entendu, (i) est locale et se prouve pour des morphismes de faisceaux de groupes. (ii) résulte du fait que $L \overset{C}{\wedge} M$ est le conoyau du couple (1.6.1 (1)). Quant à (iii), il suffit de prouver que les deux termes de (3) s'identifient à la limite inductive du diagramme

$$(u, 1, 1),\ (1, v, 1),\ (1, 1, w): \ C \rightrightarrows L \times M \times N.$$

Proposition 1.6.4. Soit un diagramme commutatif de morphismes de liens

$$\begin{array}{ccccc} L & \xleftarrow{a} & C & \xrightarrow{b} & M \\ {\scriptstyle u}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle f} & & \uparrow{\scriptstyle v} \\ L' & \xleftarrow[a']{} & C' & \xrightarrow[b']{} & M' \end{array} \tag{1}$$

tel que a et b soient *centraux* et *injectifs* et tel que le produit contracté $L' \overset{C'}{\wedge} M'$ existe et reste un produit contracté après localisation (par exemple a' ou b' est central). Le morphisme naturel

$$C_u \overset{C}{\wedge} C_v \to C_w \tag{2}$$

est un isomorphisme, où $w: L' \overset{C'}{\wedge} M' \to L \overset{C}{\wedge} M$ est le morphisme déduit de $u \times v: L' \times M' \to L \times M$ et où C_u, C_v et C_w sont les centralisateurs de u, v et w.

1.6.4.1. Soient $p: L \times M \to L \overset{C}{\wedge} M$ et $p': L' \times M' \to L' \overset{C'}{\wedge} M'$ les projections naturelles. Le morphisme w est défini par

$$w \cdot p' = p \cdot (u \times v). \tag{3}$$

Si l'on note t le composé (3), on a des morphismes

$$C_{u \times v} \to C_t \xleftarrow{\sim} C_w, \tag{4}$$

celui de gauche étant induit par p et celui de droite par p', (1.5.4 (ii)); ce dernier est un *isomorphisme* car p' est surjectif. Par ailleurs, on a un isomorphisme évident $C_u \times C_v \xleftarrow{\sim} C_{u \times v}$, d'où un morphisme canonique

$$C_u \times C_v \to C_w. \tag{5}$$

Puisque a et b sont centraux, on a des morphismes centraux

$$\alpha: C \to C_u \quad \text{et} \quad \beta: C \to C_v \tag{6}$$

et il reste à démontrer que (5) est le conoyau du morphisme

$$(\alpha, \beta^{-1}): C \to C_u \times C_v. \tag{7}$$

1.6.4.2. D'après (1.3.1) et (1.5.2), on peut localiser, représenter (1) par un diagramme commutatif de Groupes (noté de la même façon), tel que a et b soient des monomorphismes centraux et il reste à montrer que le morphisme de Groupes (5) est un conoyau du morphisme de Groupes (7), où l'on a noté de la même façon les constructions précédentes effectuées dans la catégorie des Groupes. Il est immédiat que le noyau de (5) est (7) et il suffit de prouver que (5) est un épimorphisme.

Soit s une section de $C_w \subset L \overset{C}{\wedge} M$. Puisque p est un épimorphisme, il existe localement une section (x, y) de $L \times M$ telle que $p(x, y) = s$. Montrons que x appartient nécessairement à C_u. Pour toute section $(x', 1)$ de $L' \times M'$, on doit avoir

$$p\big(x\, u(x')\, x^{-1}\, u(x')^{-1}, 1\big) = 1 \qquad (\text{dans } L \overset{C}{\wedge} M),$$

donc il existe une section c de C telle que

$$b(c)=1 \quad \text{et} \quad a(c)=x\,u(x')\,x^{-1}\,u(x')^{-1};$$

puisque b est un *monomorphisme*, on a $c=1$, donc x est une section de C_u et, par symétrie, y est une section de C_v. D'où la conclusion.

Remarque 1.6.5. La dernière partie de la démonstration prouve que, si v est *central*, on peut abandonner l'hypothèse que a est injectif.

Corollaire 1.6.6. Soient $a\colon C\to L$ et $b\colon C\to M$ deux morphismes de liens. Supposons les centraux et soient $a'\colon C\to C_L$ et $b'\colon C\to C_M$ leurs factorisations naturelles par les centres de L et M.

(i) Si b est *injectif*, le composé

$$L\xrightarrow{\text{inj}_1} L\times M\xrightarrow{p} L\overset{\mathcal{C}}{\wedge} M, \tag{1}$$

où p est la projection, est *injectif* et son centralisateur est $C_L\overset{\mathcal{C}}{\wedge} M$.

(ii) Le morphisme naturel

$$C_L\overset{\mathcal{C}}{\wedge} C_M\to L\overset{\mathcal{C}}{\wedge} M \tag{2}$$

est *central*. Si a et b sont injectifs, il induit un isomorphisme entre $C_L\overset{\mathcal{C}}{\wedge} C_M$ et le centre de $L\overset{\mathcal{C}}{\wedge} M$.

Il est immédiat que (1) est injectif; par ailleurs, il s'identifie au morphisme $L\overset{\mathcal{C}}{\wedge} C\to L\overset{\mathcal{C}}{\wedge} M$ grâce à l'isomorphisme $L\approx L\overset{\mathcal{C}}{\wedge} C$ de (1.6.2), d'où l'on déduit (i) par (1.6.5). De même, (ii) résulte immédiatement de (1.6.6). On notera que (ii) signifie que le centre d'un produit contracté est le produit contracté des centres. L'hypothèse que a et b sont injectifs est alors essentielle car, si $M=1$ et si $C=C_L$, on trouve $L\overset{\mathcal{C}}{\wedge} M=L/C$ et $C_L\overset{\mathcal{C}}{\wedge} C_M=1$, mais L/C peut avoir un centre non trivial.

§ 2. Gerbes liées

2.1. Opérations d'un lien sur un champ

2.1.1. Soit F un E-champ vérifiant $(\mathsf{U}-P)$, c'est à dire dont les fibres sont des U-catégories. En composant les morphismes de champs (II 3.5.2 (4)) et (1.1.5 (5))

$$F^{\text{cart}}\to \text{FAGRSC}(E)\xrightarrow{\text{lien}(E)} \text{LIEN}(E)$$

on obtient un morphisme de champs

$$\text{liau}(F)\colon\ F^{\text{cart}}\to \text{LIEN}(E) \tag{1}$$

qui, à tout objet x de F de projection $S\in\mathrm{Ob}(E)$, associe

$$\mathsf{liau}(F)(x)=\mathsf{lien}\big(\mathsf{Aut}_S(x)\big), \tag{2}$$

c'est à dire le lien représenté par le faisceau des S-automorphismes de x, et à tout *S-isomorphisme* $m\colon x\to y$ de F, $S\in\mathrm{Ob}(E)$, le morphisme

$$\mathsf{liau}(F)(m)=\mathsf{lien}\big(\mathrm{Int}(m)\big), \quad (\text{II } 3.5.2\,(3)). \tag{3}$$

Par définition du champ des liens, si $m, n\colon x \rightrightarrows y$ sont deux S-isomorphismes de F, on a

$$\mathsf{liau}(F)(m)=\mathsf{liau}(F)(n), \tag{4}$$

car le foncteur lien transforme tout automorphisme intérieur en une flèche identique.

2.1.2. Soit $m\colon F\to G$ un morphisme de champs. On a un morphisme de morphismes de champs

$$\mathsf{liau}(m)\colon \mathsf{liau}(F)\to\mathsf{liau}(G)\cdot m^{\mathrm{cart}}, \tag{1}$$

où $m^{\mathrm{cart}}\colon F^{\mathrm{cart}}\to G^{\mathrm{cart}}$ est le morphisme induit par m sur les champs de groupoïdes sous-jacents et où

$$\mathsf{liau}(m)=\mathsf{lien}(E)*\mathrm{AUT}(m) \quad (\text{II } 3.5.3(2)). \tag{2}$$

Pour tout $x\in\mathrm{Ob}(F_S)$, $S\in\mathrm{Ob}(E)$, le foncteur m induit un morphisme de faisceaux de groupes

$$\mu_x\colon \mathsf{Aut}_S(x)\to\mathsf{Aut}_S\big(m(x)\big) \tag{3}$$

et, par définition de (1), le morphisme $\mathsf{liau}(m)(x)$ *est le morphisme de liens représenté par* μ_x:

$$m_x=\mathsf{lien}(\mu_x), \quad m_x\colon \mathsf{lien}\big(\mathsf{Aut}_S(x)\big)\to\mathsf{lien}\big(\mathsf{Aut}_S(m(x))\big). \tag{4}$$

2.1.3. Soit encore P un objet de $\hat{E}$. D'après (II 3.2.7) on sait que $F_{/P}\approx F\times_E E_{/P}$ est un champ sur $E_{/P}$ pour la topologie induite (0 3.1.4) et l'on a donc un morphisme de champs sur $E_{/P}$

$$\mathsf{liau}(F_{/P})\colon F_{/P}\to\mathrm{LIEN}(E_{/P}). \tag{1}$$

Par ailleurs, par le changement de base $E_{/P}\to E$, le morphisme (2.1.1 (1)) définit un morphisme

$$\mathsf{liau}(F)_{/P}\colon F_{/P}\to\mathrm{LIEN}(E)_{/P} \tag{2}$$

et enfin, d'après (1.1.12), on a une $(E_{/P})$-équivalence

$$p\colon \mathrm{LIEN}(E_{/P})\xrightarrow{\approx}\mathrm{LIEN}(E)_{/P}. \tag{3}$$

Ceci dit, on a un isomorphisme canonique

$$\varphi\colon\ p\cdot \mathsf{liau}(F_{/p}) \to \mathsf{liau}(F)_{/p} \tag{4}$$

qui exprime savamment les propriétés de compatibilité de la formule banale

$$\mathsf{Aut}_S(x^f) \approx \mathsf{Aut}_S(x)^f, \qquad (\text{I } 2.6.2.1\,(5)), \tag{5}$$

où x^f est l'image inverse par une flèche $f\colon T \dashrightarrow S$ de E d'un objet x de F_S.

Définition 2.1.4. Soient F un E-champ dont les fibres sont des U-catégories et L un lien sur E, c'est à dire une section cartésienne $L\colon E \to \mathrm{LIEN}(E)$ du champ des liens. *Une action de L sur F* est un morphisme de morphismes de champs

$$a\colon\ L\cdot f \dashrightarrow \mathsf{liau}(F), \quad \text{où} \quad f\colon\ F^{\mathrm{cart}} \to E \tag{1}$$

est la projection

$$\begin{array}{ccc} F^{\mathrm{cart}} & \xrightarrow{\mathsf{liau}(F)} & \mathrm{LIEN}(E) \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle L} & \\ & E & \end{array} \qquad (a) \tag{1 bis}$$

2.1.4.1. On dira aussi que *L opère sur F* si l'on s'est donné une action de L sur F. Si l'on veut préciser, on dira que (L, a) est un lien opérant sur F ou encore que (L, a, F) *est un champ à lien d'opérateurs.* Cette définition ne fait intervenir que le champ de groupoïdes F^{cart} sous-jacent à F.

2.1.4.2. Par définition, a est un E-morphisme de E-foncteurs (I 1.1.1), autrement dit une famille

$$a(x)\colon\ L(S) \to \mathsf{lien}(\mathsf{Aut}_S(x)), \qquad x \in \mathrm{Ob}(F_S),\ S \in \mathrm{Ob}(E), \tag{2}$$

de morphismes de liens sur S vérifiant des conditions évidentes de compatibilité avec la restriction à un ouvert et avec la composition des morphismes.

2.1.4.3. (*Action induite.*) Soit (L, a, F) un champ à lien d'opérateurs et soit $u\colon L' \to L$ un morphisme de liens sur E. On appelle action induite par a et u le morphisme

$$b = a\cdot(u * f), \qquad b\colon\ L'\cdot f \to \mathsf{liau}(F), \tag{3}$$

(cf. (2.1.4 (1 bis))). Donc b est l'action telle que, pour tout $x \in \mathrm{Ob}(F_S)$, $S \in \mathrm{Ob}(E)$, $b(x)$ soit le composé

$$L'(S) \xrightarrow{u(S)} L(S) \xrightarrow{a(x)} \mathsf{liau}(F)(x). \tag{4}$$

Définition 2.1.5. Soient (L, a, F) et (M, b, G) des champs à lien d'opérateurs. Soient encore $m\colon F \to G$ un morphisme de E-champs et $u\colon L \to M$ un morphisme de liens sur E. On dira que m et u sont compatibles (ou que m est un *u-morphisme*, ou que (u, m) est un morphisme de champs à lien d'opérateurs) si l'on a

$$\mathsf{liau}(m) \cdot a = (b * m^{\mathsf{cart}})(u * f) \tag{1}$$

avec les notations de (2.1.2 (1)).

2.1.5.1. Par définition, (1) signifie que, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$ et tout $x \in \mathrm{Ob}(F_S)$, le carré

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{lien}(\mathsf{Aut}_S(x)) & \xrightarrow{\mathsf{lien}(\mu_x)} & \mathsf{lien}(\mathsf{Aut}_S(m(x))) \\ {\scriptstyle a(x)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle b(m(x))} \\ L(S) & \xrightarrow[u(s)]{} & M(S) \end{array} \tag{2}$$

est *commutatif*, autrement dit que $u(S)$ est compatible avec le morphisme de liens m_x, (cf. 2.1.2 (4)) représenté par le morphisme $\mathsf{Aut}_S(x) \to \mathsf{Aut}_S(m(x))$ induit par m.

2.1.5.2. On notera que si $n\colon F \to G$ est un morphisme de champs *isomorphe à m* et si m est compatible avec u il en est de même de n. En effet, si $i\colon m \xrightarrow{\sim} n$ est un isomorphisme, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$ et tout $x \in \mathrm{Ob}(F_S)$, l'isomorphisme

$$I(x)\colon \mathsf{Aut}_S(m(x)) \to \mathsf{Aut}_S(n(x)), \qquad I(x) = \mathrm{Int}(i(x)), \tag{3}$$

vérifie

$$\mathsf{lien}(I(x)) \cdot m_x = n_x, \qquad (2.1.2\,(4)), \tag{4}$$

car i est un morphisme de morphismes de champs, et

$$\mathsf{lien}(I(x)) \cdot b(m(x)) = b(n(x)) \tag{5}$$

car b est un morphisme de morphismes de champs. D'où la conclusion en se reportant à (2).

2.1.6.1. (Localisation.) Soit P un objet de $\hat{E}$. Soit (L, a, F) un champ à lien d'opérateurs sur E. Par le changement de base

$$E_{/P} \to E$$

on obtient un triple $(L_{/P}, a_{/P}, F_{/P})$ dans lequel $F_{/P}$ est un champ sur $E_{/P}$, cependant que $L_{/P}$ est une section de $\mathrm{LIEN}(E)_{/P}$ sur $E_{/P}$ et s'interprète comme un lien sur le site $E_{/P}$ d'après (1.1.12). En vertu de (2.1.3), $a_{/P}$

s'interprète comme une action de $L_{/P}$ sur $F_{/P}$. On dira que $(L_{/P}, a_{/P}, F_{/P})$ *est le champ à opérateurs obtenu par restriction à P*. Par transitivité du changement de base, on a transitivité de la restriction.

2.1.6.2. Pour préciser l'abus de langage, disons que $L_{/P}$ n'est pas un lien sur le site $E_{/P}$ mais il existe un lien L_P sur $E_{/P}$ et un isomorphisme $i_P: L_{/P} \to p(L_P)$, (pour p, cf. 2.1.3 (3)). Puisque p est une équivalence, il existe une unique action

$$a_P:\ L_P \cdot f_{/P} \to \mathsf{liau}(F_{/P}) \tag{1}$$

où $f_{/P}: F_{/P} \to E_{/P}$ est la projection, telle que

$$\varphi \cdot (p * a_P) \cdot (i_P * f_{/P}) = a_{/P} \tag{2}$$

où φ est l'isomorphisme de (2.1.3 (4)).

2.1.6.3. Soit encore (u, m): $(L, a, F) \to (M, b, G)$ un morphisme de champs à opérateurs sur E. Le couple $(u_{/P}, m_{/P})$ déduit de (u, m) par restriction à P (i.e. par le changement de base $E_{/P} \to E$) est un morphisme de champs à opérateurs sur le site $E_{/P}$. En effet, la formule déduite de (2.1.5 (1)) par le changement de base $E_{/P} \to E$ donne la conclusion car le morphisme $\mathsf{liau}(m)_{/P}$ s'identifie à $\mathsf{liau}(m_{/P})$ par l'isomorphisme φ de (2.1.3 (4)) et l'analogue γ relatif à G.

2.1.6.4. Soient (L, a, F) et (M, a, G) deux champs à opérateurs. Soient encore $m: F \to G$ un morphisme de champs et $u: L \to M$ un morphisme de liens. L'égalité (2.1.5 (1)) qui exprime que m est compatible avec u est l'égalité de deux morphismes dans *le champ* $\mathrm{CART}(F, \mathrm{LIEN}(E))$.

C'est donc une condition locale. Donc, *pour que m et u soient compatibles il faut et il suffit qu'il en soit ainsi localement*, c'est à dire qu'il existe une famille (S_i) d'objets de E engendrant un raffinement telle que les restrictions de m et u à chacun des S_i soient compatibles.

Définition 2.1.7. (Opposé d'un champ à lien d'opérateurs.)
Soit (L, a, F) un champ à opérateurs et soit

$$i:\ L^0 \xrightarrow{\sim} L \tag{1}$$

l'isomorphisme de (1.2.5 (6)), où L^0 est l'opposé du lien L. On appelle *opposé* de (L, a, F) le champ à lien d'opérateurs (L^0, a', F) où

$$a' = a \cdot (i * f) \qquad (f:\ F^{\mathbf{cart}} \to E) \tag{2}$$

est l'action induite par a et i.

2.1.7.1. Supposons que F soit un champ de groupoïdes scindé. En l'interprétant comme un préfaisceau de catégories, on définit de manière évidente son opposé F^0, dont les fibres sont les opposées de celles de F, et un *isomorphisme de champs scindés*

$$I\colon\ F^0 \to F, \tag{3}$$

qui est l'identité sur les objets et qui, à tout morphisme d'une fibre, associe son inverse. Il est immédiat qu'il existe une unique action de L^0 sur F^0, soit a^0, telle que $(i, I)\colon (L^0, a^0, F^0) \to (L^0, a', F)$ soit un morphisme (donc un *isomorphisme*) de champs à lien d'opérateur.

2.1.7.2. Si L est un lien *abélien*, donc uniquement représentable par un faisceau abélien A, il existe un isomorphisme canonique de champs à lien d'opérateurs

$$(j, \mathrm{id}_F)\colon\ (L^0, a', F) \to (L, a'', F)$$

où a'' est l'action de L sur F induite par a et l'automorphisme de symétrie $s\colon L \to L$ (où s est représenté par l'automorphisme $x \rightsquigarrow -x$ de A). En effet, A est égal à son opposé, d'où un isomorphisme canonique $j\colon L^0 \to L$ qui vérifie $j\,i = s$, d'où la conclusion, par transitivité de l'action induite.

2.2. Lien d'une gerbe

Proposition 2.2.1. Soit F une E-gerbe dont les fibres sont des U-catégories.

(i) Soit (L, a) un lien opérant sur F. Les conditions suivantes sont équivalentes

(a) a est un isomorphisme

(b) pour tout lien L' sur E et toute action b de L' sur F, il existe un unique morphisme de liens $u\colon L' \to L$ tel que b soit l'action induite (2.1.4.3) par a et u.

(ii) Il existe un lien (L, a) opérant sur F et vérifiant les conditions de (i).

Définition 2.2.2. On appelle *lien d'une gerbe* F un lien opérant sur F et vérifiant les conditions de (2.2.1 (i)).

2.2.2.1. Malgré une formulation désuète on aura remarqué que (2.2.1 (i)(b)) caractérise le lien d'une gerbe par une *propriété universelle*. Par abus de langage, si (L, a) est le lien d'une gerbe F on sous-entendra souvent a et on dira que L *lie* F ou que F *est liée par* L. Inversement, si L est un lien sur E, on appellera *L-gerbe* un couple (F, a) tel que F soit une gerbe et (L, a) le lien de F.

2.2.2.2. Le lien d'une gerbe F s'explicite d'après (2.1.4.2) comme un lien L et une famille d'isomorphismes de liens sur S

$$a(x):\ L(S) \xrightarrow{\sim} \mathbf{lien}(\mathbf{Aut}_S(x)), \qquad x \in \mathrm{Ob}(F_S),\ S \in \mathrm{Ob}(E), \tag{1}$$

(qui font donc de $\mathbf{Aut}_S(x)$ *un représentant de la restriction de* L *à* S), cette famille étant assujettie à être «compatible» avec la restriction et aussi à la condition que, si $i: x \dashrightarrow y$ est un S-isomorphisme de F, le morphisme de faisceaux de groupes

$$\mathrm{Int}(i):\ \mathbf{Aut}_S(x) \to \mathbf{Aut}_S(y)$$

représente le morphisme identique de $L(S)$.

2.2.2.3. *Prouvons la proposition.* Puisque F est une *gerbe*, la projection $f:\ F \to E$ est couvrante (comme morphisme de E-champs (II 1.4.1)). D'après (II 1.4.2), l'application

$$\mathrm{Hom}(L', L) \dashrightarrow \mathrm{Hom}(L'f, Lf), \qquad u \mapsto u * f, \tag{2}$$

est donc bijective. Ceci prouve que (a) ⇒ (b) puisque l'on impose $b = a \cdot (u * f)$. Montrons que, pour toute gerbe F, il existe un lien L et un isomorphisme

$$a:\ Lf \xrightarrow{\sim} \mathbf{liau}(F). \tag{3}$$

On en déduira trivialement (ii); et aussi que (b) ⇒ (a), puisque (b) détermine L à isomorphisme unique près. Soit I la catégorie image de $\mathbf{liau}(F)$. Il est immédiat que c'est une sous-catégorie fibrée de $\mathrm{LIEN}(E)$ et que le foncteur induit par $\mathbf{liau}(F)$

$$L':\ F \to I$$

est cartésien. Par ailleurs, la projection $I \to E$ est un morphisme bicouvrant (II 1.4.1), comme il résulte trivialement du fait que $F \to E$ est couvrant et de (2.1.1 (4)). D'après (II 2.1.3 (ii)), E est donc le champ associé à I et, par la «propriété universelle», il existe une section cartésienne $L_0: E \to I$ de I et un isomorphisme $a_0: L_0 f \xrightarrow{\sim} L'$. D'où la conclusion, en posant $L = iL_0$ et $a = i * a_0$, où $i: I \to \mathrm{LIEN}(E)$ est l'inclusion.

Corollaire 2.2.3. Soient $m:\ F \to G$ un morphisme de gerbes et (L, a) (resp. (M, b)) le lien de F (resp. de G). Il existe un unique morphisme de liens $u:\ L \to M$ tel que m soit un u-morphisme (2.1.5).

2.2.3.1. On dira également que m *est lié par* u. Par définition, u doit vérifier

$$\mathbf{liau}(m) \cdot a = (b * m)(u * f), \qquad f:\ F \to E. \tag{1}$$

Cette condition détermine $(u * f)$ car b est un isomorphisme, donc aussi $b * m$. Par ailleurs f est couvrant, donc $u * f$ détermine u (cf. 2.2.2.3 (2)).

2.2.3.2. Par la propriété universelle du lien d'une gerbe (2.2.1 (b)), le corollaire signifie également que si (L, a) est un lien opérant sur une gerbe F, tout morphisme de gerbes $m\colon F \to G$ permet de faire opérer L sur G, le morphisme

$$b\colon Lg \to \mathsf{liau}(G), \quad (g\colon G \to E),$$

étant caractérisé par

$$b * m = \mathsf{liau}(m) \cdot a.$$

Sous cette forme, l'énoncé du corollaire garde un sens mais devient faux si F et G sont des champs (mais non nécessairement des gerbes).

2.2.3.3. Pour qu'un morphisme de gerbes $m\colon F \to G$ soit lié par un morphisme de liens $u\colon L \to M$, il faut et il suffit que, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$ et tout $x \in \mathrm{Ob}(F_S)$, le morphisme de faisceaux de groupes

$$\mathsf{Aut}_S(x) \to \mathsf{Aut}_S(m(x)) \tag{1}$$

représente la restriction de u à S, compte tenu des isomorphismes de (2.2.2.2), cf. (2.1.5.1 (2)).

Proposition 2.2.3.4. (Gerbes abéliennes.) Soit G une E-gerbe telle que, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$ et tout $x \in \mathrm{Ob}(G_S)$, le groupe $\mathrm{Aut}_S(x)$ soit commutatif. Alors le lien de G est *abélien* (1.2.3). De plus, pour tout faisceau de groupes abéliens A sur E on a une bijection entre l'ensemble des actions de $\mathsf{lien}(A)$ sur G (2.1.4) et l'ensemble des familles de morphismes de groupes

$$a(x)\colon A(S) \to \mathrm{Aut}_S(x), \quad S \in \mathrm{Ob}(E),\ x \in \mathrm{Ob}(G_S) \tag{1}$$

telles que

(i) pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$ et tout S-morphisme $m\colon x \to y$ on ait

$$\mathrm{Int}(m) \cdot a(x) = a(y), \quad \text{où} \quad \mathrm{Int}(m)(u) = mum^{-1}, \tag{2}$$

(ii) pour toute flèche $f\colon T \to S$ de E, tout $x \in \mathrm{Ob}(G_S)$ et toute image inverse $m\colon x^f \to x$ de x par f, on ait

$$\mathrm{Int}(m) \cdot a(x) = a(x^f) \cdot A(f), \tag{3}$$

où $\mathrm{Int}(m)\colon \mathsf{Aut}_S(x) \to \mathsf{Aut}_S(x^f)$ est défini par

$$m \cdot \mathrm{Int}(m)(u) = u \cdot m, \quad u \in \mathrm{Aut}_S(x). \tag{4}$$

Notons pour commencer que les applications $\mathrm{Int}(m)$ de (2) et (4) ne dépendent pas de m, car les $\mathrm{Aut}_S(x)$ sont abéliens. La démonstration de la proposition est essentiellement triviale et repose sur le fait que le foncteur lien induit une équivalence entre la catégorie des faisceaux de groupes abéliens et celle des liens abéliens (1.2.3).

Corollaire 2.2.4. Soient F une gerbe, L son lien et $P \in \mathrm{Ob}(\hat{E})$.

(i) Il existe un isomorphisme canonique entre le lien de la gerbe $F_{/P}$ (sur $E_{/P}$) et la restriction de L à P.

(ii) Si, de plus, $m: F \to G$ est un morphisme de gerbes, la restriction $m_{/P}: F_{/P} \to G_{/P}$ de m à $E_{/P}$ est liée par la restriction du morphisme qui lie m.

En effet, d'après (2.1.6.1), la restriction de L à P opère sur $F_{/P}$ et il est immédiat que la condition de (2.2.1 (a)) est vérifiée, d'où (i). Pour prouver (ii) on peut par exemple utiliser (2.2.3.3).

Corollaire 2.2.5. (Lien d'une gerbe trivialisée.) Soient F une gerbe, L son lien, s une section de F et

$$A = \mathbf{Aut}(s) \tag{1}$$

le faisceau des automorphismes de s. On a un isomorphisme canonique de liens sur E

$$L \approx \mathbf{lien}(A). \tag{2}$$

2.2.5.1. En effet, si $f: F \to E$ désigne la projection, on a, par définition du lien d'une gerbe, un isomorphisme

$$a: \ L \cdot f \to \mathbf{liau}(F), \tag{3}$$

d'où un isomorphisme

$$a * s: \ L \to \mathbf{liau}(F) \cdot s, \tag{4}$$

car $L \cdot f \cdot s = L$, puisque s est une section. Par ailleurs, d'après (II 3.5.4), on a un isomorphisme canonique $b: \mathrm{AUT}(F) \cdot s \to A'$, où A' désigne la section de $\mathrm{FAGRSC}(E)$ définie par A, d'où un isomorphisme

$$\mathbf{lien}(E) * b: \ \mathbf{lien}(E) \cdot \mathrm{AUT}(F) \cdot s \to \mathbf{lien}(E) \cdot A',$$

qui, par définition de $\mathbf{liau}(F)$, (2.1.1 (1)), et de $\mathbf{lien}(A)$, (1.1.6 (2)), s'écrit également

$$\mathbf{liau}(F) \cdot s \to \mathbf{lien}(A)$$

et qui, composé avec (2), donne la conclusion.

2.2.5.2. Il en résulte que, si r est une section de F, on a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{lien}(\mathbf{Aut}(s)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{lien}(\mathbf{Aut}(r)) \tag{5}$$

et que, pour tout isomorphisme de sections $i: s \to r$, le morphisme de liens représenté par l'isomorphisme $\mathbf{Aut}(s) \to \mathbf{Aut}(r)$ induit par i n'est autre que (5).

Enfin on vérifie sans que, si $m\colon F \to G$ est un morphisme de gerbes et si $t = m\,s$ est la section image de s par m, *le morphisme induit par* m

$$\mathsf{Aut}(s) \to \mathsf{Aut}(t) \tag{6}$$

représente, (grâce aux isomorphismes (2)), *le morphisme de liens qui lie* $m\colon F \to G$.

Proposition 2.2.6. Soit $m\colon F \to G$ un morphisme de gerbes et soit $u\colon L \to M$ le morphisme de liens qui lie m.

(i) Pour que m soit fidèle il faut et il suffit que u soit injectif, (1.2.6).

(ii) Pour que m soit couvrant, (II 1.4.1), il faut et il suffit que u soit surjectif (c'est à dire un épimorphisme, (1.2.7)).

(iii) Pour que m soit pleinement fidèle il faut et il suffit que u soit un isomorphisme, auquel cas m est une E-équivalence.

Pour que m soit fidèle, il faut et il suffit que, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$ et tout couple (x, y) d'objets de F_S, le morphisme de faisceaux d'ensembles induit par m

$$\mathsf{Hom}_S(x, y) \to \mathsf{Hom}_S(m(x), m(y))$$

soit un monomorphisme. Deux objets d'une même fibre étant localement isomorphes, la condition signifie que

$$\mathsf{Aut}_S(x) \to \mathsf{Aut}_S(m(x))$$

est un monomorphisme de faisceaux de groupes. Or ce morphisme représente la restriction de u à S. D'où (i), car l'ensemble des $S \in \mathrm{Ob}(E)$ tel que $\mathrm{Ob}(F_S)$ soit non vide est un raffinement de E. On prouve de même (ii) et (iii). Noter simplement que, de toutes façons, m est localement surjectif sur les objets (II 1.4.1 (ii)) et que, sous les conditions de (iii), m est bicouvrant donc une équivalence, (II 1.4.5).

Corollaire 2.2.7. Soient L un lien et F et G deux L-gerbes. Tout L-morphisme $F \to G$ (i.e. lié par id_L) est une E-équivalence.

Résulte de (2.2.6 (iii)). Inversement, on peut dire que le lien d'une gerbe est invariant par E-équivalence. On dira souvent *L-équivalence* pour L-morphisme.

Corollaire 2.2.8. Soient P_1 et P_2 des gerbes et soit $P = P_1 \times_E P_2$ leur produit (dans la catégorie des champs cf. II 1.2.4). Les morphismes $L \to L_i$ qui lient les deux projections de P font de L un produit $L_1 \times L_2$, (dans la catégorie des liens sur E).

2.2.8.1. Soit $x \in \mathrm{Ob}(P_S)$, $S \in \mathrm{Ob}(E)$, et soit x_i son image par la i-ème projection. Par construction du produit fibré de deux E-catégories fibrées

les morphismes
$$\mathbf{Aut}_S(x) \to \mathrm{Aut}_S(x_i), \tag{1}$$
induits par les projections, font de $\mathbf{Aut}_S(x)$ un produit $\mathbf{Aut}_S(x_1) \times \mathbf{Aut}_S(x_2)$. Or les morphismes (1) représentent les morphismes $L(S) \to L_i(S)$, d'où la conclusion, d'après (1.4.1.3) car la projection de l'ensemble d'objets de P est un raffinement de E.

2.2.8.2. Par la propriété universelle (2.2.1(b)) du lien d'une gerbe, le corollaire signifie également que «faire opérer un lien dans un produit fini de gerbes revient à le faire opérer dans chacun des facteurs». Cette assertion est incorrecte pour des champs: prendre le produit d'une gerbe par le champ vide.

Corollaire 2.2.9. Soit $u_i\colon L_i \to M_i$ un morphisme de liens et soit $m_i\colon P_i \to Q_i$ un (u_i)-morphisme de gerbes $(i = 1, 2)$. Le morphisme de gerbes
$$m_1 \times_E m_2\colon P_1 \times_E P_2 \to Q_1 \times_E Q_2$$
est lié par
$$u_1 \times u_2\colon L_1 \times L_2 \to M_1 \times M_2 .$$

Résulte aisément du corollaire précédent et de (2.2.3.3).

2.3. La gerbe des morphismes liés

La théorie des torseurs utilise essentiellement deux constructions: le produit contracté et le faisceau $\mathbf{Hom}_u(P, Q)$ des u-morphismes, qui se ramènent l'une à l'autre par (III 1.6.4). Dans une certaine mesure, toutes deux se laissent transcrire en termes de gerbes. Nous commencerons par la seconde qui est la plus utile.

Définition 2.3.1. Soient $u\colon L \to M$ un morphisme de liens, P une L-gerbe et Q une M-gerbe. On désigne par
$$\mathbf{Hom}_u(P, Q) \quad (\text{resp. } \mathrm{Hom}_u(P, Q)) \tag{1}$$
la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Cart}_E(P, Q)$ dont les objets sont les u-morphismes de gerbes, (resp. son ensemble d'objets). On désigne par
$$\mathrm{HOM}_u(P, Q) \tag{2}$$
la sous-E-catégorie scindée de $\mathrm{CART}(P, Q)$, (I 3.3.1), dont les objets de projection S sont les
$$m\colon P_{/S} \to Q_{/S}$$
qui sont liés par la restriction $u_{/S}$ de u à S.

2.3.1.1. On a donc, pour tout S

$$\mathrm{HOM}_u(P, Q)_S = \mathsf{Hom}_{u/S}(P_{/S}, Q_{/S}). \tag{3}$$

Ce qui a un sens car, en vertu de (2.2.4 (i)), $L_{/S}$ lie $P_{/S}$ et $M_{/S}$ lie $Q_{/S}$. De plus, on obtient bien une sous-catégorie scindée (i.e. un sous-préfaisceau de catégories sur E) car les foncteurs images inverse de $\mathrm{CART}(P, Q)$ sont induits par les changements de base

$$E_{/T} \to E_{/S}$$

et l'on applique (2.2.4 (ii)).

2.3.1.2. En vertu de (II 2.1.5), $\mathrm{CART}(P, Q)$ est un E-champ. Puisque $\mathrm{HOM}_u(P, Q)$ en est une sous-E-catégorie fibrée pleine, c'est un *préchamp* (cf. les préfaisceaux de S-morphismes). Pour prouver que c'est un champ, il suffit d'après (II 1.2.5) de montrer que la condition d'être un u-morphisme est locale et stable par isomorphisme, ce qui résulte de (2.1.5.2) et de (2.1.6.4).

2.3.1.3. Les changements de base $E_{/S} \to E$ induisent des foncteurs

$$\mathsf{Hom}_u(P, Q) \to \mathsf{Hom}_{u/S}(P_{/S}, Q_{/S}) = \mathrm{HOM}_u(P, Q)_S$$

d'où des foncteurs

$$\mathsf{Hom}_u(P, Q) \to \varprojlim(\mathrm{HOM}_u(P, Q)/E) \xrightarrow{i} \varprojlim(\mathrm{HOM}_u(P, Q)/E), \tag{4}$$

où i est l'inclusion habituelle. *Le premier est un isomorphisme et le second une équivalence de catégories.* Les foncteurs de (4) sont induits par

$$\mathsf{Cart}_E(P, Q) \xrightarrow{a} \varprojlim(\mathrm{CART}(P, Q)/E) \xrightarrow{b} \varprojlim(\mathrm{CART}(P, Q)/E) \tag{5}$$

et, d'après (I 3.3.5), a est un isomorphisme et b une équivalence. D'où la conclusion, par (2.1.6.4). On notera que, si e est un objet final de E, on a un isomorphisme

$$\mathsf{Hom}_u(P, Q) \xrightarrow{\sim} \mathrm{HOM}_u(P, Q)_e, \tag{6}$$

car $E_{/e} \xrightarrow{\sim} E$ est un isomorphisme, ce qui évite pratiquement d'utiliser (4) et, par là, la pénible démonstration de (I 3.3.5).

Théorème 2.3.2. Soient $u: L \to M$ un morphisme de liens, P une L-gerbe et Q une M-gerbe.

(i) $\mathrm{HOM}_u(P, Q)$ est une gerbe; c'est un sous-champ strictement plein (II 1.2.5) de $\mathrm{CART}(P, Q)$.

(ii) Soit C_u le lien de $\mathrm{HOM}_u(P, Q)$ et soit

$$c_u: \ L \times C_u \to M \tag{1}$$

le morphisme de liens qui lie le morphisme

$$V\colon\ P\times_E \mathrm{HOM}_u(P,Q)\to Q$$
$$V(p,m)=m(p)\qquad (\mathrm{I}\ 3.3.2\ (5)). \tag{2}$$

Le couple (C_u, c_u) est un centralisateur de u (1.5.1).

(iii) Supposons de plus que $L=M$ et que $u=\mathrm{id}_L$ et posons

$$\mathrm{HOM}_L(P,Q)=\mathrm{HOM}_u(P,Q). \tag{3}$$

La gerbe $\mathrm{HOM}_L(P,Q)$ est liée par *le centre de* L (1.5.3.1).

2.3.2.1. On peut traduire (ii) en disant que l'on identifie canoniquement le lien de $\mathrm{HOM}_u(P,Q)$ et le centralisateur de u en imposant que (2) soit lié par (1).

2.3.2.2. Nous avons déjà démontré que $\mathrm{HOM}_u(P,Q)$ est un *champ*, et même un sous-champ strictement plein de $\mathrm{CART}(P,Q)$ (2.3.1.2).

Par ailleurs, puisque les fibres de Q sont des groupoïdes, tout E-morphisme entre E-foncteurs à valeurs dans Q est un isomorphisme et $\mathrm{HOM}_u(P,Q)$ est un champ de groupoïdes. Pour prouver (i) nous devons encore prouver que, localement, il existe un u-morphisme $m\colon P\to Q$. La question étant locale, nous pouvons supposer que P et Q admettent des sections p et q, moyennant quoi les faisceaux $\mathsf{Aut}(p)$ et $\mathsf{Aut}(q)$ représentent L et M d'après (2.2.5). Quitte à localiser encore, nous pouvons supposer que u est représentable par un morphisme de faisceaux de groupes

$$a\colon\ \mathsf{Aut}(p)\to \mathsf{Aut}(q).$$

D'après (III 2.2.2), (morphismes d'une gerbe triviale dans un champ), il existe un morphisme de gerbes

$$m\colon\ P\to Q$$

et un isomorphisme $i\colon mp\xrightarrow{\sim} q$ tel que le composé ci-dessous soit égal à a

$$\mathsf{Aut}(p)\xrightarrow{\mu}\mathsf{Aut}(mp)\xrightarrow{I}\mathsf{Aut}(q),$$

où μ est induit par m et I par i. D'après (2.2.5.2), il en résulte que m est un u-morphisme.

2.3.2.3. Pour prouver que $\mathrm{HOM}_u(P,Q)$ est une gerbe il nous reste à prouver que deux objets d'une même fibre sont localement isomorphes. Soient donc $m, n\colon P\rightrightarrows Q$ deux u-morphismes de gerbes. Nous devons

prouver que l'ensemble des $S \in \mathrm{Ob}(E)$ tels que les restrictions de m et de n à S soient isomorphes est un raffinement de E. Quitte à localiser, nous pouvons supposer que P admet une section p et même que mp et np sont isomorphes, (en effet, $E_{/S}$ admet un objet final et deux objets de Q_S sont localement isomorphes). Soit

$$i:\ mp \to np$$

un isomorphisme de sections. Le triangle ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Aut}(p) & \xrightarrow{m'} & \mathbf{Aut}(mp) \\ & \searrow^{n'} & \downarrow I \\ & & \mathbf{Aut}(np) \end{array} \qquad I = \mathrm{Int}(i) \tag{4}$$

où m' est induit par m et n' par n, est commutatif à automorphisme intérieur près car m' et n' représentent u^S, puisque m et n sont liés par u (2.2.2.2 et 2.2.3.3). En localisant, on peut modifier i de telle sorte que le triangle ci-dessus soit commutatif. La conclusion résulte alors de (III 2.2.4).

2.3.2.4. Avant de prouver (ii), notons que le lien d'un produit étant le produit des liens (2.2.8), cette assertion a un sens. Ceci dit, d'après (1.5.2 (iv)), pour que (C_u, c_u) soit un centralisateur de u il faut et il suffit qu'il en soit ainsi localement. Soit donc $S \in \mathrm{Ob}(E)$, $p \in \mathrm{Ob}(P_S)$ et $m: P_{/S} \to Q_{/S}$ un $u_{/S}$-morphisme de gerbes. Par définition, c_u est représenté par le morphisme de faisceaux de groupes sur S induit par V

$$v:\ \mathbf{Aut}_S(p) \times \mathbf{Aut}_S(m) \to \mathbf{Aut}_S\big(m(p)\big)$$

(où $\mathbf{Aut}_S(m)$ est calculé dans le champ $\mathrm{HOM}_u(P, Q)$). On vérifie que l'on a

$$v(a, i) = i(x)\, m(a) = m(a)\, i(x)$$

la seconde égalité résultant du fait que $i: m \to m$ est un morphisme de foncteurs. D'après (III 2.2.3), le composé $v \cdot \mathrm{inj}_2:\ \mathbf{Aut}_S(m) \to \mathbf{Aut}_S\big(m(p)\big)$ identifie $\mathbf{Aut}_S(m)$ au centralisateur du morphisme

$$v \cdot \mathrm{inj}_1:\ \mathbf{Aut}_S(p) \to \mathbf{Aut}_S\big(m(p)\big)$$

lequel n'est autre que le morphisme induit par m. D'où la conclusion, par (1.2.5 (iii)).

Corollaire 2.3.3. Soient $u: L \to M$ un morphisme de liens sur E, P une L-gerbe et Q une M-gerbe. Il existe localement un u-morphisme $P \to Q$.

En particulier, deux L-gerbes sont localement L-équivalentes.

Corollaire 2.3.4. Pour que deux morphismes de gerbes $m, n\colon P \rightrightarrows Q$ soient liés par le même morphisme de liens il faut et il suffit qu'ils soient localement isomorphes.

Ces deux corollaires expriment en partie que $\mathrm{HOM}_u(P, Q)$ est *une sous-gerbe maximale de* $\mathrm{CART}(P, Q)$ (III 2.1.3).

Corollaire 2.3.5. Soient $u\colon L \to M$ un morphisme de liens sur E, P une L-gerbe et Q une M-gerbe. Pour qu'il existe un u-morphisme $m\colon P \to Q$ il faut et il suffit que la gerbe $\mathrm{HOM}_u(P, Q)$ soit neutre, (i.e. admette une section).

Cela est trivial si E admet un objet final e. Sinon, cela résulte de l'équivalence

$$\mathrm{Hom}_u(P, Q) \dashrightarrow \varprojlim(\mathrm{HOM}_u(P, Q)/E, \quad (2.3.1.3\,(4))). \tag{1}$$

Remarque 2.3.6. Soient P une gerbe et L son lien. Soit encore $\mathbf{S}P$ le champ des sections cartésiennes de P, (I 2.4.5). On munit $\mathbf{S}P$ d'une structure de L-gerbe en imposant que l'équivalence $\mathsf{v}P\colon \mathbf{S}P \dashrightarrow P$ soit un L-morphisme. Par ailleurs, on a évidemment

$$\mathbf{S}P = \mathrm{HOM}_1(E, P) \tag{1}$$

où $1\colon 1 \to L$ est le morphisme unité et où E est la catégorie base, qui est évidemment une gerbe liée par le lien unité. Par le théorème ci-dessus, on en déduit une nouvelle structure de L-gerbe sur $\mathbf{S}P$, en identifiant de manière évidente L et le centralisateur de $1\colon 1 \to L$. Elle coïncide avec la précédente comme on voit en notant que le morphisme

$$E \times \mathrm{HOM}_1(E, P) \to P, \quad (2.3.2\,(2)), \tag{2}$$

composé avec l'isomorphisme $\mathbf{S}P \approx E \times \mathbf{S}P \approx E \times \mathrm{HOM}_1(E, P)$ redonne le morphisme $\mathsf{v}P\colon \mathbf{S}P \to P$.

Proposition 2.3.7. (Morphismes à valeurs dans $\mathrm{HOM}_u(P, Q)$.) Soient P et Q deux gerbes, L et M leurs liens et

$$u\colon L \to M \tag{1}$$

un morphisme de liens. Soit

$$x\colon X \to C_u \tag{2}$$

un morphisme de liens et soit

$$s\colon L \times X \to M, \quad s = c_u \cdot (\mathrm{id}_L \times x),$$

le morphisme qui correspond à x par la propriété universelle de C_u. Soit enfin G une X-gerbe.

(i) On a une E-équivalence de gerbes

$$F\colon \mathrm{HOM}_x(G, \mathrm{HOM}_u(P, Q)) \xrightarrow{\approx} \mathrm{HOM}_s(P \times_E G, Q) \tag{3}$$

$$F(f)(p, g) = f(g)(p) \tag{3 bis}$$

et une équivalence de catégories

$$\mathsf{Hom}_x(G, \mathrm{HOM}_u(P, Q)) \xrightarrow{\approx} \mathsf{Hom}_u(P \times_E G, Q). \tag{4}$$

(ii) Cette équivalence est liée par l'isomorphisme

$$i\colon C_x \to C_s \quad \text{de} \quad (1.5.7). \tag{5}$$

2.3.7.1. Il nous suffira de construire un E-foncteur cartésien (3) puis de prouver qu'il est lié par i, car ce sera nécessairement une E-équivalence puisque i est un isomorphisme. Par passage aux sections cartésiennes (ou aux fibres en l'objet final de E s'il en existe) on déduira (4) de (3) (cf. (2.3.1.3 (4))).

2.3.7.2. Soit

$$f\colon G \dashrightarrow \mathrm{HOM}_u(P, Q)$$

un x-morphisme. On en déduit un $(\mathrm{id}_L \times x)$-morphisme

$$\mathrm{id}_P \times_E f\colon P \times_E G \to P \times_E \mathrm{HOM}_u(P, Q), \quad (2.2.9), \tag{6}$$

d'où, par composition avec le c_u-morphisme

$$V\colon P \times_E \mathrm{HOM}_u(P, Q) \to Q, \quad V(p, m) = m(p), \tag{7}$$

un morphisme de gerbes

$$P \times_E G \to Q \tag{8}$$

qui est lié par $c_u \cdot (\mathrm{id}_L \times x) = s$. Cette construction, que l'on a résumé dans l'énoncé par la formule (3 bis), fournit évidemment un E-foncteur cartésien (et même un morphisme de catégories scindées) tel que (3), puisque l'on a vu que (8) est lié par s.

2.3.7.3. Il nous reste à prouver que (3) est lié par i. Le diagramme de morphismes de gerbes

$$\begin{array}{ccc} P \times_E G \times_E \mathrm{HOM}_x(G, \mathrm{HOM}_u(P, Q)) & \xrightarrow{F'} & P \times_E G \times_E \mathrm{HOM}_s(P \times_E G, Q) \\ \downarrow{\scriptstyle W'} & & \downarrow{\scriptstyle U} \\ P \times_E \mathrm{HOM}_u(P, Q) & \longrightarrow & Q \end{array} \tag{9}$$

est commutatif à isomorphisme près, où l'on a posé

$$F' = \mathrm{id}_{P \times_E G} \times F, \qquad F'(p, g, f) = (p, g, F(f)),$$
$$W' = \mathrm{id}_P \times {}_E W, \qquad W'(p, g, f) = (p, f(g)),$$

et où U, V et W sont les morphismes de gerbes qui figurent dans (2.3.2 (2)), donc sont liés respectivement par c_s, c_u et c_x avec les notations évidentes, (1.5.1 et 1.5.7). Si l'on désigne par $i' : C_x \to C_s$ le morphisme qui lie F (cf. (3)), on en déduit, par (2.2.9), que le composé UF' est lié par $c_s \cdot (\mathrm{id}_{L \times X} \times i')$ et le composé VW' par $c_u \cdot (\mathrm{id}_L \times c_x)$. Puisque le carré est commutatif à isomorphisme près, ces deux morphismes de liens sont égaux (2.1.5.2), ce qui assure que $i = i'$ par (1.5.7 (3)). C.Q.F.D.

Remarque 2.3.8. On notera que la proposition précédente est une variante de la définition habituelle des objets Hom dans une catégorie, à ceci près que les gerbes sont les objets d'une 2-catégorie et que l'on tient compte en plus des liens. Nous allons exploiter cette analogie dans les corollaires qui vont suivre. Les morphismes de gerbes qui y seront introduits seront définis en termes du seul morphisme «structural» $P \times \mathrm{HOM}_u(P, Q) \to Q$ à l'aide de la proposition précédente. Les formules données en bis sont des procédés de calcul que nous ne justifierons pas car ils sont sans intérêt pour la suite.

Corollaire 2.3.9. Sous les hypothèses de (2.3.7), soit encore f: $G \times_E P \to Q$ un s-morphisme. Le morphisme

$$F(f) : G \to \mathrm{HOM}_u(P, Q), \qquad F(f)(q)(p) = f(g, p), \tag{1}$$

est lié par x: $X \to C_u$.

A servi pour prouver la proposition, (2.3.7.2).

Corollaire 2.3.10. Sous les hypothèses de (2.3.7), le morphisme

$$A : \ G \times_E \mathrm{Hom}_s(P \times_E G, Q) \to \mathrm{Hom}_u(P, Q) \tag{1}$$
$$A(g, f)(p) = f(p, g) \tag{1 bis}$$

est lié par le morphisme

$$t : \ X \times C_s \to C_u \tag{2}$$

caractérisé par

$$c_s = c_u \cdot (\mathrm{id}_L \times t), \qquad c_s : \ L \times X \times C_s \to M. \tag{3}$$

On applique la proposition (2.3.7) en y remplaçant G par

$$G \times_E \mathrm{Hom}_s(P \times_E G, Q)$$

et en notant que l'on a un morphisme $P \times_E G \times_E \mathrm{HOM}_s(P \times_E G, Q) \to Q$, ce qui définit A puisque (2.3.7 (4)) est une équivalence.

Corollaire 2.3.11. Soient P et Q deux gerbes de liens L et M. Posons

$$u = \mathrm{inj}_1 = (\mathrm{id}_L, 1), \qquad u: L \to L \times M. \tag{1}$$

On a un morphisme de gerbes

$$A: Q \to \mathrm{HOM}_u(P, P \times_E Q) \tag{2}$$

$$A(q)(p) = (p, q) \tag{2 bis}$$

qui est lié par

$$\mathrm{inj}_2: M \to C_L \times M, \tag{3}$$

si l'on identifie canoniquement C_u et $C_L \times M$.

Par (2.3.7 (4)), pour définir A il suffit de noter que l'on a un morphisme de gerbes $P \times_E Q \to P \times_E Q$, (l'identité!). L'assertion sur le morphisme qui lie A en résulte par un calcul facile.

Théorème 2.3.12. Soient

$$L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \tag{1}$$

des morphismes de liens sur E et soient (C_u, c_u), (C_v, c_v) et (C_{vu}, c_{vu}) les centralisateurs de u, v et vu, (1.5.1). Soient encore P, Q, R des gerbes liées par L, M, N.

(i) Le morphisme de gerbes

$$S: \mathrm{HOM}_u(P, Q) \times_E \mathrm{HOM}_v(Q, R) \to \mathrm{Hom}_{vu}(P, R) \tag{2}$$

$$S(m, n) = n\,m, \tag{2 bis}$$

est lié par le morphisme

$$c_{u,v}: C_u \times C_v \to C_{vu}, \quad (1.5.4\,(2)), \tag{3}$$

(ii) Pour tout u-morphisme $m: P \to Q$, le morphisme de gerbes

$$\mathsf{m}: \mathrm{HOM}_v(Q, R) \to \mathrm{HOM}_{vu}(P, R), \quad \mathsf{m}(n) = n\,m, \tag{4}$$

est lié par le morphisme

$$j: C_v \to C_{vu}, \quad (1.5.4\,(3)). \tag{5}$$

(iii) Pour tout v-morphisme $n: Q \to R$ le morphisme de gerbes

$$\mathsf{n}: \mathrm{HOM}_u(P, Q) \to \mathrm{HOM}_{vu}(P, R), \quad \mathsf{n}(m) = n\,m, \tag{6}$$

est lié par le morphisme

$$i: C_u \to C_{vu}, \quad (1.5.4\,(3)). \tag{7}$$

2.3.12.1. Bien entendu, dans cet énoncé on identifie le lien de $\mathrm{HOM}_u(P, Q)$ et le centralisateur de u comme il est dit dans le théorème (2.3.2). Pour prouver (i), désignons par

$$s\colon\ C_u \times C_v \to C_{vu} \tag{8}$$

le morphisme que lie S. Par la propriété universelle du centralisateur C_{vu}, nous devons prouver que le composé

$$L \times C_u \times C_v \xrightarrow{\mathrm{id}_L \times s} L \times C_{vu} \xrightarrow{c_{vu}} N \tag{9}$$

est égal au composé

$$L \times C_u \times C_v \xrightarrow{c_u \times \mathrm{id}_{C_u}} M \times C_v \xrightarrow{c_v} N, \quad (1.5.4\,(1)). \tag{10}$$

Considérons le diagramme de morphismes de gerbes

$$\begin{array}{ccc} P \times \mathrm{HOM}_u(P, Q) \times \mathrm{HOM}_v(Q, R) & \xrightarrow{A} & P \times \mathrm{HOM}_{vu}(P, R) \\ \downarrow{\scriptstyle B} & & \downarrow{\scriptstyle C} \\ Q \times \mathrm{HOM}_v(Q, R) & \xrightarrow{D} & R, \end{array}$$

où l'on a posé

$$A(p, m, n) = (p, n\,m), \qquad B(p, m, n) = \big(m(p), n\big),$$
$$C(p, r) = r(p), \qquad D(q, n) = n(q).$$

Il est immédiat que ce diagramme est commutatif à isomorphisme près (cf. I 3.3.2 (5)). Les composés CA et DB sont donc liés par le même morphisme, d'où la conclusion car, par usage répété du théorème (2.3.2) et de (2.2.9), on prouve que CA est lié par (9) et DB par (10).

2.3.12.2. On prouve (iii) par le même raisonnement en considérant le diagramme de morphismes de gerbes:

$$\begin{array}{ccc} P \times \mathrm{HOM}_u(P, Q) & \xrightarrow{A} & P \times \mathrm{HOM}_{vu}(P, R) \\ \downarrow{\scriptstyle B} & & \downarrow{\scriptstyle C} \\ Q & \longrightarrow & R \end{array}$$

$$A(p, m) = (p, n\,m), \qquad B(p, m) = m(p), \qquad C(p, r) = r(p).$$

Il suffit de noter que i est caractérisé par

$$c_{vu} \cdot (\mathrm{id}_L \times i) = v \cdot c_u.$$

On prouve de même (ii).

Corollaire 2.3.13. Soient P, Q, R des gerbes et L, M, N leurs liens. Soit encore

$$u=(a,b), \qquad u:\ L\to M\times N \tag{1}$$

un morphisme de liens. Les projections de $Q\times_E R$ induisent un *isomorphisme* de gerbes

$$\mathrm{HOM}_u(P, Q\times_E R)\xrightarrow{\sim}\mathrm{HOM}_a(P,Q)\times_E\mathrm{HOM}_b(P,R) \tag{2}$$

lié par l'isomorphisme de liens induit par les projections de $M\times N$

$$C_u\xrightarrow{\sim}C_a\times C_b. \tag{3}$$

Que (2) soit un isomorphisme résulte de (I 3.3.2 (1)) et de (2.2.9) et la seconde assertion résulte du théorème précédent.

Corollaire 2.3.14. Sous les hypothèses de (2.3.12), supposons que

$$j:\ C_v\to C_{vu} \tag{1}$$

soit un *isomorphisme* (par exemple, u est surjectif ou N est abélien). Soit $m:\ P\to Q$ un u-morphisme.

(i) Le morphisme

$$\mathsf{m}:\ \mathrm{HOM}_v(Q,R)\to\mathrm{HOM}_{vu}(P,R), \qquad \mathsf{m}(n)=n\,m, \tag{2}$$

est une E-équivalence de gerbes.

(ii) Le foncteur

$$\mathsf{m}':\ \mathsf{Hom}_v(Q,R)\to\mathsf{Hom}_{vu}(P,R), \qquad \mathsf{m}'(n)=n\,m \tag{3}$$

est une équivalence de catégories.

(iii) Pour tout vu-morphisme $p:\ P\to R$ il existe un v-morphisme $n:\ Q\to R$ et un isomorphisme $i:\ p\to n\,m$.

La première assertion résulte de (2.2.6 (iii)), car m est lié par j qui est un isomorphisme. La seconde en résulte par passage aux catégories de sections cartésiennes (2.3.1.3 (4)) et la troisième n'est qu'un commentaire.

Corollaire 2.3.15. Soit $u:\ L\to M$ un morphisme de liens tel que le morphisme $C_M\to C_u$, (1.5.4 (5)), du centre de M dans le centralisateur de u soit un *isomorphisme*. Soient encore $m:\ P\to Q$ un morphisme de gerbes lié par u et Q' une M-gerbe.

(i) On a une C_M-équivalence de C_M-gerbes

$$\mathsf{n}:\ \mathrm{HOM}_M(Q,Q')\to\mathrm{HOM}_u(P,Q'), \qquad \mathsf{m}(n)=n\,m, \tag{1}$$

et une équivalence de catégories

$$\mathsf{m}':\ \mathsf{Hom}_M(Q,Q')\to\mathsf{Hom}_u(P,Q'), \qquad \mathsf{m}'(n)=n\,m. \tag{2}$$

(ii) Pour que Q' soit M-équivalente à Q il faut et il suffit qu'il existe un u-morphisme $m'\colon P \to Q'$.

Il suffit d'appliquer le corollaire précédent en prenant $v = \mathrm{id}_M$.

Corollaire 2.3.16. Soient P et Q deux gerbes de liens L et M.

(i) On a une équivalence de M-gerbes

$$Q \sim \mathrm{HOM}_1(P, Q) \tag{1}$$

où $1\colon L \to M$ est le morphisme unité (1.2.4).

(ii) On a une équivalence de catégories

$$\varprojlim(Q/E) \xrightarrow{\approx} \mathsf{Hom}_1(P, Q), \qquad s \rightsquigarrow s^P, \tag{2}$$

où $s^P = s\,p$, ($p\colon P \to E$ est la projection).

En effet, par (2.3.15), la composition avec $p\colon P \to E$ induit une équivalence $\mathrm{HOM}_1(E, Q) \to \mathrm{HOM}_1(P, Q)$. Or Q est E-équivalente à la gerbe $\mathbf{S}Q$ des sections cartésiennes de Q et l'on a $\mathbf{S}Q = \mathrm{HOM}_1(E, Q)$, (2.3.6).

Remarque 2.3.17. («Extension du lien structural.»)

Soient $u\colon L \to M$ un morphisme de liens et P une L-gerbe. On cherche à «étendre» la gerbe P de L à M, c'est à dire à trouver une M-gerbe Q et un u-morphisme $m\colon P \to Q$ tels que, pour toute M-gerbe Q', le *foncteur* (2.3.15 (2)) induit par la composition avec m soit une équivalence de catégories. Le corollaire (2.3.15 (ii)) fournit une assertion d'*unicité* pour Q, du moins si l'on a $C_u = C_M$. Nous verrons plus bas, sous la même hypothèse, une assertion d'*existence* (VI 2.4), mais l'on notera que l'on ne peut espérer un résultat analogue si $C_u \neq C_M$. En effet, il est raisonnable d'imposer de plus que l'extension du lien structural soit stable par localisation, auquel cas, si l'on a une solution $m\colon P \to Q$, le morphisme de *gerbes* (2.3.15 (1)) induit par la composition avec m sera une équivalence et le morphisme $C_M \to C_u$ qui le lie sera un isomorphisme. Cette circonstance est liée à la non existence en général du produit contracté de deux gerbes. Elle explique en particulier que $H^2(L)$ ne soit pas fonctoriel en L (3.1.4).

Nous traiterons directement un cas particulier.

Proposition 2.3.18. («Fonctorialité surjective.»)

Soit $u\colon L \to M$ un *épimorphisme* de liens.

(i) Pour toute L-gerbe P il existe une M-gerbe Q et un u-morphisme $m\colon P \to Q$.

(ii) Pour tout u-morphisme de gerbes $m\colon P \to Q$, tout morphisme de liens $v\colon M \to N$ et tout vu-morphisme $p\colon P \to R$ il existe un v-morphisme $n\colon Q \to R$, unique à isomorphisme unique près, tel que $nm \approx p$.

2.3.18.1. Bien entendu la seconde assertion résulte de la «propriété universelle» plus précise énoncée dans (2.3.9) et (2.3.10), car on a ici $C_u = C_M$ et $C_v = C_{vu}$.

2.3.18.2. Nous déduirons Q de P par un procédé qui a déjà été utilisé pour construire le champ des liens, (1.1.4). Nous pouvons remplacer P par une gerbe E-équivalente, donc supposer que P est scindée. Pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$ et tout $x \in \mathrm{Ob}(P_S)$, on a un morphisme de liens sur S

$$u(S)\,a(x)^{-1}\colon \mathsf{lien}\big(\mathsf{Aut}_S(x)\big) \to M(S), \quad \text{noté } v(x), \tag{1}$$

où a désigne l'action de L sur P qui définit sa structure de L-gerbe, (2.1.4 (2)). Désignons par $K(x)$ le sous-faisceau de groupes de $\mathsf{Aut}_S(x)$ défini par la condition d'être localement le noyau de tout morphisme de faisceaux de groupes qui représente $v(x)$. Bien entendu, $K(x)$ est normal. Pour tout couple (x, y) d'objets de P_S, soit

$$\mathsf{H}(x, y) = K(y) \backslash \mathsf{Hom}_S(x, y)/K(x) \tag{2}$$

le *faisceau* quotient, où $K(y)$ et $K(x)$ opèrent par composition des morphismes. Du fait que la catégorie fibre P_S est un groupoïde et que, pour tout S-isomorphisme $i\colon x \to y$ le morphisme $\mathrm{Int}(i)\colon \mathsf{Aut}_S(x) \to \mathsf{Aut}_S(y)$ représente le morphisme identique de $L(S)$, (2.2.2.2), on déduit que l'image de $K(x)$ par $\mathrm{Int}(i)$ est $K(y)$, d'où des isomorphismes

$$\mathsf{H}(x, y) \approx K(y) \backslash \mathsf{Hom}_S(x, y) \approx \mathsf{Hom}_S(x, y)/K(x). \tag{3}$$

On en déduit que les accouplements de composition

$$\mathsf{Hom}_S(x, y) \times \mathsf{Hom}_S(y, z) \to \mathsf{Hom}_S(x, z) \tag{4}$$

passent au quotient et induisent des accouplements

$$\mathsf{H}(x, y) \times \mathsf{H}(y, z) \to \mathsf{H}(x, z). \tag{5}$$

D'où, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$, une catégorie $Q_0(S)$ qui a mêmes objets que la fibre P_S, dont les morphismes de x dans y sont les sections du faisceau $\mathsf{H}(x, y)$ et dont la loi de composition est définie par les accouplements de (5). Les $Q_0(S)$ définissent une E-catégorie scindée Q_0. En effet, comme on a choisi P scindée, pour toute flèche $f\colon T \to S$ et tout couple (x, y) d'objets de P_S on a

$$\mathsf{Hom}_S(x, y)^f = \mathsf{Hom}_S(x^f, y^f) \tag{6}$$

d'où, puisque l'action a de L sur P est un morphisme de sections cartésiennes (i.e. compatible avec la restriction de S à T) $K(x^f)=K(x)^f$ et

$$\mathsf{H}(x, y)^f=\mathsf{H}(x^f, y^f). \tag{7}$$

D'où un morphisme de E-catégories scindées

$$m_0\colon\ P_0\to Q_0 \tag{8}$$

qui est l'identité sur les objets et qui, pour tout $S\in\mathrm{Ob}(E)$ et tout couple (x, y) d'objets de P_S, induit sur les faisceaux de S-morphismes la projection structurale du quotient $\mathsf{Hom}_S(x, y)\to\mathsf{H}(x, y)$. On désigne enfin par

$$m\colon\ P\to Q \tag{9}$$

le composé de $m_0\colon P\to Q_0$ et du morphisme $m'\colon Q_0\to Q$ de Q_0 dans son champ associé. Il est immédiat que m est couvrant car m_0 l'est et m' est bicouvrant. Donc Q est une *gerbe*. Soit $u'\colon L\to M'$ le morphisme qui lie m. Pour conclure il nous reste à trouver un isomorphisme

$$i\colon\ M\to M' \qquad \text{tel que} \qquad iu=u'. \tag{10}$$

Or, pour tout $S\in\mathrm{Ob}(E)$ et tout $x\in\mathrm{Ob}(P_S)$, le composé

$$\mathsf{Aut}_S(x)\xrightarrow{a}\mathsf{Aut}_S(m_0(x))\xrightarrow{b}\mathsf{Aut}_S(m(x))$$

est un quotient $\mathsf{Aut}_S(x)/K(x)$. En effet, Q_0 est précomplète, donc $m'\colon Q_0\to Q$ est pleinement fidèle, donc b est un isomorphisme et par construction, $\mathsf{Aut}_S(m_0(x))=\mathsf{H}(x, x)=\mathsf{Aut}_S(x)/K(x)$. D'où la conclusion, par (1.3.1 (iii)).

2.4. Le produit contracté $P\overset{C}{\wedge}Q$ de deux gerbes

Proposition 2.4.1. Soit $(u, v)\colon C\to L\times M$ un morphisme de liens tel que le produit contracté

$$\pi\colon\ L\times M\to L\overset{C}{\wedge}M \qquad (1.6.1) \tag{1}$$

existe. Soient encore P et Q deux gerbes de liens L et M.

(i) Il existe une gerbe $P\overset{C}{\wedge}Q$ de lien $L\overset{C}{\wedge}M$ et un π-morphisme de gerbes

$$\varpi\colon\ P\times_E Q\to P\overset{C}{\wedge}Q. \tag{2}$$

(ii) Pour tout morphisme de liens $x\colon L\overset{C}{\wedge}M\to N$ et toute N-gerbe R, on a une C_x-équivalence de gerbes

$$\mathsf{p}\colon\ \mathrm{HOM}_x(P\overset{C}{\wedge}Q, R)\to\mathrm{HOM}_{x\pi}(P\times_E Q, R), \qquad \mathsf{p}(m)=\varpi m, \tag{3}$$

(où $C_x = C_{x\pi}$ est le centralisateur de x), et une équivalence de catégories

$$\mathsf{Hom}_x(P \overset{C}{\wedge} Q, R) \to \mathsf{Hom}_{x\pi}(P \times_E Q, R). \tag{4}$$

(iii) Pour toute E-gerbe R on a une équivalence de catégories

$$\mathsf{p}\colon\ \mathsf{Cart}_E(P \overset{C}{\wedge} Q, R) \to \mathsf{C}(R), \qquad \mathsf{p}(m) = m\,\varpi, \tag{5}$$

où $\mathsf{C}(R)$ est la sous-catégorie pleine de $\mathsf{Cart}_E(P \times_E Q, R)$ dont les objets sont les morphismes de gerbes $m\colon P \times_E Q \to R$ tels que le morphisme de liens associé $w\colon L \times M \to N$ vérifie

$$w(u, 1) = w(1, v), \qquad [\text{i.e. } w \cdot (u, v^{-1}) = 1 \text{ si } v \text{ est central}]. \tag{6}$$

2.4.1.1. On dira parfois que $P \overset{C}{\wedge} Q$ est *le produit contracté de P et de Q munies des opérations de C*. On rappelle que le produit contracté des liens, $L \overset{C}{\wedge} M$, existe en particulier si l'un des morphismes u ou v est *central*. Si $L \overset{C}{\wedge} M$ existe, le morphisme π est un épimorphisme et l'assertion (i) résulte de (2.3.18) (fonctorialité surjective). L'assertion (ii) résulte de (2.3.14) et (iii) résulte de (ii) et de la définition de $L \overset{C}{\wedge} M$ comme un conoyau. On notera que $P \overset{C}{\wedge} Q$ est défini à $(L \overset{C}{\wedge} M)$-équivalence unique près (cf. 2.3.15).

2.4.1.2. On notera que si P et Q sont neutres il en est de même de $P \overset{C}{\wedge} Q$ car la composition avec la projection ϖ de (2) induit un foncteur

$$\varprojlim(P \times_E Q/E) \to \varprojlim(P \overset{C}{\wedge} Q/E) \tag{7}$$

et l'on a un isomorphisme canonique

$$\varprojlim(P \times_E Q/E) \xrightarrow{\sim} \varprojlim(P/E) \times \varprojlim(Q/E).$$

Corollaire 2.4.2. Sous les hypothèses de (2.4.1),

(i) on a une E-équivalence

$$P \overset{C}{\wedge} Q \approx\!\!\approx Q \overset{C}{\wedge} P \tag{1}$$

liée par l'isomorphisme canonique $L \overset{C}{\wedge} M \approx M \overset{C}{\wedge} L$ (1.6.3 (1));

(ii) si, de plus, $w\colon C \to N$ est un morphisme de liens central et R une N-gerbe, on a une équivalence

$$(P \overset{C}{\wedge} Q) \overset{C}{\wedge} R \approx\!\!\approx P \overset{C}{\wedge} (Q \overset{C}{\wedge} R) \tag{2}$$

liée par l'isomorphisme $(L \overset{C}{\wedge} M) \overset{C}{\wedge} N \approx L \overset{C}{\wedge} (M \overset{C}{\wedge} N)$ (1.6.3 (2)).

Appliquer (2.4.1 (ii)).

Exemple 2.4.3. Soit $u\colon C \to L$ un morphisme de liens *central*. Soient X une C-gerbe et P une L-gerbe. On désignera toujours par $X \overset{C}{\wedge} P$ le produit contracté obtenu en faisant opérer C sur $X \times P$ par $(\mathrm{id}_C, u)\colon C \to C \times L$. D'après (1.6.2) on obtient ainsi une L-gerbe caractérisée à L-équivalence unique près par la donnée d'un morphisme $X \times_E P \to X \overset{C}{\wedge} P$ lié par

$$u + \mathrm{id}_L\colon\ C \times L \to L.$$

Si Y est une C-gerbe et si C est *abélien*, on peut effectuer le produit $X \overset{C}{\wedge} Y$ où C opère par $(\mathrm{id}_C, \mathrm{id}_C)\colon C \to C \times C$ et, d'après le corollaire précédent, l'on a une L-équivalence

$$(X \overset{C}{\wedge} Y) \overset{C}{\wedge} P \dashrightarrow X \overset{C}{\wedge} (Y \overset{C}{\wedge} P). \tag{1}$$

Par ailleurs, si $v\colon L \to M$ est un autre morphisme *central*, et si Q est une M-gerbe (on ne suppose plus que C soit abélien), on a une M-équivalence

$$(X \overset{C}{\wedge} P) \overset{L}{\wedge} Q \approxeq X \overset{C}{\wedge} (P \overset{L}{\wedge} Q), \tag{2}$$

dont la définition est laissée au lecteur, (2.4.1 (ii)).

Proposition 2.4.4. Soient L un lien, C son *centre*, P et Q deux L-gerbes. On a une L-équivalence

$$P \overset{C}{\wedge} \mathrm{HOM}_L(P, Q) \dashrightarrow Q. \tag{1}$$

Rappelons que l'on identifie le lien de $\mathrm{HOM}_L(P, Q)$ au centre de L en imposant que le morphisme

$$P \times_E \mathrm{HOM}_L(P, Q) \to Q, \qquad (p, m) \rightsquigarrow m(p),$$

soit lié par $\mathrm{id}_L + c\colon L \times C \to L$, où $c\colon C \to L$ est «l'inclusion», cf. (2.3.2) et (1.5.3). D'où la conclusion, par définition du produit contracté, cf. (2.4.3).

Proposition 2.4.5. Soient $u\colon C \to L$ un morphisme de liens central, X une C-gerbe et P une L-gerbe.

(i) Il existe une L-équivalence

$$X \overset{C}{\wedge} \mathrm{HOM}_u(X, P) \dashrightarrow P. \tag{1}$$

(ii) Il existe une L-équivalence

$$P \to \mathrm{HOM}_u(X, P \overset{C}{\wedge} X). \tag{2}$$

(ii bis) Pour qu'il existe un u-morphisme $X \dashrightarrow P \overset{C}{\wedge} X$ il faut et il suffit que P soit neutre.

(iii) Soit encore $x\colon C \to C_L$ le morphisme caractérisé par $\gamma_L \cdot x = u$, où $(C_L, \gamma_L\colon C_L \to L)$ est le *centre* de L. Il existe un x-morphisme

$$X \dashrightarrow \mathrm{HOM}_L(P, P \overset{C}{\wedge} X). \tag{3}$$

(iii bis) Si X est *neutre* il existe une L-équivalence $P \dashrightarrow P \overset{C}{\wedge} X$. Si C est le centre de L, la réciproque est vraie.

2.4.5.1. Pour prouver (i), par définition du produit contracté, il suffit de trouver un morphisme

$$X \times {}_E\mathrm{HOM}_u(X, P) \to P$$

lié par

$$u + \mathrm{id}_L\colon\ C \times L \dashrightarrow L.$$

C'est ce que fournit le théorème (2.3.2), si l'on note que, puisque u est central, $(L, u + \mathrm{id}_L)$ est un centralisateur de u.

2.4.5.2. Pour prouver (ii), notons que, d'aprés (2.3.11), on a un morphisme de gerbes

$$a\colon\ P \dashrightarrow \mathrm{HOM}_i(X, P \times {}_E X), \qquad a(p)(x) = (p, x) \tag{4}$$

lié par le morphisme

$$j\colon\ L \dashrightarrow L \times C', \qquad j = \mathrm{inj}_1, \tag{5}$$

où $i = \mathrm{inj}_2$, $i\colon\ C \dashrightarrow L \times C$, et où C' est le centre de C. Par définition du produit contracté, on a un morphisme de gerbes $\varpi\colon P \times {}_E X \dashrightarrow P \overset{C}{\wedge} X$, lié par

$$\mathrm{id}_L + u\colon\ L \times C \dashrightarrow L. \tag{6}$$

La composition avec ϖ induit, d'après (2.3.12 (iii)), un morphisme de gerbes

$$\mathrm{HOM}_i(X, P \times {}_E X) \dashrightarrow \mathrm{HOM}_u(X, P \overset{C}{\wedge} X), \qquad f \rightsquigarrow \varpi f, \tag{7}$$

car on a $(\mathrm{id}_L + u) \cdot i = u$; de plus, (7) est lié par

$$\mathrm{id}_L + u'\colon\ L \times C' \to L, \tag{8}$$

qui est le morphisme induit par (6) sur les centralisateurs de i et de u. Le composé de (7) et de (4) se trouve donc lié par $(\mathrm{id}_L + u') \cdot j = \mathrm{id}_L$ donc est une L-équivalence, ce qui prouve (ii). D'où (ii bis), par passage aux sections, cf. (2.3.1.3).

2.4.5.3. On prouve (iii) de manière analogue. Tout d'abord, d'après (2.3.11), on a un morphisme de gerbes

$$b\colon\ X \to \mathrm{HOM}_k(P, P \times {}_E X), \qquad b(x)(p) = (p, x), \tag{9}$$

lié par le morphisme

$$\mathrm{inj}_2\colon\ C \to C_L \times C, \tag{10}$$

où $k = \mathrm{inj}_1$, $k\colon L \to L \times C$, et où $x\colon C \to C_L$ est défini par

$$\gamma_L \cdot x = u, \qquad \gamma_L\colon\ C_L \to L. \tag{11}$$

La composition avec $\varpi\colon P \times_E X \to P \overset{C}{\wedge} X$ induit un morphisme de gerbes

$$\mathrm{HOM}_k(P, P \times_E X) \dashrightarrow \mathrm{HOM}_L(P, P \overset{C}{\wedge} X), \tag{12}$$

car $(\mathrm{id}_L + u) \cdot k = \mathrm{id}_L$; de plus, (12) est lié par

$$\mathrm{id}_{C_L} + x\colon\ C_L \times C \dashrightarrow C_L, \tag{13}$$

qui est le morphisme induit par $(\mathrm{id}_L + u)$ sur les centralisateurs de k et id_L. En composant (12) et (9), on trouve donc un morphisme de gerbes

$$X \dashrightarrow \mathrm{HOM}_L(P, P \times_E X), \tag{14}$$

lié par le composé $(\mathrm{id}_{C_L} + x)\,\mathrm{inj}_2 = x$, $x\colon C \dashrightarrow C_L$, ce qui prouve (iii).

2.4.5.4. La première assertion de (iii bis) en résulte par (2.3.5). Si C est le centre de L, x est un isomorphisme et, par suite, (14) est une équivalence, ce qui achève de prouver (iii bis). C.Q.F.D.

Proposition 2.4.6. Soient $u\colon L \to M$ un morphisme de liens, P une L-gerbe, Q une M-gerbe et (C_u, c_u) le centralisateur de u.

(i) Soient $a\colon A \to L$ un morphisme *central* et X une A-gerbe. On a une C_u-équivalence

$$X \overset{A}{\wedge} \mathrm{HOM}_u(P \overset{A}{\wedge} X, Q) \dashrightarrow \mathrm{HOM}_u(P, Q). \tag{1}$$

(ii) Soient $b\colon B \to M$ un morphisme *central* et Y une B-gerbe. On a une C_u-équivalence

$$\mathrm{HOM}_u(P, Q) \overset{B}{\wedge} Y \to \mathrm{HOM}_u(P, Q \overset{B}{\wedge} Y). \tag{2}$$

2.4.6.1. Le morphisme $a\colon A \to L$ étant central, le produit contracté $P \overset{A}{\wedge} X$ est défini comme il est dit dans (2.4.3). De plus, on a un morphisme

$$\mathrm{id}_L + a\colon\ L \times A \to L \qquad (a \text{ est central, } 1.4.3)$$

d'où, par la propriété universelle de C_u, un morphisme *central*

$$a'\colon\ A \dashrightarrow C_u \quad \text{tel que} \quad c_u \cdot (\mathrm{id}_L \times a') = u \cdot (\mathrm{id}_L + a). \tag{3}$$

En faisant opérer A sur $\mathrm{HOM}_u(P \overset{A}{\wedge} X, Q)$ grâce à a' on achève de définir le premier membre de (1), (2.4.3).

2.4.6.2. Par la définition du produit contracté, pour prouver (i) il nous suffira de trouver un morphisme de gerbes

$$X \times_E \mathrm{HOM}_u(P \overset{A}{\wedge} X, Q) \to \mathrm{HOM}_u(P, Q) \tag{4}$$

lié par le morphisme

$$a' + \mathrm{id}_{C_u} : A \times C_u \to C_u, \tag{5}$$

ou encore, par la propriété universelle de $P \times_E X \xrightarrow{\varpi} P \overset{A}{\wedge} X$ (2.4.1 (3)), un morphisme de gerbes

$$X \times_E \mathrm{HOM}_s(P \times_E X, Q) \to \mathrm{HOM}_u(P, Q), \tag{6}$$

où $s = u \cdot (\mathrm{id}_L + a) = c_u \cdot (\mathrm{id}_L \times a')$, qui soit lié par le morphisme

$$t : A \times C_s \to C_u \tag{7}$$

déduit de (5) en identifiant C_s et C_u par l'isomorphisme (cf. 1.5.4 (3) et 2.3.14)

$$i : C_u \xrightarrow{\sim} C_s \tag{8}$$

caractérisé par

$$c_s \cdot (\mathrm{id}_{L \times A} \times i) = c_u \cdot ((\mathrm{id}_L + a) \times \mathrm{id}_{C_u}). \tag{9}$$

Le corollaire (2.3.10), (où le morphisme $x : X \to C_u$ est remplacé ici par $a' : A \to C_u$) fournit un morphisme de gerbes (6) lié par le morphisme

$$t' : A \times C_s \to C_u, \tag{10}$$

où t' est caractérisé par

$$c_s = c_u \cdot (\mathrm{id}_L \times t'), \quad c_s : L \times A \times C_s \to M. \tag{11}$$

Il reste à vérifier que $t' = t$, autrement dit que l'on a

$$t' \cdot (\mathrm{id}_A \times i) = a' + \mathrm{id}_{C_u}, \quad \text{(cf. (5) et (7))}. \tag{12}$$

Par la propriété universelle de C_u, la formule (12) s'écrit

$$c_u(\mathrm{id}_L \times (t' \cdot (\mathrm{id}_A \times i))) = c_u \cdot (\mathrm{id}_L \times (a' + \mathrm{id}_{C_u})), \tag{13}$$

ou encore, par définition de t',

$$c_s \cdot (\mathrm{id}_{L \times A} \times i) = c_u \cdot (\mathrm{id}_L \times (a' + \mathrm{id}_{C_u})),$$

ou encore, par définition de i,

$$c_u \cdot ((\mathrm{id}_L + a) \times \mathrm{id}_{C_u}) = c_u \cdot (\mathrm{id}_L \times (a' + \mathrm{id}_{C_u})).$$

Cette dernière égalité (entre morphismes de liens) se prouve aisément, par réduction au cas des faisceaux de groupes.

2.4.6.3. Puisque b est central, le produit contracté $Q \overset{B}{\wedge} Y$ qui figure dans (2) est défini comme il est dit dans (2.4.3). De plus, on a un morphisme de liens

$$u+b\colon\ L\times B\to M\,,\qquad (1.4.3),\tag{14}$$

d'où, par définition de C_u, un morphisme *central*

$$b'\colon\ B\to C_u\quad \text{tel que}\quad c_u\cdot(\mathrm{id}_L\times b')=u+b\,.\tag{15}$$

On définit le produit contracté du premier terme de (2) grâce au morphisme central b', (cf. 2.4.3). Pour prouver (ii), il suffira donc de trouver un morphisme de gerbes

$$\mathrm{HOM}_u(P,Q)\times_E Y\to \mathrm{HOM}_u(P,Q\overset{B}{\wedge} Y)\tag{16}$$

qui soit lié par

$$\mathrm{id}_{C_u}+b'\colon\ C_u\times B\to C_u.\tag{17}$$

2.4.6.4. D'après (2.3.2) et (2.2.9) on a un morphisme de gerbes

$$V\times_E \mathrm{id}_Y\colon\ P\times_E \mathrm{HOM}_u(P,Q)\times_E Y\to Q\times_E Y,\tag{18}$$

qui est lié par

$$s=c_u\times \mathrm{id}_B,\qquad s\colon\ L\times C_u\times B\to M\times B,\tag{19}$$

où $V\colon P\times_E \mathrm{HOM}_u(P,Q)\to Q$ est le morphisme de (2.3.2). Posons

$$u'=(u,1),\qquad u'\colon\ L\to M\times B.\tag{20}$$

D'après (2.3.7) et (2.3.9), on déduit de (18) un morphisme de gerbes

$$S\colon\ \mathrm{HOM}_u(P,Q)\times_E Y\to \mathrm{HOM}_{u'}(P,Q\times_E Y)\tag{21}$$

$$S(f,y)(p)=(f(p),y),\qquad (\text{cf. } 2.3.8),\tag{21 bis}$$

qui est lié par le morphisme

$$x\colon\ C_u\times B\to C_{u'}\tag{22}$$

correspondant à s, qui est défini par

$$c_{u'}\cdot(\mathrm{id}_L\times x)=s.\tag{23}$$

Ceci dit, la projection $Q\times_E Y\to Q\overset{B}{\wedge} Y$ est liée par $\mathrm{id}_M+b\colon\ M\times B\to M$ et induit, d'après (2.3.12 (iii)), un morphisme de gerbes

$$\mathrm{HOM}_{u'}(P,Q\times_E Y)\to \mathrm{HOM}_u(P,Q\overset{B}{\wedge} Y),\tag{24}$$

(en effet, $(\mathrm{id}_L\times x)\,u'=(\mathrm{id}_L\times x)\,(u,1)=u$), lequel est lié par le morphisme

$$k\colon\ C_{u'}\to C_u\tag{25}$$

«induit par l'égalité» $u=(\mathrm{id}_L\times x)\,u'$, (1.5.4), qui est caractérisé par

$$c_u\cdot(\mathrm{id}_L\times k)=(\mathrm{id}_M+b)\cdot c_{u'}. \tag{26}$$

En composant (24) et (21) on trouve le morphisme (16) qui prouve (ii). En effet, il suffit de vérifier que l'on a

$$k\,x=\mathrm{id}_{C_u}+b',\qquad C_u\times B\to C_u, \tag{27}$$

ou encore, par la propriété universelle de C_u,

$$c_u\cdot(\mathrm{id}_L\times k\,x)=c_u\cdot\big(\mathrm{id}_L\times(\mathrm{id}_{C_u}+b')\big). \tag{28}$$

Le premier membre de (28) s'écrit également

$$c_u\cdot(\mathrm{id}_L\times k)\,(\mathrm{id}_L\times x)$$

ou encore, par définition de k, (26),

$$(\mathrm{id}_M+b)\,c_{u'}\cdot(\mathrm{id}_L\times x).$$

Par définition de x, ((23) et (19)), l'égalité (28) s'écrit encore

$$(\mathrm{id}_M+b)\,(c_u\times\mathrm{id}_B)=c_u\cdot\big(\mathrm{id}_L\times(\mathrm{id}_{C_u}+b')\big). \tag{29}$$

On prouve cette dernière égalité en notant que les deux membres sont égaux à c_u+b, ce qui a un sens car b est central (1.4.3). C.Q.F.D.

2.5. La gerbe des relèvements d'une section

2.5.1. Soient F et G deux E-catégories fibrées,

$$m\colon\ F\to G \tag{1}$$

un E-foncteur cartésien et $s\in\mathrm{Ob}\big(\varprojlim(G/E)\big)$. Pour toute E-catégorie fibrée X, $X\in\mathrm{Fib}(E)$, on notera

$$s^X\colon\ X\to G \tag{2}$$

le composé de s et de la projection $X\to E$ et

$$K_s(X) \tag{3}$$

l'ensemble des couples (x,ξ), où $x\colon X\to F$ est un E-foncteur cartésien et $\xi\colon m\,x\xrightarrow{\sim}s^X$ est un *E-isomorphisme*. Bien entendu on définit un foncteur

$$K_s\colon\ \mathsf{Fib}(E)^0\to\mathsf{V}\text{-ens} \tag{4}$$

en associant de plus à tout E-foncteur cartésien $\omega\colon X\to Y$ l'application

$$K_s(\omega)\colon\ K_s(Y)\to K_s(X),\qquad K_s(\omega)\,(y,\eta)=(y\,\omega,\eta*\omega). \tag{5}$$

Par ailleurs, on définit une E-catégorie

$$K(s) \tag{7}$$

en prenant pour objets de projection $S \in \mathrm{Ob}(E)$ les éléments de

$$\{(a, \alpha),\ a \in \mathrm{Ob}(F_S),\ \alpha \in \mathrm{Isom}_S(m(a), s(S))\}, \tag{8}$$

pour morphismes de projection $f\colon T \to S$, $f \in \mathrm{Fl}(E)$, de source (b, β) et de but (a, α) les éléments de

$$\{\varphi \in \mathrm{Hom}_f(b, a),\ s(f)\,\beta = \alpha\, m(\varphi)\}, \tag{9}$$

et en composant les morphismes grâce à la loi de F. *Nous allons voir que* $K(s)$ *représente le foncteur* K_s.

Théorème 2.5.2. Soient $m\colon F \to G$ un E-foncteur cartésien, $F, G \in \mathrm{Fib}(E)$, et $s \in \mathrm{Ob}(\varprojlim(G/E))$.

(i) $K(s)$ est une E-catégorie fibrée.

(ii) On a un E-foncteur cartésien *fidèle* et *conservatif* (0 3.8.1)

$$k(s)\colon\ K(s) \to F, \qquad k(s)\,(a, \alpha) = a, \tag{1}$$

et un E-isomorphisme de foncteurs

$$\kappa(s)\colon\ m \cdot k(s) \to s^{K(s)}, \qquad \kappa(s)\,(a, \alpha) = \alpha, \tag{2}$$

où $(a, \alpha) \in \mathrm{Ob}(K(s)_S)$, $S \in \mathrm{Ob}(E)$.

(iii) Pour toute $X \in \mathrm{Fib}(E)$, l'application

$$\mathrm{Cart}_E(X, K(s)) \to K_s(X), \qquad k \rightsquigarrow (k(s)\,k, \kappa(s) * k), \tag{3}$$

est *bijective*.

(iv) Soit $i\colon s \to t$ un isomorphisme de sections de G. On a un E-foncteur

$$K(i)\colon\ K(s) \to K(t), \qquad K(i)\,(a, \alpha) = (a, i(S)\,\alpha),\ (a, \alpha) \in \mathrm{Ob}(K(s)_S), \tag{4}$$

caractérisé par

$$k(t)\,K(i) = k(s), \qquad \kappa(t) * K(i) = i^{K(s)} \cdot \kappa(s). \tag{5}$$

De plus, $K(i)$ est une E-isomorphisme.

2.5.2.1. Les trois premières assertions sont aisées à démontrer. Bien entendu, (iv) résulte formellement de (iii). On notera que l'on peut définir $K(i)$ par le morphisme de foncteurs $K_s \to K_t$ qu'il définit, qui est donné par $(x, \xi) \rightsquigarrow (x, i^X\,\xi)$, comme on voit trivialement.

2.5.2.2. Pour tout $X \in \mathrm{Fib}(E)$, l'ensemble $K_s(X)$ est l'ensemble d'objets d'une *catégorie*

$$\mathsf{K}_s(X) \tag{6}$$

dont les flèches de source (x, ξ) et de but (x', ξ') sont les *E-morphismes* $\chi\colon x \to x'$ (de E-foncteurs cartésiens) tels que

$$\xi' \cdot (m * \chi) = \xi, \tag{7}$$

(égalité entre flèches de $\mathsf{Cart}_E(X, G)$, (I 1.1.1)). On définit ainsi un foncteur

$$\mathsf{K}_s\colon\ \mathsf{Fib}(E)^0 \to \mathsf{V}\text{-cat} \tag{8}$$

qui, par passage aux ensembles d'objets, redonne (2.5.1 (4)).

Corollaire 2.5.3. Sous les hypothèses de (2.5.2), on a, pour toute $X \in \mathrm{Fib}(E)$, un isomorphisme de *catégories*

$$\mathsf{Cart}_E(X, K(s)) \xrightarrow{\sim} \mathsf{K}_s(X), \tag{1}$$

dont l'action sur les objets est donnée par (2.5.2 (3)) et qui, à toute flèche $\kappa\colon k \to k'$ de $\mathsf{Cart}_E(X, K(s))$, $(k, k'\colon X \rightrightarrows K(s))$, associe la flèche $k(s) * \kappa$ de $\mathsf{K}_s(X)$.

2.5.3.1. On sait déjà que (1) est bijectif sur les objets. Dire qu'il est pleinement fidèle signifie que, pour tout couple $k, k'\colon X \rightrightarrows K(s)$ de E-foncteurs cartésiens et tout E-morphisme

$$\chi\colon\ k(s)\, k \to k(s)\, k' \tag{2}$$

vérifiant

$$(\kappa(s) * k')\,(m * \chi) = \kappa(s) * k, \tag{3}$$

il existe un unique E-morphisme $\kappa\colon k \to k'$ tel que

$$k(s) * \kappa = \chi. \tag{4}$$

La démonstration est évidente grâce aux formules explicites donnant $K(s)$, $k(s)$ et $\kappa(s)$.

2.5.3.2. Il est immédiat que les isomorphismes (1) définissent un isomorphisme entre foncteurs définis sur $\mathsf{Fib}(E)^0$ et à valeurs dans V-cat. Donc le corollaire renforce la propriété universelle (2.5.2 (iii)).

Proposition 2.5.4. Sous les hypothèses de (2.5.2),

(i) Si F est un champ et G un préchamp, $K(s)$ est un *champ*.

(ii) Si, de plus, $m\colon F \to G$ est *couvrant* (II 1.4.1) et *conservatif* (I 1.5.1), $K(s)$ est une *gerbe*.

2.5.4.1. Sous les conditions de (ii), on dira que $K(s)$ est *la gerbe des relèvements de s relativement à m*: $F \to G$. En faisant $X = E$ dans l'isomorphisme (2.5.3 (1)), on trouve *un isomorphisme*

$$\varprojlim(K(s)/E) \xrightarrow{\sim} \mathbf{K}_s(E), \quad (2.5.2.2\,(7)), \tag{1}$$

qui identifie la catégorie des sections de $K(s)$ à celle *des relèvements de s*, dont les objets sont les couples (t, τ), où t est une section cartésienne de F et $\tau: mt \xrightarrow{\sim} s$ un isomorphisme de sections cartésiennes.

2.5.4.2. Pour prouver que $K(s)$ est un *champ*, il faut montrer que, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$ et tout raffinement R de S, le foncteur restriction

$$\mathbf{Cart}_E(E_{/S}, K(s)) \to \mathbf{Cart}_E(E_{/R}, K(s)), \quad (\mathrm{II}\ 1.2.1),$$

est une équivalence de catégories. Or, d'après le corollaire précédent, ce foncteur s'identifie au foncteur restriction $\mathbf{K}_s(E_{/S}) \to \mathbf{K}_s(E_{/R})$. D'après la définition de $\mathbf{K}_s(*)$, on en déduit (i) en remarquant que le foncteur restriction $\mathbf{Cart}_E(E_{/S}, F) \to \mathbf{Cart}_E(E_{/R}, F)$ est une équivalence, car F est un champ, et que l'analogue relatif à G est pleinement fidèle, car G est un préchamp.

2.5.4.3. On sait déjà que $k(s)$ est conservatif (2.5.2 (ii)). Donc $m \cdot k(s)$ est conservatif si m l'est et alors $K(s)$ est un champ de groupoïdes. Si m est couvrant, s se relève localement et on en déduit immédiatement que $K(s)$ est un gerbe.

2.5.4.4. Soit $G(s)$ la sous-gerbe maximale de G engendrée par s (III 2.1.3.2). Puisque m est couvrant et conservatif, il est immédiat qu'il existe une sous-gerbe maximale F' de F dont les objets de projection S sont les $x \in \mathrm{Ob}(F_S)$ tels que $m(x)$ soit localement S-isomorphe à $s(S)$; de plus, m induit un morphisme de gerbes $m': F' \to G'$. Il est maintenant clair que $K(s)$ ne dépend que $m': F' \to G'$. La situation générale est donc essentiellement celle de la proposition suivante.

Proposition 2.5.5. Soient $m: F \to G$ un morphisme de gerbes lié par un épimorphisme de liens $v: M \to N$ et $s \in \mathrm{Ob}(\varprojlim(G/E))$. Soit

$$u(s):\ L(s) \to M \tag{1}$$

le morphisme de liens qui lie le morphisme de gerbes $k(s)$: $K(s) \to F$, (2.5.3 (1)), où $K(s)$ est la gerbe des relèvements de s.

(i) Le morphisme $u(s)$ est injectif et normal (1.2.6) et $v: M \to N$ est un conoyau de $u(s)$ (1.3.1). [On dira que la suite de morphismes de liens

$$1 \to L(s) \xrightarrow{u(s)} M \xrightarrow{v} N \to 1 \tag{2}$$

est *exacte*.]

(ii) Le faisceau

$$C(s)=\mathbf{Aut}(s) \tag{3}$$

des automorphismes de la section s opère (III 2.2.1) sur $L(s)$. Si l'on fait opérer $C(s)$ trivialement sur M, le morphisme $u(s)$ est un morphisme d'objets à opérateurs.

(iii) Pour tout $C(s)$-torseur P, on a un isomorphisme canonique de liens

$$L({}^{P}s) \xrightarrow{\sim} {}^{P}L(s) \tag{4}$$

où ${}^{P}s$ (resp. ${}^{P}L(s)$) désigne la section de G (resp. le lien) obtenue en tordant s (resp. $L(s)$) par P (III 2.3.3). De plus, (4) identifie $u({}^{P}s)$ et ${}^{P}u(s)$.

2.5.5.1. Notons déjà que m est couvrant car v est un épimorphisme (2.2.6). Donc $K(s)$ *est une gerbe* (2.5.4) car m est conservatif puisque F est un champ de groupoïdes. Pour tout $S\in\mathrm{Ob}(E)$ et tout $x\in\mathrm{Ob}(K(s)_S)$, par définition de $K(s)$, la suite de groupes

$$1\to \mathrm{Aut}_S(x)\to \mathrm{Aut}_S\big(k(s)(x)\big)\to \mathrm{Aut}_S\big(m\,k(s)(x)\big) \tag{1}$$

est exacte, d'où l'on déduit que la suite de faisceaux de groupes

$$1\to \mathbf{Aut}_S(x)\to \mathbf{Aut}_S\big(k(s)(x)\big)\xrightarrow{v'} \mathbf{Aut}_S\big(m\,k(s)(x)\big)\to 1 \tag{2}$$

est exacte (III 3.3.0), car on sait de plus que $v\colon M\to N$, qui représente v', est un épimorphisme. D'où l'on déduit (i) car les conditions qui y figurent sont locales (loc. cit.). [N.B.: par définition du lien d'une gerbe, (2) représente localement (2.5.5 (2)).]

2.5.5.2. Soit $i\colon s\xrightarrow{\sim} t$ un isomorphisme de sections de G. L'isomorphisme

$$L(i)\colon\ L(s)\xrightarrow{\sim} L(t) \tag{1}$$

qui lie l'isomorphisme $K(i)\colon K(s)\xrightarrow{\sim} K(t)$ (2.5.2 (4)) vérifie

$$u(t)\cdot L(i)=u(s), \tag{2}$$

car on a $k(t)\cdot K(i)=k(s)$ (2.5.2 (5)). Retenons seulement pour l'instant que, si s et t sont deux sections de G, on a une application

$$\mathrm{Isom}(s,t)\to \mathrm{Isom}\big(L(s),L(t)\big),\qquad i\mapsto L(i). \tag{3}$$

La formation de $K(s)$ commute à la localisation, (c'est à dire aux changements de base $E_{/S}\to E$, $S\in\mathrm{Ob}(E)$), ce qui permet de localiser et de déduire de (3) *un morphisme de faisceaux d'ensembles*

$$\mathbf{Isom}(s,t)\to \mathbf{Isom}\big(L(s),L(t)\big), \tag{4}$$

qui, en fait, prend ses valeurs dans le sous-faisceau $\mathsf{Isom}^M(L(c), L(t))$ dont les sections sont définies par la condition (2).

2.5.5.3. Pour s et t variables, les morphismes (4) sont compatibles avec les accouplements de composition définis par la composition des morphismes, d'où, pour $s=t$, un morphisme de faisceaux de groupes

$$\mathsf{Aut}(s) \to \mathsf{Aut}(L(s)) \tag{5}$$

qui fait donc opérer le faisceau de groupes $C(s)$ *sur la section* $L(s)$ *du champ des liens*. En vertu de (2), $u(s)$ est un morphisme d'objets à opérateurs si l'on fait opérer $C(s)$ trivialement sur M, ce qui achève de prouver (ii).

2.5.5.4. Pour la même raison que plus haut, le morphisme (4) est compatible avec (5) et les opérations définies par la composition des morphismes. Par définition d'un objet tordu, ceci signifie que (4) *munit* $L(t)$ *d'une* structure d'objet tordu de $L(s)$ par le $\mathsf{Aut}(s)$-torseur $\mathsf{Isom}(s, t)$. En vertu de (2), on déduit de (III 2.3.3.1 (2)) que $u(t)$ est le morphisme obtenu en tordant $u(s)$ par $\mathsf{Isom}(s, t)$, ce qui achève la preuve de (iii). C.Q.F.D.

Il est utile de savoir *reconnaitre à équivalence près la gerbe des relèvements de s.*

Corollaire 2.5.5.5. Soient $K \xrightarrow{k} F \xrightarrow{m} G$ des morphismes de gerbes tels que la suite de morphismes de liens

$$1 \to L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \to 1 \tag{1}$$

soit *exacte*, où u lie k et où v lie m.

(i) Il existe une section s de G, (unique à isomorphisme unique près), et un isomorphisme

$$\kappa\colon\ m\,k \to s^K, \qquad (s^K = s\,\pi,\ \pi\colon\ K \to E). \tag{2}$$

(ii) Il existe une E-équivalence $a\colon\ K \to K(s)$ entre K et la gerbe des relèvements de s.

(iii) L'isomorphisme $\hat{\lambda}\colon\ L \to L(s)$ qui lie a vérifie $u(s)\,\hat{\lambda} = u$.

(iv) On a une E-équivalence

$$\varprojlim(K/E) \xrightarrow{\approx} \mathsf{K}_s(E) \tag{3}$$

dont le but est la catégorie des relèvements de s.

D'après (2.3.16 (ii)), puisque $m\,k$ est lié par le morphisme nul, il se factorise canoniquement par une section de G, d'où (i). D'après (2.5.2 (iii)),

on a un morphisme $a\colon K \to K(s)$ défini par

$$k(s)\,a = k \qquad \kappa(s) * a = \kappa. \tag{4}$$

Le morphisme λ qui lie a vérifie donc $u(s)\,\lambda = u$, ce qui prouve que c'est un isomorphisme, ce qui prouve que a est une équivalence, (2.2.6 (iii)). D'où (ii) et (iii). Ceci dit, (iv) résulte de (2.5.4.1) et prouve que K *est triviale si, et seulement si, s se relève à F.*

La proposition (2.5.5 (iii)) permet dans certains cas de *calculer le lien de la gerbe* $K(s)$ des relèvements d'une section. Ainsi:

Proposition 2.5.6. Sous les hypothèses de (2.5.5), soient k une section de $K(s)$, $r = k(s)(k)$ son image et $\rho\colon m\,r \xrightarrow{\sim} s$ l'isomorphisme canonique (2.5.4.1).

(i) On a une suite exacte de faisceaux de groupes

$$1 \to \mathbf{Aut}(k) \xrightarrow{a} \mathbf{Aut}(r) \xrightarrow{b} \mathbf{Aut}(s) \to 1 \tag{1}$$

où a et b sont induits par les morphismes de gerbes $K(s) \xrightarrow{k(s)} F \xrightarrow{m} G$.

(ii) Les automorphismes intérieurs de $\mathbf{Aut}(r)$ font opérer $\mathbf{Aut}(s)$ sur $\mathbf{lien}(\mathbf{Aut}(k))$. Par l'isomorphisme

$$\mathbf{lien}(\mathbf{Aut}(k)) \xrightarrow{\approx} L(s), \qquad (2.2.5), \tag{2}$$

ces opérations s'identifient à celles de (2.5.5 (ii)).

(iii) Pour tout $\mathbf{Aut}(s)$-torseur P, on a un isomorphisme canonique

$$L({}^{P}s) \xrightarrow{\sim} {}^{P}\mathbf{lien}(\mathbf{Aut}(k)). \tag{3}$$

(iii bis) Si $\mathbf{Aut}(k)$ est *abélien*, les automorphismes intéricurs de $\mathbf{Aut}(r)$ font opérer $\mathbf{Aut}(s)$ sur $\mathbf{Aut}(k)$ et, pour tout $\mathbf{Aut}(s)$-torseur P on a un isomorphisme canonique

$$L({}^{P}s) \xrightarrow{\sim} \mathbf{lien}({}^{P}\mathbf{Aut}(k)). \tag{4}$$

(iii ter) Supposons que $\mathbf{Aut}(k)$ soit *central* dans $\mathbf{Aut}(r)$. Pour toute section t de G, il existe sur $K(t)$ une unique structure de $\mathbf{Aut}(k)$-gerbe telle que $k(t)\colon K(t) \to F$ soit lié par $\mathbf{lien}(a)\colon \mathbf{lien}(\mathbf{Aut}(k)) \to \mathbf{lien}(\mathbf{Aut}(r))$.

2.5.6.1. L'exactitude de la suite (1) résulte de la définition de $K(s)$ et de l'hypothèse que $v\colon M \to N$ est un épimorphisme (2.5.5.1). Prouvons (ii). D'après (2.2.5), la suite (1) représente la suite de liens (2.5.5 (2)). Soit $j \in \mathrm{Aut}(r)$, soit $i = m(j)$, $i \in \mathrm{Aut}(m\,r)$, son image par $m\colon F \to G$ et soit enfin $i' = \rho\, i\, \rho^{-1}$ son image dans $\mathrm{Aut}(s)$. D'après (2.5.2 (4)), l'image par

$K(i')$: $K(s) \xrightarrow{\sim} K(s)$ de la section $k=(r,\rho)$ de $K(s)$ est égale à $(r, i'\rho)$. Or, par définition de $K(s)$, on a un isomorphisme de sections de $K(s)$:

$$j\colon (r, i'\rho) \xrightarrow{\sim} (r,\rho). \tag{5}$$

On a donc deux morphismes de faisceaux de groupes

$$\mathbf{Aut}(r,\rho) \xrightarrow{p} \mathbf{Aut}(r, i'\rho) \xrightarrow{q} \mathbf{Aut}(r,\rho) \tag{6}$$

où p est induit par le morphisme de champs $K(i')$ et q par l'isomorphisme $j\ [q(x)=jxj^{-1}]$. D'après (2.2.5.2), p représente le morphisme $L(i')$ qui lie $K(i')$ et q représente le morphisme identique de $L(s)$. *Le composé* (6) *représente donc l'automorphisme de* $L(s)$ *attaché à* $j\in\mathbf{Aut}(r)$ *par les opérations de* (2.5.5 (ii)). Or le morphisme de gerbes $k(s)$: $K(s)\dashrightarrow F$ vérifie $k(s)(r,\rho)=r=k(s)(r,i'\rho)$ et, comme il est fidèle, il identifie les faisceaux de (6) à des sous-faisceaux de groupes de $\mathbf{Aut}(r)$. Il est immédiat que ces trois sous-groupes sont égaux à l'image de $\mathbf{Aut}(k)$ par $\mathbf{Aut}(k) \xrightarrow{a} \mathbf{Aut}(r)$ et que p s'identifie au morphisme identique et q au morphisme induit par l'automorphisme intérieur défini par j, *ce qui prouve* (ii).

2.5.6.2. D'après (ii), l'assertion (iii) ne fait que répéter (2.5.5 (iii)). La première assertion de (iii bis) est triviale et la seconde en résulte par (iii) et le principe de compatibilité (III 2.3.11). Prouvons (iii ter). Les opérations de $\mathbf{Aut}(s)$ sur $\mathbf{Aut}(k)$ sont triviales, ce qui prouve par (2.5.5 (iii)) l'existence d'une action de $\mathbf{lien}(\mathbf{Aut}(k))$ (c'est à dire de $\mathbf{Aut}(k)$, (2.2.3.4)) sur $K(s)$ telle que $k(s)$ soit lié par $\mathbf{lien}(a)$. Toute autre action de $\mathbf{Aut}(k)$ est déduite de celle-ci par un automorphisme w de $\mathbf{Aut}(k)$ (2.2.1); pour cette nouvelle action, $k(s)$ sera lié par $\mathbf{lien}(w)$ si, et seulement si, $\mathbf{lien}(a)\cdot\mathbf{lien}(w)=\mathbf{lien}(a)$, ce qui entraine que w est l'identité car a est un monomorphisme de liens puisqu'il est injectif et central (1.2.7). C.Q.F.D.

Remarque 2.5.7. Sous les hypothèses de la proposition précédente, désignons par $1\to A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \to 1$ la suite exacte (1). D'après (2.2.6), la suite de morphismes de gerbes

$$K(s) \xrightarrow{k(s)} F \xrightarrow{m} G$$

s'écrit à équivalence près

$$\mathrm{TORS}(E; A) \xrightarrow{a'} \mathrm{TORS}(E; B) \xrightarrow{b'} \mathrm{TORS}(E; C)$$

où a' et b' sont les foncteurs extension du groupe structural (III 1.4.6) définis respectivement par a et b, les sections k, r et s devenant respectivement les sections définies par les torseurs triviaux A_d, B_d et C_d. La situation générale est donc essentiellement celle de la proposition suivante.

Proposition 2.5.8. Soient

$$1 \to A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \to 1 \tag{1}$$

une suite exacte de faisceaux de groupes (III 3.3.0), P un C-torseur et $K(P)$ la E-catégorie dont la fibre en $S \in \mathrm{Ob}(E)$ est la catégorie des relèvements à B de la restriction de P à S (III 3.2.0).

(i) $K(P)$ est une gerbe liée par ${}^{P}\mathbf{lien}(A)$ (resp. $\mathbf{lien}({}^{P}A)$ si A est abélien) (resp. $\mathbf{lien}(A)$ si C opère trivialement sur $\mathbf{lien}(A)$).

(ii) Pour qu'il existe un relèvement de P à B il faut et il suffit que $K(P)$ soit triviale.

2.5.8.1. Pour plus de précision, on définira $K(P)$ comme la gerbe des relèvements de P par rapport au foncteur extension du groupe structural

$$\mathrm{TORS}(E; b)\colon\ \mathrm{TORS}(E; B) \to \mathrm{TORS}(E; C).$$

On conclut en appliquant la proposition (2.5.6), où l'on prend pour k, r et s les sections définies par les torseurs triviaux. Les opérations de C sur $\mathbf{lien}(A)$ qui permettent de définir ${}^{P}\mathbf{lien}(A)$ sont alors induites par les automorphismes intérieurs de B.

Remarque 2.5.9. Si A est abélien, on trouve ainsi, d'après (3.4.2) ci-dessous une classe $d(P) \in H^2({}^{P}A)$ dont la nullité est nécessaire et suffisante pour que l'on puisse « restreindre à B le groupe structural de P » Grâce aux calculs de (3.5.4) ci-dessous, on vérifie que $d(P)$ est la classe définie dans [9] et [19] en topologie et dans [28] en cohomologie galoisienne.

Proposition 2.5.10. (Compatibilité.) Soit

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{m} & G \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ F' & \xrightarrow[m']{} & G' \end{array} \tag{1}$$

un diagramme de morphismes de gerbes tel que m (resp. m') soit lié par un *épimorphisme*

$$v\colon\ M \to N \qquad (\text{resp. } v'\colon\ M' \to N'). \tag{2}$$

Soient encore un isomorphisme de morphismes de gerbes

$$a\colon\ m' f \xrightarrow{\sim} g m \tag{3}$$

et s une section de G. Posons $s' = g s$.

(i) Il existe un unique morphisme entre les gerbes des relèvements de s et de s'

$$k\colon\ K(s)\to K(s'),\qquad (2.5.5), \tag{4}$$

tel que le carré

$$\begin{array}{ccc} K(s) & \xrightarrow{k(s)} & F \\ {\scriptstyle k}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ K(s') & \xrightarrow[k(s')]{} & F' \end{array} \tag{5}$$

soit commutatif et tel que (9) soit vérifiée.

(ii) On a un morphisme de suites exactes de liens

$$\begin{array}{ccccccc} 1\to L(s) & \xrightarrow{u(s)} & M & \xrightarrow{v} & N & \to 1 \\ {\scriptstyle\kappa}\downarrow & & {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\ 1\to L(s') & \xrightarrow[u(s')]{} & M' & \xrightarrow[v']{} & N' & \to 1 \end{array}, \qquad (2.5.5\,(2)) \tag{6}$$

où κ, φ et γ lient k, f et g.

(iii) Soit $c\colon C(s)\to C(s')$ le morphisme induit par g sur les faisceaux d'automorphismes de s et s'. Le morphisme κ est compatible avec c et les opérations de $C(s)$ sur $L(s)$ et $C(s')$ sur $L(s')$, (2.5.5 (ii)).

(iv) Si f et g sont des équivalences, il en est de même de k, et κ, φ et γ sont des isomorphismes.

2.5.10.1. Par la propriété universelle de $K(s')$, (2.5.2 (iii)), pour définir un morphisme $k\colon K(s)\to K(s')$, il suffit de trouver, pour toute E-catégorie fibrée X une application

$$k(X)\colon\ K_s(X)\to K_{s'}(X),\qquad (2.5.1\,(3)), \tag{7}$$

de sorte que les $k(X)$ forment un morphisme de foncteurs. Il est immédiat que

$$k(X)(x,\xi)=\big(fx,\,(g*\xi)\,(a*x)\big) \tag{8}$$

convient. D'où (i), le morphisme k étant caractérisé par la commutativité de (5) et la relation

$$\kappa(s')*k=\big(g*\kappa(s)\big)\big(a*k(s)\big),\qquad (2.5.2). \tag{9}$$

2.5.10.2. Par définition, $u(s)$ lie $k(s)$ et (ii) résulte donc de la commutativité de (5) et du fait que (1) est commutatif à isomorphisme près, (2.3.4).

2.5.10.3. Pour prouver (iii), par définition, (III 2.2.1), il suffit de montrer que, pour tout isomorphisme $i\colon s\to s$, si $i'=g*i$, $i'\colon s'\to s'$, est l'image

de i par g, on a

$$L(i') \cdot \kappa = \kappa \cdot L(i), \tag{10}$$

où $L(i)$ lie $K(i)$: $K(s) \to K(s)$, (2.5.2). Pour cela il suffit de vérifier que $k \cdot K(i) = K(i') \cdot k$. Par la propriété universelle de $K(s')$, il suffit de vérifier que, pour toute $X \in \mathrm{Fib}(E)$, et tout $(x, \xi) \in K_s(X)$, on a

$$\big(f\,x, (g * (i^X\,\xi))\,(a * x)\big) = \big(f\,x, (i'^X)\,(g * \xi)\,(a * x)\big), \tag{11}$$

(cf. (8), (2.5.2 (4)), et (2.5.1 (2))).

En notant p: $X \to E$ la projection, il suffit donc de prouver

$$g * \big((i * p)\,\xi\big) = \big((g * i) * p\big)\,(g * \xi), \tag{12}$$

qui est une relation classique.

2.5.10.4. Si f et g sont des équivalences, φ et γ sont des isomorphismes, donc aussi κ, donc k est une équivalence.

Proposition 2.5.11. (Compatibilité avec le produit.) Soient deux morphismes de gerbes m_i: $F_i \to G_i$, liés par des épimorphismes de liens v_i: $M_i \to N_i$, $i = 1, 2$ et soient $s_i \in \mathrm{Ob}\big(\varprojlim (G_i/E)\big)$ des sections. Le morphisme de gerbes

$$m\colon\ F \to G \quad \text{égal à} \quad m_1 \times_E m_2\colon\ F_1 \times_E F_2 \to G_1 \times_E G_2 \tag{1}$$

est lié par l'épimorphisme v: $M \to N$, $v = v_1 \times v_2$, (1.4.1 (3)). De plus, si $s = (s_1, s_2)$ désigne la section de G définie par la propriété universelle du produit fibré, on a des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccccc} K(s) & \xrightarrow{k(s)} & F & \xrightarrow{m} & G \\ \downarrow{\scriptstyle p_i} & & \downarrow{\scriptstyle f_i} & & \downarrow{\scriptstyle g_i} \\ K(s_i) & \xrightarrow[k(s_i)]{} & F_i & \xrightarrow[m_i]{} & G_i \end{array}, \qquad i = 1, 2, \tag{2}$$

dans lesquels f_i et g_i sont les projections. Les p_i, $i = 1, 2$, induisent un *E-isomorphisme*

$$K(s) \xrightarrow{\sim} K(s_1) \times_E K(s_2). \tag{3}$$

2.5.11.1. La première assertion résulte de (2.2.8), étant entendu que v est un épimorphisme car il en est ainsi localement comme on voit par réduction au cas où les liens sont représentables. Les diagrammes (2) sont ceux de (2.5.10) et enfin la dernière assertion résulte immédiatement du calcul des $K(s)$ (2.5.1).

2.5.11.2. Appliquant à nouveau (2.2.8), on voit donc que les morphismes qui lient les p_i induisent un isomorphisme de liens $L(s) \xrightarrow{\sim} L(s_1) \times L(s_2)$ et que $u(s)$ est égal à $u(s_1) \times u(s_2)$ (2.5.5 (1)).

§3. L'ensemble $H^2(L)$ attaché à un lien L

3.1. Définition, «fonctorialité»

Définition 3.1.1. Soient E un U-site et L un U-lien. On désignera par

$$H^2(E, L) \quad \text{ou} \quad H^2(L) \tag{1}$$

l'ensemble des classes à L-équivalence près (2.2.7) de L-gerbes (2.2.2.1). On dira qu'une classe est neutre si l'un (donc chacun) de ses représentants admet une section; on désignera par

$$H^2(E, L)' \quad \text{ou} \quad H^2(L)' \tag{2}$$

le sous-ensemble de $H^2(L)$ dont les éléments sont les classes neutres. Si $H^2(L)$ est non vide, on dira que L est *réalisable*. Pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$, on désignera par

$$H^2(E_{/S}, L) \quad \text{et} \quad H^2(E_{/S}, L)' \tag{3}$$

les ensembles $H^2(E_{/S}, L^S)$ et $H^2(E_{/S}, L^S)'$ où L^S désigne la restriction (1.1.13) de L au site obtenu en munissant $E_{/S}$ de la topologie induite (0 3.1.4).

3.1.1.1. D'après nos conventions, (I 3.1), une L-gerbe est un élément de l'univers V. On en déduit que $H^2(L) \in \mathsf{W}$, pour tout univers W tel que $\mathsf{V} \in \mathsf{W}$. Nous verrons plus bas que $H^2(L) \in \mathsf{U}$ (3.4.4).

3.1.1.2. Soit P une L-gerbe dont la classe est *neutre* (si E admet un objet final e, cela signifie également que la catégorie fibre P_e est non vide). Soit s une section cartésienne de P. D'après (2.2.5), on a un isomorphisme canonique $\mathbf{lien}(\mathbf{Aut}(s)) \xrightarrow{\sim} L$ qui fait donc de $\mathbf{Aut}(s)$ *un représentant de* L. Inversement, soit $(A, u\colon \mathbf{lien}(A) \to L)$ un représentant de L. *La gerbe* $\mathrm{TORS}(E, A)$ *des A-torseurs est munie canoniquement d'une structure de L-gerbe*. En effet, si s désigne la section définie par le A-torseur trivial A_d, les translations à gauche de A définissent un isomorphisme $A \approx \mathbf{Aut}(s)$, d'où la conclusion par (2.2.5). Par suite:

Proposition 3.1.2. Pour qu'un lien L soit représentable (1.2.1) il faut et il suffit que $H^2(L)' \neq \emptyset$.

Nous verrons plus bas, (3.2), une description de $H^2(L)'$ et une condition pour qu'il soit non vide.

Définition 3.1.3. Soient E un U-site et A un U-faisceau de groupes sur E. On pose

$$H^2(A) = H^2(L) \quad \text{et} \quad H^2(A)' = H^2(L)', \tag{1}$$

où $L = \mathbf{lien}(A)$ désigne le lien représenté par A. On appelle classe *unité* celle de la gerbe A-torseurs. On notera que la classe unité est *neutre*.

Remarque. Si $u\colon L \to M$ est un morphisme de liens tel que L soit réalisable (par exemple le lien unité) et tel que M ne le soit pas, il n'existe pas d'application $H^2(L) \to H^2(M)$. *Donc* $H^2(L)$ *n'est pas fonctoriel en* L.

Définition 3.1.4. («Fonctorialité».) Soit $u\colon L \to M$ un morphisme de liens sur E. Soient $p \in H^2(L)$ et $q \in H^2(M)$. On notera

$$p - \overset{u}{\text{—}}\circ\, q \tag{1}$$

la relation «il existe des représentants P et Q de p et q et un u-morphisme $m\colon P \dashrightarrow Q$».

3.1.4.1. Cette propriété est évidemment indépendante des représentants choisis (2.3.12). On désignera par

$$H^2(L) - \overset{u^{(2)}}{\text{—}}\circ\, H^2(M) \tag{2}$$

la correspondance ainsi définie. Si A et B sont deux faisceaux de groupes tels que $L = \mathbf{lien}(A)$, $M = \mathbf{lien}(B)$, on notera

$$H^2(A) \overset{u^{(2)}}{\text{—}}\circ\, H^2(B) \tag{2 bis}$$

la correspondance (2). Si, de plus, $a\colon A \to B$ est *un morphisme de faisceaux de groupes* tel que $u = \mathrm{lien}(a)$, on écrira

$$p \overset{a}{\text{—}}\circ\, q \quad \text{et} \quad H^2(A) \overset{a^{(2)}}{\text{—}}\circ\, H^2(B) \tag{2 ter}$$

au lieu de (1) et (2). Dans ce cas, on a

$$\alpha \overset{a}{\text{—}}\circ\, \beta, \tag{3}$$

où α et β sont les classes *unité* de $H^2(A)$ et $H^2(B)$. En effet, le foncteur extension du groupe structural

$$\mathrm{TORS}(E; a)\colon\ \mathrm{TORS}(E; A) \to \mathrm{TORS}(E; B), \quad (\text{III } 1.4.6\,(1)),$$

est lié par $u = \mathbf{lien}(a)$.

3.1.4.2. On notera que, si p est *neutre* et si $p \overset{u}{\text{—}}\circ\, q$, alors q est *neutre*. De plus, si $v\colon M \to N$ est un morphisme de liens, si $p \dashrightarrow \overset{u}{\text{—}}\circ\, q$ et si $q \overset{v}{\text{—}}\circ\, r$, on a $p \overset{vu}{\text{—}}\circ\, r$. Enfin, si u est le morphisme identique de L, le graphe de la correspondance $u^{(2)}$ est celui de l'application identique de $H^2(L)$, comme il résulte aussitôt de la définition.

3.1.4.3. Prenons pour u le morphisme unité $1: \mathbf{1} \to L$. On a $H^2(\mathbf{1}) = H^2(\mathbf{1})' = \{e\}$, où e est la classe de la catégorie base E liée par $\mathbf{1}$ de manière évidente. En effet, pour toute $\mathbf{1}$-gerbe P, la projection $P \to E$ est bicouvrante, donc une équivalence (II 1.4.1 et 5). De plus, pour tout $p \in H^2(L)$, *la relation* $e - \overset{1}{\multimap} p$ *équivaut à* $p \in H^2(L)'$. En effet, si P est un représentant de p, un morphisme $E \dashrightarrow P$ lié par le morphisme unité est simplement une section de P.

Remarque 3.1.4.4. On a en fait une structure plus riche que la relation $u^{(2)}$ ci-dessus, à savoir un accouplement

$$H^2(L) \times H^2(M) \xrightarrow{h} H^2(C_u)$$

que l'on étudiera ci-dessous (3.3.8). On notera que le graphe de la relation $u^{(2)}$ est l'image inverse par h de l'ensemble des classes neutres $H^2(C_u)'$.

Proposition 3.1.5. («Fonctorialité».) Soit $u: L \to M$ un morphisme de liens sur E tel que:

(a) le morphisme naturel $C_M \to C_u$ du centre de M dans le centralisateur de u (1.5.4 (5)) est un *isomorphisme*,

(b) M est réalisable ou bien L ne l'est pas.

Alors la relation (3.1.4 (1)) *est fonctionnelle en p.* De plus, l'application ainsi définie, notée

$$u^{(2)}: H^2(L) \to H^2(M), \tag{1}$$

applique $H^2(L)'$ dans $H^2(M)'$.

3.1.5.1. Nous démontrerons plus bas (VI 2.4) que *la condition* (b) *est conséquence de* (a). En revanche, la condition (a) est fort raisonnable, cf. (2.3.17).

3.1.5.2. Si $v: M \dashrightarrow N$ est un morphisme de liens et si u, v et $v\,u$ vérifient les conditions (a) et (b), on a évidemment

$$v^{(2)}\, u^{(2)} = v\, u^{(2)}. \tag{2}$$

3.1.5.3. La seconde assertion est évidente (3.1.4.2). Pour prouver la première on peut supposer que $H^2(L) \neq \emptyset$ et, d'après (b), choisir une M-gerbe Q. Soit alors $p \in H^2(L)$. D'après (a) et (2.3.15 (ii)), il existe au plus une classe $q \in H^2(L)$ telle que $p - \overset{u}{\multimap} q$. Montrons qu'il en existe une et pour cela choisissons un représentant P de p, une M-gerbe Q, et posons $H = \mathrm{HOM}_u(P, Q)$. D'après (2.3.2), le lien de H est A où l'on a posé $A = C_u \approx C_M$, lequel est un lien *abélien*. Pour toute A-gerbe X, on a, d'après (2.4.6 (ii)), une A-équivalence $\mathrm{HOM}_u(P, Q \overset{A}{\wedge} X) \approx H \overset{A}{\wedge} X$ et,

d'après (2.3.5), il suffit donc de trouver une A-gerbe X telle que $H \overset{A}{\wedge} X$ soit neutre. Soit T la gerbe des A-torseurs; d'après (2.4.5 (i)), où l'on remplace C et C_L par A, il existe une A-équivalence

$$H \overset{A}{\wedge} \mathrm{HOM}_A(H, T) \to T \tag{3}$$

et, puisque T est neutre, on conclut en prenant $X = \mathrm{HOM}_A(H, T)$.

Corollaire 3.1.6. Les conditions (a) et (b) de (3.1.5) sont vérifiées si $u: L \to M$ est *surjectif* (c'est-à-dire un *épimorphisme*, (1.3.4)).

3.1.6.1. Pour (a) cela est clair et (b) résulte de (2.3.18).

3.1.6.2. Si $u: L \to M$ est un *isomorphisme*, l'application $u^{(2)}: H^2(L) \to H^2(M)$ est l'isomorphisme obtenu par *transport de structure*. En effet, si P est une L-gerbe et si $a: L\pi \to \mathsf{liau}(P)$ est l'action de L sur P qui la lie, [(2.1.4) et (2.2.1), où $\pi: P \to E$ est la projection], son image par transport de structure est P sur laquelle M agit par $a \cdot (u^{-1} * \pi): M\pi \to \mathsf{liau}(P)$. D'où la conclusion, en notant que le morphisme identique de P est un u-morphisme.

Corollaire 3.1.7. Soient L un lien, Z son centre et $v: Z \to Z'$ un monomorphisme de liens abéliens. Le morphisme naturel

$$u:\ L \to L', \qquad L' = L \overset{Z}{\wedge} Z' \tag{1}$$

vérifie les conditions (a) et (b) de (3.1.5). De plus si P est une L-gerbe et si $p \in H^2(L)$ est sa classe, l'image de p par l'application

$$u^{(2)}:\ \dot{H}^2(L) \to H^2(L') \tag{2}$$

est la classe de $P \overset{Z}{\wedge} T$, où T est une Z'-gerbe triviale.

3.1.7.1. Le morphisme (1) est le composé

$$L \xrightarrow{\mathrm{inj}_1} L \times Z' \xrightarrow{\pi} L \overset{Z}{\wedge} Z', \tag{3}$$

où π est la projection (1.6.1.2 (3)). D'après (1.6.6) le centralisateur de u est le centre de L', et il est égal à Z', d'où (a). Par ailleurs, si s est une section de T [on peut prendre pour T la gerbe des A'-torseurs, où A' est un représentant de Z'] le composé

$$P \xrightarrow{(\mathrm{id}_P, s)} P \underset{E}{\times} T \xrightarrow{\varpi} P \overset{Z}{\wedge} T, \tag{4}$$

où ϖ est la projection (2.4.1 (2)), est lié par (3) d'après (2.2.8), ce qui achève la démonstration.

Corollaire 3.1.8. Les conditions (a) et (b) de (3.1.5) sont vérifiées si M est *abélien*. Si P est une L-gerbe, l'image de la classe p de P par l'application

$$u^{(2)}\colon\ H^2(L) \to H^2(M) \tag{1}$$

est la classe de $P \overset{L}{\wedge} T$, où T est une M-gerbe triviale.

Le produit contracté $P \overset{L}{\wedge} T$ est effectué comme il est dit dans (2.4.3) et la conclusion résulte de (2.4.5 (ii bis)), car la première assertion est évidente.

Corollaire 3.1.9. Soient L_1 et L_2 deux liens. Les projections du produit, $p_i\colon\ L_1 \times L_2 \to L_i$, $(i=1, 2)$, sont surjectives et l'application

$$\alpha\colon\ H^2(L_1 \times L_2) \xrightarrow{\sim} H^2(L_1) \times H^2(L_2) \tag{1}$$

dont les composantes sont les $p_i^{(2)}$, (3.1.5 (1)), *est bijective et induit une bijection*

$$\alpha'\colon\ H^2(L_1 \times L_2)' \xrightarrow{\sim} H^2(L_1)' \times H^2(L_2)'. \tag{2}$$

3.1.9.1. Par référence au cas des faisceaux (1.4.1), on prouve aisément que les p_i sont surjectives, ce qui définit (1) par (3.1.6). Inversement, si P_i est une L_i-gerbe, $(i=1, 2)$, le produit fibré $P = P_1 \underset{E}{\times} P_2$ est une gerbe que l'on lie canoniquement par $L_1 \times L_2$ en imposant que les projections de P soient liées par celles de $L_1 \times L_2$, (2.2.8). On définit ainsi une application

$$\beta\colon\ H^2(L_1) \times H^2(L_2) \to H^2(L_1 \times L_2) \tag{3}$$

et, par définition de (1), le composé $\beta\,\alpha$ est l'identité. Il en est de même du composé $\alpha\,\beta$, par la propriété universelle du produit fibré de gerbes et par celle du produit de liens. Donc (3) *est la bijection inverse de* (1).

3.1.9.2. Par (3.1.5), on sait déjà que (1) induit une application (2) et il reste à montrer que celle-ci est bijective. Il suffit de montrer que β respecte les ensembles de classes neutres. Ceci est clair, car, sous les hypothèses de (3.1.9.1), on a un isomorphisme

$$\varprojlim (P_1 \underset{E}{\times} P_2) \xrightarrow{\sim} \varprojlim (P_1) \times \varprojlim (P_2),$$

(propriété universelle du produit fibré).

Corollaire 3.1.10. (Produit contracté.) Soient $u\colon C \to L$ et $v\colon C \to M$ deux morphismes de liens tels que le produit contracté $L \overset{C}{\wedge} M$ existe (1.6.1). La projection $\pi\colon L \times M \to L \overset{C}{\wedge} M$ étant *surjective* on a une application

$$H^2(L) \times H^2(M) \xrightarrow{\beta\ \sim} H^2(L \times M) \xrightarrow{\pi^{(2)}} H^2(L \overset{C}{\wedge} M), \tag{1}$$

où β est la bijection inverse de (3.1.6 (1)), (c'est-à-dire (3.1.6.1 (3)). Soient $p \in H^2(L)$ et $q \in H^2(M)$. *L'image de* (p, q) *par* (1) *est la classe du produit contracté* $P \overset{C}{\wedge} Q$, (2.4.1), où P et Q sont des représentants de p et q.

En effet, par définition du produit contracté, on a un π-morphisme ϖ: $P \underset{E}{\times} Q \to P \overset{C}{\wedge} Q$ et la conclusion résulte de la définition de (1).

3.2. La gerbe des représentants d'un lien L; description de l'ensemble $H^2(L)'$ des classes neutres

3.2.1. Soit L un lien, on appellera *gerbe des représentants de* L et on notera

$$\mathrm{REP}(L) \tag{1}$$

le gerbe des relèvements (2.5.4) de L relativement au morphisme de champs [qui va du champ des faisceaux de groupes dans celui des liens].

$$\mathsf{lien}(E)\colon\ \mathrm{FAGRSC}(E) \to \mathrm{LIEN}(E), \quad (1.1.5\,(5)), \tag{2}$$

ce qui est licite, car L est par définition une section cartésienne de $\mathrm{LIEN}(E)$ et car (2) est fidèle et conservatif d'après (1.1.7). Par ailleurs, on notera

$$\mathsf{Rep}(L) \quad (\text{resp. } \mathsf{Rep}(L)) \tag{3}$$

la catégorie des représentants de L (1.2.1) (resp. son ensemble d'objets).

Proposition 3.2.2. Soit L un lien.

(i) $\mathrm{REP}(L)$ est une gerbe et on a une équivalence

$$\mathsf{Rep}(L) \xrightarrow{\approx} \varprojlim(\mathrm{REP}(L)/E). \tag{1}$$

(ii) $\mathrm{REP}(L)$ est liée par le quotient $\mathsf{Int}(L)$ de L par son centre (1.3.1 et 1.5.3).

(iii) Pour toute L-gerbe (F, a), où a définit l'action de L sur F, (2.2.2.2), on a un morphisme de gerbes

$$F \to \mathrm{REP}(L), \quad (x/S) \rightsquigarrow (\mathsf{Aut}_S(x), a(x)^{-1}), \tag{2}$$

lié par la projection $L \to \mathsf{Int}(L)$.

3.2.2.1. L'assertion (i) résulte de (2.5.4.1) et (II 3.4.2 (i)). Prouvons (ii). Par définition de $\mathrm{REP}(L)$ (2.5.1), un objet de $\mathrm{REP}(L)$ de projection $S \in \mathrm{Ob}(E)$ est un faisceau de groupes A sur le site $E_{/S}$ muni d'un isomorphisme

$$u\colon\ \mathsf{lien}(A) \xrightarrow{\sim} L^S. \tag{3}$$

Autrement dit, (A, u) *est un représentant* (1.2.1) (1.1.13) *de la restriction* L^S de L à S (1.1.13). Il est immédiat que les automorphismes de (A, u) sont simplement les automorphismes intérieurs de A (1.1.7). Autrement dit, on a un morphisme de Groupes

$$\mathrm{Int}(A)\colon\ A \to \mathsf{Aut}(A, u) \tag{4}$$

qui identifie son but au quotient de A par son centre. D'où, par passage aux liens, des morphismes

$$L^S \xrightarrow{u^{-1}} \mathsf{lien}(A) \to \mathsf{lien}(\mathsf{Aut}(A, u)). \tag{5}$$

D'après (1.5.3 (ii)) et (1.3.1 (iii)), leur composé identifie son but au quotient de L^S par son centre. Pour prouver (ii), il reste à montrer que les morphismes (5) définissent une action de L sur la gerbe $\mathrm{REP}(L)$, (2.1.4), (2.2.2.2), autrement dit un morphisme de morphisme de champs. Ceci résulte immédiatement du fait que les morphismes (4) définissent un morphisme entre les morphismes de champs

$$\mathrm{REP}(L) \rightrightarrows \mathrm{FAGRSC}(E) \tag{6}$$

$$(A, u) \rightsquigarrow A \quad \text{et} \quad (A, u) \rightsquigarrow \mathsf{Aut}(A, u).$$

3.2.2.2. Il reste à prouver (iii). Si F est une L-gerbe, on a un morphisme de champs $\mathrm{AUT}(F)\colon F \to \mathrm{FAGRSC}(E)$, (2.1.1 (1)), et, par définition du lien de F, un isomorphisme $a\colon L \cdot f \xrightarrow{\sim} \mathsf{lien} \cdot \mathrm{AUT}(F)$, (2.1.4), où $f\colon F \to E$ est la projection de F. Par la propriété universelle de $\mathrm{REP}(L)$, (2.5.2 (iii)), on en déduit un morphisme de gerbes

$$\varphi\colon\ F \to \mathrm{REP}(L). \tag{7}$$

En explicitant, on trouve que celui-ci associe à tout $x \in \mathrm{Ob}(F_S)$, $S \in \mathrm{Ob}(E)$, le représentant $(\mathsf{Aut}_S(x), a(x)^{-1})$, $a(x)\colon L^S \xrightarrow{\sim} \mathsf{lien}(\mathsf{Aut}_S(x))$, de L^S défini par le fait que L est le lien de F, (2.2.2.2). Enfin, (7) fait opérer L sur $\mathrm{REP}(L)$, (2.2.3.2), et il reste à prouver que cette action est celle décrite plus haut, ce qui est immédiat.

Corollaire 3.2.3. Si L est un lien, le quotient $\mathsf{Int}(L)$ de L par son centre est *réalisable*.

On notera

$$r_L \in H^2(\mathsf{Int}(L)) \tag{1}$$

la classe de la gerbe des représentants de L.

Corollaire 3.2.4. Soient L un lien, $\mathsf{Int}(L)$ le quotient de L par son centre et $\lambda\colon L \to \mathsf{Int}(L)$ la projection.

(i) Les conditions suivantes sont équivalentes.
(a) L est représentable.
(b) $H^2(L)' \neq \emptyset$.
(c) $r_L \in H^2(\mathrm{Int}(L))'$.
(ii) Sous les conditions de (i), l'image de l'application

$$\lambda^{(2)}\colon\ H^2(L) \to H^2(\mathrm{Int}(L)), \qquad (3.1.6), \tag{1}$$

est égale à $\{r_L\}$. De plus, $\mathsf{Int}(L)$ est *représentable*.

L'équivalence de (a) et (b) a été vue dans (3.1.2), celle de (a) et (c) est évidente (3.2.2 (i)). La première assertion de (ii) résulte de (3.2.2 (iii)) et (3.1.6); la seconde résulte de (1.5.3 (ii)) et (1.3.1 (iii)).

Lemme 3.2.5. Soient A un faisceau de groupes et P un A-torseur. On désigne par

$$i\colon\ \mathsf{lien}(A) \xrightarrow{\sim} \mathsf{lien}(\mathsf{ad}(P)) \tag{1}$$

l'isomorphisme de liens obtenu par (2.2.5), en identifiant A (resp. $\mathsf{ad}(P)$) au faisceau des automorphismes de la section de la gerbe des A-torseurs définie par le torseur trivial (resp. par P).

(i) le morphisme de gerbes

$$\Theta_P\colon\ \mathrm{TORS}(E, A) \to \mathrm{TORS}(E, \mathsf{ad}(P)), \qquad \Theta_P(Q) = Q \overset{A}{\wedge} P^0, \tag{2}$$

de (II 2.6.1) est lié par i.

(ii) Soit $L = \mathsf{lien}(A)$. La section $(\mathsf{ad}(P), i^{-1})$ de la gerbe des représentants de L s'obtient en tordant par le A-torseur P la section (A, id_L).

3.2.5.1. L'isomorphisme (1) s'explicite comme la section image du composé

$$\begin{aligned} P \xrightarrow{\pi} \mathsf{Isom}_A(A_d, P) &\xrightarrow{j} \mathsf{Isom}(A, \mathsf{ad}(P)) \\ &\xrightarrow{\lambda} \mathsf{Isom}(\mathsf{lien}(A), \mathsf{lien}(\mathsf{ad}(P))), \end{aligned} \tag{3}$$

où π est l'isomorphisme de (III 1.2.7 (i)), j le morphisme «défini par la formule» $j(x)(a) = x a x^{-1}$ et λ le morphisme induit par le morphisme de champs lien. En effet, par définition du lien d'une gerbe, (1) est la section image du composé λj et, par ailleurs, π est un isomorphisme.

3.2.5.2. Le composé $j\pi$ est le morphisme qui munit $\mathsf{ad}(P)$ d'une structure d'objet tordu de A par P dans le champ des faisceaux de groupes (III 2.3.7). Par définition de la gerbe $\mathrm{REP}(L)$, le fait que le composé (3) ait pour image i signifie donc que $j\pi$ munit $(\mathsf{ad}(P), i^{-1})$

d'une structure d'objet tordu de (A, id_L) par P dans la gerbe $\mathrm{REP}(L)$, ce qui prouve (ii).

3.2.5.3. Il reste à prouver (i). Comme on l'a déjà remarqué (3.1.1.2), la gerbe $\mathrm{TORS}(E, A)$ (resp. $\mathrm{TORS}(E, \mathbf{ad}(P))$) est liée par $\mathbf{lien}(A)$ (resp. $\mathbf{lien}(\mathbf{ad}(P))$), ce qui donne un sens à (i). D'après (III 2.6.1), on a $\Theta_P(P) = \mathbf{ad}(P)_d$ et le morphisme induit par Θ_P sur les faisceaux d'automorphismes n'est autre que l'identité de $\mathbf{ad}(P)$. Ceci prouve (i), par définition de i et par (2.2.5.2).

Proposition 3.2.6. Soit L un lien.

(i) En associant à tout représentant (A, u) de L la gerbe des A-torseurs, liée par L comme il est dit dans (3.1.1.2), on définit une application *surjective*

$$\mathrm{Cl}(\mathrm{Rep}(L)) \to H^2(L)' \tag{1}$$

dont la source est l'ensemble des classes à isomorphisme près de représentants de L.

(ii) Pour que deux représentants (A, u) et (B, v) de L définissent la même classe dans $H^2(L)'$ il faut et il suffit qu'il existe un A-torseur P tel que (B, v) soit isomorphe au représentant ${}^P(A, u)$ de L obtenu en tordant (A, u) par P (3.2.5 (ii)).

(iii) Pour tout représentant (A, u) de L, on a une suite exacte d'ensembles pointés

$$H^1(A) \xrightarrow{a^{(1)}} H^1(\mathbf{Int}(A)) \xrightarrow{t} H^2(A)' \to 1, \tag{2}$$

où $a^{(1)}$ est déduite de $a\colon A \to \mathbf{Int}(A)$ et où t est déduite de (1) grâce à l'isomorphisme canonique

$$\mathrm{Cl}(\mathrm{Rep}(L)) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathbf{Int}(A)) \tag{3}$$

obtenu en notant que $\mathbf{Int}(A) = \mathbf{Aut}(A, u)$.

3.2.6.1. Notons que (iii) est une conséquence immédiate de (i) et (ii), (III 2.5.2). Par ailleurs, (1) est surjective car pour toute L-gerbe G munie d'une section s, on a une équivalence $m\colon G \to \mathrm{TORS}(E, A)$, $A = \mathbf{Aut}(s)$, (III 2.2.6). Or, par construction, $m(s)$ est la section définie par le torseur trivial A_d et le morphisme induit par m sur les faisceaux d'automorphismes est l'identité de $\mathbf{Aut}(s)$. Donc m est une L-équivalence.

3.2.6.2. Prouvons (ii). D'après (3.2.5 (i)), la condition est suffisante car le foncteur torsion par P, noté Θ_P, est un L-morphisme. Elle est nécessaire. En effet, si

$$m\colon \mathrm{TORS}(E, B) \to \mathrm{TORS}(E, A)$$

est une équivalence, le foncteur m induit un isomorphisme $t: B \to \mathbf{ad}(P)$, où $P = m(B_d)$. De plus, d'après (2.2.5.1), m est lié par le morphisme $u\, j^{-1}$ $\mathbf{lien}(t)\, v^{-1}$, où j: $\mathbf{lien}(A) \xrightarrow{\sim} \mathbf{lien}(\mathbf{ad}(P))$ est le morphisme de (3.2.5 (i)). Pour que m soit une L-équivalence, il faut et il suffit que $u\, j^{-1}\, \mathbf{lien}(t)\, v^{-1} = \mathrm{id}_L$, ce qui, d'après (3.2.5 (ii)) signifie que t identifie (B, v) et le représentant obtenu en tordant (A, u) par P.

3.3. Comparaison entre la cohomologie d'un lien et celle de son centre

3.3.1.1. En vertu de (3.1.8), on définit un *foncteur* $\tilde{E}^{ab} \to \mathbf{W}$-ens, (où $\mathbf{W}$ est un univers tel que $\mathbf{V} \in \mathbf{W}$, cf. (3.1.1.1)), en associant à tout *faisceau de groupes abéliens* A l'ensemble $H^2(A)$. De plus, d'après (1.4.1) et (3.1.9), ce foncteur commute aux produits finis. Tout objet de $\tilde{E}^{ab}$ étant muni canoniquement d'une structure de groupe dans cette catégorie, il en résulte que le foncteur ci-dessus se factorise canoniquement en *un foncteur additif*

$$\tilde{E}^{ab} \to \mathbf{W} - ab, \qquad A \rightsquigarrow H^2(A). \tag{1}$$

3.3.1.2. Nous expliciterons ci-dessous (4.3.4) un isomorphisme canonique entre ce foncteur et le second foncteur dérivé de $A \rightsquigarrow H^0(E, A)$.

Proposition 3.3.2. Soit A un faisceau de groupes *abéliens* et soit $L = \mathbf{lien}(A)$. L'ensemble $H^2(A) = H^2(L)$, (3.1.3), est muni d'une loi de *groupe abélien* (notée additivement) dont l'élément neutre est la classe unité. De plus, si P et Q sont deux L-gerbes et si p et q sont leurs classes dans $H^2(A)$, on a ce qui suit.

(i) $p+q$ est la classe du produit contracté $P \overset{L}{\wedge} Q$ (2.4.3),

(ii) $q-p$ est la classe de $\mathrm{HOM}_L(P, Q)$, (2.3.2),

(iii) $-p$ est la classe de l'opposée de P, (2.1.7), et aussi celle de $\mathrm{HOM}_L(P, \mathrm{TORS}(E, A))$.

3.3.2.1. La loi de groupe étant définie par la fait que $A \rightsquigarrow H^2(A)$ commute aux produits finis, la somme $p+q$ est l'image de (p, q) par le composé

$$H^2(A) \times H^2(A) \xrightarrow{\sim} H^2(A \times A) \xrightarrow{H^2(m)} H^2(A), \tag{1}$$

où m: $A \times A \to A$ est le morphisme dont l'action sur les sections est définie par $m(x, y) = x + y$. D'où (i), par définition du produit contracté $P \overset{L}{\wedge} Q$, (2.4.3), et par (3.1.10). On en déduit (ii) par (2.4.5 (i)), où l'on prend pour u le morphisme identique de L.

3.3.2.2. Si 0 désigne l'objet nul de $\tilde{E}^{ab}$, l'élément neutre du groupe $H^2(A)$ est l'image de l'application $H^2(0) \to H^2(A)$ associée au morphisme

nul $0 \to A$. D'après (3.1.4.3), c'est la classe unité de $H^2(A)$ et celle-ci est la seule classe neutre (3.1.4.3).

3.3.2.3. La seconde assertion de (iii) résulte de (ii) et du fait que la classe de $\mathrm{TORS}(E, A)$ est l'élément neutre du groupe $H^2(A)$. La première assertion résulte de (2.1.7.2), car $-p$ est l'image de p par l'application $s^{(2)}: H^2(A) \to H^2(A)$, où $s: A \to A$, $s(x) = -x$, est la symétrie.

3.3.2.4. On remarquera que l'explicitation de la structure de groupe de $H^2(A)$ ne fait intervenir que le lien L représenté par A. Or, d'après (1.2.3), le foncteur $\mathsf{lien}: \mathsf{Fagr} \to \mathsf{Lien}$ induit une équivalence entre la catégorie $\tilde{E}^{ab}$ des faisceaux de groupes abéliens et celle des liens abéliens. La proposition précédente est donc valable sans changement pour *un lien abélien L.* Pour le voir en évitant les arguments «fonctoriels» utilisés jusqu'ici, on définira pour tout lien abélien L une loi de composition sur $H^2(L)$ par le procédé de (i) et l'on prouvera que c'est une loi de groupe abélien en modifiant légèrement le raisonnement ci-dessus et en utilisant de plus (2.4.2) et (2.4.5 (ii bis)). Si l'on adopte ce point de vue, on devra encore vérifier que, si $u: L \to M$ *est un morphisme de liens abéliens, l'application*

$$u^{(2)}: H^2(L) \dashrightarrow H^2(M), \quad (3.1.8), \tag{2}$$

est un morphisme de groupes, ce qui résulte de (2.4.2 (ii)). Bien entendu, cette vérification est inutile du point de vue que nous avons adopté.

Théorème 3.3.3. Soient L un lien et C son centre.

(i) L'application

$$H^2(C) \times H^2(L) \to H^2(L), \quad (x, p) \mapsto x\,p, \tag{1}$$

(où $x\,p$ est la classe du produit contracté $X \overset{C}{\wedge} P$, X et P étant des représentants de x et p), fait opérer le groupe abélien $H^2(C)$ librement et transitivement sur $H^2(L)$.

(ii) Soient P et Q deux L-gerbes, p et q leurs classes dans $H^2(L)$ et $h \in H^2(C)$ la classe de $\mathrm{HOM}_L(P, Q)$ (2.3.2 (iii)). On a

$$h\,p = q. \tag{2}$$

3.3.3.1. Soit $c: C \to L$ le morphisme naturel (1.5.3). D'après (1.6.2), le morphisme $c + \mathrm{id}_L: C \times L \to L$ identifie L et le produit contracté $C \overset{C}{\wedge} L$, ce qui donne un sens à (1) par (3.1.10). D'après (2.4.3) et (3.3.2 (i)), l'application (1) fait opérer $H^2(C)$ sur $H^2(L)$. D'après (2.4.5 (iii bis)), $H^2(C)$ opère librement. Enfin, (2.4.4) prouve (ii) qui assure que $H^2(C)$ opère transitivement.

Corollaire 3.3.4. Soit $u\colon L\to M$ un morphisme de liens qui respecte les centres et soit $v\colon C\to D$ le morphisme induit par u sur les centres (1.5.6).

(i) Si $p\in H^2(L)$, $q\in H^2(M)$, $x\in H^2(C)$ et si $p \overset{u}{\multimap} q$, on a

$$x\,p \overset{u}{\multimap} y\,q, \quad \text{où} \quad y=v^{(2)}(x). \tag{1}$$

(ii) Si, de plus, u vérifie les hypothèses de (3.1.5), on a

$$u^{(2)}(x\,p)=v^{(2)}(x)\,u^{(2)}(p), \qquad x\in H^2(C), \qquad p\in H^2(L). \tag{2}$$

3.3.4.1. Prouvons (i). Soient P, Q, X, Y, des représentants de p, q, x et y. Par hypothèse, il existe un u-morphisme $m\colon P\to Q$ et un v-morphisme $n\colon X\to Y$, d'où un $(u\times v)$-morphisme $n \underset{E}{\times} m\colon X \underset{E}{\times} P\to Y \underset{E}{\times} Q$. Par la «propriété universelle» du produit contracté (2.4.1 (iii)), on en déduit un u-morphisme $X \overset{C}{\wedge} P\to Y \overset{D}{\wedge} Q$, ce qui prouve (1).

3.3.4.2. Bien entendu, (ii) en résulte immédiatement et signifie que *l'application $u^{(2)}$ est compatible avec $v^{(2)}$ et les opérations de* (3.3.3).

Remarque 3.3.5. Soit $u\colon L\to M$ un *épimorphisme* de liens. Par (3.3.4 (ii)), l'étude de la surjectivité de l'application $u^{(2)}\colon H^2(L)\to H^2(M)$, (3.1.6), est ramenée à celle de l'application $v^{(2)}\colon H^2(C)\to H^2(D)$, où $v\colon C\to D$ est le morphisme induit par u sur les centres, et à la question «si M est réalisable, en est-il de même de L?». Par (VI 2.3) et (3.4.2), ces questions sont ramenées à des questions d'algèbre homologique commutative.

Remarque 3.3.6. Soit $u\colon C\to L$ un morphisme *central*. Le produit contracté $C \overset{C}{\wedge} L$ étant identifié à L par (1.6.2), on a, d'après (3.1.10), une application

$$H^2(C)\times H^2(L)\to H^2(L), \qquad (x,\,p)\to x\,p, \tag{1}$$

qui, lorsque C est le centre de L définit les opérations de (3.3.3) et qui, lorsque $C=L$ (donc L est abélien), définit la loi de groupe de $H^2(L)$. Si $c\colon C\to C_L$ est le morphisme naturel de C dans le centre de L, par associativité du produit contracté (2.4.3 (1)), on a:

$$x\,p=c^{(2)}(x)\,p, \qquad x\in H^2(C), \qquad p\in H^2(L), \tag{2}$$

ce qui montre que, si C est abélien, ce qu'on n'avait pas supposé jusqu'ici, (1) fait opérer le groupe $H^2(C)$ sur $H^2(L)$.

Corollaire 3.3.7. Soit $u\colon C\to L$ un morphisme central. Soient $x\in H^2(C)$ et $p\in H^2(L)$.

(i) $x \overset{u}{\multimap} xp$ équivaut à $p \in H^2(L)'$.
(ii) Si $x \in H^2(C)'$, on a $xp = p$.

Résulte de (2.4.5 (ii bis)) et (2.4.5 (iii bis)).

Proposition 3.3.8. Soit $u: L \to M$ un morphisme de liens et soit C_u le centralisateur de u (1.5.1).

(i) Il existe une application

$$H^2(L) \times H^2(M) \to H^2(C_u), \qquad (p, q) \mapsto (q \underset{u}{:} p), \tag{1}$$

telle que, si P et Q représentent p et q, la C_u-gerbe $\mathrm{Hom}_u(P, Q)$, (2.3.2), représente $(q \underset{u}{:} p)$.

(ii) Soit $x \in H^2(C_L)$, où C_L est le centre de L, et soient $p \in H^2(L)$, $q \in H^2(M)$. On a

$$(q \underset{u}{:} xp) = x^{-1} \cdot (q \underset{u}{:} p) \tag{2}$$

où le produit du second membre est défini par le morphisme $C_L \to C_u$ de (1.5.4 (5)), qui est central.

(iii) Soit $y \in H^2(C_M)$, où C_M est le centre de M, soient $p \in H^2(L)$ et $q \in H^2(M)$. On a

$$(yq : p) = y(q : p) \tag{3}$$

où le produit du second membre est défini par le morphisme central $C_M \to C_u$ de (1.5.4 (5)).

(iv) Si u est central et L abélien, on a

$$(q \underset{u}{:} p) = p^{-1} \cdot q. \tag{4}$$

3.3.8.1. D'après (2.3.12), la classe de $\mathrm{HOM}_u(P, Q)$ ne dépend que de celles de P et Q, d'où (i). Les assertions (ii) et (iii) résultent de (2.4.6) d'où (iv), par (3.3.6 (2)).

3.3.8.2. Si $q \in H^2(M)$, on a donc une application

$$u_q: H^2(L) \to H^2(C_u), \qquad p \mapsto (q \underset{u}{:} p), \tag{5}$$

et $p \overset{u}{\multimap} q$ équivaut à $u_q(p) \in H^2(C_u)'$.

Nota: on a noté multiplicativement les groupes $H^2(C_L)$ et $H^2(C_M)$ et par un point leurs actions sur $H^2(L)$ et $H^2(M)$.

3.4. Cohomologie abélienne

Nous allons prouver que, pour tout faisceau de groupes abéliens A, le groupe $H^2(A)$ défini en termes de gerbes coïncide avec celui que

l'on définit en algèbre homologique, lequel sera provisoirement noté $H^2_\bullet(A)$.

3.4.1. Soit E un U-site. D'après (3.3.1.1) on a *un foncteur additif*

$$H^2(*)\colon\ \tilde{E}^{ab} \to \mathsf{W} - ab, \tag{1}$$

où $\tilde{E}^{ab}$ est la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur E et où, pour tout $A \in \mathrm{Ob}(\tilde{E}^{ab})$, $H^2(A)$ désigne l'ensemble des classes à A-équivalence près de A-gerbes (2.2.3.4). (On rappelle que V et W sont des univers, $E \in \mathsf{V}$, $\mathsf{U} \in \mathsf{V} \in \mathsf{W}$.) Par ailleurs, pour toute suite exacte

$$0 \to A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \to 0 \tag{2}$$

de $\tilde{E}^{ab}$ et tout C-torseur P, la gerbe $K(P)$ des relèvements de P à B (2.5.8) est liée par A, l'action de A sur $K(P)$ étant caractérisée (2.5.6 (iii ter)) par la condition que le morphisme naturel $k(P)\colon K(P) \to \mathrm{TORS}(E, B)$ soit lié par lien(a). Il résulte donc de (2.5.5.2) que la classe de $K(P)$ dans $H^2(A)$ ne dépend que de la classe à isomorphisme près de P. Autrement dit, on a une *application*

$$d\colon\ H^1(C) \to H^2(A). \tag{3}$$

3.4.1.1. Nous allons démontrer que les applications (3) permettent de prolonger le δ-foncteur exact (H^0, H^1) de (III 3.5.4) en un *δ-foncteur exact* limité aux degrés 0, 1 et 2. Considérons un diagramme commutatif de $\tilde{E}^{ab}$ dont les lignes sont exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & A & \xrightarrow{a} & B & \xrightarrow{b} & C & \to 0 \\ & \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle v} & & \downarrow{\scriptstyle w} & \\ 0 \to & A' & \xrightarrow{a'} & B' & \xrightarrow{b'} & C' & \to 0. \end{array} \tag{1}$$

Le carré ci-dessous est alors *commutatif*

$$\begin{array}{ccc} H^1(C) & \xrightarrow{d} & H^2(A) \\ {\scriptstyle w^{(1)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u^{(2)}} \\ H^1(C') & \xrightarrow{d'} & H^2(A') \end{array} \tag{2}$$

où d et d' sont les cobords attachés aux lignes de (1).

En effet, ceci résulte de (2.5.10), où l'on prend pour (2.5.10(1)) le diagramme induit par les foncteurs extension du groupe structural définis par b, w, v et b'. Il résulte *formellement* de ceci que, pour toute suite exacte telle que (3.4.1(2)), l'application (3.4.1(3)) est un morphisme de groupes: utiliser le fait que H^1 et H^2 sont des foncteurs additifs (cf. 3.3.2.1). Pour achever notre premier pas, il reste à prouver que, pour toute suite

exacte (3.4.1 (2)), la suite de morphismes de groupes abéliens

$$H^1(B) \xrightarrow{b^{(1)}} H^1(C) \xrightarrow{d} H^2(A) \xrightarrow{a^{(2)}} H^2(B) \xrightarrow{b^{(2)}} H^2(C)$$

est *exacte*. Bien entendu, on sait déjà que la dite suite se prolonge sur la gauche en une suite qui est exacte jusqu'à $H^1(C)$ (III 3.5.5).

3.4.1.2. L'exactitude en $H^1(C)$ résulte de la définition de d (2.5.8). Le composé $a^{(2)}d$ est nul. En effet, pour tout C-torseur P, le morphisme $k(P)$: $K(P) \to \mathrm{TORS}(E, B)$ est lié par $\mathbf{lien}(a)$, par définition même de la structure de A-gerbe de $K(P)$. Par définition de $a^{(2)}$, ceci signifie que l'image de la classe de $K(P)$ par $a^{(2)}$ est la classe de $\mathrm{TORS}(E, B)$ laquelle est nulle (3.3.2). Pour prouver l'exactitude en $H^2(A)$, il reste à montrer que, si K est une A-gerbe et k: $K \to \mathrm{TORS}(E, B)$ un a-morphisme, la classe de P appartient à l'image de d, ce qui résulte de (2.5.5.5), étant entendu qu'une suite exacte de liens abéliens est la même chose qu'une suite exacte de faisceaux de groupes abéliens (2.5.5 (2)) (1.2.3) (1.2.6). Prouvons l'exactitude en $H^2(B)$. Le composé $b^{(2)}a^{(2)}$ est nul car H^2 est un foncteur additif. Inversement, soient Q une B-gerbe et m: $Q \to \mathrm{TORS}(E, C)$ un b-morphisme. Il nous suffira de prouver que la gerbe K des relèvements de la section C_d est liée par A et que le morphisme naturel k: $K \to Q$ est lié par a: $A \to B$. Or ceci résulte de (2.5.5 (i)).

Nous avons ainsi démontré que les opérateurs cobords de (3.4.1 (3)) nous fournissent un δ-foncteur H^i limité aux degrés 0, 1 et 2. Par ailleurs, les foncteurs dérivés $H^i_\bullet$ définis par résolutions injectives (III 3.5.4) prennent leurs valeurs dans $\mathbf{U}$-ab [SGA 4 V], mais, pour un instant, nous désignerons par le même symbole leurs composés avec l'inclusion $\mathbf{U}$-$ab \to \mathbf{W}$-ab. D'après [17] 2.2.1, il existe *un unique morphisme de δ-foncteurs*

$$\alpha_i\colon\ H^i_\bullet \to H^i, \qquad i = 0, 1, 2,$$

tel que α_0 et α_1 soient les *isomorphismes* de (III 3.5.4)

Théorème 3.4.2. Soit E un $\mathbf{U}$-site.

(i) Les α_i sont des isomorphismes, $0 \leqq i \leqq 2$.

(ii) Soit $0 \to A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} D \to 0$ une suite exacte de $\mathbf{U}$-faisceaux de groupes abéliens sur E. Le composé

$$H^0_\bullet(D) \xrightarrow{j} H^2_\bullet(A) \xrightarrow{\alpha_2(A)} H^2(A), \tag{1}$$

où j est défini par un morphisme de la suite exacte donnée dans une résolution injective de A, est l'*opposé* du composé

$$H^0_\bullet(D) \xrightarrow{\alpha_0(D)} H^0(D) \xrightarrow{d} H^1(B/A) \xrightarrow{d'} H^2(A) \tag{2}$$

où d et d' sont les opérateurs cobords de (III 3.1.3) et (3.5.1 (3)).

3.4.2.1. Puisque les α_i, $(i=0, 1, 2)$, forment un morphisme de δ-foncteur, l'assertion (ii) résulte de ([4] chap. V prop. 7.1) qui assure que j est l'opposé du «cobord itéré»

$$H^0_\bullet(D) \to H^1_\bullet(B/A) \to H^2_\bullet(A).$$

Grâce au calcul de ce dernier (3.4.5), l'assertion (ii) permet d'*expliciter l'isomorphisme* α_2: prendre pour B et C des objets injectifs de $\tilde{E}_{ab}$.

3.4.2.2. Pour prouver (i), il reste à prouver que α_2 est un isomorphisme, ou encore [17] 2.2.1 que H^2 est effaçable.

Lemme 3.4.3. (Effaçabilité.) Une gerbe abélienne G vérifiant $(\mathsf{U}-P)$ dont le lien est un objet injectif de $\tilde{E}^{ab}$ est triviale.

L'extension canonique G^* de G à $\tilde{E}$ (II 3.3.3) est une gerbe (III 2.1.2.1). De plus, on a une équivalence entre G et la catégorie $G^* \times_{\tilde{E}} E$ déduite de G^* par le changement de base $\varepsilon: E \to \tilde{E}$, (II 1.3.3). On en déduit déjà que G^* est une gerbe abélienne et que son lien A^* (qui est un faisceau abélien sur $\tilde{E}$) est représentable par le lien A de G, donc A^* est un injectif car tout faisceau sur $\tilde{E}$ est représentable; de plus, si G^* est triviale il en est de même de G. On peut donc remplacer E par $\tilde{E}$ et *supposer que* E *est un* U-topos *et que* G *est scindée*. Ceci dit, il existe une famille (S_i), $i \in I$, $I \in \mathsf{U}$, couvrant l'objet final de E, telle que les fibres G_{S_i} soient non vides, car G est une gerbe. On définit alors une E-catégorie scindée G' par

$$G'(S) = \prod_{i \in I} G(S \times S_i), \qquad S \in \mathrm{Ob}(E), \tag{1}$$

et en imposant que, pour toute flèche $f: T \to S$ de E, le foncteur $G'(f)$ soit le produit des foncteurs

$$G'(S \times S_i) \to G'(T \times S_i).$$

De plus, on a un morphisme de catégories scindées

$$g: G \to G' \tag{2}$$

défini par

$$g(S): G(S) \to \prod_{i \in I} G(S \times S_i), \qquad g(S) = \prod_{i \in I} G(\mathrm{pr}_i), \tag{3}$$

où pr_i est la seconde projection de $S \times S_i$. Montrons que G' est une *gerbe*. C'est un champ car c'est le produit des catégories déduites de G par les changements de base $E \to E$, $S \rightsquigarrow S \times S_i$, et chacune d'elle est un champ car c'est l'image directe de G par un morphisme de sites (II 3.1.5). De plus, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$, la fibre $G(S \times S_i)$ est non vide, car $G(S_i)$ est non vide et l'ensemble des classes à isomorphisme près d'objets de $G(S \times S_i)$ est isomorphe à $H^1(E_{/S \times S_i}, A)$ qui est nul car A est un injectif. Donc

toutes les fibres de G' sont non vides et deux objets d'une même fibre sont isomorphes: c'est donc une gerbe et même une gerbe triviale car E admet un objet final. De plus, G' est une gerbe abélienne et son lien A' est un U-faisceau abélien. De plus, le foncteur $g: G \to G'$ est *fidèle* car, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$, la famille des secondes projections des $S \times S_i$ est couvrante. Le morphisme $a: A \to A'$ qui lie $g: G \to G'$ est donc un monomorphisme. Puisque A est un injectif, il admet une section $b: A' \to A$. Par définition de $H^2(a)$, l'image $H^2(a)(x)$ de la classe $x \in H^2(A)$ de G est la classe de G'; elle est donc nulle; donc $x=0$, car $ba = \mathrm{id}_A$.

Remarque. Nous n'avons remplacé E par $\tilde{E}$ que pour être assuré de l'existence des produits $S \times S_i$. Par ailleurs, si l'on suppose seulement que G est une gerbe, on trouve encore un morphisme de champs $g: G \to G'$ qui est fidèle et tel que $\varprojlim(G') \neq \emptyset$. Mais il peut alors arriver que G' ne soit pas une gerbe car deux objets d'une même fibre de G' peuvent ne pas être localement isomorphes. Si l'on remplace G' par la sous-catégorie pleine dont les objets sont ceux qui sont localement isomorphes à un objet de l'image de $g: G \to G'$, on trouve un morphisme de gerbes $g': G \to G''$, qui est fidèle, mais alors G'' n'est pas nécessairement triviale. En modifiant le procédé ci-dessus, on peut cependant démontrer que, pour toute gerbe G sur E il existe un morphisme de gerbes $g: G \dashrightarrow G'$ qui est fidèle et tel que G' soit triviale, ce qu'on exprime en disant que «le H^2 non abélien est effaçable».

Corollaire 3.4.4. Soient E un U-site et L un U-lien sur E. L'ensemble $H^2(L)$ est isomorphe à un élément de U.

En effet, si L est abélien, il est représentable par un U-faisceau de groupes abéliens (1.2.3) et, dans ce cas, le corollaire résulte de (3.4.2 (i)). En tous cas, $H^2(L)$ est un espace homogène sous $H^2(C)$, (3.2.3), où C est le centre de L, d'où la conclusion, car C est un U-faisceau de groupes abéliens.

Nous allons dès maintenant expliciter le cobord itéré associé à une suite exacte de faisceaux de groupes bien que l'application d' ne soit définie que plus bas (4.2.7.2 et 4.2.10).

Proposition 3.4.5. Soit une suite exacte de faisceaux de groupes (non nécessairement commutatifs)

$$1 \to A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \xrightarrow{c} D \to 1 \tag{1}$$

et soit $x \in H^0(D)$. Supposons que A soit *central* dans B et soit $\Delta(x)$ l'image de x par le composé des cobords

$$H^0(D) \xrightarrow{d} H^1(B/A) \xrightarrow{d'} H^2(A), \quad \text{(cf. (5))}. \tag{2}$$

$\Delta(x)$ est la classe de *la gerbe* K dont les objets sont les couples (P, p), où P est un B-torseur (à droite) et $p: P \to C_d$ un b-morphisme tel que $cp: P \to D$ ait pour image la section x, la structure de A-gerbe de K étant obtenue en associant à tout objet (P, p) de K l'isomorphisme

$$A \xrightarrow{\sim} \mathbf{Aut}(P, p) \tag{3}$$

défini par le morphisme

$$A \to \mathbf{Aut}_B(P), \quad \text{(III 3.4.4)}, \tag{4}$$

que déterminent $a: A \to B$ et les opérations de B sur P.

3.4.5.1. Bien entendu, dire que (1) est exacte signifie que l'on a deux suites exactes de groupes de $\tilde{E}$ (III 3.3.0)

$$1 \to A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{q} B/A \to 1 \quad \text{et} \quad 1 \to B/A \xrightarrow{i} C \xrightarrow{c} D \to 1 \tag{5}$$

et que $b = iq$. Soit alors X l'image inverse de x par $c: C \to D$. C'est un (B/A)-torseur grâce aux translations à droite (III 3.1.3). Soit K' la gerbe des relèvements de X relativement au foncteur extension du groupe structural de B à B/A (2.5.8). Par définition (4.2.7.2), $\Delta(x)$ est la classe de K'. Prouvons que K et K' sont *isomorphes*, ce qui est vrai sans supposer que A est central. En effet, par définition de l'image inverse X de x, si (P, p) est un objet de K, il existe un q-morphisme de torseurs $p': P \to X$ *caractérisé* par $jp' = p$, où $j: X \to C$ est le morphisme d'inclusion. D'où un relèvement (P, p') de X à B, c'est-à-dire un objet de K'. Que l'on obtienne ainsi un isomorphisme de E-catégories $K \xrightarrow{\sim} K'$ est alors évident.

3.4.5.2. Si l'on suppose maintenant que A est central dans B, la structure de A-gerbe de K' est caractérisée par la condition que le morphisme $K' \to \mathrm{TORS}(E, B)$, $(P, p') \rightsquigarrow P$, soit lié par $\mathbf{lien}(a)$ (2.5.6 (iii ter)). Il reste donc à vérifier que les morphismes (3) munissent K d'une structure de A-gerbe et que le foncteur $K \to \mathrm{TORS}(E, B)$, $(P, p) \rightsquigarrow P$, est lié par $\mathbf{lien}(a)$, ce qui est immédiat.

3.5. Cohomologie de Čech

Nous allons maintenant relier la cohomologie de Čech à celle définie en termes de gerbes. Commençons par associer à certaines gerbes une obstruction en cohomologie de Čech.

Proposition 3.5.1. Soient E un $\mathbf{U}$-site où les produits fibrès finis existent, $\mathbf{S} = (S_i \to S)$, $i \in I$, $I \in \mathbf{U}$, une famille couvrante, où S est l'*objet final* de E, A un faisceau de groupes *abéliens* sur E et G une L-gerbe,

$L=\mathbf{lien}(A)$. Soit encore γ un clivage de G (c'est-à-dire un choix des images inverses, [D 1.5]) et soit enfin une famille

$$x_i\in \mathrm{Ob}(G_{S_i}),\quad i\in I, \tag{1}$$

et une donnée de recollement [D 9.19]

$$u=(u_{ij}),\quad (i,j)\in I^2,\quad u_{ij}\colon x^i{}_j\xrightarrow{\sim} x_i{}^j, \tag{2}$$

sur la famille des x_i relativement à $\mathbf{S}$.

(i) Pour tout $(i,j,k)\in I^3$ il existe

$$c_{ijk}\in A(S_{ijk}),\quad S_{ijk}=S_i\times S_j\times S_k, \tag{3}$$

caractérisé par

$$c_{ijk}=u^i{}_{jk}\cdot(u_i{}^j{}_k)^{-1}\cdot u_{ij}{}^k\quad \text{(cf. (10))}. \tag{4}$$

De plus, pour que u soit une *donnée de descente* il faut et il suffit que la cochaine $\mathrm{c}=(c_{ijk})$ soit nulle.

(ii) La cochaine c est un cocycle, la classe

$$c\in H^2(\mathbf{S},A)\quad \text{(III 3.6.7 (6))} \tag{5}$$

qu'elle définit ne dépend pas de u.

(iii) Pour que $c=0$ il faut et il suffit qu'il existe $x\in\mathrm{Ob}(G_S)$ tel que, pour tout $i\in I$, l'image inverse de x par $S_i\to S$ soit S_i-isomorphe à x_i.

(iv) L'image de c par le composé

$$H^2(\mathbf{S},A)\xrightarrow{\varepsilon_2} H^2_{\bullet}(E,A)\xrightarrow{\alpha_2(A)} H^2(E,A),\quad \text{(III 3.6.10) (3.4.2)}, \tag{6}$$

est la classe à L-équivalence près de la L-gerbe G.

(v) Pour que l'image $\check{c}$ de c par

$$H^2(\mathbf{S},A)\to \check{H}^2(E,A),\quad \text{[SGA 4 V 2.1 (15)]}, \tag{7}$$

soit nulle il faut et il suffit que G soit triviale.

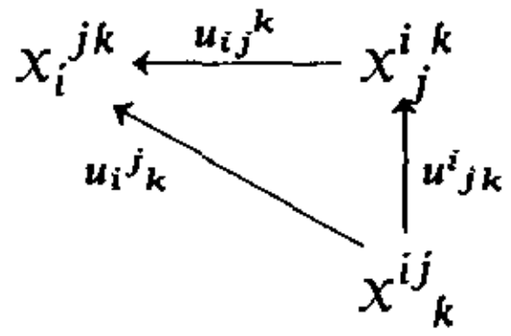
3.5.1.1. Par définition d'une donnée de recollement, [D 9.19] $u_{ij}\colon x^i{}_j\xrightarrow{\sim} x_i{}^j$ est un S_{ij}-isomorphisme, où

$$x^i{}_j\quad (\text{resp. } x_i{}^j) \tag{8}$$

est l'image inverse de x_j (resp. x_i) par la projection $S_{ij}\to S_j$ (resp. $S_{ij}\to S_i$), $S_{ij}=S_i\times S_j$. Si l'on désigne par

$$x_i{}^{jk},\quad x^i{}_j{}^k\quad \text{et}\quad x^{ij}{}_k \tag{9}$$

les images inverses de x_i, x_j et x_k par les projections de S_{ijk} sur S_i, S_j et S_k, on a des S_{ijk}-isomorphismes



(10)

où, par exemple, $u_{ij}{}^k$ est obtenu *en transportant par les isomorphismes* de transitivité de l'image inverse:

$$(x^i{}_j)^k \xrightarrow{\sim} x^i{}_j{}^k \quad \text{et} \quad (x_i{}^j)^k \xrightarrow{\sim} x_i{}^{jk},$$

[D 1.6, 9.6 et 9.19], *l'image inverse*

$$(u_{ij})^k\colon\ (x^i{}_j)^k \to (x_i{}^j)^k \tag{11}$$

de u_{ij} par la projection $S_{ijk} \to S_{ij}$. Le second membre de (4) est donc un S_{ijk}-automorphisme de $x^i{}_j{}^k$. Puisque G est une A-gerbe abélienne, cet automorphisme détermine une section c_{ijk} de A sur S_{ijk}, (2.2.3.4), ce qui prouve la première assertion de (i), l'égalité (4) étant un abus de langage, évident. La seconde assertion de (i) traduit la définition d'une donnée de descente [D 9.19].

3.5.1.2. Pour prouver (ii), nous supposerons pour simplifier que le clivage est un *scindage*, (autrement dit que les isomorphismes de transitivité de l'image inverse sont tous des morphismes identiques). Nous devons prouver que $\mathrm{c}=(c_{ijk})$ est un 2-cocycle, c'est-à-dire que, pour tout $(i, j, k, l)\in I^4$, on a

$$0 = c^i{}_{jkl} - c_i{}^j{}_{kl} + c_{ij}{}^k{}_l - c_{ijk}{}^l, \quad \text{(III 3.6.7 (3))}. \tag{12}$$

Si d_{jkl}, ..., désignent les images des termes de (12) par l'isomorphisme

$$H^0(E_{/S_{ijkl}};\, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}_{S_{ijkl}}(x_i{}^{jkl}), \tag{13}$$

de (2.2.3.4), où $x_i{}^{jkl}$ est l'image inverse de x_i par la première projection de $S_{ijkl} = S_i \times S_j \times S_k \times S_l$, il suffit de prouver que

$$d_{ijk} \cdot d_{ikl} = d_{jkl} \cdot d_{ijl}, \tag{14}$$

où le point désigne la composition des morphismes dans la catégorie fibre $G_{S_{ijkl}}$. Or, par transitivité de l'image inverse, les images inverses de $u_{ij}{}^k$ et $u_{ij}{}^l$ par les projections de S_{ijkl} sur S_{ijk} et S_{ijl} sont égales à l'image inverse

$$v_{ij} \tag{15}$$

de u_{ij} par la projection $S_{ijkl} \to S_{ij}$. Par image inverse de S_{ijk} à S_{ijkl}, la formule donne

$$d_{ijk} = v_{ij} \cdot v_{jk} \cdot (v_{ik})^{-1}, \quad (2.2.3.4), \tag{16}$$

et on a de même

$$d_{ikl} = v_{ik} \cdot v_{kl} \cdot (v_{il})^{-1}$$

$$d_{ijl} = v_{ij} \cdot v_{jl} \cdot (v_{il})^{-1} \tag{17}$$

$$d_{jkl} = v_{ij} \cdot v_{jk} \cdot v_{kl} \cdot (v_{jl})^{-1} \cdot (v_{ij})^{-1},$$

d'où la relation (14). Donc *les* c_{ijk} *définissent un* 2*-cocycle* $c \in Z^2(\mathbf{S}; A)$ dont la classe est notée $c \in H^2(\mathbf{S}; A)$.

3.5.1.3. Soit v_{ij}: ${x^i}_j \to {x_i}^j$ une autre donnée de recollement sur la famille des x_i. D'après (2.2.3.4), il existe une section $a_{ij} \in H^0(E_{/S_{ij}}; A)$ dont l'image a'_{ij} dans $\mathrm{Aut}_{S_{ij}}({x_i}^j)$, (2.2.3.4), vérifie

$$v_{ij} = a'_{ij} \cdot u_{ij}. \tag{18}$$

Un calcul trivial montre que le 2-cocycle b associé à v_{ij} par (4) vérifie $\mathsf{b} = \mathsf{c} + d(\mathsf{a})$, où $\mathsf{a} = (a_{ij})$ et où d: $C^1(\mathbf{S}; A) \to C^2(\mathbf{S}; A)$ est le cobord de (III 3.6.7 (3)), *ce qui achève de prouver* (ii). En fait il est évident que la formule (18) établit *une bijection entre l'ensemble des* 2*-cochaines cohomologues à* c *et l'ensemble des données de recollement sur la famille des* x_i.

3.5.1.4. Par suite, pour que la classe c de c soit nulle il faut et il suffit qu'il existe une donnée de recollement v_{ij} sur les x_i telle que le cocycle associé par (4) à v_{ij} soit nul. Or, par définition, [D 9.19], cette condition signifie que v_{ij} est une donnée de descente. Puisque G est une gerbe, la famille $\mathbf{S}$ est de G-descente effective, (II 1.1.2), et l'existence d'une donnée de descente sur les x_i équivaut à celle d'un $x \in \mathrm{Ob}(G_S)$ dont les images inverses par les $S_i \to S$ soient S_i-isomorphes aux x_i, *ce qui prouve* (iii).

3.5.1.5. Montrons que (iv) implique (v). Les morphismes (7), pour $\mathbf{S}$ parcourant l'ensemble des familles qui couvrent S, induisent un isomorphisme $\varinjlim H^2(S; A) \xrightarrow{\sim} \check{H}^2(E; A)$, [SGA 4 V 2.1 (15)] et les morphismes ε_2 de (6) induisent, par passage à la limite, un morphisme

$$\rho_2 \colon \check{H}^2(E; A) \to H^2_\bullet(E; A). \tag{19}$$

En vertu de (iv), la classe à L-équivalence près de G est égale à $\alpha_2 \rho_2(\check{c})$. Ceci prouve (v), car α_2 est un isomorphisme (3.4.2) et ρ_2 est un monomorphisme [SGA 4 V 2.5].

3.5.1.6. Il nous reste à prouver (iv). Par (III 3.6.10), le morphisme $\varepsilon_2 : H^2(\mathbf{S}; A) \to H^2_\bullet(E; A)$ de (6) est obtenu en plongeant la suite exacte

$$0 \to A \xrightarrow{u} \mathbf{C}^0(\mathbf{S}; A) \xrightarrow{v} \mathbf{C}^1(\mathbf{S}; A) \xrightarrow{w} \mathbf{Z}^2(\mathbf{S}; A) \to 0 \qquad (20)$$

dans une résolution injective de A, (où u, v et w sont les morphismes évidents définis par le complexe augmenté $\mathbf{C}^*(\mathbf{S}; A)$ de (III 3.6.7)). D'après (3.4.2 (ii)), *le composé* (6) *est donc l'opposé du cobord itéré attaché à la suite exacte* (20). D'après (3.4.5), pour prouver (iv) il suffit donc de trouver un L-morphisme de gerbes $(L = \mathbf{lien}(A))$

$$G \to K \qquad (21)$$

où G est la gerbe donnée et où K est la gerbe attachée par (3.4.5) à la section $\mathbf{c} = (c_{ijk})$ de $\mathbf{Z}^2(\mathbf{S}; A)$ et à la suite exacte $(u, -v, w)$ déduite de (20), (pour tenir compte du signe).

3.5.1.7. Pour tout $T \in \mathrm{Ob}(E)$ et tout $y \in \mathrm{Ob}(G_T)$, posons

$$P(y/T)(T) = \prod_{i \in I} \mathrm{Isom}_{T_i}(x_i^T, y^i), \qquad (22)$$

où $T_i = T \times S_i$ et où x_i^T (resp. y^i) est l'image inverse de x_i (resp. y) par la seconde (resp. première projection de T_i). Par localisation au-dessus de T, on obtient un faisceau d'ensembles sur $E_{/T}$

$$P(y/T). \qquad (23)$$

La composition des morphismes et les isomorphismes

$$\mathrm{Aut}_{T_i}(y^i) \approx H^0(E_{/T_i}; A), \quad (2.2.3.4),$$

font de $P(y/T)$ *un torseur à droite sous* la restriction $\mathbf{C}^0(\mathbf{S}; A)^T$ de $\mathbf{C}^0(\mathbf{S}; A)$ à $E_{/T}$.

A toute section $(a_i : x_i^T \to y^i)$ de $P(y/T)$, est associé un automorphisme

$$p(y/T)(a)_{ij} = a_i{}^j \cdot u_{ij}^T \cdot (a^i{}_j)^{-1}, \quad (i, j) \in I^2, \qquad (24)$$

de l'image inverse y^{ij} de y par $T_{ij} \to T$, où $a_i{}^j$, $a^i{}_j$ et u_{ij}^T sont les images inverses de a_i, a_j et u_{ij} par les projections évidentes de T_{ij}. D'après (2.2.3.4), l'automorphisme (24) détermine une section de A sur T_{ij}, d'où une section

$$p(y/T)(a) \in \mathbf{C}^1(S; A)(T).$$

Par passage aux faisceaux, on obtient ainsi un morphisme de faisceaux

$$p(y/T) : P(y/T) \to \mathbf{C}^1(\mathbf{S}; A)^T \qquad (25)$$

et la formule (24) montre que $p(y/T)$ *est un* $(-v)$-*morphisme* de torseurs, car on a, par définition,

$$(-v)(b)_{ij} = -b^i{}_j + b_i{}^j, \qquad b \in C^0(\mathsf{S}; A),$$

(cf. (III 3.6.7 (3)). Pour prouver que $(P(x/T), p(y/T))$ est un objet de la gerbe K de (21), il reste à voir que le composé $w \cdot p(y/T)$, (20) et (25), a pour image la section $c \in Z^2(\mathsf{S}; A)$. Par transitivité de l'image inverse, les images inverses de $a_i{}^j$ et $a_i{}^k$ par les projections de T_{ijk} sur T_{ij} et T_{ik} sont égales à l'image inverse

$$b_i \tag{26}$$

de a_i par la première projection de T_{ijk}. L'image inverse de $p(y/T)(a)_{ij}$ par la projection $T_{ijk} \to T_{ij}$ est donc égale à

$$(p(y/T)(a)_{ij})^k = b_i \cdot (u_{ij}{}^k)^T \cdot (b_j)^{-1} \tag{27}$$

et on a de même

$$(p(y/T)(a)_{ik})^j = b_i \cdot (u_i{}^j{}_k)^T \cdot (b_k)^{-1} \tag{28}$$

et

$$(p(y/T)(a)_{jk})^i = b_j \cdot (u^i{}_{jk})^T \cdot (b_k)^{-1}, \tag{29}$$

où *l'exposant T désigne l'image inverse par* $T_{ijk} \to S_{ijk}$. Par définition de w, (III 3.6.7 (3)), on en déduit que l'automorphisme de y^{ijk} correspondant à la composante $(w \cdot p(y/T)(a))_{ijk}$ par (2.2.3.4) est égal à

$$b_j \cdot (u^i{}_{jk} \cdot (u_i{}^j{}_k)^{-1} \cdot u_{ij}{}^k)^T \cdot (b_j)^{-1}. \tag{30}$$

L'automorphisme de $(x^i{}_j{}^k)^T$ correspondant à la composante $(w \cdot p(y/T)(a))_{ijk}$ est donc égal à $(u^i{}_{jk} \cdot (u_i{}^j{}_k)^{-1} \cdot u_{ij}{}^k)^T$ et, en utilisant à nouveau (2.2.3.4), on en déduit que cette composante est la restriction de c_{ijk} à T_{ijk}, (cf. (4)). Ceci achève de prouver que $(P(y/T), p(y/T))$ est un objet de K_T. Par ailleurs, $P(y/T)$ est fonctoriel en y de manière évidente, cf. (22), et «compatible» avec la localisation, ce qui prouve que l'on obtient ainsi le morphisme de gerbes $G \to K$ de (21). Il reste à vérifier que c'est un L-morphisme, $(L = \mathrm{lien}(A))$. En explicitant la structure de A-gerbe de K, (3.4.5), on trouve que ceci signifie que, pour tout $T \in \mathrm{Ob}(E)$, tout $y \in \mathrm{Ob}(G_T)$ et tout $m \in H^0(E_T, A)$, l'image par (21) de l'automorphisme de y défini par m est l'automorphisme du torseur $P(y/T)$ sous $\mathsf{C}^0(\mathsf{S}; A)^T$ défini par la translation à droite par la section $u(m) = (m^i)$ de $\mathsf{C}^0(\mathsf{S}; A)^T$. Or ceci est évident. C.Q.F.D.

Corollaire 3.5.2. Pour que la classe d'une L-gerbe G appartienne à l'image du morphisme

$$H^2(\mathsf{S}; A) \to H^2(E; A), \qquad (3.5.1\,(6)), \tag{1}$$

il faut et il suffit qu'il existe des $x_i \in \mathrm{Ob}(G_{S_i})$ et une donnée de recollement sur les x_i relativement à $(S_i \dashrightarrow S)$.

3.5.2.1. La condition est suffisante par (4.7.7 (iv)). Inversement, soit $c \in Z^2(\mathbf{S}; A)$ un 2-cocycle et soit K la gerbe attachée par (3.4.5) à c et à la suite exacte $(u, -v, w)$ déduite de (3.5.1 (20)); l'image par (1) de la classe de c est celle de K, (4.7.7.6). Il est aisé d'exhiber des $x_i \in \mathrm{Ob}(K_{S_i})$ et une donnée de recollement sur ceux-ci, ce qui prouve que la condition est nécessaire.

Corollaire 3.5.3. Pour que la classe d'une L-gerbe G appartienne à l'image du morphisme

$$\check{H}^2(E, A) \to H^2(E, A) \quad (3.5.1.5\,(19)) \tag{1}$$

il faut et il suffit qu'il existe une famille couvrante $(S_i \to S)$, une famille $x_i \in \mathrm{Ob}(G_{S_i})$ et une donnée de recollement sur la famille des x_i relativement à $(S_i \to S)$.

En effet, l'image de (1) est la réunion des images des $H^2(\mathbf{S}, A) \to H^2(E, A)$ pour toutes les familles couvrantes $\mathbf{S} = (S_i \to S)$.

Corollaire 3.5.4. Soit

$$1 \to A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \to 1 \tag{1}$$

une suite exacte de faisceaux de groupes telle que a soit *central*. Soient P un C-torseur, $\mathbf{S} = (S_i \to S)_{i \in I}$ une famille couvrante où S est l'objet final de E, et soient, pour tout $i \in I$,

$$Q_i \quad (\text{resp. } q_i\colon Q_i \overset{B}{\wedge} C \to P^i) \tag{2}$$

un B-torseur sur S_i, (resp. un C-isomorphisme de C-torseurs sur S_i). Soient enfin

$$u_{ij}\colon {Q^i}_j \xrightarrow{\sim} {Q_i}^j, \quad (i, j) \in I^2, \tag{3}$$

des isomorphismes de B-torseurs sur S_{ij} *tels que* l'automorphisme de P^{ij} déduit de (3) par extension du groupe structural soit l'identité.

(i) Il existe des sections

$$c_{ijk} \in A(S_{ijk}), \quad (i, j, k) \in I^3, \tag{4}$$

telles que le composé

$$u^i{}_{jk} \cdot (u_i{}^j{}_k)^{-1} \cdot u_{ij}{}^k \tag{5}$$

soit le S_{ijk}-automorphisme de ${Q^i}_j{}^k$ défini par la translation à droite par l'image de c_{ijk} dans $B(S_{ijk})$. De plus, $\mathrm{c} = (c_{ijk})$ *est un* 2-*cocycle*, $(\mathrm{c} \in Z^2(\mathbf{S}; A))$.

(ii) L'image de la classe $c \in H^2(\mathbf{S}; A)$ de c par le morphisme $H^2(\mathbf{S}; A) \to H^2(E; A)$ de (3.5.1 (6)) est égale à l'image de la classe p de P par le cobord

$$d\colon H^1(E; C) \to H^2(E; A). \tag{6}$$

Le cobord (6) n'a été défini jusqu'ici que si B est abélien, mais la définition de (6) lorsque l'on suppose seulement que A est central (4.2.7.2 et 4.2.10) repose uniquement sur (2.5.9) et nous pouvons l'utiliser dés maintenant. On notera que ce corollaire montre, comme annoncé dans (2.5.9), que la classe de cohomologie $d(P) \in H^2(E, A)$ ne diffère pas de celles définies par Frenkel et Grothendieck, du moins lorsque cette classe appartient à $\check{H}^2(E, A)$. Pour le cas le plus général traité par Grothendieck ([17] prop. 3.4.2), la vérification est un peu plus délicate; on la laisse au lecteur à titre d'exercice.

Prouvons le corollaire. La classe $c \in H^2(\mathbf{S}, A)$ est celle attachée par (3.5.1) à la gerbe $K(P)$ des relèvements de P. Son image dans $H^2(E. A)$ est donc, d'après (3.5.1) la classe de $K(P)$, laquelle, par définition du cobord d. est celle de $d(p)$.

3.6. Calculs galoisiens (suite)

Soient G un groupe appartenant à un univers U et soit $\mathbf{B} = B_G$ (U-ens), la catégorie des ensembles appartenant à U munis d'opérations de G à gauche. On note E le G^{τ}-torseur de $\mathbf{B}$ obtenu en faisant opérer G sur lui-même par les translations à gauche et à droite (G^{τ} désigne le Groupe de $\mathbf{B}$ obtenu en faisant opérer G sur lui-même trivialement). Le morphisme final $E \to e$ est couvrant et l'objet simplicial $n \mapsto E^{n+1}$ est isomorphe à l'objet simplicial $n \mapsto \coprod_{g \in G^n} E$, cependant que le topos $\mathbf{B}_{E^{n+1}}$, $n \geqq 0$, est équivalent au produit de G^n copies du topos U-ens. en particulier, sa cohomologie est triviale. Le complexe de Čech $C^*(E/e, A)$. où A est un Groupe abélien de $\mathbf{B}$, s'identifie donc au complexe des cochaines inhomogènes $C^*(G, A)$ et le morphisme habituel

$$H^*(E/e, A) \to H^*(\mathbf{B}, A)$$

fournit un isomorphisme

$$H^*(C^*(G, A)) \xrightarrow{\sim} H^*(\mathbf{B}, A).$$

Pour toute gerbe abélienne G sur B de lien A. la catégorie fibre $\mathbf{G}_E$ est un groupoïde non vide dont tous les objets sont isomorphes. car le topos $\mathbf{B}_E$ est équivalent à U-ens. On sait donc, après certains choix, associer à G un cocycle $a \in Z^2(E/e, A) \simeq Z^2(G, A)$. que nous désirons expliciter.

Soit c un clivage de G (choix des images inverses) et soit $x \in \mathrm{Ob}(\mathsf{G}_E)$. Pour tout $s \in G$, on note ${}^s x$ l'image inverse de x par le morphisme R_s: $E \to E$, $R_s(h) = h\,s$. Une donnée de recollement sur x s'identifie à une famille de E-isomorphismes u_s: ${}^s x \xrightarrow{\sim} x$ et l'on vérifie que le cocycle $a \in Z^2(G, A)$ qui lui correspond par (3.5.1) est

$$a_{st} = u_s \cdot {}^s u_t \cdot (u_{st})^{-1}. \tag{1}$$

D'où un procédé permettant, après choix d'un clivage de G, d'un objet x de G_E et d'une donnée de recollement (u_s) sur x de définir un cocycle a dont on sait que la classe dans $H^2(G, A)$ est celle de la gerbe G.

Proposition 3.6.1. Soit $1 \to A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \to 1$ un suite exacte de Groupes du topos B telle que A soit abélien. Soit P un C-torseur et ${}^P A$ le Groupe de B obtenu en tordant A par P. La classe $d(P) \in H^2(\mathsf{B}, {}^P A)$ de la gerbe des relèvements de P est celle du cocycle défini par J. P. Serre dans [28], page I – 70.

D'après (III 3.7.7), la définition de l'objet tordu ${}^P A$ adoptée ici coïncide avec celle de [28]. Pour prouver la proposition précédente, il suffit de calculer par le procédé précédent un des cocycles attachés à la gerbe $K(P)$ des relèvements de P. Pour cela, on choisit un élément p de P, d'où un cocycle $c_s \in Z^1(G, C)$, défini par $s \cdot p = p \cdot c_s$, (III 3.7.1) et on relève c_s en une cochaîne $b_s \in C^1(G, B)$. A l'élément p de P, correspond un isomorphisme de C-torseurs sur E, r: $C \times E \to P \times E$, qui applique la section unité sur la section constante $E \to P \times E$, $x \mapsto (p, x)$. D'où un objet de la fibre en E de $K(P)$, à savoir le B-torseur trivial $B \times E$ sur E, muni du morphisme $r \cdot (v \times \mathrm{id})$: $B \times E \to P \times E$. Notons maintenant que c_s s'interprète comme la donnée de descente sur $C \times E$ qui définit le torseur P, et que b_s s'interprète comme une donnée de recollement sur le torseur $B \times E$, compatible avec c_s, autrement dit, comme une donnée de recollement sur l'objet $(C \times E, r \cdot (v \times \mathrm{id}))$ de la fibre de $K(P)$ en E. Le cocycle attaché à la gerbe $K(P)$ est donc $b_s \cdot {}^s b_t \cdot (b_{st})^{-1}$, qui est précisément celui considéré dans [28], d'où la conclusion.

3.6.2. Soit $1 \to A \to B \to G \to 1$ une suite exacte de groupes (ordinaires), où A est *abélien*. On en fait une suite exacte $1 \to A^\tau \to B^\tau \to G^\tau \to 1$ du topos B des G-ensembles en faisant opérer G trivialement. Soit E le G^τ-torseur de B introduit plus haut. Soit

$$d(E) \in H^2(G, {}^E A) \tag{1}$$

l'obstruction à relever E en un B^τ-torseur de B, qui est la classe de la gerbe des relèvements de E, où ${}^E A$ est le groupe obtenu en tordant par E le Groupe A^τ de B muni des opérations de G^τ définies par les auto-

morphismes intérieurs de B^{τ}. Notons que ${}^{E}A$ *est le Groupe de* B *obtenu en faisant opérer G sur A grâce aux automorphismes intérieurs de B.* En effet, d'après (III 3.7.7), pour déterminer ${}^{E}A$, on doit choisir une section de E, on prend la section unité, calculer le cocycle $c \in Z^1(G, G^{\tau})$ correspondant, c'est l'application identique de G, et faire opérer G sur l'ensemble sous-jacent à A par la formule

$$(s, a) \mapsto c_s \cdot {}^{s}a,$$

où $(s, a) \mapsto {}^{s}a$ est l'application qui définit la structure de G-objet de A (donc ${}^{s}a = a$) et où $(s, a) \mapsto s \cdot a$ est l'application qui définit les opérations de G^{τ} sur A^{τ} qui permettent de tordre A par E, (donc $s \cdot a = b\, a\, b^{-1}$, où $b \in B$ relève s); d'où ce point.

Proposition 3.6.3. Sous les conditions de (3.6.2), la classe $d(P) \in H^2(G, {}^{E}A)$ est celle attachée par Eilenberg et Mac Lane [8] à l'extension de groupes $1 \to A \to B \to G \to 1$.

Il suffit de prouver que ces deux classes sont représentées par un même cocycle $a \in Z^2(G, {}^{E}A)$. Or, d'après (3.6.1), pour trouver un cocycle qui représente $d(P)$, on choisit d'abord une cochaine $b \in C^1(G, B^{\tau})$ qui relève la cochaine $c \in Z^1(G, G^{\tau})$ qui représente E; on a vu que l'on peut prendre pour c l'application identique de G; on peut donc prendre pour b une section ensembliste $b: G \to B$ de la projection $B \to G$, moyennant quoi, on a

$$a_{st} = b_s \cdot {}^{s}b_t \cdot (b_{st})^{-1} = b_s \cdot b_t \cdot (b_{st})^{-1},$$

qui est précisément le cocycle attaché par [8] à l'extension ci-dessus, d'où la conclusion.

Remarque 3.6.4. Si G est un groupe et A un groupe abélien muni d'opérations de G, nous définirons au chapitre VIII une application $\mathrm{Ext}(G, A) \to H^2(G, A)$. La proposition ci-dessus montre que c'est celle de [8], cf. (VIII, 7.4, 7.3.3 et 6.2.11).

§ 4. Prolongement de la suite exacte de cohomologie

4.1. Suites exactes de liens

Définition 4.1.1. Soient

$$L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \tag{1}$$

deux morphismes de liens.

(i) On dira que la suite $1 \to L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N$ est *exacte* s'il existe localement un représentant $A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C$ de (1), (cf. 1.2.1), tel que a soit le noyau du morphisme de faisceaux de groupes b.

(ii) On dira que la suite $1 \to L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \to 1$ est *exacte* s'il existe localement un représentant $A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C$ de (1) tel que a soit le noyau de b et b le conoyau de a.

4.1.1.1. Ces conditions sont de nature locale. Sous les conditions de (i), u est *injectif et normal*, (1.2.6), mais n'est pas, en général, un monomorphisme (1.2.2), ni, à fortiori, un noyau du couple $M \underset{v}{\overset{1}{\rightrightarrows}} N$.

4.1.1.2. D'après (III 3.3.0), (1.2.6) et (1.3.2), la condition (ii) signifie que u est *injectif et normal et que v est un conoyau de u*. La terminologie introduite par (ii) est donc en accord avec celle de (2.5.5 (i)). Enfin, notons que (ii) signifie également que (i) est vérifiée et que v est surjectif.

4.1.2. Soit $v\colon M \to N$ un morphisme de liens. On désignera par

$$\mathbf{Noy}(v) \tag{1}$$

l'ensemble des couples (L, u), où L est un lien et $u\colon L \to M$ un morphisme de liens, tels que la suite $1 \to L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N$ soit exacte. C'est l'ensemble d'objets d'une catégorie

$$\mathbf{Noy}(v) \tag{2}$$

définie de manière évidente. Un lien étant une section cartésienne du champ des liens, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$, on a un morphisme $v(S)\colon M(S) \to N(S)$ de la fibre $\mathrm{LIEN}(S)$, c'est-à-dire un morphisme de liens sur S, (1.1.6). Le champ des liens étant scindé et la condition (4.1.1 (i)) étant stable par localisation, on définit une E-catégorie scindée

$$\mathrm{NOY}(v) \tag{3}$$

en associant à tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$ la catégorie $\mathbf{Noy}(v(S))$ et à toute flèche $f\colon T \to S$ de E le foncteur

$$\mathbf{Noy}(v(S)) \to \mathbf{Noy}(v(T)), \qquad (L, u) \rightsquigarrow (L^f, u^f), \tag{4}$$

où L^f est la restriction de L à T et où $u^f\colon L^f \to M(T)$ est le morphisme de liens sur T obtenu en composant la restriction $L^f \to M(S)^f$ de u à T et l'isomorphisme $M(S)^f \xrightarrow{\sim} M(T)$ défini par la section cartésienne M. On a évidemment un E-morphisme de catégories scindées

$$\mathrm{NOY}(v) \to \mathrm{LIEN}, \qquad (L, u) \rightsquigarrow L, \tag{5}$$

qui est *fidèle*.

Proposition 4.1.3. Soit $v\colon M \to N$ un morphisme de liens.

(i) $\mathrm{NOY}(v)$ est une gerbe.

(ii) On a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{Noy}(v) \xrightarrow{\sim} \varprojlim \mathrm{NOY}(v)/E). \tag{1}$$

4.1.3.1. Puisque LIEN est un champ et que la condition (4.1.1(i)) est de nature locale, $\mathrm{NOY}(v)$ est *un champ*. C'est une *gerbe*. En effet, si $b\colon B \to C$ est un représentant de v et si $a\colon A \to B$ est le noyau de b, on a un élément $(L, u) = (\mathbf{lien}(A), \mathbf{lien}(a))$ de $\mathrm{Noy}(v)$. Puisque v est localement représentable, on en déduit déjà que l'ensemble des $S \in \mathrm{Ob}(E)$ tels que $\mathrm{NOY}(v)_S \neq \emptyset$ est un raffinement de E. De plus, par définition, tout $(L, u) \in \mathrm{Noy}(v)$ est obtenu localement par ce procédé; d'où la conclusion, en remarquant que deux représentants de v sont localement isomorphes.

4.1.3.2. Bien entendu, (ii) résulte immédiatement des définitions.

Corollaire 4.1.4. Soit une suite exacte de faisceaux de groupes

$$1 \to A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \tag{1}$$

et soit

$$1 \to L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \tag{2}$$

son image par **lien** (i.e. la suite exacte de liens qu'elle représente).

(i) Si on désigne par $\mathbf{Aut}^M(L)$ le faisceau des automorphismes de la section (L, u) de la gerbe $\mathrm{NOY}(v)$ et par B' le sous-faisceau de groupes de B engendré par A et le centralisateur de $a\colon A \to B$, on a un isomorphisme canonique

$$B/B' \xrightarrow{\sim} \mathbf{Aut}^M(L). \tag{3}$$

(ii) Si, de plus, la suite $1 \to A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \to 1$ est exacte et si I désigne l'image du morphisme évident $C \to \mathbf{Autex}(A)$, (1.1.3(4)), on a un isomorphisme canonique

$$I \xrightarrow{\sim} \mathbf{Aut}^M(L). \tag{4}$$

4.1.4.1. Le Groupe B opère par automorphismes intérieurs sur les Groupes A, B et C, donc par fonctorialité, (III 2.2.1.3), sur les liens L, M et N qui sont leurs images par le morphisme de champs **lien**.

Bien entendu, B opère trivialement sur M et, puisque a est compatible avec les opérations de B, il en est de même de $u\colon L \to M$, donc B opère sur (L, u), (par définition de $\mathrm{NOY}(v)$), d'où un morphisme de Groupes

$$B \to \mathbf{Aut}^M(L). \tag{5}$$

4.1.4.2. Le noyau de (5) est évidemment le sous-faisceau de groupes de B dont les sections sont les sections b de B telles que la restriction à A de l'automorphisme intérieur $\mathrm{Int}(b)$ soit un automorphisme intérieur de A. Ce noyau est égal à B' comme on voit trivialement. Enfin (5) est un épimorphisme, car tout automorphisme de (L, u) est localement représentable par un automorphisme i de A et celui-ci vérifie $\mathbf{lien}(a\,i) = \mathbf{lien}(a)$, ce qui signifie qu'il est induit par un automorphisme intérieur de B. Ce qui prouve (i).

4.1.4.3. Les opérations de A sur L induites par celles de B sont triviales, donc, sous les hypothèses de (ii), *C opère sur le lien L représenté par A*, d'où un morphisme de Groupes

$$C \to \mathbf{Autex}(A), \quad (\mathbf{Autex}(A) \approx \mathbf{Aut}(L)). \tag{6}$$

L'assertion (ii) signifie que les sections de l'image de (6) sont les automorphismes de L compatibles avec «l'inclusion» $u\colon L \to M$, ce qui résulte immédiatement de (i), car B' contient A.

Remarque 4.1.5.1. Soit

$$1 \to A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \to 1 \tag{1}$$

une suite exacte de faisceaux de groupes et soit

$$1 \to L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \to 1 \tag{2}$$

la suite exacte de liens qu'elle représente. Comme on vient de voir, C opère sur la suite (2), (c'est-à-dire sur chacun de ses termes, les morphismes u et v étant compatibles avec les opérations de C). Si P est un C-torseur, on peut donc tordre (2) par P (c'est-à-dire chacun de ses termes) et l'on obtiendra *une suite exacte de liens*

$$1 \to {}^{P}L \xrightarrow{{}^{P}u} M \xrightarrow{v} N \to 1. \tag{3}$$

En effet, C opérant trivialement sur M et N, les liens tordus sont canoniquement isomorphes à M et N, (III 2.3.3.4) et, par ailleurs, (3) sera exacte. En effet, cette condition est locale et (3) s'identifie à (2) si P est trivial, ce qui est vrai localement.

4.1.5.2. D'après (4.1.4 (ii)), C opère sur la section (L, u) de $\mathrm{NOY}(v)$ et d'après le «principe de compatibilité», (III 2.3.11), la section de $\mathrm{NOY}(v)$ obtenue en tordant (L, u) par P s'identifie canoniquement à $({}^{P}L, {}^{P}u)$. Soit $e\colon C \to I$ le morphisme naturel, où I est l'image de $C \to \mathbf{Autex}(A)$, (4.1.4.3). Puisque $I \approx \mathbf{Aut}^{M}(L)$ et puisque $\mathrm{NOY}(v)$ est une gerbe, l'ensemble $H^1(I)$ s'identifie à l'ensemble des classes à isomorphisme près d'éléments

de $\mathrm{Noy}(v)=\mathrm{Ob}(\mathbf{Noy}(v))$, (III 2.5.2). De plus, l'application

$$e^{(1)}\colon\ H^1(C)\to H^1(I) \tag{4}$$

induite par $e\colon C\to I$ s'obtient en associant à la classe $p\in H^1(C)$ d'un C-torseur P la classe à isomorphisme près de l'élément ${}^PL, {}^Pu)$ de $\mathrm{Noy}(v)$, (loc. cit.).

4.1.5.3. Si, de plus, A est *abélien*, les automorphismes intérieurs de B font opérer C *sur le faisceau de groupes* A, opérations qui, par passage aux liens, redonnent les opérations de C sur $L=\mathsf{lien}(A)$. Donc si P est un C-torseur et si ${}^PA$ est le faisceau de groupes obtenu en tordant A par P sous l'action de C, d'après le «principe de compatibilité», (III 2.3.11), on aura un isomorphisme canonique

$$\mathsf{lien}({}^PA)\approx{}^P\mathsf{lien}(A)={}^PL. \tag{5}$$

4.1.5.4. Bien entendu, si C opère trivialement sur (L, u), alors pour tout C-torseur P, la suite (3) s'identifie canoniquement à (1), (III 2.3.3.4). D'après (4.1.4), pour que C opère trivialement sur (L, u), il faut et il suffit que $B'=B$, autrement dit que B soit engendré par A et le centralisateur de $a\colon A\to B$, ce qui est vrai par exemple si A est central.

Proposition 4.1.6. Soit $v\colon M\to N$ un morphisme de liens.

(i) On a un morphisme de gerbes

$$\mathrm{REP}(M)\to\mathrm{NOY}(v). \tag{1}$$

Le morphisme de liens qui lie (1)

$$v\colon\ \mathsf{Int}(M)\to\mathsf{Loy}(v) \tag{2}$$

est un épimorphisme.

(ii) si $v\colon M\to N$ est un épimorphisme il existe un unique morphisme de liens

$$\varepsilon\colon\ N\to\mathsf{Loy}(v) \tag{3}$$

tel que $\varepsilon v=v\,\imath$, où $v\,\imath$ est le composé

$$M\xrightarrow{\imath}\mathsf{Int}(M)\xrightarrow{v}\mathsf{Loy}(v). \tag{4}$$

De plus ε est un *épimorphisme*.

(iii) Si $1\to L\xrightarrow{u}M\xrightarrow{v}N$ est une suite exacte de liens (i.e. si $(L, u)\in\mathrm{Noy}(v)$), le morphisme (4) identifie $\mathsf{Loy}(v)$ au conoyau du morphisme

$$c_u\colon\ L\times C_u\to M, \tag{5}$$

où (C_u, c_u) est le centralisateur de u.

4.1.6.1. Soit (B, β), β: $\mathbf{lien}(B) \dashrightarrow M$, un représentant de M. Le foncteur qui, à tout faisceau de groupes X associe l'ensemble

$$A(X) = \{x \in \mathrm{Hom}(X, B),\ v \cdot \beta \cdot \mathbf{lien}(x) = 1\} \tag{6}$$

est représentable. En effet, si b: $B \to C$ est un représentant de v: $M \to N$, le noyau de b représente le foncteur ci-dessus car la relation qui figure dans (6) équivaut à $bx = 1$ et par ailleurs ce problème universel est *de nature locale*. Il en résulte que l'on définit un morphisme de champs (1) en associant à tout représentant (B, β) de M le couple $(\mathbf{lien}(A), \beta \cdot \mathbf{lien}(a))$, où a: $A \to B$ représente le foncteur (6).

4.1.6.2. Prouvons (iii). Cette assertion est locale d'après (1.3.2 (ii)) car les hypothèses sont stables par localisation. On peut donc représenter la suite exacte $1 \to L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N$ par une suite exacte de Groupes $1 \to A \to B \to C$ et (iii) résulte immédiatement de (4.1.4 (i)).

4.1.6.3. Sous les hypothèses de (iii), le composé (4) se factorise comme il est dit dans (ii), car v: $M \to N$ est un conoyau de u et car le composé

$$L \xrightarrow{\mathrm{inj}_1} L \times C_u \xrightarrow{c_u} M \to \mathbf{Loy}(v)$$

est le morphisme unité (noter que $c_u \cdot \mathrm{inj}_1 = u$). Ceci prouve (ii) car v est un épimorphisme et car les hypothèses de (iii) sont vérifiées localement, puisque NOY(v) est une gerbe. Bien entendu, il en résulte formellement que (2) est un épimorphisme.

Corollaire 4.1.7. Soit v: $M \to N$ un morphisme de liens. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) La gerbe NOY(v) est liée par le lien unité;

(ii) il existe un noyau du couple $M \underset{1}{\overset{v}{\rightrightarrows}} N$ qui demeure un noyau après localisation;

(iii) il existe localement une suite exacte de faisceaux de groupes $1 \to A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C$ telle que b représente v et telle que A et le centralisateur de a engendrent B;

(iii bis) il existe localement une suite exacte de faisceaux de groupes $1 \to A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C$ telle que b représente v et telle que B opère trivialement sur $\mathbf{lien}(A)$.

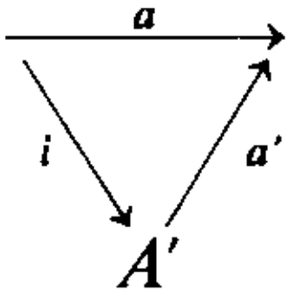
4.1.7.1. La condition (i) est locale. Elle est donc équivalente à (iii) d'après (4.1.4 (i)), donc à (iii bis) comme on voit aisément. Prouvons que (i) $\Rightarrow$ (ii). Soit $L \xrightarrow{u} M$ un objet de $\mathbf{Noy}(v)$. Il nous suffira de prouver que u est un noyau du couple $(v, 1)$ dans la catégorie des liens, c'est-à-dire

que, pour tout lien X, la suite de faisceaux de morphismes de liens

$$\mathbf{Hom}(X, L) \to \mathbf{Hom}(X, M) \rightrightarrows \mathbf{Hom}(X, N)$$

est exacte; en effet, la conclusion en résultera par passage aux sections. On peut alors localiser, représenter X, L, M et N et la démonstration devient évidente.

4.1.7.2. Il reste à prouver que (ii) $\Rightarrow$ (i). Soit donc $u: L \rightarrowtail M$ un noyau de $(v, 1)$ qui reste un noyau par localisation. La conclusion étant locale et l'hypothèse étant stable par localisation, il suffit de prouver que si $A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C$ sont des morphismes de faisceaux de groupes tels que $u = \mathbf{lien}(a)$ et $v = \mathbf{lien}(b)$, alors a est le noyau de b dans la catégorie des faisceaux de groupes. En effet, utilisant à nouveau l'hypothèse que u est le noyau de v et le reste par localisation, il en résultera immédiatement que $\mathbf{Aut}^M(L) = 1$, ce qui donnera la conclusion car on saura que (L, u) est une section de $\mathrm{NOY}(v)$. Prouvons déjà que a est un monomorphisme. Pour tout Groupe X et tout morphisme de Groupes $x: X \to A$ tel que $a\,x = 1$, on a $\mathbf{lien}(x) = 1$, donc $x = 1$. Par ailleurs, puisque $v\,u = 1$, on a $b\,a = 1$, d'où un diagramme commutatif



où a' est le noyau de b. Puisque $\mathbf{lien}(a)$ est le noyau de $\mathbf{lien}(b)$, on a un morphisme $j: \mathbf{lien}(A') \to \mathbf{lien}(A)$ caractérisé par $\mathbf{lien}(a) \cdot j = \mathbf{lien}(a')$. Du fait que $\mathbf{lien}(a)$ est un monomorphisme, on déduit que $j \cdot \mathbf{lien}(i) = \mathrm{id}_L$, où $L = \mathbf{lien}(A)$. D'où la conclusion par localisation, puisqu'on sait déjà que i est un monomorphisme.

4.2. Le second cobord

Proposition 4.2.1. Soit $m: F \to G$ un morphisme de gerbes lié par un épimorphisme de liens $v: M \to N$. Supposons qu'il existe un noyau $u: L \rightarrowtail M$ de v qui reste un noyau après localisation (4.1.7). Alors, pour toute section s de G, la gerbe $K(s)$ des relèvements de s (2.5.5) est liée par L et la classe de $K(s)$ dans $H^2(L)$ ne dépend que de la classe à isomorphisme près de s.

D'après (2.5.5 (i)), le morphisme $u(s): L(s) \rightarrowtail M$ qui lie le morphisme de gerbes $k(s): K(s) \to F$ est une section de la gerbe $\mathrm{NOY}(v)$ (4.1.2 (3)). D'après (4.1.7 (i)), il existe donc un unique isomorphisme $a: L \xrightarrow{\sim} L(s)$ tel que $u(s)\,a = u$, ce qui prouve la première assertion. Si $i: s \xrightarrow{\sim} t$ est un isomorphisme de sections de G, l'isomorphisme de liens $L(i): L \xrightarrow{\sim} L$

qui lie l'isomorphisme de gerbes $K(i)$: $K(s) \xrightarrow{\sim} K(t)$ (2.5.5.2) vérifie $u \cdot L(i) = u$, c'est donc l'identité de L, ce qui prouve que $K(s)$ et $K(t)$ ont même classe dans $H^2(L)$.

4.2.2. En particulier, si

$$1 \to A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \to 1 \tag{1}$$

est une suite exacte de faisceaux de groupes telle que B opère trivialement sur $\mathbf{lien}(A)$ (4.1.7), on définit une application

$$H^1(C) \to H^2(A) \tag{2}$$

en associant à tout $p \in H^1(C)$ la classe de la gerbe des relèvements à B (2.5.8) d'un représentant P de p. On notera que si l'on ne fait pas d'hypothèse sur l'action de B sur $\mathbf{lien}(A)$, *l'ensemble $H^2(A)$ ne suffit pas à mesurer l'obstruction à relever à B un C-torseur* (même si A est abélien, cf. 2.5.8). Nous allons donc introduire un ensemble d'obstructions adéquat.

Définition 4.2.3. Soit v: $M \to N$ un épimorphisme de liens

(i) On pose

$$\mathbf{O}(v) = \mathbf{N}(v)/R \tag{1}$$

— où $\mathbf{N}(v)$ est l'ensemble des (K, L, u), où K est une gerbe, L son lien et $u: L \to M$ un morphisme de liens tel que la suite $1 \to L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \to 1$ soit exacte (autrement dit, $(L, u) \in \mathrm{Noy}(v)$ (4.1.2)).

— où $R(K, L, u)(K', L', u')$ est la relation «il existe un morphisme de gerbes $a: K \to K'$ tel que le morphisme $\alpha: L \to L'$ qui lie a vérifie $u' \alpha = u$».

(ii) Un classe $c \in \mathbf{O}(v)$ est dite *neutre* s'il existe un représentant (K, L, u) de c tel que K soit triviale. On note

$$\mathbf{O}(v)' \tag{2}$$

l'ensemble des classes neutres.

Définition 4.2.4. Soit

$$1 \to A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \to 1 \tag{1}$$

une suite exacte de faisceaux de groupes et soit

$$1 \to L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \to 1 \tag{2}$$

la suite exacte de liens qu'elle représente. On pose

$$\mathbf{O}(b) = \mathbf{O}(v) \quad \text{et} \quad \mathbf{O}(b)' = \mathbf{O}(v)' \tag{3}$$

et on appelle *classe unité* celle de $(\mathrm{TORS}(E; A), L, u)$.

4.2.4.1. On notera que, privé de sa classe unité, l'ensemble $\mathbf{O}(b)$ ne dépend plus que du morphisme $v=\mathbf{lien}(b)$ représenté par b.

4.2.4.2. On notera que la relation R de (4.2.3 (i)) signifie également qu'il existe un isomorphisme $\alpha\colon (L,u)\to(L',u')$ d'objets de $\mathbf{Noy}(v)$, (4.1.2), tel que l'on ait

$$\alpha^{(2)}(k)=k',\qquad \alpha^{(2)}\colon\ H^2(L)\to H^2(L'), \tag{4}$$

où $k\in H^2(L)$ et $k'\in H^2(L')$ sont les classes de K et K'. En effet, si on a $R(K,L,u)(K',L',u')$, le morphisme $\alpha\colon L\to L'$ est nécessairement un isomorphisme, (4.1.3 (i)), et, par définition de $\alpha^{(2)}$, la relation (4) équivaut à l'existence d'un α-morphisme $K\to K'$.

Proposition 4.2.5. (Calcul de $\mathbf{O}(v)$.) Soit $1\to L\xrightarrow{u} M\xrightarrow{v} N\to 1$ une suite exacte de liens et soit $I=\mathbf{Aut}^M(L)$ le faisceau des automorphismes de la section (L,u) de $\mathrm{NOY}(v)$, (4.1.2).

(i) On définit une application

$$\pi\colon\ \mathbf{O}(v)\to H^1(I) \tag{1}$$

en associant à tout $(K,L,u)\in Z(v)$ la classe à isomorphisme près de $(L,u)\in\mathrm{Noy}(v)$.

(ii) Si P est un I-torseur et si $p\in H^1(I)$ est sa classe, on a une *bijection*

$$H^2({}^PL)/H^0({}^PI)\xrightarrow{\sim}\pi^{-1}(\{p\}),\qquad \text{(cf. 4.2.5.2)}. \tag{2}$$

En particulier, $p\in\mathrm{Im}(\pi)$ si, et seulement si, ${}^PL$ est réalisable.

(iii) Si I est nul, (4.1.7), on a une bijection

$$H^2(L)\xrightarrow{\sim}\mathbf{O}(v). \tag{3}$$

4.2.5.1. Par (III 2.5.2), l'ensemble $H^1(I)$ classifie les sections de la gerbe $\mathrm{NOY}(v)$. L'assertion (i) est donc évidente, d'après (4.2.4.2).

4.2.5.2. Soit P un I-torseur et soit ${}^Pu\colon {}^PL\to M$ l'objet tordu de (L,u) par P [dont la classe est celle p de P, (III 2.5.2)]. D'après (III 2.3.8), le Groupe tordu ${}^PI=\mathbf{ad}(P)$ s'identifie au faisceau $\mathbf{Aut}^M({}^PL)$ des automorphismes de $({}^PL,{}^Pu)$. En particulier, il opère sur le lien ${}^PL$, donc par fonctorialité du H^2, (3.1.6.2), le groupe $H^0({}^PI)$ opère sur $H^2({}^PL)$ en respectant l'ensemble $H^2({}^PL)'$ des classes neutres, grâce à l'accouplement

$$H^2({}^PL)\times H^0({}^PI)\to H^2({}^PL),\qquad (k,\alpha)\mapsto\alpha^{(2)}(k). \tag{4}$$

Ceci donne un sens à (ii). Moyennant quoi, il résulte immédiatement de (4.2.4.2) que l'on définit une application

$$H^2({}^PL) \to \mathbf{O}(v) \tag{5}$$

en associant à toute ${}^PL$-gerbe K de la classe de $(K, {}^PL, {}^Pu)$ et que (5) induit l'isomorphisme (2). On notera que, par définition, (4.2.3 (ii)), l'image inverse par (5) de l'ensemble $\mathbf{O}(v)'$ des classes neutres est $H^2({}^PL)'$.

4.2.5.3. Bien entendu, (iii) résulte formellement de (i) et (ii), ou, plus trivialement, de (4.1.7) (unicité de (L, u)).

Proposition 4.2.6. Soient $m\colon F \to G$ un morphisme de gerbes lié par un épimorphisme de liens $v\colon M \to N$ et soit s une section de G.

(i) La classe

$$d(s) \in \mathbf{O}(v) \tag{1}$$

de $(K(s), L(s), u(s))$ (2.5.5) ne dépend que de la classe à isomorphisme près de s.

(ii) Pour que s se relève à F il faut et il suffit que $d(s) \in \mathbf{O}(v)'$.

Les assertions (i) et (ii) résultent respectivement de (2.5.5.2) et (2.5.4.1 (1)).

4.2.7.1. Nous allons maintenant étudier le cas où $m\colon F \to G$ est un morphisme de gerbes trivialisées. D'après (2.5.7), nous pourrons nous contenter de prendre pour $m\colon F \to G$ *le foncteur extension du groupe structural*

$$\mathrm{TORS}(E; b)\colon \mathrm{TORS}(E; B) \to \mathrm{TORS}(E; C), \quad Q \rightsquigarrow Q \overset{B}{\wedge} C, \tag{1}$$

où

$$1 \to A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \to 1 \tag{2}$$

est une suite exacte de faisceaux de groupes.

4.2.7.2. D'après la proposition précédente, on définit un morphisme d'ensembles pointés

$$d\colon H^1(C) \to \mathbf{O}(b) \tag{3}$$

en associant à tout C-torseur P la classe dans $\mathbf{O}(b)$ de $(K(P), L(P), u(P))$, où $K(P)$ est la gerbe des relèvements de P relativement au foncteur $\mathrm{TORS}(E; b)$ (2.5.8), où $L(P)$ est le lien de $K(P)$ et où $u(P)\colon L(P) \to \mathbf{lien}(B)$ est le morphisme qui lie

$$k(P)\colon K(P) \to \mathrm{TORS}(E; B), \quad (Q, i) \rightsquigarrow Q. \tag{4}$$

Que d soit un morphisme d'ensembles pointés résulte du fait que le foncteur

$$\mathrm{TORS}(E;a)\colon \mathrm{TORS}(E;A)\to\mathrm{TORS}(E;B),\qquad P\rightsquigarrow P\overset{A}{\wedge}B, \tag{5}$$

induit, d'après (2.5.5.5), une équivalence entre $\mathrm{TORS}(E;A)$ et $K(C_d)$, puisque $X\overset{A}{\wedge}B\overset{B}{\wedge}C\approx C_d$.

4.2.7.3. Par ailleurs, on a *une correspondance*

$$\mathsf{O}(b)\overset{a^{(2)}}{\multimap}H^2(B) \tag{6}$$

définie par la relation $c\overset{a}{\multimap}q$, $c\in\mathsf{O}(b)$, $q\in H^2(B)$, qui signifie «il existe un représentant (K, L', u') de c, un représentant Q de q et un u'-morphisme $K\to Q$» (cf. 3.1.4). Si C *opère trivialement sur* $\mathrm{lien}(A)$, on a $H^2(A)=\mathsf{O}(b)$ d'après (4.2.5 (iii)) et la correspondance (6) n'est autre que celle définie par $a\colon A\to B$, notée

$$H^2(A)\overset{a^{(2)}}{\multimap}H^2(B)\qquad (3.1.4). \tag{7}$$

4.2.7.4. Nous disposons maintenant d'une «suite»

$$\ldots H^1(B)\xrightarrow{b^{(1)}}H^1(C)\xrightarrow{d}\mathsf{O}(b)\overset{a^{(2)}}{\multimap}H^2(B)\xrightarrow{b^{(2)}}H^2(C), \tag{8}$$

où $b^{(1)}$ et $b^{(2)}$ sont les applications définies par (III 2.4.2) et (3.1.6), qui prolonge la suite exacte de (III 3.3.1) et qui est *exacte* au sens suivant:

Proposition 4.2.8. Soit $1\to A\xrightarrow{a}B\xrightarrow{b}C\to 1$ une suite exacte de faisceaux de groupes.

(i) Pour que $x\in H^1(C)$ appartienne à l'image de $b^{(1)}$ il faut et il suffit que $d(x)\in\mathsf{O}(b)'$.

(ii) Pour que $x\in\mathsf{O}(b)$ corresponde à la classe unité de $H^2(B)$ il faut et il suffit qu'il appartienne à l'image de d.

(iii) Soit $x\in H^2(B)$. Pour que $b^{(2)}(x)$ soit *neutre* il faut et il suffit que x corresponde à un $y\in\mathsf{O}(b)$.

On a (i) par (4.2.6), (ii) par (2.5.5.5) et (iii) par (2.5.5).

Corollaire 4.2.9. Sous les hypothèses de (4.2.8), soit

$$1\to L\xrightarrow{u}M\xrightarrow{v}N\to 1 \tag{1}$$

la suite exacte de liens représentés par $1\to A\xrightarrow{a}B\xrightarrow{b}C\to 1$.

(i) On a un épimorphisme de faisceaux de groupes

$$e\colon C\to I,\qquad I=\mathsf{Aut}^M(L),\qquad (4.1.4), \tag{2}$$

induit par les opérations de B sur $\mathsf{lien}(A)=L$.

(ii) Le composé

$$H^1(C) \xrightarrow{d} \mathbf{O}(b) \to H^1(I), \quad (4.2.5\,(1))\ (4.2.7.2), \tag{3}$$

est égal à $e^{(1)}$: $H^1(C) \to H^1(I)$.

En effet, d'après (4.1.4), on a un isomorphisme $B/B/ \xrightarrow{\sim} I$, où B' est le sous-Groupe de B engendré par A et le centralisateur de a: $A \to B$, ce qui prouve (i). L'assertion (ii) résulte de (2.5.6 (ii) et (iii)).

Remarque 4.2.10. Sous les hypothèses de (4.2.8), si l'on suppose que B *opère trivialement sur* $\mathbf{lien}(A)$ (4.1.4) (4.1.7), la suite (4.2.7.4 (8)) prend la forme

$$1 \to H^0(A) \ldots H^1(B) \xrightarrow{b^{(1)}} H^1(C) \xrightarrow{d} H^2(A) \xrightarrow{a^{(2)}} H^2(B) \xrightarrow{b^{(2)}} H^2(C),$$

les pointillés suggérant la présence de la suite exacte du chapitre III. On notera que l'hypothèse est vérifiée si A *est central dans* B, la réciproque étant inexacte.

Remarque 4.2.11. *(Surjectivité de l'application* $b^{(2)}$*.)*

Soient Z et Z' les centres de B et C et soit z: $Z \to Z'$ le morphisme induit par b: $B \to C$. En vertu de (3.3.3) et (3.3.4), l'application $b^{(2)}$ est un morphisme d'espaces principaux homogènes compatible avec le morphisme de groupes abéliens $z^{(2)}$: $H^2(Z) \to H^2(Z')$, ce qui réduit le problème de la surjectivité de $b^{(2)}$ à un problème de cohomologie abélienne. Comme on verra plus bas, (VI 2.5), on a un résultat analogue pour un épimorphisme de liens. L'exemple suivant montre que, la cohomologie du centre de A ne suffit pas à mesurer le défaut de surjectivité de $b^{(2)}$.

4.2.11.1. On prend pour site le topos des G-ensembles où $G = \mathscr{Z}/2\,\mathscr{Z}$, pour A (resp. B) le groupe alterné (resp. symétrique) de trois lettres, d'où $C = \mathscr{Z}/2\,\mathscr{Z}$, et l'on fait opérer G trivialement. Puisque G est cyclique d'ordre premier, les H^i abéliens se calculent en regardant le noyau et le conoyau de la multiplication par 2 ([27], p. 143). Donc $H^i(A) = 0$, $i \geqq 1$, $H^2(C) = \mathscr{Z}/2\,\mathscr{Z}$ et $H^2(B) = H^2(B)' = \{1\}$, car le centre de B est nul. Donc $b^{(2)}$ n'est pas surjectif bien que les $H^2(A)$ soient tous nuls.

Proposition 4.2.12. Soit un diagramme commutatif de faisceaux de groupes dont les lignes sont des suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & A & \xrightarrow{a} & B & \xrightarrow{b} & C & \to & 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle x} & & \downarrow{\scriptstyle y} & & \downarrow{\scriptstyle z} & & \\ 1 & \to & A' & \xrightarrow{a'} & B' & \xrightarrow{b'} & C' & \to & 1, \end{array} \tag{1}$$

et soit

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \to & L & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{v} & N \to 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \xi} & & \downarrow{\scriptstyle \eta} & & \downarrow{\scriptstyle \zeta} \\ 1 & \to & L' & \xrightarrow{u'} & M' & \xrightarrow{v'} & N' \to 1 \end{array} \tag{2}$$

le diagramme de liens qu'il représente.

(i) On a une *correspondance*

$$\mathsf{O}(b) \xrightarrow{x^{(2)}} \mathsf{O}(b') \tag{3}$$

définie par la relation $c \multimap c'$, $c \in \mathsf{O}(b)$, $c' \in \mathsf{O}(b')$, qui signifie: «il existe des représentants (K_0, L_0, u_0) de c et (K_1, L_1, u_1) de c' et un morphisme de gerbes $k\colon K_0 \to K_1$ lié par un morphisme $\kappa\colon L_0 \to L_1$ vérifiant $\eta \cdot u = u' \cdot \kappa$.

(ii) Pour tout $p \in H^1(C)$, on a

$$d(p) \xrightarrow{x} d'(p'), \qquad p' = x^{(1)}(p), \qquad p' \in H^1(C'), \tag{4}$$

où d et d' désignent les cobords relatifs aux suites exactes (a, b) et (a', b'), (4.2.7.2).

(iii) Si a et a' sont centraux, la relation (3) est fonctionnelle et définit le morphisme de groupes

$$x^{(2)}\colon H^2(A) \to H^2(A'). \tag{5}$$

De plus, le carré

$$\begin{array}{ccc} H^1(C) & \xrightarrow{d} & H^2(A) \\ {\scriptstyle z^{(1)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle x^{(2)}} \\ H^1(C') & \xrightarrow{d} & H^2(A') \end{array} \tag{6}$$

est commutatif.

La première assertion est évidente, (ii) résulte de (2.5.10), de la définition de d et d', (4.2.7.2), et de la transitivité du foncteur extension du groupe structural. La première assertion de (iii), résulte de (4.1.7) et la seconde de (ii) et (4.2.10).

4.3. Compléments sur la suite exacte

Nous allons préciser (4.2.8) en donnant une condition pour que deux éléments de $H^1(C)$ aient même image par le second opérateur cobord $d\colon H^1(C) \to \mathsf{O}(b)$ (4.2.7.2). Nous commençons par un énoncé plus général où l'on suppose seulement un «épimorphisme» de gerbes $m\colon F \to G$.

Proposition 4.3.1. Soient $m\colon F\to G$ un morphisme de gerbes lié par un épimorphsime de liens $v\colon M\to N$ et s une section de G. Soit

$$Z(s)=\mathbf{A}\mathrm{ut}(k(s)) \tag{1}$$

le faisceau des automorphismes (dans le champ $\mathrm{CART}(K(s), F)$, (II 2.1.5)) du morphisme de gerbes

$$k(s)\colon K(s)\to F \qquad (2.5.2) \tag{2}$$

où $K(s)$ est la gerbe des relèvements de s.

(i) On a un morphisme de faisceaux de groupes

$$z(s)\colon Z(s)\to \mathrm{Aut}(s) \tag{3}$$

tel que, pour tout $S\in\mathrm{Ob}(E)$, tout $(r,\rho)\in\mathrm{Ob}(K(s)_S)$ (2.5.2 (8)) et tout automorphisme a de $k(s)$, on ait

$$z(s)(a)^S=\rho\, m(a(r,\rho))\,\rho^{-1}, \tag{4}$$

où le membre de gauche désigne la restriction à S de la section $z(s)(a)$ de $\mathbf{A}\mathrm{ut}(s)$.

(ii) Soit t une section de G les conditions suivantes sont équivalentes:

(a) $d(s)=d(t)$ (dans $\mathbf{O}(v)$ (4.2.6))

(b) il existe une E-équivalence $a\colon K(s)\to K(t)$ telle que les morphismes de gerbes $k(t)\,a$ et $k(s)$ soient localement isomorphes

(c) il existe un $Z(s)$-torseur P tel que t soit isomorphe à la section P_s obtenue en tordant s par P grâce à (3).

4.3.1.1. On désigne comme plus haut par $u(s)\colon L(s)\to M$ le morphisme qui lie $k(s)\colon K(s)\to M$. La composition avec $m\colon F\to G$ induit un morphisme de gerbes

$$\mathrm{HOM}_{u(s)}(K(s), F)\to \mathrm{HOM}_1(K(s), G),\qquad x\rightsquigarrow m\,x, \tag{5}$$

(2.3.12 (iii)), car le composé $v\cdot u(s)$ est le morphisme unité $1\colon L(s)\to N$ (2.5.5 (i)). Le morphisme (5) induit sur les faisceaux d'automorphismes de $k(s)$ et de son image $m\cdot k(s)$ un morphisme de Groupes

$$\zeta\colon\ Z(s)\to \mathbf{A}\mathrm{ut}(m\cdot k(s)),\qquad \zeta(a)=m*a. \tag{6}$$

4.3.1.2. Par ailleurs, la composition avec la projection

$$\pi\colon\ K(s)\to E \tag{7}$$

induit une E-équivalence

$$\mathbf{S}G\to \mathrm{HOM}_1(K(s), G),\quad x\rightsquigarrow x\pi,\qquad (2.3.6), \tag{8}$$

où SG est la gerbe des sections cartésiennes de G (I 2.4.5). Cette équivalence et l'isomorphisme $\kappa(s)$: $m \cdot k(s) \to s$ (2.5.2 (2)) induisent donc un *isomorphisme* de Groupes

$$\omega\colon\ \mathbf{Aut}(s) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Aut}\big(m \cdot k(s)\big), \qquad \omega(i) = \kappa(s)^{-1}(i * \pi)(s). \tag{9}$$

Remarquons que si $(r, \rho) \in \mathrm{Ob}\big(K(s)_S\big)$, $S \in \mathrm{Ob}(E)$, on a

$$\omega(i)(r, \rho) = \rho^{-1}\, i(S)\, \rho, \qquad i \in \mathrm{Aut}(s), \tag{10}$$

en vertu de la définition de $\kappa(s)$, (2.5.2 (2)). Ceci dit, on pose

$$z(s) = \omega^{-1} \cdot \zeta, \tag{11}$$

et la formule (4) résulte de (10) car, par définition, $a\colon k(s) \to k(s)$ est un automorphisme de foncteurs et

$$(m * a)(r, \rho) = m\big(a(r, \rho)\big)$$

est un automorphisme de $\big(m \cdot k(s)\big)(r, \rho) = m(r)$, cependant que $\rho\colon m(r) \to s(S)$ est un S-isomorphisme (2.5.1 (8)).

4.3.1.3. Ayant ainsi défini $z(s)$, prouvons (ii). Soit $a\colon K(s) \to K(t)$ un morphisme de gerbes, pour que les morphismes de gerbes $k(s)$ et $k(t) \cdot a$ soient localement isomorphes il faut et il suffit qu'ils soient liés par le même morphisme de liens (2.3.4). Par ailleurs (4.2.4.2) assure que, s'il en est ainsi, a est nécessairement une E-équivalence. D'où l'on déduit que $(a) \Leftrightarrow (b)$ en utilisant la définition de $d(s)$ (4.2.6).

4.3.1.4. Par la propriété universelle de $K(t)$ (2.5.2 (iii)), la condition (a) équivaut à l'existence d'un $u(s)$-morphisme de gerbes $b\colon K(s) \to F$ et d'un isomorphisme de morphismes de gerbes $m \cdot b \xrightarrow{\sim} t \cdot \pi$, où $\pi\colon K(s) \to E$ est la projection. Cette conditions signifie que $t \cdot \pi$ appartient à l'image essentielle du morphisme de gerbes (5). Puisque $Z(s)$ est le faisceau des automorphismes de la section $k(s)$ de la gerbe $\mathrm{HOM}_{u(s)}\big(K(s), F\big)$, cette condition équivaut à l'existence d'un $Z(s)$-torseur P [à savoir $\mathbf{Isom}\big(k(s), b\big)$] tel que $t \cdot \pi$ s'obtienne en tordant $m \cdot k(s)$ par P, sous l'action de $Z(s)$ opérant grâce à (5), (cf. III 2.5.3). Enfin, $t \cdot \pi$ est l'image de t par l'équivalence (8) et le morphisme $z(s)$ est induit par (5) et (8) d'où l'on déduit que la condition ci-dessus équivaut à (c). C.Q.F.D.

4.3.1.5. D'après (2.3.2) et (2.2.5), le Groupe $Z(s)$ représente le centralisateur du morphisme de liens $u(s)\colon L(s) \to M$. La proposition suivante nous donne le moyen de calculer $Z(s)$ dans certains cas.

Proposition 4.3.2. Sous les hypothèses de (4.3.1)

(i) Le faisceau de groupes $\mathbf{Aut}(s)$ opère sur le faisceau de groupes $Z(s)$ de (4.3.1 (1)) de telle sorte que le morphisme $z(s)\colon Z(s)\to \mathbf{Aut}(s)$ soit compatible avec ces opérations et celles de $\mathbf{Aut}(s)$ sur lui-même définies par les automorphismes intérieurs.

(ii) Si t est une section de G, le morphisme $z(t)$ s'obtient en tordant $z(s)$ par le $\mathbf{Aut}(s)$-torseur $\mathbf{Isom}(s, t)$.

(iii) Soit $k=(r, \rho)$ une section de $K(s)$ (2.5.4.1), r son image par $k(s)$: $K(s)\to F$ et $\rho\colon m\cdot r\xrightarrow{\sim} s$ l'isomorphisme naturel. On a une suite exacte de Groupes

$$1\to \mathbf{Aut}(k)\xrightarrow{\alpha}\mathbf{Aut}(s)\xrightarrow{\beta}\mathbf{Aut}(s)\to 1 \tag{1}$$

où les morphismes α et β sont induits par les morphismes de gerbes

$$K(s)\xrightarrow{k(s)} F\xrightarrow{m} G \tag{2}$$

et par l'isomorphisme ρ. On a un *isomorphisme canonique* entre *le centralisateur de* α et le Groupe $Z(s)$ qui identifie le morphisme $z(s)\colon Z(s)\to \mathbf{Aut}(s)$ de (4.3.1 (3)) au morphisme induit par β, et les opérations de (i) avec celles définies par les automorphismes intérieurs de $\mathbf{Aut}(r)$.

4.3.2.1. Si $i\colon s\to t$ est un isomorphisme de sections de G, l'isomorphisme $K(i^{-1})\colon K(t)\to K(s)$ (2.5.1 (4)) vérifie $k(s)\,K(i^{-1})=k(t)$ et l'on a donc un morphisme de groupes

$$Z(i)\colon \operatorname{Aut}(k(s))\to\operatorname{Aut}(k(t)),\qquad Z(i)(a)=a*k(i^{-1}) \tag{1}$$

qui s'écrit également, avec les notations de (4.3.1 (1))

$$Z(i)\colon Z(s)\to Z(t). \tag{2}$$

Il est immédiat que $Z(s)$ devient ainsi un *foncteur en* s, autrement dit, les applications

$$\operatorname{Isom}(s, t)\to \operatorname{Isom}(Z(s), Z(t)),\qquad i\mapsto Z(i), \tag{3}$$

sont compatibles avec les accouplements de composition. On vérifie aisément que l'on peut localiser et (3) fournit donc un morphisme de faisceaux d'ensembles

$$\mathbf{Isom}(s, t)\to \mathbf{Isom}(Z(s), Z(t)). \tag{4}$$

En particulier, pour $t=s$, on trouve un morphisme de faisceaux de groupes

$$\mathbf{Aut}(s)\to \mathbf{Aut}(Z(s)) \tag{5}$$

qui décrit les opérations de $\mathbf{Aut}(s)$ sur $Z(s)$ annoncées dans (i).

4.3.2.2. Puisque (4) est compatible avec les accouplements de composition, c'est un morphisme de $\mathbf{Aut}(s)$-objets à opérateurs. Donc (4) munit $Z(t)$ d'une structure d'objet tordu de $Z(s)$ par $\mathbf{Isom}(s, t)$ (III 2.3.3). Par (III 2.3.7), $\mathbf{Aut}(t)$ est lui-même muni d'une structure de Groupe tordu de $\mathbf{Aut}(s)$ par $\mathbf{Isom}(s, t)$.

4.3.2.3. Pour achever de prouver (i) et (ii), il nous suffit de démontrer que, pour tout isomorphisme $i: s \xrightarrow{\sim} t$ et tout automorphisme a de $k(s)$, on a

$$i \cdot z(s)(a) \cdot i^{-1} = z(t)\big(Z(i)(a)\big), \tag{6}$$

(ce qui est une égalité entre sections de $\mathbf{Aut}(s)$). En en effet, pour $s = t$, il en résultera que $z(s)$ est compatible avec les opérations de $\mathbf{Aut}(s)$ et, par ailleurs, d'après (III 2.3.3.1), la condition (6) exprime également que $z(t)$ est le morphisme obtenu en tordant $z(s)$ par $\mathbf{Isom}(s, t)$, comme on voit en examinant les structures d'objet tordu dont on a muni $Z(t)$ et $\mathbf{Aut}(t)$.

4.3.2.4. Prouvons donc (6). Pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$ et tout objet (r, ρ) de $K(s)_S$, la restriction à S du premier membre de (6) est

$$i\,\rho\,m\big(a(r, \rho)\big)\,\rho^{-1}\,i^{-1} \tag{7}$$

en vertu de (4.3.1 (4)). De plus, $(r, i\rho)$ est alors un objet de $K(t)_S$ et la restriction à S du second membre de (6) est

$$i\,\rho\,m\big(Z(i)(a)(r, i\rho)\big)\,\rho^{-1}\,i^{-1}. \tag{8}$$

Or on a

$$Z(i)(a)(r, i\rho) = \big(a * K(i^{-1})\big)(r, i\rho) = a(r, \rho) \tag{9}$$

car $K(i^{-1})(r, i\rho) = (r, \rho)$; ceci prouve que (7) est égal à (8). Ceci prouve (6), car les $S \in \mathrm{Ob}(E)$ tels que $K(s)_S$ soit non vide forment un raffinement de E puisque $K(s)$ est une gerbe. Nous avons donc prouvé (i) et (ii).

4.3.2.5. Prouvons (iii). L'assertion concernant la suite exacte (4.3.2 (1)) ne fait que reprendre (2.5.6 (i)). Par définition, $Z(s)$ est le faisceau des automorphismes du morphisme de gerbes $k(s): K(s) \to F$. D'après (III 2.2.3), le morphisme

$$Z(s) = \mathbf{Aut}\big(k(s)\big) \to \mathbf{Aut}(r), \qquad a \mapsto a * k, \tag{10}$$

induit donc *un isomorphisme entre* $Z(s)$ *et le centralisateur du morphisme*

$$\alpha: \mathbf{Aut}(k) \to \mathbf{Aut}(r), \qquad k = (r, \rho), \qquad r = k(s)\,k, \qquad \alpha(x) = k(x) * x,$$

induit par le morphisme de gerbes $k(s)$. Par définition de β: $\mathbf{Aut}(r) \to \mathbf{Aut}(s)$, le morphisme $Z(s) \to \mathbf{Aut}(s)$ induit par β et (10) n'est autre que

$$a \mapsto \rho\, m(a(r, \rho))\, \rho^{-1}.$$

Il est donc égal à $z(s)$.

4.3.2.6. Puisque β: $\mathbf{Aut}(r) \to \mathbf{Aut}(s)$ est un épimorphisme, on achèvera la preuve de (iii) en prouvant que les opérations de $\mathbf{Aut}(r)$ sur $Z(s)$ définies par (5) et par β sont données par les automorphismes intérieurs. Soit alors $j \in \mathrm{Aut}(r)$ une section de $\mathbf{Aut}(r)$. Il nous faut prouver que, pour tout automorphisme $a \in \mathrm{Aut}(k(s))$, on a

$$j\, a(r, \rho)\, j^{-1} = Z(i)(a)(r, \rho), \qquad i = \beta(j) \tag{11}$$

ou encore, par définition de $Z(i)$, (cf. 4.3.2.1 (1)),

$$j\, a(r, \rho)\, j^{-1} = \big(a * K(i^{-1})\big)(r, \rho) \tag{12}$$

ou encore, par définition de $K(i^{-1})$ (2.5.2 (4)),

$$j\, a(r, \rho)\, j^{-1} = a(r, i^{-1}\, \rho). \tag{13}$$

Or, par définition de β, on a $i = \rho\, m(j)\, \rho^{-1}$ et, par suite, j définit un isomorphisme de sections de $K(s)$

$$(r, \rho) \xrightarrow{\sim} (r, i^{-1}\, \rho) \quad \big(2.5.1\,(9)\big). \tag{14}$$

La relation (13) résulte alors du fait que a est un morphisme de foncteurs. C.Q.F.D.

Proposition 4.3.3. Soient $1 \to A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \to 1$ une suite exacte de faisceaux de groupes, Z le centralisateur de a: $A \to B$ et

$$z\colon\ Z \to C \tag{1}$$

le morphisme lnduit par b: $B \to C$.

(i) Soit $x \in H^1(C)$. Pour que $d(x)$ soit la classe unité de $\mathbf{O}(b)$ (4.2.4) (4.2.7.2) il faut et il suffit que x appartienne à l'image de $z^{(1)}$: $H^1(Z) \to H^1(C)$.

(ii) Soient P un C-torseur, $p \in H^1(C)$ sa classe, ${}^P z$: ${}^P Z \to {}^P C$ le morphisme de faisceaux de groupes obtenu en tordant (1) par P sous l'action de C opérant grâce aux automorphismes intérieurs de B. La bijection θ_P: $H^1(C) \xrightarrow{\sim} H^1({}^P C)$ de (III 2.6.3) induit une bijection entre l'image de

$$H^1({}^P z)\colon\ H^1({}^P Z) \to H^1({}^P C) \tag{2}$$

et l'image inverse par d: $H^1(C) \to \mathbf{O}(b)$ de $d(p)$, (4.2.7.2).

Cette proposition résulte immédiatement des deux précédentes, appliquées au foncteur extension du groupe structural $\mathrm{TORS}(E; B) \to$

TORS(E; C), étant entendu que dans (4.3.2 (iii)), on prend pour s la section définie par le torseur trivial C_d, moyennant quoi, comme on l'a déjà remarqué, $K(s)$ s'interprète comme la gerbe des A-torseurs et la suite (4.3.2 (1)) s'identifie à la suite donnée.

Proposition 4.3.4. Soit

$$1 \dashrightarrow A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \to 1 \tag{1}$$

une suite exacte de faisceaux de groupes telle que a soit *central*. Soit P un C-torseur et soit

$$1 \to A \xrightarrow{a'} B' \xrightarrow{b'} C' \to 1 \tag{2}$$

la suite exacte de faisceaux de groupes obtenue en tordant (1) par P, (A opérant grâce aux automorphismes intérieurs de B).

(i) On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H^1(B) & \xrightarrow{b^{(1)}} & H^1(C) & \xrightarrow{d} & H^2(A) \\ & & \downarrow \theta_P & & \downarrow r \\ H^1(B') & \xrightarrow[b'^{(1)}]{} & H^1(C') & \xrightarrow[d']{} & H^2(A), \end{array} \tag{3}$$

où d' est le cobord relatif à la suite exacte (2), où θ_p est la bijection définie par la torsion par P, (III 2.6.3), et où

$$r(x) = x - d(p), \qquad x \in H^2(A), \tag{4}$$

$p \in H^1(C)$ étant la classe de P.

(ii) θ_P induit une *bijection* entre $\{x \in H^1(C), d(x) = d(p)\}$ et l'image de $b'^{(1)}$.

Rappelons également que l'on a la suite (4.2.10) qui est exacte au sens de (4.2.8), (III 3.3.1) et (III 3.4.5).

4.3.4.1. Puisque A est *central*, C opère trivialement sur A et le Groupe tordu ${}^PA$ est canoniquement isomorphe à A, (III 2.3.3.4). De plus, le morphisme a' de (2) est central, ce qui justifie que le cobord d' relatif à (2) ait pour but $H^2(A)$. Ceci dit, (ii) résulte de (i) et de (4.3.2), car le centralisateur Z de a: $A \to B$ n'est autre que B.

4.3.4.2. Soit

$$1 \to L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \to 1 \tag{5}$$

la suite exacte de liens représentée par (1). Soit Q un C-torseur et soit $q \in H^1(Q)$ sa classe. On a

$$\mathrm{rd}(q) = d(q) - d(p) \tag{6}$$

et, d'après (3.3.2 (ii)), $d(q)-d(p)$ est la classe de la gerbe

$$H_L=\mathrm{HOM}_L\big(K(P), K(Q)\big), \tag{7}$$

car p (resp. q) est la classe de $K(P)$ (resp. $K(Q)$).

4.3.4.3. Par définition, $\theta_P(q)$ est la classe du C'-torseur

$$\mathsf{Isom}_C(P, Q)\approx Q\overset{C}{\wedge}P^0, \qquad C'=\mathsf{ad}(P), \tag{8}$$

et donc $d'\big(\theta_P(q)\big)$ est la classe de la gerbe des relèvements de (8) relativement au foncteur extension du groupe structural

$$\mathrm{TORS}(E; b')\colon\ \mathrm{TORS}(E; B')\to\mathrm{TORS}(E; C'). \tag{9}$$

4.3.4.4. Par ailleurs, la composition avec les foncteurs

$$K(Q)\xrightarrow{k(Q)}\mathrm{TORS}(E; B)\xrightarrow{\mathrm{TORS}(E;b)}\mathrm{TORS}(E; C) \tag{10}$$

induit des morphismes de gerbes

$$\begin{aligned}\mathrm{HOM}_L\big(K(P), K(Q)\big)&\xrightarrow{\mathsf{K}}\mathrm{HOM}_u\big(K(P), \mathrm{TORS}(E; B)\big)\\ &\xrightarrow{\mathsf{M}}\mathrm{HOM}_1\big(K(P), \mathrm{TORS}(E; C)\big)\end{aligned} \tag{11}$$

aussi notés

$$H_L\xrightarrow{\mathsf{K}}H_u\xrightarrow{\mathsf{M}}H_1. \tag{12}$$

Les morphismes de (10) sont liés par $L\xrightarrow{u}M\xrightarrow{v}N$; d'après (2.3.12), ceux de (11) sont donc liés par les morphismes $C_L\to C_u\to C_{vu}$ induits par u et v sur les centralisateurs, c'est-à-dire par u et v, car u est central et $vu=1$. D'après (2.5.5.5), H_L est donc la gerbe des relèvements d'une section X de H_1 relativement à M. Précisons: par définition de $K(Q)$, le composé (10) est isomorphe au composé $K(Q)\xrightarrow{\pi}E\xrightarrow{Q'}\mathrm{TORS}(E; C)$ où Q' est la section définie par le C-torseur Q. La section X est donc le composé

$$K(P)\xrightarrow{\pi'}E\xrightarrow{Q'}\mathrm{TORS}(E; C), \tag{13}$$

(bien entendu, π et π' sont les projections). Par ailleurs, on a une section $k(P)$ de H_u, dont l'image par M, (c'est-à-dire $m\cdot k(P)$), est, par définition de $K(P)$, isomorphe au composé

$$K(P)\xrightarrow{\pi'}E\xrightarrow{P'}\mathrm{TORS}(E; C). \tag{14}$$

Soit alors

$$\zeta\colon\mathsf{Aut}\big(k(P)\big)\to\mathsf{Aut}\big(m\cdot k(P)\big) \tag{15}$$

le morphisme induit par M sur les faisceaux d'automorphismes. D'après (2.5.5.5), H_L *est donc la gerbe des relèvements du* $\mathsf{Aut}\big(m\cdot k(P)\big)$*-torseur*

$$\mathsf{Isom}\big(m\cdot k(P), X\big)\approx\mathsf{Isom}(P'\cdot\pi', Q'\cdot\pi'), \tag{16}$$

relativement au foncteur extension du groupe structural défini par (15).

4.3.4.5. D'après (4.3.1.2 (8)), on a une équivalence de gerbes

$$\mathbf{S}(\mathrm{TORS}(E;C)) \to H_1, \qquad R \rightsquigarrow R\pi', \qquad \text{(cf. (13))}, \tag{17}$$

qui induit un isomorphisme de Groupes

$$\omega\colon\ \mathbf{Aut}_C(P) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Aut}(P' \cdot \pi') \tag{18}$$

et un ω-morphisme de torseurs

$$\mathbf{Isom}_C(P,Q) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Isom}(P' \cdot \pi', Q' \cdot \pi'). \tag{19}$$

Il en résulte par (2.5.10) que H_L est également la gerbe des relèvements du torseur $\mathbf{Isom}_C(P,Q)$ relativement au morphisme

$$\omega^{-1}\zeta\colon\ \mathbf{Aut}(k(P)) \to \mathbf{Aut}_C(P), \tag{20}$$

celui-ci n'est autre que le morphisme $z(P)\colon Z(P) \to C(P)$ de (4.3.1 (3)) (4.3.1.2 (11)) et, d'après (4.3.2 (iii)), il s'identifie à $v'\colon B' \to C'$, (car ici le centralisateur de $a\colon A \to B$ est égal à B). D'où la conclusion, en rapprochant de (4.3.4.3). C.Q.F.D.

§ 5. Compléments

5.1. Existence de sections d'un espace homogène

5.1.1. Soient $\mathbf{T}$ un U-topos, A un groupe de $\mathbf{T}$ et X un A-espace homogène à droite (III 1.3.8.1); le morphisme $X \times A \to X$, $(x,a) \mapsto xa$, et le morphisme final $X \to e$ sont donc des *épimorphismes*. Pour tout $S \in \mathrm{Ob}(\mathbf{T})$, considérons la catégorie

$$\mathbf{X}(S) \tag{1}$$

dont les objets sont les couples (Y,m), où Y est un A-torseur sur S et

$$m\colon\ Y \to X^S, \qquad X^S = X \times S, \tag{2}$$

un A-morphisme. Grâce aux foncteurs changements de base, $(Z/S) \rightsquigarrow (Z \times_S T/T)$, (III 1.1.6) les $\mathbf{X}(S)$ définissent une $\mathbf{T}$-catégorie fibrée $\mathbf{X}$.

5.1.2. Prouvons que $\mathbf{X}$ *est une* $\mathbf{T}$*-gerbe*. C'est un *champ*, (pour la topologie canonique). En effet, une section cartésienne de $\mathbf{X}$ sur un raffinement R d'un objet S de $\mathbf{T}$ est essentiellement un couple formé d'une section cartésienne Y du *champ* des A-torseurs (III 1.4.4), munie d'un morphisme $Y \to X^R$ entre sections du champ des A-objets à opérateurs (III 1.1.7), et il suffit d'appliquer (2.5.4). De plus, tout A-morphisme de A-torseurs est un isomorphisme; les fibres $\mathbf{X}(S)$ sont donc des groupoïdes. Puisque $X \to e$ est un épimorphisme, X admet localement une section qui définit un morphisme $A_d \to X$, ce qui prouve que, localement, les $\mathbf{X}(S)$

sont non vides. Enfin, deux objets de $\mathbf{X}(S)$ sont localement isomorphes. En effet, on peut localiser et supposer que les torseurs sous-jacents sont triviaux. Or le morphisme $X \times A \to X$ est un épimorphisme et, par suite, si $m, n: A_d \rightrightarrows X$ sont deux A-morphismes, il existe localement une section a de A telle que

$$m(e) = n(e)\, a \qquad (e = \text{section unité de } A)$$

donc

$$m(a') = m(e)\, a' = n(e)\, a\, a' = n(a\, a').$$

La translation à gauche L_a par a, qui est un A-automorphisme de A_d, vérifie donc $m = n \cdot L_a$, ce qui prouve que (A_d, n) est localement isomorphe à (A_d, m). Donc $\mathbf{X}$ est une *gerbe*. Enfin, remarquons que l'on a un morphisme de gerbes

$$\mathbf{X} \to \mathrm{TORS}(\mathbf{T}; A), \qquad (Y, m) \rightsquigarrow Y, \tag{1}$$

qui est *fidèle*.

Définition 5.1.3. Soient $\mathbf{T}$ un U-topos, A un groupe de $\mathbf{T}$ et X un A-espace homogène à droite. On appelle *lien des stabilisateurs de* X le lien $S(X)$ de la gerbe $\mathbf{X}$ de (5.1.1).

5.1.3.1. Le lien $S(X)$ est défini à isomorphisme unique près (2.2.1.1) et l'on a un morphisme *injectif* (1.2.6)

$$s(X): S(X) \to \mathbf{lien}(A), \tag{1}$$

à savoir celui qui lie le morphisme de gerbes $\mathbf{X} \to \mathrm{TORS}(T; A)$.

5.1.3.2. Si X admet une *section* x, celle-ci détermine un A-morphisme

$$\xi: A_d \to X, \qquad \xi(a) = x\, a, \tag{2}$$

autrement dit, une section de la gerbe $\mathbf{X}$. D'après (2.2.5), le faisceau S des automorphismes de (A_d, ξ) représente le lien $S(X)$ des stabilisateurs de X, ce qui justifie la terminologie car ξ induit un A-isomorphisme

$$S \backslash A_d \xrightarrow{\sim} X.$$

Proposition 5.1.4. Sous les hypothèses de (5.1.3)

(i) Si X admet une section la classe $c(X) \in H^2(S(X))$ de la gerbe $\mathbf{X}$ de (5.1.1) est neutre.

(ii) Pour que $c(X)$ soit neutre il faut et il suffit qu'il existe un A-torseur Y et un A-morphisme $m: Y \to X$.

(iii) Soient Y un A-torseur et $m: Y \to X$ un A-morphisme et S le faisceau des A-automorphismes i de Y tels que $mi = m$. L'inclusion s:

$S \to \mathbf{ad}(Y)$ représente le morphisme de liens $s(X)\colon S(X) \to \mathbf{lien}(A)$. De plus, m induit un A-isomorphisme

$$S \backslash Y \xrightarrow{\sim} X. \tag{1}$$

(iv) Sous les hypothèses de (iii), pour que X admette une section il faut et il suffit que le $\mathbf{ad}(Y)$-torseur à gauche Y provienne par extension du groupe structural d'un S-torseur à gauche.

On a (i) par (5.1.3.2) et (ii) par définition de $\mathbf{X}$. Sous les conditions de (iii), S n'est autre que le faisceau des automorphismes de (Y, m) dans la gerbe $\mathbf{X}$ et $\mathbf{ad}(Y)$ le faisceau des automorphismes de Y dans $\mathrm{TORS}(T; A)$; d'après (2.2.5), on a donc des isomorphismes canoniques

$$\mathbf{lien}(S) \xrightarrow{\sim} S(X) \quad \text{et} \quad \mathbf{lien}(\mathbf{ad}(Y)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{lien}(A),$$

le second étant celui de (3.2.5), De plus, le morphisme $s\colon S \to \mathbf{ad}(Y)$ est celui qu'induit le morphisme de gerbes $f\colon X \to \mathrm{TORS}(\mathbf{T}; A)$, $(Y, m) \rightsquigarrow Y$; d'après (2.2.5.2), il représente donc le morphisme $s(X)\colon S(x) \to \mathbf{lien}(A)$ qui lie f. La seconde assertion de (iii) est évidente, étant entendu que le quotient $S \backslash X$ est défini en faisant opérer S grâce aux opérations de $\mathbf{ad}(Y)$ sur Y. D'où (iv) par (III 3.2.1 (ii)).

5.2. Bitorseurs

5.2.1. Dans tout ce numéro, $\mathbf{T}$ désigne un $\mathbf{U}$ topos et A un groupe de $\mathbf{T}$. Nous allons interpréter géometriquement certains termes des suites exactes de cohomologies attachées aux suites exactes de groupes de $\mathbf{T}$

$$1 \to Z \xrightarrow{z} A \xrightarrow{p} \mathbf{Int}(A) \to 1, \tag{1}$$

où Z est le centre de A, et

$$1 \to \mathbf{Int}(A) \xrightarrow{i} \mathbf{Aut}(A) \xrightarrow{j} \mathbf{Autex}(A) \to 1, \tag{2}$$

où $\mathbf{Aut}(A)$ est le faisceau des automorphismes de A et où, d'après (1.1.7. (ii)), $\mathbf{Autex}(A)$ s'identifie au faisceau des automorphismes du lien

$$L = \mathbf{lien}(A) \tag{3}$$

représenté par A.

5.2.2. Nous désignerons par

$$\mathrm{Bit}(A) \tag{1}$$

le groupe des classes à isomorphisme près de *A-bitorseurs* (III 1.5.3), la loi de composition étant définie grâce au produit contracté (III 1.3.1 à 5); l'élément unité est donc la classe du *bitorseur trivial* A_b obtenu en faisant opérer A sur lui-même par les translations à gauche et à droite. Nous

désignerons par

$$\mathrm{Bit}(A)_0 \quad (\text{resp. } \mathrm{Bit}(A)_n) \tag{2}$$

le *sous-groupe des classes* de A-bitorseurs qui sont *localement isomorphes* à A_b (resp. qui sont *neutres*, c'est-à-dire admettent une section). On pose

$$\mathrm{Bit}(A)_{0\,n} = \mathrm{Bit}(A)_0 \cap \mathrm{Bit}(A)_n. \tag{3}$$

5.2.3. Commençons par interpréter les termes de la suite exacte

$$H^0(A) \xrightarrow{p^{(0)}} H^0(\mathsf{Int}(A)) \xrightarrow{d} H^1(Z) \xrightarrow{z^{(1)}} H^1(A) \xrightarrow{p^{(1)}} H^1(\mathsf{Int}(A)) \tag{1}$$

associée à (5.2.1 (1)) par (III 3.4.3).

Proposition 5.2.4.

(i) on a un isomorphisme canonique de groupes abéliens

$$\mathrm{Bit}(A)_0 \xrightarrow{\sim} H^1(Z). \tag{1}$$

(ii) L'application

$$\mathrm{Bit}(A)_0 \to H^1(A) \tag{2}$$

induite par (1) et $z^{(1)}\colon H^1(Z) \to H^1(A)$ est obtenue en associant à la classe d'un bitorseur celle du torseur à droite sous-jacent.

(iii) Le cobord d de (5.2.3 (1)) induit un isomorphisme de groupes abéliens

$$H^0(\mathsf{Int}(A))/H^0(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bit}(A)_{0\,n}. \tag{3}$$

(iv) L'application (2) induit un *isomorphisme* entre $\mathrm{Bit}(A)_0/\mathrm{Bit}(A)_{0\,n}$ et le noyau du morphisme d'ensembles pointés $p^{(1)}$.

5.2.4.1. Soit G la sous-gerbe pleine du champ des A-bitorseurs (III 1.5.6), engendrée par le bitorseur trivial. Par définition, $\mathrm{Bit}(A)_0$ est l'ensemble des classes à isomorphisme près d'objets de la fibre G_e en l'objet final e de T. Par ailleurs, le morphisme $z\colon Z \to A$ et les translations à gauche de A identifient Z au faisceau des automorphismes de A_b dans G. D'après (III 2.5.2), il en résulte une *bijection* (1), la bijection inverse étant obtenue en associant à un Z-torseur X le A-bitorseur $X \overset{Z}{\wedge} A_b$ obtenu en tordant A_b par X. D'après le «principe de compatibilité» (III 2.3.11), le torseur à droite sous-jacent à $X \overset{Z}{\wedge} A_b$ est le produit contracté $X \overset{Z}{\wedge} A$ et les opérations de A à gauche sont obtenues par passage au quotient à partir des translations à gauche de A. Il en résulte immédiatement que (1) est un morphisme de groupes et aussi l'assertion (ii).

5.2.4.2. D'après (III 3.4.3), le cobord d de (5.2.3 (1)) est un morphisme de groupes dont l'image est l'ensemble des éléments de $H^1(Z)$ que $z^{(1)}$

applique sur l'élément unité de $H^1(A)$. Ce qui prouve (iii), compte tenu de (ii). Enfin on déduit (iv) de (III 3.4.3 (iii)).

5.2.4.3. Grâce au produit contracté, *le groupe* $\mathrm{Bit}(A)$ *opère à droite sur* $H^1(A)$. Le calcul de l'isomorphisme inverse de (1) donné plus haut, montre que les opérations de $H^1(Z)$ sur $H^1(A)$ ainsi obtenues sont celles décrites dans (III 3.4.4).

Pour avoir plus d'information, il nous faut indiquer la relation entre morphismes de gerbes triviales et bitorseurs.

Proposition 5.2.5. Soient G et G' deux gerbes, s et s' des sections de G et G' et posons $A = \mathbf{Aut}(s)$, $A' = \mathbf{Aut}(s')$.

(i) Pour toute E-équivalence $m: G \to G'$, on a un A'-A-*bitorseur*

$$P_m = \mathbf{Isom}(ms, s') \tag{1}$$

et le morphisme m est lié par l'isomorphisme $\mathbf{lien}(A) \xrightarrow{\sim} \mathbf{lien}(A')$ défini par P_m (3.2.5 (1)).

(ii) Soient $G \xrightarrow{m} G' \xrightarrow{n} G''$ des équivalences de gerbes, s'' une section de G'' et posons $A'' = \mathbf{Aut}(s'')$. On a un isomorphisme canonique de A''-A-bitorseurs

$$P_n \overset{A'}{\wedge} P_m \xrightarrow{\sim} P_{nm}, \tag{2}$$

où $P_n = \mathbf{Isom}(ns', s'')$ et où $P_{nm} = \mathbf{Isom}(nms, s'')$.

(iii) On a une équivalence de catégories

$$\mathbf{Equ}(G, G') \xrightarrow{\approx} \mathbf{Bitors}(A', A), \qquad m \rightsquigarrow P_m, \tag{3}$$

où $\mathbf{Equ}(G, G')$ est la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Cart}(G, G')$ dont les objets sont les E-équivalences $G \to G'$ et où $\mathbf{Bitors}(A', A)$ désigne la catégorie des A'-A-bitorseurs.

5.2.5.1. On fait opérer A' à gauche sur P_m par composition des morphismes et A à droite grâce à l'isomorphisme $A \xrightarrow{\sim} \mathbf{Aut}(ms)$ induit par m. Ceci dit, (i) résulte de (2.2.5.2) (3.2.5). L'isomorphisme (2) est obtenu par passage au quotient à partir de l'accouplement évident

$$\mathbf{Isom}(ns', s'') \times \mathbf{Isom}(ms, s') \to \mathbf{Isom}(nms, s'').$$
$$(u, v) \mapsto u \cdot n(v).$$

5.2.5.2. Prouvons (iii). D'après (III 2.2.2), on a une équivalence de catégories $f \rightsquigarrow f(s)$ entre $\mathbf{Cart}(G, G')$ et la catégorie des A-objets à opérateurs de G'. De plus, pour que f soit une équivalence, il faut et il suffit

que le morphisme

$$A \to \mathbf{Aut}(f(s)), \qquad A = \mathbf{Aut}(s), \tag{4}$$

induit par f soit un isomorphisme (2.2.6). Enfin, d'après (III 2.2.6), on a une équivalence, $x \rightsquigarrow \mathbf{Isom}(x, s')$, entre la catégorie des A-objets à opérateurs de G' et celle des B-A-biobjets X de T tels que X soit un B-torseur. D'où (iii), par (III 1.5.1).

5.2.5.3. Soient P un A'-A-bitorseur et

$$\begin{aligned} &\Theta_P\colon \mathrm{TORS}(\mathsf{T}; A) \xrightarrow{\approx} \mathrm{TORS}(\mathsf{T}; A') \\ &\Theta_P(Q) = Q \overset{A}{\wedge} P^0 \approx \mathbf{Isom}_A(P, Q) \end{aligned} \tag{5}$$

l'équivalence de (III 2.6.1). Le bitorseur associé à Θ_P par (iii) n'est autre que P, ce qui indique comment construire un foncteur quasi-inverse de (3).

5.2.5.4. En particulier, *la catégorie des auto-équivalences de la gerbe* $\mathrm{TORS}(\mathsf{T}; A)$ *des A-torseurs s'interprète à équivalence près comme la catégorie des A-bitorseurs:* à une auto-équivalence f, on associe le A-bitorseur $f(A_d)^0$. Cette remarque fournit la clef de la proposition (5.2.7).

Corollaire 5.2.6. Soient (C, Q, B) et (B, P, A) deux bitorseurs et (C, R, A), $R = Q \overset{B}{\wedge} P$ leur produit contracté. Désignons par

$$\pi(P)\colon \mathbf{lien}(A) \xrightarrow{\sim} \mathbf{lien}(B) \tag{1}$$

l'isomorphisme de (3.2.5 (1)) et par $\pi(Q)$ et $\pi(R)$ les analogues relatifs à Q et R. On a

$$\pi(R) = \pi(Q)\,\pi(P), \qquad R = Q \overset{B}{\wedge} P. \tag{2}$$

Cela peut se prouver directement, mais il est plus commode d'interpréter P, Q et R comme des morphismes de gerbes triviales liés par $\pi(P)$, $\pi(Q)$ et $\pi(R)$ et d'appliquer (5.2.5 (ii)).

Proposition 5.2.7. Soit A un groupe de T.

(i) On a une suite exacte d'ensembles pointés

$$1 \to \mathrm{Bit}(A)_0 \xrightarrow{i} \mathrm{Bit}(A) \xrightarrow{\pi} H^0(\mathbf{Autex}(A)) \xrightarrow{d''d'} H^2(Z) \tag{1}$$

où i est l'inclusion, où π est le morphisme de groupes obtenu en associant à un A-bitorseur P l'automorphisme $\pi(P)$ de $\mathbf{lien}(A)$ (5.2.6) et où le morphisme croisé $d''d'$ (cf. (iii)) est le composé des opérateurs cobords

$$H^0(\mathbf{Autex}(A)) \xrightarrow{d'} H^1(\mathbf{Int}(A)) \xrightarrow{d''} H^2(Z) \tag{2}$$

associés aux quotients (1) et (2) de (5.2.1).

(ii) Posons

$$D(a)=d''d'(a^{-1}),\quad a\in H^0(\mathbf{Autex}(A)),\quad D(a)\in H^2(Z). \tag{3}$$

On a

$$D(a)\cdot 1=a^{(2)}(1),\quad a\in H^0(\mathbf{Autex}(A)), \tag{4}$$

où 1 désigne la classe unité de $H^2(A)$ et $a^{(2)}$ l'automorphisme de $H^2(A)$ induit par l'automorphisme a de $\mathbf{lien}(A)$ (3.1.6.2).

(iii) On a

$$D(ab)=D(a)\cdot a(D(b)),\quad a,b\in H^0(\mathbf{Autex}(A)), \tag{5}$$

où, pour tout $x\in H^2(Z)$, on désigne par $a(x)$, l'image de x par l'automorphisme de $H^2(Z)$ induit par a.

5.2.7.1. Montrons que $\mathrm{Bit}(A)_0$ est le noyau de π. Soit P un A-bitorseur. D'après (5.2.5), pour que $\pi(P)=1$ il faut et il suffit que l'auto-équivalence Θ_P de TORS $(\mathsf{T}; A)$ soit liée par l'identité de $\mathbf{lien}(A)$. D'après (2.3.4), ceci signifie que Θ_P est localement isomorphe au foncteur identique, autrement dit que P est localement isomorphe au bitorseur trivial, autrement dit que sa classe appartient à $\mathrm{Bit}(A)_0$. Achevons de prouver (i) en admettant provisoirement (ii). Soit $a\in H^0(\mathbf{Autex}(A))$. D'après (ii) et (3.3.3 (2)), $d''d'(a)=D(a^{-1})$ est la classe de la gerbe

$$\mathrm{HOM}_L(\mathsf{T}A, a(\mathsf{T}A))=\mathrm{HOM}_a(\mathsf{T}A, \mathsf{T}A),\quad L=\mathbf{lien}(A), \tag{6}$$

où $\mathsf{T}A=\mathrm{TORS}(\mathsf{T}; A)$ et où $a(\mathsf{T}A)$ est la L-gerbe obtenue en faisant opérer L sur $\mathsf{T}A$ grâce à $a: L\xrightarrow{\sim} L$ [de telle sorte que la classe de $a(\mathsf{T}A)$ soit égale à $(a^{-1})^{(2)}(1)$, (3.1.6.1)]. Pour que $d''d'(a)=1$ il est donc nécessaire et suffisant qu'il existe un a-morphisme de gerbes f: $\mathsf{T}A\to\mathsf{T}A$, c'est-à-dire, par (5.2.5), un A-bitorseur P tel que $\pi(P)=a$.

5.2.7.2. Montrons que (ii) implique (iii). Le groupe $H^0(\mathbf{Autex}(A))$ opère sur $\mathbf{lien}(A)$ et Z, donc sur leurs H^2. Par ailleurs, d'après (3.3.3) et (3.3.4), le couple $(H^2(Z), H^2(A))$ est un torseur du topos des $H^0(\mathbf{Autex}(A))$-ensembles. Enfin (ii) signifie que $D(a)$ est *le cocycle* de $H^0(\mathbf{Autex}(A))$ à valeurs dans $H^2(Z)$ associé à ce torseur et à $1\in H^2(A)$ par (III 3.7.1 (4)).

5.2.7.3. Prouvons (ii). D'après (3.3.3 (2)), il suffit de montrer que, pour tout $a\in H^0(\mathbf{Autex}(A))$, $d''d'(a)$ est la classe de la gerbe (6). Or, d'après (5.2.5), on a une équivalence

$$\mathrm{HOM}_a(\mathsf{T}A, \mathsf{T}A)\xrightarrow{\approx} B(a),\quad f\rightsquigarrow f(A_d), \tag{7}$$

où $B(a)$ désigne la gerbe des A-bitorseurs P tels que $\pi(P)=a$. Par ailleurs, on sait que $H^1(\mathbf{Int}(A))$ classifie les représentants de $L=\mathbf{lien}(A)$ (3.2.6 (3)) et il est clair que $d'(a)$ est la classe de représentant (A, a^{-1}) de L, car le

$\mathsf{Int}(A)$-torseur $\mathsf{Isom}((A, id_L), (A, a^{-1}))$ est égal à l'image inverse de a par $\mathsf{Aut}(A) = \mathsf{Autex}(A)$. Donc (ii) résulte de la proposition suivante, car la structure de gerbe dont est munie $B(a)$ par (5.2.8) coïncide avec celle obtenue par l'équivalence (7) et par (2.3.2 (iii)), comme on voit aisément (cf. 2.3.2.4).

Proposition 5.2.8. Soit $(B, u : \mathsf{lien}(B) \xrightarrow{\sim} \mathsf{lien}(A))$, un représentant de $\mathsf{lien}(A)$. L'image de la classe $b \in H^1(\mathsf{Int}(A))$ de (B, u) (3.2.6 (3)) par le cobord

$$d'' : H^1(\mathsf{Int}(A)) \to H^2(Z) \tag{1}$$

attaché à (5.2.1 (1)) est la classe de la gerbe des B-A-bitorseurs P tels que $\pi(P) = u^{-1}$, sur laquelle Z opère grâce aux isomorphismes

$$U : Z \xrightarrow{\sim} \mathsf{Aut}(P), \qquad U(z)(p) = pz. \tag{2}$$

En effet, d'après (4.2.2) et (2.5.10), $d''(b)$ est la classe de la gerbe K des relèvements de (B, u) relativement au morphisme de gerbes

$$\mathrm{TORS}(\mathsf{T}, A) \to \mathrm{REP}(L), \qquad P \rightsquigarrow (\mathsf{ad}(P), \pi(P)^{-1}), \tag{3}$$

de (3.2.2 (2)), où $\pi(P)$ est l'automorphisme de (3.2.5) et (5.2.6). Or cette gerbe est *isomorphe* à celle de l'énoncé. En effet, un objet est un A-torseur P muni d'un isomorphisme de Groupes i: $\mathsf{ad}(P) \xrightarrow{\sim} B$ tel que $ui = \pi(P)^{-1}$, et i fait de P un B-A-bitorseur P' tel que $\pi(P') = u^{-1}$. Enfin la structure de Z-gerbe de K est bien celle de l'énoncé. En effet, d'après (2.5.6 (iii ter)), il suffit de vérifier que le morphisme $K \to \mathrm{TORS}(\mathsf{T}; A)$, $(P, i) \rightsquigarrow P$, est lié par $\mathsf{lien}(Z) \to \mathsf{lien}(A)$, ce qui résulte de (III 1.5.6 (i)).

Proposition 5.2.9. Pour tout $m \in H^0(\mathsf{Aut}(A))$, désignons par A_m le A-bitorseur obtenu en faisant opérer A sur lui-même à gauche (resp. droite) par

$$x \mapsto ax \quad (\text{resp. } x \mapsto x\,m(a)). \tag{1}$$

(i) L'application qui, à tout $m \in H^0(\mathsf{Aut}(A))$, associe la classe du bitorseur A_m est un morphisme de groupes

$$H^0(\mathsf{Aut}(A)) \to \mathrm{Bit}(A). \tag{2}$$

De plus, $\pi(A_m)$ est l'image de m par

$$H^0(\mathsf{Aut}(A)) \to H^0(\mathsf{Autex}(A)).$$

(ii) Le morphisme (2) induit des isomorphismes de groupes

$$H^0(\mathsf{Aut}(A))/H^0(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bit}(A)_n, \tag{3}$$

$$H^0(\mathsf{Aut}(A))/H^0(\mathsf{Int}(A)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bit}(A)_n/\mathrm{Bit}(A)_{0\,n}. \tag{4}$$

La première assertion est laissée au lecteur qui utilisera (3.2.5 (3)). Il est clair que l'image de (2) est contenue dans $\mathrm{Bit}(A)_n$. Inversement, le torseur sous-jacent à un bitorseur neutre P est isomorphe à A_d et les opérations de A à gauche sur P fournissent un automorphisme m de A, d'où l'on déduit que P est isomorphe à A_m. Pour prouver que (3) est un isomorphisme, il suffit de prouver que le noyau de (2) est l'image de

$$H^0(A) \to H^0(\mathbf{Aut}(A)).$$

Ceci est clair. En effet, si m et n sont deux automorphismes de A, un isomorphisme $A_m \xrightarrow{\sim} A_n$ est caractérisé par une section p de A vérifiant $m(x) = p\, n(x)\, p^{-1}$, $x \in A$, à savoir l'image de la section unité. Cette remarque montre également que, pour que A_m soit localement isomorphe au bitorseur trivial, il faut et il suffit que m soit localement de la forme $\mathrm{Int}(p)$, donc appartienne à $H^0(\mathbf{Int}(A))$, ce qui achève la démonstration.

Remarque 5.2.10. On notera que, d'après (5.2.7 (i)), le groupe $\mathrm{Bit}(A)_0$ est invariant dans $\mathrm{Bit}(A)$; mais $\mathrm{Bit}(A)_n$ ne l'est pas toujours. Par ailleurs, l'image de π: $\mathrm{Bit}(A) \to H^0(\mathbf{Autex}(A))$ est, d'après (2.5.7), *le stabilisateur de la classe unité* $1 \in H^2(A)$ et contient d'après (2.5.7 (i)) et (5.2.9 (i)) le groupe $\mathrm{Bit}(A)_n/\mathrm{Bit}(A)_{0\,n}$, c'est-à-dire l'image de $H^0(\mathbf{Aut}(A))$.

Chapitre V

Effet d'un morphisme de sites sur la cohomologie

§ 1. Changement de site

1.1. Image inverse de faisceaux de groupes

1.1.1. Dans tout ce paragraphe, on fixe un morphisme de U-sites

$$f\colon E' \to E \tag{1}$$

dont le foncteur sous-jacent est noté

$$u\colon E \to E', \quad \text{(ou encore } f^{-1}\text{)}, \quad (0\,3.1). \tag{2}$$

De plus, on suppose que le foncteur image inverse de faisceaux d'ensembles f^* est choisi de telle sorte que le diagramme ci-dessous soit *commutatif*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & E' \\ {\scriptstyle\varepsilon}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varepsilon'} \\ \tilde{E} & \xrightarrow[f^*]{} & \tilde{E}' \end{array} \tag{3}$$

où ε et ε' sont les foncteurs de (0 2.5 (3)).

1.1.2. Pour tout $S \in \mathrm{Ob}(\mathrm{E})$, la composition avec le foncteur

$$u_{/S}\colon E_{/S} \to E'_{/S'}, \quad u_{/S}(X/S) = \big(u(X)/u(S)\big), \quad S' = u(S), \tag{1}$$

induit sur les catégories de faisceaux de groupes un foncteur appelé image directe

$$\mathsf{Fagr}(E'_{/S'}) \to \mathsf{Fagr}(E_{/S}) \tag{2}$$

qui, par définition, (II 3.4.1), est un foncteur entre les fibres *des champs scindés des faisceaux de groupes*

$$\mathrm{FAGRSC}(E')_{S'} \to \mathrm{FAGRSC}(E)_S. \tag{3}$$

Il est immédiat que les foncteurs (3) sont compatibles avec la localisation, c'est-à-dire qu'ils définissent *un morphisme de champs scindés*

$$\mathsf{f}^{\mathsf{gr}}_*\colon \mathrm{FAGRSC}(E') \underset{E'}{\times} E \to \mathrm{FAGRSC}(E). \tag{4}$$

Lemme 1.1.3. Le morphisme de champs (4) admet un adjoint à gauche

$$\mathbf{f}^*_{\mathbf{gr}}\colon \mathrm{FAGRSC}(E)\to \mathrm{FAGRSC}(E')\underset{E'}{\times} E \tag{1}$$

tel que, pour tout $S\in\mathrm{Ob}(E)$, le foncteur induit par (1) sur les fibres en S

$$\mathsf{Fagr}(E_{/S})\to \mathsf{Fagr}(E'_{/S'}),\qquad S'=u(S), \tag{2}$$

soit le foncteur image inverse de faisceaux de groupes défini par le morphisme de sites $E'_{/S'}\dashrightarrow E_{/S}$.

D'après (I 1.11.3), l'existence des foncteurs (2), qui est assurée par [SGA 4 III §3.2.5], assure celle d'un E-adjoint à gauche (1) de (4). De plus, (1) est E-cartésien, (i.e. un morphisme de champs), parce que les foncteurs (2) sont compatibles avec la localisation, comme on voit aisément. D'où la conclusion. On notera que, comme adjoint, le morphisme (1) est caractérisé à isomorphisme unique près parmi les morphismes de champs, (loc. cit.).

Remarque 1.1.4. Le foncteur image inverse $f^*\colon \tilde{E}\to\tilde{E}'$ commute aux limites projectives finies; il transforme donc un S-groupe G de E, $S\in\mathrm{Ob}(\tilde{E})$, en un $f^*(S)$-groupe $f^*(G)$ de $\tilde{E}'$. D'où un morphisme de $\tilde{E}$-champs noté

$$\mathbf{f}^*_{\mathbf{gr}}\colon \mathrm{GREL}(\tilde{E})\to \mathrm{GREL}(\tilde{E}')\underset{\tilde{E}'}{\times}\tilde{E},\qquad \text{(II 3.4.11.5)}, \tag{1}$$

où le produit fibré est pris au changement de base $f^*\colon \tilde{E}\to\tilde{E}'$. Grâce à la commutativité du diagramme (1.1.1 (3)) on en déduit par changement de base un morphisme de E-champs

$$\mathbf{f}^*_{\mathbf{gr}}\colon \mathrm{FAGR}(E)\to \mathrm{FAGR}(E')\underset{E'}{\times} E,\qquad \text{(II 3.4.12)}, \tag{2}$$

du champ des faisceaux de groupes sur E dans l'image directe par le morphisme de sites $f\colon E'\to E$ du champ des faisceaux de groupes sur E'. *Ce morphisme de champs fournit une description «géométrique»* de (1.1.2 (4)). Plus précisément, d'après [SGA 4 III §3.2.5], la formation de l'image inverse est compatible avec celle du faisceau d'ensembles sous-jacent et il est aisé d'en déduire que l'on a *un isomorphisme canonique* de morphismes de champs α rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{FAGR}(E) & \xrightarrow{\mathbf{f}^*_{\mathbf{gr}}} & \mathrm{FAGR}(E')\underset{E'}{\times}E \\ \downarrow & \overset{\alpha}{\swarrow} & \downarrow \\ \mathrm{FAGRSC}(E) & \xrightarrow[\mathbf{f}^*_{\mathbf{gr}}]{} & \mathrm{FAGRSC}(E')\underset{E'}{\times}E \end{array} \tag{3}$$

où les horizontales sont les foncteurs (2) et (1.1.3 (1)) et les verticales les *E-équivalences* de (II 3.4.12 (2)).

Remarque 1.1.5. Le foncteur image inverse de faisceaux de groupes

$$f_{\mathrm{gr}}^{*}\colon \mathsf{Fagr}(E)\to \mathsf{Fagr}(E') \tag{1}$$

[défini comme l'adjoint à gauche du foncteur induit par la composition avec $u\colon E\to E'$]: s'interprète (en termes de groupes de la catégorie des faisceaux) comme le foncteur

$$\mathrm{GREL}(E)_e\to \mathrm{GREL}(E')_{e'} \tag{2}$$

induit par (1.1.4 (1)) sur les catégories fibres en les objets finaux e et e' des topos $\tilde{E}$ et $\tilde{E}'$. Grâce aux équivalences

$$\mathsf{Fagr}(E)\xrightarrow{\approx}\varprojlim(\mathrm{FAGRSC}(E)/E),\quad \text{(idem pour } E'), \tag{3}$$

de (II 3.4.2 (i)), il *s'identifie également au foncteur induit par* (1.1.3 (1)) *sur les catégories de sections cartésiennes*. En effet, il est immédiat que les foncteurs adjoints $(\mathsf{f}_{\mathrm{gr}}^{*}, \mathsf{f}_{*}^{gr})$ de (1.1.3) induisent sur les catégories de sections cartésiennes un couple de foncteurs adjoints et il suffit de remarquer que le *foncteur* induit par le *morphisme de champs* f_{*}^{gr} n'est autre que le foncteur image directe $\mathsf{Fagr}(E')\to\mathsf{Fagr}(E)$ défini par la composition avec $u\colon E\to E'$.

1.2. Image inverse de liens

Proposition 1.2.1. Soit $f\colon E'\to E$ un morphisme de U-sites. Il existe *un morphisme de E-champs*

$$\mathsf{f}_{\mathrm{li}}^{*}\colon \mathrm{LIEN}(E)\to \mathrm{LIEN}(E')\times_{E'}E, \tag{1}$$

et un isomorphisme de morphismes de champs rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{FAGRSC}(E) & \xrightarrow{\mathsf{f}_{\mathrm{gr}}^{*}} & \mathrm{FAGRSC}(E')\times_{E'}E \\ {\scriptstyle \mathsf{lien}(E)}\downarrow & \swarrow\,\Lambda & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{lien}(E')\times_{E'}E} \\ \mathrm{LIEN}(E) & \xrightarrow[\mathsf{f}_{\mathrm{li}}^{*}]{} & \mathrm{LIEN}(E')\times_{E'}E \end{array} \tag{2}$$

où $\mathsf{f}_{\mathrm{gr}}^{*}$ est le morphisme de champs de (1.1.3 (1)) et où la verticale de droite est déduite de $\mathsf{lien}(E')\colon \mathrm{FAGRSC}(E')\to\mathrm{LIEN}(E')$, (IV 1.1.5 (5)), par le changement de base $u\colon E\to E'$ sous-jacent à $f\colon E'\to E$.

1.2.1.1. Par la «propriété universelle» du *champ des liens sur E*, (IV 1.1.8), il suffit de prouver que le composé $(\mathsf{lien}(E')\times_{E'}E)\cdot f_{\mathrm{gr}}^{*}$ transforme tout automorphisme intérieur en une flèche identique. Pour cela il suffit de noter que $\mathsf{f}_{\mathrm{gr}}^{*}$ transforme tout automorphisme intérieur en un automorphisme intérieur, ce qui est immédiat, (car $f^{*}\colon E\to E'$ commute aux limites projectives finies).

1.2.1.2. Par (IV 1.1.8), la donnée d'un isomorphisme Λ caractérise le morphisme de champs $\mathrm{f}_{\mathrm{li}}^*$ *à isomorphisme unique près.*

1.2.1.3. Par passage aux catégories de sections cartésiennes, le diagramme (1.2.1 (2)) fournit un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim(\mathrm{FAGRSC}(E)/E) & \longrightarrow & \varprojlim(\mathrm{FAGRSC}(E')\times_{E'}E/E) \\ \downarrow & \overset{\lambda'}{\nearrow} & \downarrow \\ \varprojlim(\mathrm{LIEN}(E)/E) & \longrightarrow & \varprojlim(\mathrm{LIEN}(E')\times_{E'}E/E), \end{array} \tag{3}$$

où λ' est un isomorphisme de foncteurs. D'après (I 1.6.2.1), on a un carré *commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim(\mathrm{FAGRSC}(E')\underset{E'}{\times}E/E) & \xleftarrow{\approx} & \varprojlim(\mathrm{FAGRSC}(E')/E') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varprojlim(\mathrm{LIEN}(E')\underset{E'}{\times}E/E) & \xleftarrow{\approx} & \varprojlim(\mathrm{LIEN}(E')/E') \end{array} \tag{3 bis}$$

où les verticales sont induites par le morphisme de E'-champs $\mathsf{lien}(E')$ et où les horizontales, qui sont induites par le changement de base $E\dashrightarrow E'$ sous-jacent à $f\colon E'\to E$, sont des *équivalences* d'après (II 3.1.5.5). Par définition, la catégorie des liens est la catégorie des sections cartésiennes du champ des liens. En interprétant les horizontales supérieures de (3) et (3 bis) grâce à (1.1.5), on trouve donc un foncteur

$$f_{\mathrm{li}}^*\colon \mathsf{Lien}(E)\to\mathsf{Lien}(E') \tag{4}$$

appelé *foncteur image inverse de liens* et un isomorphisme de foncteurs λ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Fagr}(E) & \xrightarrow{f_{\mathrm{gr}}^*} & \mathsf{Fagr}(E') \\ {\scriptstyle \mathsf{lien}(E)}\downarrow & \overset{\lambda}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{lien}(E')} \\ \mathsf{Lien}(E) & \xrightarrow[f_{\mathrm{li}}^*]{} & \mathsf{Lien}(E'). \end{array} \tag{5}$$

De plus, le couple $(f_{\mathrm{li}}^*, \lambda)$ est déterminé par $(\mathrm{f}_{\mathrm{li}}^*, \Lambda)$ à isomorphisme unique près.

Définition 1.2.2. Soit $f\colon E'\dashrightarrow E$ un morphisme de U-sites.

(i) Soit $L\in\mathrm{Ob}(\mathrm{LIEN}(E)_S)$ un lien sur $S\in\mathrm{Ob}(E)$, (IV 1.1.6). On appelle *image inverse de* L par f l'image de $\mathrm{f}_{\mathrm{li}}^*(L)$ par l'isomorphisme canonique

$$(\mathrm{LIEN}(E')\underset{E'}{\times}E)_S\xrightarrow{\sim}\mathrm{LIEN}(E')_{S'},\qquad S'=u(S); \tag{1}$$

c'est donc un lien sur $S'\in\mathrm{Ob}(E')$.

(ii) Si L est un lien sur E, on appelle *image inverse* de L par f le lien $f_{\mathrm{li}}^*(L)$ sur E'.

1.2.2.1. Par définition, un lien L sur E est une section cartésienne du champ des liens $\mathrm{LIEN}(E)$. Son image inverse est, par définition (1.2.1.3) (I 1.6.2.1), la section cartésienne de $\mathrm{LIEN}(E')$ caractérisée par la condition que la section de $\mathrm{LIEN}(E')\times_{E'}E$ qui s'en déduit par le changement de base $E\to E'$ soit le composé

$$E \xrightarrow{L} \mathrm{LIEN}(E) \xrightarrow{f_{\mathrm{li}}^*} \mathrm{LIEN}(E')\times_{E'}E. \tag{2}$$

1.2.2.2. En résumé, on a défini (et caractérisé) l'image inverse d'un lien par la condition que cette notion soit locale et par la donnée, pour tout faisceau de groupes G sur E, d'un isomorphisme de liens sur E'

$$\lambda(G)\colon f_{\mathrm{li}}^*(\mathsf{lien}(G))\xrightarrow{\sim}\mathsf{lien}(f_{\mathrm{gr}}^*(G)),\quad (1.2.1.3\,(5)), \tag{3}$$

«fonctoriel et compatible avec la localisation».

Proposition 1.2.3. (Transitivité.) Soient deux morphismes de U-sites

$$E''\xrightarrow{g}E'\xrightarrow{f}E. \tag{1}$$

(i) On a un isomorphisme canonique de foncteurs

$$c_{f,g}\colon\ g_{\mathrm{li}}^*\cdot f_{\mathrm{li}}^*\to(fg)_{\mathrm{li}}^*. \tag{2}$$

(ii) Si $h\colon E'''\to E''$ est un morphisme de U-sites, on a

$$c_{f,gh}\cdot(c_{g,h}*f_{\mathrm{li}}^*)=c_{fg,h}\cdot(h_{\mathrm{li}}^**c_{f,g}). \tag{3}$$

1.2.3.1. Soient

$$E'''\xleftarrow{w}E''\xleftarrow{v}E'\xleftarrow{u}E \tag{4}$$

les foncteurs sous-jacents aux morphismes de sites f, g et h. Pour tout $S\in\mathrm{Ob}(E)$, désignons par S' et S'' ses images par les foncteurs u et vu. Il est immédiat que le foncteur composé

$$\mathsf{Fagr}(E''_{/S''})\to\mathsf{Fagr}(E'_{/S'})\to\mathsf{Fagr}(E_{/S}) \tag{5}$$

des foncteurs images directe induits par f et g, (1.1.2 (2)) est le foncteur image directe induit par le composé fg. En effet, par définition, le foncteur sous-jacent à fg est le composé vu.

1.2.3.2. Il en résulte trivialement que le morphisme de champs

$$(\mathsf{fg})_*^{\mathrm{gr}}\colon\ \mathrm{FAGRSC}(E'')\underset{E''}{\times}E\to\mathrm{FAGRSC}(E),\quad (1.1.2\,(4)), \tag{6}$$

est *égal* au composé

$$\mathsf{f}^{\mathrm{gr}}_{*} \cdot (\mathsf{g}^{\mathrm{gr}}_{*})_{*}, \tag{7}$$

où

$$(\mathsf{g}^{\mathrm{gr}}_{*})_{*}\colon \mathrm{FAGRSC}(E'') \underset{E''}{\times} E \to \mathrm{FAGRSC}(E') \underset{E'}{\times} E \tag{8}$$

est déduit de $\mathsf{g}^{\mathrm{gr}}_{*}$ par le changement de base $E \to E'$.

1.2.3.3. Par l'unicité de l'adjoint d'un morphisme de champs (I 1.11.1 (iii)), il en résulte un isomorphisme canonique de morphismes de champs

$$\mathsf{d}_{f,g}\colon (g^{*}_{\mathrm{gr}})_{*} \cdot f^{*}_{\mathrm{gr}} \xrightarrow{\sim} (\mathsf{f}\,\mathsf{g})^{*}_{\mathrm{gr}}, \tag{9}$$

car le morphisme de champs $(\mathsf{g}^{*}_{gr})_{*}$ déduit de $\mathsf{g}^{*}_{\mathrm{gr}}$ par le changement de base $E \to E'$ est adjoint de $(g^{\mathrm{gr}}_{*})_{*}$ d'après (I 1.11.1 (ii)).

1.2.3.4. Par la propriété universelle du champ des liens sur E, (IV 1.1.8), et la définition des morphismes de champs $\mathsf{f}^{*}_{\mathrm{li}}$, on en déduit un isomorphisme canonique de morphismes de champs

$$\mathsf{c}_{f,g}\colon (\mathsf{g}^{*}_{\mathrm{li}})_{*} \cdot \mathsf{f}^{*}_{\mathrm{li}} \xrightarrow{\sim} (\mathsf{f}\,\mathsf{g})^{*}_{\mathrm{li}}, \tag{10}$$

ce qui prouve et précise l'assertion (i), par passage aux catégories de sections cartésiennes.

1.2.3.5. L'assertion (ii) résulte, par la propriété universelle du champ des liens et par passage aux catégories de sections cartésiennes de la formule analogue à (3), relative aux $\mathsf{d}_{f,g}$ de (9), laquelle résulte de (I 1.11.1 (iii)).

1.2.3.6. En somme, on a fait en sorte que, pour tout faisceau de groupes G sur E, l'isomorphisme de transitivité de l'image inverse de faisceaux de groupes $g^{*}_{\mathrm{gr}} f^{*}_{\mathrm{gr}}(G) \xrightarrow{\sim} (f\,g)^{*}_{\mathrm{gr}}(G)$ représente l'isomorphisme de transitivité de l'image inverse de liens $g^{*}_{\mathrm{li}} f^{*}_{\mathrm{li}}(L) \xrightarrow{\sim} (f\,g)^{*}_{\mathrm{li}}(L)$, $L = \mathsf{lien}(G)$.

Proposition 1.2.4. (Passage au topos.) Soit E un U-site et soit

$$e\colon \tilde{E} \to E \tag{1}$$

le morphisme de U-sites dont le foncteur sous-jacent est $\varepsilon\colon E \to \tilde{E}$. Le foncteur image inverse de liens

$$\mathsf{e}^{*}_{\mathrm{li}}\colon \mathsf{lien}(E) \to \mathsf{Lien}(\tilde{E}) \tag{2}$$

est quasi-inverse de l'équivalence (IV 1.1.11 (8)).

D'apres (IV 1.1.11 (6)), on a une équivalence de $\tilde{E}$-champs

$$\mathrm{LIEN}(\tilde{E}) \to \mathrm{LIEN}(E)^* \tag{3}$$

qui, par passage aux sections cartésiennes, donne celle de (IV 1.1.11 (8)). Il suffit donc de prouver que le morphisme de champs sur E

$$\mathrm{LIEN}(E)^* \to \mathrm{LIEN}(\tilde{E}) \tag{4}$$

déduit de $\mathbf{e}_{\mathrm{li}}^*$ par la propriété universelle de l'image inverse de champs, (II 3.3.8), est quasi-inverse de (3). Or (3) est une $\tilde{E}$-équivalence; par la «propriété universelle» du champ des liens sur $\tilde{E}$, on est donc ramené à prouver que le morphisme de champs sur $\tilde{E}$

$$\mathrm{FAGRSC}(E)^* \to \mathrm{FAGRSC}(\tilde{E}) \tag{5}$$

déduit de $\mathbf{e}_{\mathrm{gr}}^*$ est quasi-inverse de celui qui a servi à définir (3), (cf. II 3.4.13). Par (II 3.3.3), il suffit de savoir que les foncteurs déduits par le changement de base $E \to \tilde{E}$ sont E-quasi-inverses. Or cela est immédiat car celui déduit de (5) est, par définition, le foncteur $\mathbf{e}_{\mathrm{gr}}^*$, l'autre est $\mathbf{e}_*^{\mathrm{gr}}$ d'après (II 3.4.13) et, d'après [SGA 4 III 3.4.5], les morphismes d'adjonction sont des isomorphismes.

Proposition 1.2.5. Soient $f\colon E' \to E$ un morphisme de U-sites et $u\colon L \to M$ un morphisme de liens sur E. Si u est injectif, surjectif, central ou normal (IV 1.2.6), il en est de même de son image inverse par f.

Par définition, u est localement représentable par un morphisme de faisceaux de groupes $a\colon A \to B$ qui est un monomorphisme, ou un épimorphisme ou qui est central, ou qui est normal. Ces conditions sont conservées par le foncteur image inverse de faisceaux de groupes comme on voit aisément (1.1.4); et l'image inverse de u est localement représentable par celle de a, d'où la conclusion.

On prouve de même que l'image inverse d'un *lien abélien* (resp. du lien *unité*) est un lien abélien (resp. le lien unité, (IV 1.2.3 et 4)).

Proposition 1.2.6. Le foncteur image inverse de liens respecte les produits finis et le conoyau d'un morphisme.

Soit $L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N$ un diagramme de liens tel que v soit le conoyau de u. Nous devons montrer que $f_{\mathrm{li}}^*(v)$ est le conoyau de $f_{\mathrm{li}}^*(u)$. D'après (IV 1.3.2 (ii)), il existe localement sur E un diagramme de faisceaux de groupes $A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C$ qui représente (u, v) et qui est tel que b soit le conoyau de a. D'où la conclusion, par (IV 1.3.1 (iii)), car le foncteur image inverse de groupes respecte les conoyaux. Démonstration analogue pour les produits finis en utilisant (IV 1.4.1).

On prouve de même le corollaire suivant.

Corollaire 1.2.7. L'image inverse par f: $E' \to E$ d'une suite exacte de liens $1 \to L \dashrightarrow M \to N$, (resp. $1 \to L \to M \to N \to 1$) est une suite exacte de liens, (IV 4.1.1).

Corollaire 1.2.8. Soient u: $C \dashrightarrow L$ et v: $C \to M$ deux morphismes de liens dont l'un (disons v) est *central*. On a un isomorphisme canonique de liens sur E'

$$f_{\mathrm{li}}^*(L) \overset{f_{\mathrm{li}}^*(C)}{\wedge} f_{\mathrm{li}}^*(M) \xrightarrow{\sim} f_{\mathrm{li}}^*(L \overset{C}{\wedge} M). \tag{1}$$

En effet, puisque v est central, le *produit contracté* $L \overset{C}{\wedge} M$ existe et c'est le conoyau du morphisme évident $C \to L \times M$, (IV 1.6.1.1). D'après (1.2.5), la même remarque vaut pour le premier terme de (1) et la conclusion résulte de (1.2.6).

Corollaire 1.2.9. Soient u: $L \dashrightarrow M$ un morphisme de liens sur E et C_u son centralisateur. Soient u': $L' \dashrightarrow M'$ et C'_u leurs images inverses par f: $E' \dashrightarrow E$. On a un morphisme *injectif* de liens sur E'

$$C'_u \to C_{u'}, \tag{1}$$

où $C_{u'}$ est le centralisateur de u'.

1.2.9.1. D'après (1.2.6), le morphisme structural c_u: $L \times C_u \to M$, (IV 1.5.1) détermine par image inverse un morphisme $L' \times C_{u'} \to M'$ qui, par la propriété universelle du centralisateur de u', définit le morphisme (1).

1.2.9.2. Il est immédiat que le composé de (1) et du morphisme naturel $\gamma_{u'}$: $C_{u'} \to M'$, (IV 1.5.2 (2)), est l'image inverse γ'_u: $C'_u \to M'$ du morphisme γ_u, (ce qui, en général, ne suffirait pas à déterminer (1), cf. (IV 1.5.1.2)). Or γ_u est injectif, donc aussi γ'_u, donc aussi (1).

1.2.9.3. Prenant pour u le morphisme identique d'un lien L sur E, on en déduit que l'on a un monomorphisme de liens abéliens sur E'

$$f_{\mathrm{li}}^*(C) \dashrightarrow C', \tag{2}$$

où C (resp. C') est le centre de L (resp. L'). On peut d'ailleurs noter que le morphisme γ_L: $C \to L$ est central, donc aussi son image inverse (1.2.5), ce qui assure que celle-ci se factorise canoniquement par C', (IV 1.5.3). Le morphisme ainsi obtenu n'est autre que (2), cf. (1.2.9.2).

1.2.9.4. On prendra garde que (1) et (2) *ne sont pas*, en général, des isomorphismes comme on voit en considérant le morphisme de topos

dont le foncteur image inverse est

$$\hat{E} \to \mathsf{U}\text{-ens}, \qquad F \rightsquigarrow F(S),$$

où E est une catégorie appartenant à U et où $S \in \mathrm{Ob}(E)$.

1.3. Image inverse d'un objet tordu

Lemme 1.3.1. Soient $f\colon E' \to E$ un morphisme de U-sites, F' un E'-champ et

$$F'_* = F' \underset{E'}{\times} E \tag{1}$$

l'image directe de F' par f, (II 3.1.5). On a un isomorphisme canonique de morphismes de E-champs

$$d(F')\colon \mathrm{AUT}(F'_*) \xrightarrow{\sim} \mathsf{f}^{\mathrm{gr}}_* \cdot \mathrm{AUT}(F')_*, \qquad \text{(II 3.5.2 (4))}, \tag{2}$$

où $\mathrm{AUT}(F')_*$ est déduit de $\mathrm{AUT}(F')$ par le changement de base $u\colon E \to E'$ sous-jacent à f.

1.3.1.1. Pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$, la première projection de F'_* induit un isomorphisme entre les catégories fibres

$$p_S\colon (F'_*)_S \xrightarrow{\sim} F'_{S'}, \qquad S' = f^{-1}(S), \tag{3}$$

et l'énoncé signifie simplement que, pour tout $x \in \mathrm{Ob}((F'_*)_S)$ on a un isomorphisme de faisceaux de groupes sur S

$$\mathsf{Aut}_S(x) \xrightarrow{\sim} f^{\mathrm{gr}}_*\big(\mathsf{Aut}_{S'}(x')\big), \qquad x' = p_S(x), \tag{4}$$

vérifiant des conditions de compatibilité évidentes.

1.3.1.2. D'après (II 3.1.5.3), on a un isomorphisme $\mathsf{Hom}_S(x, x) \to f_*(\mathsf{Hom}_{S'}(x', x'))$ qui est compatible avec les accouplements de composition et, puisque le foncteur image directe de faisceaux d'ensembles commute aux limites projectives finies, on en déduit un isomorphisme (4) qui convient, comme on voit aisément.

1.3.1.3. Soit encore $m'\colon F' \to G'$ un morphisme de E'-champs dont l'image directe par f est notée $m'_*\colon F'_* \to G'_*$. Pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$ et tout $x \in \mathrm{Ob}((F'_*)_S)$, le morphisme de faisceaux de groupes sur S induit par m'_*

$$\mathsf{Aut}_S(x) \to \mathsf{Aut}_S\big(m'_*(x)\big) \tag{5}$$

s'identifie par les isomorphismes (4) à l'image directe du morphisme de faisceaux de groupes sur $S' = f^{-1}(S)$ induit par m'

$$\mathsf{Aut}_{S'}(x') \to \mathsf{Aut}_{S'}\big(m'(x')\big), \qquad x' = p_S(x), \qquad \text{(1.3.1.1 (3))}. \tag{6}$$

En effet, ceci résulte immédiatement des définitions. En termes de morphismes de champs, on écrit savamment:

$$f_*^{\mathrm{gr}} * f_*^{\mathrm{ch}}(\mathrm{AUT}(m')) \cdot d(F') = d(G') * m_*'^{\mathrm{cart}} \cdot \mathrm{AUT}(m'_*), \qquad (7)$$

où les notations sont celles de (II 3.5.3).

Remarque 1.3.2. (Objets à opérateurs dans l'image directe d'un champ.) Sous les hypothèses de (1.3.1) pour tout $x \in \mathrm{Ob}(F'_{*S})$, $S \in \mathrm{Ob}(E)$, l'isomorphisme (1.3.1.1 (4)) induit, pour tout faisceau de groupes A sur S, une bijection

$$\mathrm{Hom}_{S,\,\mathrm{gr}}(A, \mathbf{Aut}_S(x)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{S',\,\mathbf{gr}}(f^*(A), \mathbf{Aut}_{S'}(x')), \qquad (1)$$

autrement dit une *bijection entre l'ensemble des structures de S-A-objets à opérateurs sur x et celles de S'-f*(A)-objets à opérateurs sur l'objet correspondant* $x' \in \mathrm{Ob}(F'_{S'})$, $S' = f^{-1}(S)$, qui donne naissance à une équivalence de catégories

$$\mathbf{Opér}(f^*(A), F') \xrightarrow{\approx} \mathbf{Opér}(A, F'_*), \quad \text{(III 2.2.1)}. \qquad (2)$$

Lemme 1.3.3. Sous les hypothèses de (1.3.1), soit

$$\varphi\colon\ F \to F'_* \qquad (1)$$

un morphisme de E-champs.

(i) On a un morphisme canonique de morphismes de champs

$$g(F)\colon\ \mathrm{f}_{\mathbf{gr}}^* \cdot \mathrm{AUT}(F) \to f_*^{\mathrm{ch}}(\mathrm{AUT}(F')) \cdot \varphi^{\mathrm{cart}}, \quad \text{(II 3.5.1) (1.3.1 (2))}. \qquad (2)$$

(ii) Si φ fait de F' une *image inverse* de F par f, le morphisme $g(F)$ est un isomorphisme.

1.3.3.1. Puisque $\mathrm{f}_{\mathbf{gr}}^*$ est adjoint à gauche du morphisme de champs $\mathrm{f}_{\mathbf{gr}}^*$, pour prouver (i), il suffit d'après (I 1.11.1 (iii)) de prouver que l'on a un morphisme

$$\mathrm{AUT}(F) \to \mathrm{f}_*^{\mathbf{gr}} \cdot \mathrm{AUT}(F')_* \cdot \varphi^{\mathrm{cart}} \qquad (3)$$

et l'on prend le composé

$$(d(F') * \varphi^{\mathrm{cart}}) \cdot \mathrm{AUT}(\varphi), \quad \text{(II 3.5.3 (2))}. \qquad (4)$$

1.3.3.2. Bien entendu, (i) signifie simplement que, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$ et tout $x \in \mathrm{Ob}(F_S)$, on a un morphisme de faisceaux de groupes sur $S' = f^{-1}(S)$,

$$\mathrm{f}_{\mathbf{gr}}^*(\mathbf{Aut}_S(x)) \to \mathbf{Aut}_{S'}(x'), \quad S' \in \mathrm{Ob}(E'), \qquad (5)$$

où $x' \in \mathrm{Ob}(F'_{S'})$ est l'image de $\varphi(x)$ par l'isomorphisme $(F'_*)_S \xrightarrow{\sim} F'_{S'}$ (1.3.1.1 (3)), vérifiant certaines conditions de compatibilité. La manière dont on a construit (1) assure que (5) est le morphisme qui correspond, par la «formule d'adjonction» au morphisme composé

$$\mathbf{Aut}_S(x) \xrightarrow{\mu} \mathbf{Aut}_S(\varphi(x)) \xrightarrow{\iota} \mathbf{f}^{\mathbf{gr}}_*(\mathbf{Aut}_{S'}(x')) \tag{6}$$

où μ est induit par $\varphi\colon F \to F'_*$ et où ι est l'isomorphisme (1.3.1.1 (4)).

1.3.3.3. Si φ fait de F' une *image inverse* de F par f, le morphisme (5) est un *isomorphisme*. En effet, en vertu de (1.1.5), le morphisme de faisceaux d'ensembles sous-jacents est induit par l'isomorphisme $f^*(\mathbf{Hom}_S(x, x)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Hom}_{S'}(x', x')$ de (II 3.2.8) et la conclusion en résulte aisément. Ceci prouve (ii).

Proposition 1.3.4. Soit $f\colon E' \to E$ un morphisme de sites et soit A un faisceau de groupes sur E.

(i) On a un morphisme de $\tilde{E}$-champs

$$\mathrm{TORS}(\tilde{E}; A) \to \mathrm{TORS}(\tilde{E}; f^*(A)) \times_{\tilde{E}'} \tilde{E}, \quad P \rightsquigarrow f^*(P), \tag{1}$$

et, par le changement de base $e\colon E \to \tilde{E}$, un morphisme de E-champs

$$\mathrm{TORS}(E; A) \to \mathrm{TORS}(E; f^*(A) \times_{E'} E. \tag{2}$$

(ii) Le morphisme (2) fait de la gerbe des $f^*(A)$-torseurs sur E' üne image inverse par $f\colon E \to E'$ de la gerbe des A-torseurs sur E.

1.3.4.1. Le foncteur image inverse de faisceaux d'ensembles $f^*\colon \tilde{E} \to \tilde{E}'$ commute aux limites projectives finies et aux épimorphismes, il transforme donc un A-torseur P sur S en un $f^*(A)$-torseur $f^*(P)$ sur $f^*(S)$. De plus, la localisation s'exprime comme un produit fibré (III 1.1.6), donc (1) est bien un morphisme de E-champs. Par transitivité de l'image directe de champs et commutativité de (1.1.1 (3)), on déduit bien de (1) un morphisme de E-champs (2).

1.3.4.2. Prouvons (ii). Par définition, il faut prouver que, pour tout E'-champ F', le foncteur composé.

$$\mathbf{Cart}(T', F') \to \mathbf{Cart}(T' \times_{E'} E, F' \times_{E'} E) \xrightarrow{\psi} \mathbf{Cart}(T, F' \times_{E'} E), \tag{3}$$

où $T' = \mathrm{TORS}(E', f^*(A))$, $T = \mathrm{TORS}(E, A)$ et où ψ est induit par (2), est *une équivalence de catégories*. En interprétant un E'-morphisme $T' \to F'$ comme un $f^*(A)$-objet à opérateurs de F' (III 2.2.2, 2.3.9), on voit aisément que le composé (2) s'interprète «à équivalence près» comme le foncteur de (1.3.2 (2)), ce qui prouve que (3) est une équivalence.

Proposition 1.3.5. Soient $f\colon E' \to E$ un morphisme de sites, C un E-champ, $(C', \varphi\colon C \to C' \times_{E'} E)$ une image inverse de C par f et A un faisceau de groupes sur E. On a un foncteur naturel

$$\mathsf{Opér}(A, C) \to \mathsf{Opér}(f^*(A), C'), \qquad x \rightsquigarrow x'. \tag{1}$$

Pour tout A-objet à opérateur x de C, le foncteur torsion de x' (III 2.3.9)

$$Tw_{x'}\colon \mathrm{TORS}(E', f^*(A)) \to C' \tag{2}$$

est l'image inverse du foncteur torsion de x.

Le foncteur (1) est défini comme le composé

$$\mathsf{Opér}(A, C) \xrightarrow{\alpha} \mathsf{Opér}(A, C' \underset{E'}{\times} E) \xrightarrow{\beta} \mathsf{Opér}(f^*(A), C') \tag{3}$$

où α est le foncteur induit par $\varphi\colon C \to C' \underset{E'}{\times} E$ et où β est un quasi-inverse de l'équivalence (1.3.2 (2)). La seconde assertion résulte de (1.3.4.2), car, par définition, $Tw_{x'}$ est le morphisme de champs correspondant à l'objet à opérateurs x' par l'équivalence

$$\mathsf{Cart}(T', F') \to \mathsf{Opér}(f^*(A), F').$$

1.4. Image inverse de gerbes

Lemme 1.4.1. Soient $f\colon E' \to E$ un morphisme de sites, F un E-champ et L un lien sur E.

(i) Pour toute action a de L sur F (IV 2.1.4),

$$a(x)\colon L(S) \to \mathsf{lien}(\mathsf{Aut}_S(x)), \qquad S \in \mathrm{Ob}(E), \qquad x \in \mathrm{Ob}(F_S), \tag{1}$$

il existe une unique action a' de l'image inverse L' de L par f sur l'image inverse F' de F telle que, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$ et tout $x \in \mathrm{Ob}(F_S)$, le morphisme

$$a'(x')\colon L'(S') \to \mathsf{lien}(\mathsf{Aut}_{S'}(x')), \qquad S' = f^{-1}(S).$$

s'identifie par (1.3.3.2 (5)) et (1.2.2.2) à l'image inverse de $a(x)$, où $x' \in \mathrm{Ob}(F_{S'})$ est l'image de x par le composé

$$F_S \xrightarrow{\varphi} (F' \times_{E'} E)_S = F'_{S'}, \tag{2}$$

dans lequel φ est le morphisme structural de F'.

(ii) Soient encore G un E-champ, b une action d'un lien M sur G et $m\colon F \to G$ un morphisme de champs compatible avec un morphisme de liens $u\colon L \to M$. L'image inverse de m est compatible avec l'image inverse de u.

1.4.1.1. Rappelons qu'une action de L' sur F' est un morphisme de morphismes de champs

$$a'\colon\ L'\cdot p' \to \mathsf{liau}(F') \qquad \text{(IV 2.1.4)} \tag{3}$$

où $p'\colon F'^{\mathrm{cart}} \to E'$ est la projection. Comme l'image inverse de champs commute à la formation du champ de groupoïdes sous-jacent, on peut supposer que F est un champ de groupoïdes. Auquel cas, par la propriété universelle de l'image inverse de champs, on a une bijection

$$a' \mapsto f_*^{\mathrm{ch}}(a')\cdot\varphi \tag{4}$$

entre l'ensemble des actions de L' sur F' et l'ensemble des morphismes de morphismes de champs

$$f_*^{\mathrm{ch}}(L'\cdot p')\cdot\varphi \to f_*^{\mathrm{ch}}\big(\mathsf{liau}(F')\big). \tag{5}$$

Par définition de L' (1.2.2.1), on a un isomorphisme canonique

$$f_*^{\mathrm{ch}}(L'\cdot p')\cdot\varphi = f_*^{\mathrm{ch}}(L')\cdot p \xrightarrow{\sim} \mathsf{f}_{\mathsf{li}}^*\cdot L\cdot p, \tag{6}$$

où $p\colon F\to E$ est la projection. L'action a de L sur F fournit un morphisme

$$\mathsf{f}_{\mathsf{li}}^* * a\colon\ \mathsf{f}_{\mathsf{li}}^*\cdot L\cdot p \to \mathsf{f}_{\mathsf{li}}^*\cdot\mathsf{liau}(F) = \mathsf{f}_{\mathsf{li}}^*\cdot\mathsf{lien}\cdot\mathrm{AUT}(F) \tag{7}$$

l'isomorphisme Λ de (1.2.1(2)) fournit un isomorphisme

$$\Lambda * \mathrm{AUT}(F)\colon\ \mathsf{f}_{\mathsf{li}}^*\cdot\mathsf{lien}\cdot\mathrm{AUT}(F) \xrightarrow{\sim} f_*^{\mathrm{ch}}\big(\mathsf{lien}(E')\big)\cdot\mathsf{f}_{\mathsf{gr}}^*\cdot\mathrm{AUT}(F) \tag{8}$$

l'isomorphisme (1.3.3(2)) fournit un isomorphisme [on pose $\mathsf{lien}_* = f_*^{\mathrm{ch}}(\mathsf{lien}(E'))$]

$$\mathsf{lien}_* * g(F)\colon\ \mathsf{lien}_*\cdot\mathsf{f}_{\mathsf{gr}}^*\cdot\mathrm{AUT}(F) \xrightarrow{\sim} \mathsf{lien}_*\cdot f_*^{\mathrm{ch}}\big(\mathrm{AUT}(F')\big)\cdot\varphi, \tag{9}$$

d'où un morphisme (5), en composant (6) (7) (8) et (9). En explicitant (5), on trouve évidemment le morphisme de l'énoncé, ce qui prouve (i). On prouve (ii) en utilisant à nouveau la propriété universelle de l'image inverse.

Proposition 1.4.2. Soient $f\colon E'\to E$ un morphisme de sites et F une L-gerbe. L'image inverse de F est liée par l'image inverse du lien de F. L'image inverse d'un morphisme $m\colon F\to G$ de gerbes sur E est liée par l'image inverse du morphisme de liens qui lie m.

Si F est triviale, son image inverse est une gerbe d'après (1.3.4), car F est équivalente à une gerbe de torseurs. Comme la formation de l'image inverse commuta à la localisation [par exemple par transitivité de l'image inverse (II 3.2.3, 3.2.7)], on en déduit que l'image inverse $f_{\mathrm{ch}}^*(F)$ de F est une gerbe. D'après (1.4.1), on a une action a' de l'image

inverse $f_{\mathrm{li}}^*(L)$ du lien L de F sur l'image inverse de F, déduite de l'action a de L sur F. Comme a est un isomorphisme il en est de même de (1.4.1 (5)), donc de a', par la propriété universelle de $f_{\mathrm{ch}}^*(F)$, donc a' identifie $f^*(L)$ au lien de $f^*(F)$. La seconde assertion résulte formellement de (1.4.1).

Proposition 1.4.3. Soient $m\colon F \to G$ un morphisme de gerbes sur E, lié par un épimorphisme de liens $v\colon M \dashrightarrow N$ et s une section de G. On a une E'-équivalence naturelle entre l'image inverse $K(s)'$ de la gerbe $K(s)$ des relèvements de s (IV 2.5.5) et la gerbe $K(s')$ des relèvements de l'image inverse s' de s relativement à l'image inverse $m'\colon F' \to G'$ de m.

Par construction de $K(s)$ (IV 2.5.5), on a des morphismes de gerbes sur E

$$K(s) \xrightarrow{k(s)} F \xrightarrow{m} G \tag{1}$$

et un isomorphisme de morphismes de champs

$$\kappa(s)\colon\ m \cdot k(s) \xrightarrow{\sim} s \cdot p, \tag{2}$$

où $p\colon K(s) \dashrightarrow E$ est la projection. En appliquant le 2-foncteur image inverse de champs, on trouve donc des morphismes de gerbes sur E'

$$K(s)' \xrightarrow{k(s)'} F' \xrightarrow{m'} G' \tag{3}$$

et un isomorphisme de morphisme de champs

$$\kappa(s)'\colon\ m' \cdot k(s)' \xrightarrow{\sim} s' \cdot p', \tag{4}$$

où $p'\colon K(s)' \to E'$ est la projection. D'après la proposition précédente, on sait que (3) est lié par l'image inverse de la suite exacte de liens

$$1 \to L(s) \xrightarrow{u(s)} M \xrightarrow{v} N \to 1 \qquad \text{(IV 2.5.5)} \tag{5}$$

qui lie (1). La dite image inverse est exacte par (1.2.7), ce qui prouve la proposition par unicité de la gerbe des relèvements de s' (IV 2.5.5.5).

Corollaire 1.4.4. Sous les hypothèses de (1.4.3), soit $i\colon s \xrightarrow{\sim} t$ un isomorphisme de sections de G et soit $i'\colon s' \xrightarrow{\sim} t'$ l'isomorphisme de sections de G' déduit par image inverse. Par les équivalences de (1.4.3), l'image inverse du morphisme de gerbes $K(i)\colon K(s) \to K(t)$ (IV 2.5.2 (4)) s'identifie à isomorphisme près au morphisme $K(i')\colon K(s') \to K(t')$.

Ceci résulte immédiatement du fait que l'image inverse de champs est un 2-foncteur et de la propriété universelle «renforcée» de $K(s')$ (IV 2.5.3).

Corollaire 1.4.5. Sous les conditions de (1.4.3) les opérations naturelles de $\mathbf{Aut}(s')$ sur le lien $L(s')$ de la gerbe des relèvements $K(s')$ de s' s'obtiennent grâce au foncteur image inverse de liens à partir de celles de $\mathbf{Aut}(s)$ sur le lien $L(s)$ de la gerbe des relèvements de s.

Ceci résulte au choix du corollaire précédent ou du fait que les dites opérations se calculent à partir de l'image inverse de la suite exacte de liens (1.4.3 (5)).

1.5. Les applications $H^i(E, A) \to H^i(E', f^*(A))$

Proposition 1.5.1. Soient $f\colon E' \to E$ un morphisme de sites et A un faisceau de groupes sur E. On a des applications

$$H^i(f, A)\colon\ H^i(E, A) \to H^i(E', f^*(A)), \qquad 0 \leqq i \leqq 2. \tag{1}$$

Pour $i=0$, l'application (1) est un morphisme de groupes, pour $i \leqq 2$, c'est un morphisme d'ensembles pointés (III 2.4.2), qui, de plus, pour $i=2$, applique l'ensemble des classes neutres dans l'ensemble des classes neutres (IV 3.1.3). De plus, pour $i=0$ et 1, les applications (1) sont des morphismes de foncteurs en A.

1.5.1.1. Soient e l'objet final de $\tilde{E}$ et $f^*(e)$ son image inverse, laquelle est un objet final de $\tilde{E}'$. Le foncteur image inverse de faisceaux d'ensembles, induit, pour tout $F \in \mathrm{Ob}(\tilde{E})$, une application $\mathrm{Hom}(e, F) \to \mathrm{Hom}(f^*(e), f^*(A))$, qui s'écrit, par définition de H^0,

$$H^0(E, F) \to H^0(E', f^*(F)). \tag{2}$$

Puisque f^* commute aux limites projectives finies, on en déduit un morphisme de foncteurs $A \mapsto H^0(f, A)$, où A est un groupe de $\tilde{E}$, [c'est-à-dire un faisceau de groupes sur E (II 3.4.10)].

1.5.1.2. L'application $H^1(f, A)$ est définie en associant à la classe d'un A-torseur P sur E celle de son image inverse $f^*(P)$ ce qui est licite, car $f^*(P)$ est un $f^*(A)$-torseur (1.3.4). Plus savamment, $H^1(f, A)$ est définie à partir du morphisme de E-champs de (1.3.4 (1)) par passage aux classes à isomorphisme près d'objets au-dessus de e, ce qui prouve que la formation de $H^1(f, A)$ est *compatible avec la localisation* (III 2.4.6). Bien entendu, $H^1(f, A)$ est un morphisme d'ensembles pointés car un torseur est trivial si, et seulement si, il a une section, condition conservée par image inverse. Enfin, la formation de l'image inverse d'un torseur commute à celle du produit contracté, car celui-ci est un quotient d'un produit. Donc $A \mapsto H^1(f, A)$ est un morphisme de foncteurs en A (III 2.4.2.2). De plus, si A est abélien, $H^1(f, A)$ est un morphisme

de groupes (III 2.4.5), car, restreint aux faisceaux abéliens, $H^1(f, \bullet)$ est un morphisme entre foncteurs additifs.

1.5.1.3. Soient A un faisceau de groupes opérant librement sur un faisceaux d'ensembles X sur E. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^0(E, X/A) & \xrightarrow{d} & H^1(E, A) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle H^0(f, X/A)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle H^1(f, A)} \\ H^0(E', X'/A') & \longrightarrow & H^1(E', A'), \end{array} \tag{3}$$

est *commutatif*, où l'on a posé $A' = f^*(A)$, $X' = f^*(X)$ et où l'on a identifié de manière naturelle X'/A' et $f^*(X/A)$. En effet, par définition (III 3.1.3), pour tout $x \in H^0(E, X/A)$, $d(x)$ est la classe de l'image réciproque de x par la projection $X \to X/A$, laquelle est un produit fibré.

1.5.1.4. Hormis sa classe unité, l'ensemble $H^2(E, A)$ ne dépend que du lien $L = \mathbf{lien}(A)$. On définira donc $H^2(f, A)$ grâce à la proposition suivante, moyennant quoi l'image de la classe unité (IV 3.1.3) est la classe unité, en vertu de (1.3.4).

Proposition 1.5.2. Soient $f\colon E' \to E$ un morphisme de sites, L un lien sur E, et $f^*(L)$ son image inverse sur E'. En associant à tout L-gerbe F son image inverse par f, liée par $f^*(L)$ comme il est dit dans (1.4.1, 1.4.2), on définit une application

$$H^2(f, L)\colon\ H^2(E, L) \to H^2\big(E', f^*(L)\big). \tag{1}$$

De plus on a ce qui suit.

(i) Si $u\colon L \to M$ est un morphisme de liens sur E et si $f^*(u)\colon f^*(L) \to f^*(M)$ désigne son image inverse par f, on a, pour tout $p \in H^2(L)$ et tout $q \in H^2(M)$,

$$(p \overset{u}{\multimap} q) \Rightarrow (p' \overset{f^*(u)}{\multimap} q'), \qquad \text{(IV 3.1.4)}, \tag{2}$$

où $p' = H^2(f, L)(p)$, $q' = H^2(f, M)(q)$.

(ii) Soient C le centre de L, $f^*(C)$ son image inverse et $\gamma\colon f^*(C) \to C'$ le morphisme naturel (1.2.9.3), où C' est le centre de $f^*(L)$. Pour tout $x \in H^2(E, C)$ et tout $p \in H^2(E, L)$, on a, pour les opérations de (IV 3.3.3),

$$(x\,p)' = x'\,p', \tag{3}$$

où $(x\,p)' = H^2(f, L)(x\,p)$, $p' = H^2(f, L)(p)$ et où x' est l'image de x par le composé

$$\cdot\ H^2(E, C) \xrightarrow{H^2(f, C)} H^2\big(E', f^*(C)\big) \xrightarrow{H^2(E', \gamma)} H^2(E', C'). \tag{4}$$

1.5.2.1. La définition de (1) est consistante, car si $m: G \to G'$ est une L-équivalence de L-gerbes sur E, son image inverse est liée par l'identité de $f^*(L)$, donc est une $f^*(L)$-équivalence. Par ailleurs, (i) résulte de (1.4.2). Pour prouver (ii), rappelons que l'accouplement

$$H^2(E, C) \times H^2(E, L) \to H^2(E, L)$$

qui définit les opérations de $H^2(E, C)$ sur $H^2(E, L)$ est obtenu en faisant usage de la fonctorialité du H^2 dans deux cas particuliers, à savoir les projections du produit $C \times L$ et le morphisme $c + \mathrm{id}_L$: $C \times L \to L$ (IV 3.1.10, 3.3.3). Comme on a vu que la formation de l'image inverse de liens respecte les produits et produits contractés (1.2.6, 1.2.8), il résulte formellement de (i) que l'on a

$$(x\,p)' = x''\,p' \quad \text{où} \quad x'' \in H^2(f, C)(x), \tag{5}$$

d'où la relation (3), par (IV 3.3.6).

Corollaire 1.5.2.2. Soient $v: M \to N$ un épimorphisme de liens sur E. On a un morphisme

$$\mathsf{O}(f, v): \mathsf{O}(E, v) \to \mathsf{O}\big(E', f^*(v)\big), \quad \text{(IV 4.2.3)}. \tag{1}$$

De plus, si $1 \to A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \to 1$ est une suite exacte de faisceaux de groupes telle que $\mathsf{lien}(E)(b) = v$, le carré ci-dessous est commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1(E, C) & \xrightarrow{H^1(f, C)} & H^1\big(E', f^*(C)\big) \\ {\scriptstyle d}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d'} \\ \mathsf{O}(E, v) & \xrightarrow[\mathsf{O}(f, v)]{} & \mathsf{O}\big(E', f^*(v)\big) \end{array} \tag{2}$$

où d (resp. d') est l'application attachée par (IV 4.2.7.2) à la suite exacte donnée (resp. à son image inverse par f).

On définit (1) grâce à la notion d'image inverse de gerbe (1.4.2). La commutativité de (2) résulte de (1.4.3), étant entendu que l'on identifie canoniquement $f^*(v)$ et $\mathsf{lien}(E')\big(f^*(b)\big)$ (1.2.2.2), ce qui permet de définir d'.

Corollaire 1.5.3. Restreints à la catégorie des faisceaux de groupes abéliens, les morphismes $H^i(f, *)$ de (1.5.1) forment un morphisme entre δ-foncteurs limités aux degrés 0, 1 et 2. Par les isomorphismes (III 3.5.4) et (IV 3.4.2), ils s'identifient aux morphismes définis en algèbre homologique.

La seconde assertion résulte de la première, car $H^1(E, *)$ est un δ-foncteur universel (T 2.2) et il n'existe donc qu'un seul morphisme de

δ-foncteur induisant $H^0(f, *)$ en degré 0. Quant à la première assertion elle résulte de (1.5.1.3) et (1.5.2.2).

§2. Les faisceaux $R^1 f_*(A)$

Définition 2.1. Soient $f\colon E' \to E$ un morphisme de U-sites et A un faisceau de groupes sur E'. On note $R^1 f_*(A)$ le faisceau (sur E) associé au préfaisceau $Y \rightsquigarrow H^1(f^{-1}(Y), A)$, $Y \in \mathrm{Ob}(E)$, où $f^{-1}\colon E \to E'$ est le foncteur sous-jacent à f (0 3.3).

2.1.1. Par définition du faisceau associé à un préfaisceau, on a donc une famille d'applications

$$H^1(f^{-1}(Y), A) \to R^1 f_*(A)(Y), \qquad Y \in \mathrm{Ob}(E). \tag{1}$$

D'après (III 2.4.6), les applications de localisation

$$H^1(f^{-1}(Y), A) \to H^1(f^{-1}(Y'), A), \tag{2}$$

où $Y' \to Y$ est une flèche de E, sont des morphismes d'ensembles pointés. Donc $R^1 f_*(A)$ est muni d'une section canonique: on dira que c'est *un faisceau d'ensembles pointés.*

2.1.2. D'après (III 2.4.6), les applications (2) sont des morphismes de foncteurs en A. Si $u\colon A \to B$ est un morphisme de faisceaux de groupes sur E', on a donc un morphisme de faisceaux d'ensembles pointés:

$$R^1 f_*(u)\colon\ R^1 f_*(A) \to R^1 f_*(B), \tag{3}$$

déduit des applications (III 2.4.2 (2)).

2.1.3. Soient A un faisceau de groupes sur E' opérant librement (III 1.1.5) à droite sur un faisceau d'ensembles P sur E'. On a un morphisme de faisceaux d'ensembles

$$d\colon\ f_*(P/A) \to R^1 f_*(A) \tag{4}$$

déduit des «opérateurs cobords» $(P/A)(f^{-1}(Y)) \to H^1(f^{-1}(Y), A)$, $Y \in \mathrm{Ob}(E)$, de (III 3.1.3). En effet, ceux-ci définissent un morphisme de préfaisceaux d'ensembles sur E, car la formation de l'image inverse par la projection $P \to P/A$ d'une section c de P/A commute à la localisation et l'on obtient d par passage au faisceau associé.

Proposition 2.2. Soit A un faisceau de groupes sur E' opérant librement sur un faisceaux d'ensembles P sur E'. L'image inverse par

$f_*(P/A) \to R^1 f_*(A)$ (2.1.3 (4)) de la section marquée de $R^1 f_*(A)$ est le faisceau image du morphisme $f_*(p)$: $f_*(P) \to f_*(P/A)$, où p: $P \to P/A$ est la projection.

Ceci résulte de (III 3.1.4) car la formation du faisceau associé commute à celle de l'image réciproque d'une section par un morphisme et à celle de l'image d'un morphisme.

Proposition 2.3. Soit $1 \to A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \to 1$ une suite exacte de faisceaux de groupes sur E' (III 3.3.0). On a une suite exacte de morphismes de faisceaux d'ensembles pointés

$$\begin{aligned} 1 \to f_*(A) \xrightarrow{f_*(a)} f_*(B) \xrightarrow{f_*(b)} f_*(C) \xrightarrow{d} R^1 f_*(A) \\ \xrightarrow{R^1 f_*(a)} R^1 f_*(B) \xrightarrow{R^1 f_*(b)} R^1 f_*(C). \end{aligned} \tag{1}$$

De plus, le morphisme de faisceaux de groupes $f_*(a)$ est le noyau du morphisme de faisceaux de groupes $f_*(b)$.

2.3.1. D'après (III 3.3.1), on a, pour tout $Y \in \mathrm{Ob}(E)$, une suite exacte de morphismes d'ensembles pointés

$$1 \to H^0(f^{-1}(Y), A) \ldots H^1(f^{-1}(Y), C). \tag{2}$$

Celle-ci définit une suite exacte de *préfaisceaux* d'ensembles pointés sur E car la formation du cobord est compatible avec la localisation (2.1.3). D'où la proposition, car le foncteur faisceau associé commute aux limites projectives finies (structure de groupes, image réciproque d'une section ...) et à la formation de l'image d'un morphisme.

Remarque 2.3.2. Soit a: $A \to B$ un monomorphisme de faisceaux de groupes sur E'. En utilisant cette fois (III 3.2.2), on trouve une suite exacte de faisceaux d'ensembles pointés

$$1 \to f_*(A) \xrightarrow{f_*(a)} f_*(B) \xrightarrow{f_*(p)} f_*(B/A) \xrightarrow{d} R^1 f_*(A) \xrightarrow{R^1 f_*(a)} R^1 f_*(B). \tag{1}$$

De plus, l'image inverse par d de la section marquée de $R^1 f_*(A)$ n'est autre que $f_*(B)/f_*(A)$ car ce dernier est évidemment l'image de $f_*(p)$ (III 3.1.1).

Proposition 2.4. Soit un diagramme commutatif de faisceaux de groupes sur E' dont les lignes sont exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \to & A & \xrightarrow{a} & B & \xrightarrow{b} & C \to 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle v} & & \downarrow{\scriptstyle w} \\ 1 & \to & A' & \xrightarrow[a']{} & B' & \xrightarrow[b']{} & C' \to 1. \end{array} \tag{1}$$

On a

$$R^1 f_*(u) \cdot d = d' \cdot f_*(w). \tag{2}$$

où d (resp. d') est le cobord attaché par (2.3 (1)) à la ligne du haut (resp. du bas) de (1).

Résulte immédiatement de (III 3.1.3.1).

Remarque 2.5. Si A est *abélien*, les $H^1(f^{-1}(Y), A)$, $Y \in \mathrm{Ob}(E)$ sont munis d'une loi de groupe abélien compatible avec les morphismes de localisation (2.1.1 (2)) car la formation du produit contracté de deux torseurs commute à la localisation. D'où une structure de *faisceau de groupes abéliens sur* $R^1 f_*(A)$. Si, dans la proposition (2.3) les groupes A, B et C sont abéliens, la suite (2.3 (1)) est donc une suite exacte de faisceaux de groupes abéliens d'après (III 2.4.5.1 et III 3.4.3 (i)). D'après (2.4), nous avons donc défini un δ-foncteur exact limité aux degrés 0, 1. Il est effaçable car si A est un injectif il en est de même de sa restriction aux $f^{-1}(Y)$, donc $R^1 f_*(A) = 0$ par (III 3.5.4). On a donc un isomorphisme canonique de δ-foncteurs en A

$$R^1 f_*(A) \xrightarrow{\sim} R^1_\bullet f_*(A), \tag{1}$$

où l'on note $R^i_\bullet f_*(A)$ les foncteur dérivés de $A \rightsquigarrow f_*(A)$. Compte tenu des isomorphismes $H^1(f^{-1}(Y), A) \xrightarrow{\sim} H^1_\bullet(f^{-1}(Y), A)$ (III 3.5.4), on retrouve ainsi, en degré 1, le procédé de calcul classique de $R^i f_*(A)$ comme faisceau associé à $Y \mapsto H^i(f^{-1}(Y), A)$ [SGA 4 V 5.5.1].

§ 3. La suite exacte attachée à un morphisme de sites

Dans ce paragraphe on donne un analogue non commutatif de la suite exacte des termes de bas degrés déduite de la suite spectrale de Leray

3.1. Le cas général

Proposition 3.1.1. Soit $f: E' \to E$ un morphisme de U-sites et soit A un faisceau de groupes sur E'. Le foncteur image directe de faisceaux d'ensembles induit une équivalence de catégories

$$D: \mathbf{Tors}(E', A)^E \xrightarrow{\approx} \mathbf{Tors}(E, f_*(A)), \quad P \rightsquigarrow f_*(P), \tag{1}$$

où $\mathbf{Tors}(E', A)^E$ désigne la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Tors}(E', A)$ dont les objets sont les A-torseurs P sur E' tels qu'il existe un raffinement R de E tel que, pour tout $Y \in \mathrm{Ob}(R)$, la restriction de P à $f^{-1}(Y)$ soit triviale,

3.1.1.1. Puisque le foncteur $f_*: \tilde{E}' \to \tilde{E}$ commute aux limites projectives finies, il transforme un A-torseur en un $f_*(A)$-*pseudo*-torseur (III 1.1.5). Par définition, $f_*(P)$ sera un $f_*(A)$-torseur si, de plus, le morphisme $f_*(P) \to e$ est couvrant, où e est l'objet final de E. Par la propriété universelle de $f_*(P)$, à savoir $\mathrm{Hom}(Y, f_*(P)) \approx \mathrm{Hom}(f^*(Y), P)$, $Y \in \mathrm{Ob}(\tilde{E})$, il en résulte que $f_*(P)$ sera un torseur si, et seulement si, P est un objet de $\mathbf{Tors}(E', A)^E$, cf. (0 3.3.2 (5)). L'image directe de faisceaux d'ensembles induit donc bien un foncteur (1).

3.1.1.2. Prouvons que (1) est pleinement fidèle. Soient P et Q deux objets de $\mathbf{Tors}(E', A)^E$. Par fonctorialité et localisation, on a un morphisme de faisceaux d'ensembles sur E:

$$f_*(\mathbf{Hom}_A(P, Q)) \to \mathbf{Hom}_{f_*(A)}(f_*(P), f_*(Q)) \tag{2}$$

et il suffit de prouver que c'est un *isomorphisme*. Par hypothèse, il existe un *raffinement* de E qui trivialise P et Q. On peut donc supposer que $P = Q = A_d$ est le torseur trivial, auquel cas $f_*(A_d) = f_*(A)_d$ et, grâce aux translations à gauche, le morphisme (2) s'identifie à un endomorphisme de $f_*(A_d)$ qui est l'identité, comme on voit aisément.

3.1.1.3. Prouvons que (1) est essentiellement surjectif. Soit Q un $f_*(A)$-torseur sur E et considérons le morphisme

$$r_Q: f^*(Q) \to P, \tag{3}$$

où P est déduit du $f^*(A)$-torseur $f^*(Q)$ (1.3.4) par extension du groupe structural suivant le morphisme d'adjonction

$$\rho: f^* f_*(A) \to A. \tag{4}$$

De (3), on déduit, par la formule d'adjonction, un morphisme de faisceaux d'ensembles sur E

$$s_Q: Q \to f_*(P). \tag{5}$$

De même, on déduit de (4) un morphisme $f_*(A) \to f_*(A)$ qui, comme chacun sait, est l'identité. Du fait que f_* et f^* commutent aux limites projectives finies, on déduit formellement que (5) est un morphisme de $f_*(A)$-*pseudo-torseurs*, donc est un isomorphisme car Q est un *torseur*, ce qui achève de prouver la proposition.

Corollaire 3.1.2. Sous les hypothèses de (3.1.1), le composé ci-dessous induit un quasi-inverse de (3.1.1 (1))

$$\mathbf{Tors}(E, f_*(A)) \xrightarrow{I} \mathbf{Tors}(E', f^* f_*(A)) \xrightarrow{r} \mathbf{Tors}(E', A)^E \tag{1}$$

où I est le foncteur $Q \rightsquigarrow f^*(Q)$ (1.3.4) et où $r = \mathbf{Tors}(E', \rho)$ est le foncteur extension du groupe structural associé au morphisme d'adjonction $\rho: f_* f^*(A) \to A$.

3.1.2.1. Notons déjà que le foncteur composé (1) prend en fait ses valeurs dans $\mathbf{Tors}(E', A)^E$ car le foncteur image inverse $f^*: \tilde{E} \to \tilde{E}'$ transforme familles couvrantes en familles couvrantes. Pour prouver le corollaire, il suffit de reprendre l'argument de (3.1.1.3) en notant que $Q \mapsto r_Q$ est un morphisme de foncteurs en Q, donc aussi $Q \mapsto s_Q$. Pour faire bonne mesure, indiquons comment construire un isomorphisme entre $r\,I\,D$ et le foncteur identique de $\mathbf{Tors}(E', A)^E$. Pour tout A-torseur P, on a un morphisme d'adjonction $t(P): f^* f_*(P) \to P$ qui, puisque f_* et f^* commutent aux limites projectives, est un ρ-morphisme de pseudo-torseurs. Si P est un objet de $\mathbf{Tors}(E', A)^E$, alors $f_*(P)$ est un torseur, donc aussi $f^* f_*(P)$, donc, d'après (III 1.4.6 (iii)), $t(P)$ induit un isomorphisme de A-torseur $i(P): Q \xrightarrow{\sim} P$, où Q est déduit de $f^* f_*(P)$ par extension du groupe structural suivant $\rho: f^* f_*(A) \to A$. Par définition $p \mapsto t(P)$ est un morphisme de foncteurs, donc $P \mapsto i(P)$ est un isomorphisme de foncteurs.

Proposition 3.1.3. Soient $f: E' \to E$ un morphisme de U-sites et A un faisceau de groupes sur E'. On a une suite exacte d'ensembles pointés

$$1 \to H^1(E, f_*(A)) \xrightarrow{\varphi} H^1(E', A) \xrightarrow{\gamma} H^0(E, R^1 f_*(A)) \qquad (1)$$

où φ est l'application induite par le foncteur composé (3.1.2 (1)) et où γ est le morphime naturel (2.1.1 (1)).

3.1.3.1. Soient P un A-torseur sur E' et $p \in H^1(E', A)$ sa classe. Pour que $\gamma(p)$ soit la section marquée il faut et il suffit que P soit un objet de $\mathbf{Tors}(E', A)^E$, comme il résulte de la définition de $R^1 f_*(A)$. D'où la conclusion par (3.1.2).

3.1.3.2. Soit P un A-torseur sur E'. Les bijections

$$\theta_P: H^1(X, A) \xrightarrow{\sim} H^1(X, \mathbf{ad}(P)), \quad X \in \mathrm{Ob}(E'), \quad \text{(III 2.6.3)}, \qquad (2)$$

sont compatibles avec la localisation, car la formation du produit contracté est compatible avec la localisation. D'où un isomorphisme de préfaisceaux d'ensembles sur E', d'où, par image directe, un isomorphisme de faisceaux d'ensembles sur E

$$\theta(P): R^1 f_*(A) \xrightarrow{\sim} R^1 f_*(\mathbf{ad}(P)). \qquad (3)$$

Corollaire 3.1.4. Sous les hypothèses de (3.1.3) soit P un A-torseur sur E'. On a un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccc} H^1(E, f_*(A)) & \xrightarrow{\varphi} & H^1(E', A) & \xrightarrow{\gamma} & H^0(E, R^1 f_*(A)) \\ & & \downarrow{\scriptstyle \theta_P} & & \downarrow{\scriptstyle \theta'(P)} \\ H^1(E, f_*(\mathrm{ad}(P))) & \to & H^1(E', \mathrm{ad}(P)) & \longrightarrow & H^0(E, R^1 f_*(\mathrm{ad}(P))) \end{array} \tag{1}$$

où θ_P est la bijection de (III 2.6.3) et où $\theta'(P)$ est obtenu à partir de $\theta(P)$ par passage aux sections.

3.1.4.1. La commutativité résulte de la définition même de $\theta(P)$ et permet de «calculer» les fibres de l'application γ. On notera que, si A est *abélien*, on a une suite exacte de groupes

$$\begin{aligned} 0 \to H^1_\bullet(E, f_*(A)) \xrightarrow{\varphi} H^1_\bullet(E', A) \xrightarrow{\gamma} H^0_\bullet(E, R^1 f_*(A)) \xrightarrow{d} H^2_\bullet(E, f_*(A)) \\ \xrightarrow{\psi} H^2_\bullet(E', A)^{\mathrm{tr}} \xrightarrow{\theta} H^1_\bullet(E, R^1 f_*(A)) \xrightarrow{d'} H^3_\bullet(E, A) \end{aligned} \tag{2}$$

déduite de la suite spectrale de Leray: $H^p_\bullet(E, R^q f_*(A)) \Rightarrow H^*_\bullet(E', A)$, où $H^i_\bullet$ désigne le groupe défini en algèbre homologique, où d et d' désignent les opérateurs cobords de la suite spectrale et où $H^2_\bullet(E', A)^{\mathrm{tr}}$ désigne le premier groupe de la filtration de $H^2(E', A)$, à savoir le noyau de l'homomorphisme naturel

$$H^2_\bullet(E', A) \to H^0(E, R^2 f_*(A)),$$

à savoir *l'ensemble des* $x \in H^2(E', A)$ *tels qu'il existe un raffinement* R *de* E *tel que, pour tout* $Y \in \mathrm{Ob}(R)$, *l'image de* c *dans* $H^2_\bullet(f^{-1}(Y), A)$ *soit nulle.* Ce résultat nous servira de guide pour les considérations qui vont suivre. Notons déjà que, par les isomorphismes (III 3.5.4) et (2.5 (1)), les deux premier morphismes de (2) (en ne comptant pas 0 ...) s'identifient à ceux de (3.1.3 (1)), comme il résulte de (1.5.3) et du fait que les isomorphismes $H^1(E', A) \simeq H^1_\bullet(E', A)$ (III 3.5.4) sont fonctoriels en A et E'. Le lemme suivant éclaire la traduction géométrique du morphisme d de (2).

Lemme 3.1.5. Soient $f\colon E' \to E$ un morphisme de U-sites et A un faisceau de groupes sur E'. On a un isomorphisme canonique de faisceaux d'ensembles sur E entre $R^1 f_*(A)$ et le faisceau des sous-gerbes maximales (III 2.1.4) de l'image directe par f de la gerbe $\mathrm{TORS}(E', A)$ des A-torseurs sur E'.

En effet, cette image directe est, par définition, obtenue en faisant subir à $\mathrm{TORS}(E', A)$ le changement de base $f^{-1}\colon E \to E'$ sous-jacent à $f\colon E' \to E$ et l'on conclut en rapprochant (III 2.1.4) et la définition de $R^1 f_*(A)$.

Proposition 3.1.6. Sous les hypothèses de (3.1.5), soit $c \in H^0(E, R^1 f_*(A))$. Soit $D(c)$ la E-catégorie dont la fibre en $Y \in \mathrm{Ob}(E)$ est la catégorie des A-torseurs sur $f^{-1}(Y)$ dont la classe $p \in H^1(f^{-1}(Y), A)$ a pour image par (2.1.1 (1)) la restriction de c à $f^{-1}(Y)$.

(i) $D(c)$ est une gerbe. Pour qu'elle soit triviale il faut et il suffit que c appartienne à l'image de γ (3.1.3 (1)).

(ii) Si c est l'image par γ de la classe p d'un A-torseur P sur E', on a une E-équivalence de gerbes

$$D(c) \xrightarrow{\approx} \mathrm{TORS}(E, f_*(\mathsf{ad}(P))), \qquad Q \rightsquigarrow f_*(Q \overset{A}{\wedge} P^0). \tag{1}$$

(iii) Soit $f^*(D(c))$ l'image inverse de $D(c)$ par f (1.4.2). On a un morphisme naturel de gerbes

$$f^*(D(c)) \to \mathrm{TORS}(E', A). \tag{2}$$

3.1.6.1. Par construction, $D(c)$ est la sous-gerbe maximale de $f_*(\mathrm{TORS}(E', A))$ correspondant à c, d'où (i), car la seconde assertion de (i) est tautologique. Prouvons (ii). Notons d'abord que si $Q \in \mathrm{Ob}(D(c)_Y)$, $Y \in \mathrm{Ob}(E)$, il existe une famille couvrante $\{Y_i \to Y\}$, telle que la restriction de Q à $f^{-1}(Y_i)$ soit isomorphe à celle de P, donc la restriction de $Q \overset{A}{\wedge} P^0$ est triviale, donc $f_*(Q \overset{A}{\wedge} P^0)$ est un $f_*(\mathsf{ad}(P))$-torseur et pas seulement un pseudo-torseur (3.1.1). D'où l'on déduit que le morphisme naturel

$$f_*(Q) \overset{f_*(A)}{\wedge} f_*(P^0) \to f_*(Q \overset{A}{\wedge} P^0) \tag{3}$$

est, ici, un isomorphisme. On reconnaît alors que le foncteur (1) n'est autre que l'équivalence habituelle (III 2.2.6) entre une gerbe trivialisée, à savoir $D(c)$ munie de la section s définie par P, et la gerbe des $\mathsf{Aut}(s)$-torseurs. En effet, d'après (1.3.1.1 (4)) on a $\mathsf{Aut}(s) = f_*(\mathsf{ad}(P))$.

3.1.6.2. On prouve (iii) en prenant pour (2) le morphisme obtenu par la propriété universelle de l'image inverse de champs (II 3.2.1) à partir de l'inclusion $D(c) \subset f_*(\mathrm{TORS}(E', A))$.

Corollaire 3.1.7. Sous les hypothèses de (3.1.6), soit $L(c)$ le lien de $D(c)$. Il existe un raffinement R de E et, pour tout $Y \in \mathrm{Ob}(R)$, un A-torseur P sur $f^{-1}(Y)$ tel que $L(c) \approx \mathsf{lien}(f_*(\mathsf{ad}(P)))$.

Cet énoncé résulte immédiatement de (ii) et explique en quoi $L(c)$ diffère de $\mathsf{lien}(f_*(A))$, la difficulté résidant évidemment dans le fait qu'il n'y a pas de notion raisonnable d'image directe d'un lien non abélien. Pour le lien de $D(c)$ dans le cas abélien, voir (3.2.1). Examinons à quelle condition une gerbe sur E' provient d'une gerbe sur E.

Proposition 3.1.8. Soient $f: E' \to E$ un morphisme de sites, G une gerbe sur E' et H une gerbe sur E.

(i) Soit $(f^*(H), \varphi: H \to f_* f^*(H))$ l'image inverse de H par $f: E' \to E$. On a une équivalence de catégories

$$\mathbf{Cart}_{E'}(f^*(H), G) \xrightarrow{\approx} \mathbf{Cart}_E(H, f_*(G)), \qquad m \rightsquigarrow f_*(m)\,\varphi. \tag{1}$$

(ii) Soit $m: f^*(H) \to G$ et soit $n: H \to f_*(G)$ son image par (1). Les conditions suivantes sont équivalentes

(a) n est pleinement fidèle

(b) n induit une équivalence entre H et une sous-gerbe maximale (III 2.1.3) de $f_*(G)$

(c) pour tout $Y \in \mathrm{Ob}(E)$ et tout $y \in \mathrm{Ob}(H_Y)$, si on note x l'image de y par le foncteur

$$H_Y \xrightarrow{n_Y} (f_*(G))_Y \xrightarrow{\sim} G_X, \qquad X = f^{-1}(Y), \tag{2}$$

le morphisme induit par n est un isomorphisme

$$\mathbf{Aut}_Y(y) \xrightarrow{\sim} f_*(\mathbf{Aut}_X(x)). \tag{3}$$

3.1.8.1. Nous laissons au lecteur le soin de prouver, en utilisant (3.2.1) ci-dessous, que cette proposition entraîne l'exactitude en $H^2_\bullet(E, f_*(A))$ de la suite (3.1.4.1 (2)).

3.1.8.2. La condition (i) n'est que la définition de l'image inverse d'un champ (II 3.2.1). L'équivalence des conditions (a) et (b) de (ii) est triviale. Par ailleurs, la condition (a) entraîne que, pour tout $Y \in \mathrm{Ob}(E)$ et tout $y \in \mathrm{Ob}(H_Y)$, le morphisme

$$\mathbf{Aut}_Y(y) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Aut}_Y(n(y)) \tag{4}$$

est un isomorphisme; cette dernière condition est également suffisante car H est une gerbe. Donc (a) $\Leftrightarrow$ (c), car le morphisme (3) est le composé de (4) et de l'isomorphisme canonique $\mathbf{Aut}_Y(n(y)) \to f_*(\mathbf{Aut}_X(x))$ de (1.3.1.1).

3.1.8.3. Soient Y et y comme dans (c). Par la formule d'adjonction, (3) correspond à un morphisme de faisceaux sur $X = f^{-1}(Y)$:

$$f^*(\mathbf{Aut}_Y(y)) \to \mathbf{Aut}_X(x) \tag{5}$$

que l'on peut calculer en fonction de $m: f^*(H) \to G$. En effet, si z est l'image de y par le composé

$$H_Y \xrightarrow{\varphi_Y} f_*\, f^*(H)_Y \xrightarrow{\sim} f^*(H)_X, \tag{6}$$

on a d'après (1.3.3.3) un isomorphisme canonique

$$f^*(\mathbf{Aut}_Y(y)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Aut}_X(z) \tag{7}$$

et, d'après (1.3.1.3), le morphisme (3) n'est autre que le composé de (7) et du morphisme induit par m

$$\mathbf{Aut}_X(z) \to \mathbf{Aut}_X(m(z)), \qquad m(z)=x. \tag{8}$$

En particulier, (3) est un isomorphisme si, et seulement si, (8) est un morphisme d'adjonction.

3.1.8.4. Soit G une gerbe sur E' on dira que G *provient d'une gerbe sur* E s'il existe une E-gerbe H et un morphisme $m: f^*(H) \to G$ vérifiant les conditions de (ii).

Corollaire 3.1.9. Pour qu'une gerbe G sur E' provienne d'une gerbe sur E il faut et il suffit que le faisceaux $\mathbf{Ger}(G)$ des sous-gerbes maximales de l'image directe $f_*(G)$ de G admette une section.

3.1.9.1. Cette assertion est évidemment tautologique et ne devient utile que si l'on dispose de renseignements sur le faisceau $\mathbf{Ger}(G)$. Nous verrons plus bas ce que l'on peut en dire. Notons que si $G=\mathrm{TORS}(E', A)$, alors $\mathbf{Ger}(G)=R^1 f_*(A)$ et, pour le guider, proposons au lecteur un exercice.

Exercice 3.1.9.2. Soient $f: E' \to E$ un morphisme de sites, A un faisceau de groupes *abéliens* sur E' et G une A-gerbe.

(i) Le faisceau $\mathbf{Ger}(G)$ des sous-gerbes maximales de l'image directe $f_*(G)$ de G par f est un pseudo-torseur sous $R^1 f_*(A)$.

(ii) Pour que $\mathbf{Ger}(G)$ soit un torseur sous $R^1 f_*(A)$ il faut et il suffit que la classe de G appartienne à $H^2(E', A)^{\mathrm{tr}}$.

(iii) Si on a (ii), la classe à isomorphisme près de $\mathbf{Ger}(G)$ est l'image par le morphisme

$$H^2_\bullet(E', A)^{\mathrm{tr}} \to H^1(E, R^1 f_*(A))$$

de (3.1.4.1 (2)) de la classe à A-équivalence près de G.

Hint: On fait opérer $R_1 f_*(A)$ sur $\mathbf{Ger}(G)$ grâce au foncteur torsion:

$$\mathrm{TORS}(E', A) \times_{E'} G \to G, \qquad (P, x) \rightsquigarrow P \overset{A}{\wedge} x, \qquad \text{(III 2.3.1)},$$

d'où l'on déduit (i) et l'on prouve aisément (i) et (ii). Pour (iii) on s'inspire du numéro suivant et l'on utilise plus particulièrement (3.2.7).

3.1.9.3. Soit L un lien sur E'. On note

$$H^2(E', L)^{\mathrm{tr}} \tag{1}$$

l'ensemble des classes des L-gerbes G sur E' telles qu'il existe un raffinement R de E tel que, pour tout $Y \in \mathrm{Ob}(R)$, la fibre de G en $f^{-1}(Y)$ soit non vide. Si $L = \mathbf{lien}(A)$, où A est un faisceau abélien sur E', l'isomorphisme $H^2 \simeq H^2_\bullet$ identifie (1) à l'ensemble sous-jacent au groupe défini dans (3.1.4.1) car la restriction d'une classe $c \in H^2(E, A)$ se traduit par la restriction des gerbes (1.5.2) (1.5.3) (II 3.2.7). Cette remarque est valable en particulier pour le centre C de L. Notons de plus que $H^2(E', L)^{\mathrm{tr}}$ *est stable par le sous-groupe* $H^2(E', C)^{\mathrm{tr}}$ pour les opérations de $H^2(E', C)$ sur $H^2(E', L)$ définies dans (IV 3.3.3), car si X, H et Y sont des gerbes sur E' de classes $x \in H^2(E', L)$, $h \in H^2(E', C)$ et $y = x\,h$, on a un morphisme $X \times_{E'} H \to Y$, par définition du produit contracté de deux gerbes.

Corollaire 3.1.9.4. Pour qu'une gerbe G sur E' de lien L provienne d'une gerbe sur E il faut que la classe de G appartienne à $H^2(E', L)^{\mathrm{tr}}$.

En effet, il existe alors une gerbe H sur E et un morphisme $n: H \to f_*(G)$, donc, puisque H est une gerbe, la fibre $f_*(G)_Y$, qui est isomorphe à G_X, $X = f^{-1}(Y)$, est non vide pour tout objet Y d'un raffinement de E.

Corollaire 3.1.9.5. Soit G une E'-gerbe qui provient d'une E-gerbe triviale H. Alors G *est triviale* et le foncteur composé

$$\varprojlim(H/E) \xrightarrow{\varphi} \varprojlim(f^*(H)/E') \xrightarrow{\mu} \varprojlim(G/E') \tag{1}$$

est *pleinement fidèle*, où φ est le foncteur de (II 3.2.1.5 (7)) et où μ est induit par m: $f^*(H) \to G$.

Si E admet un objet final Y, le foncteur (1) s'identifie au foncteur composé $H_Y \xrightarrow{\varphi_Y} f_*(G)_Y \to G_X$, $X = f^{-1}(Y)$, induit par $n = f_*(m)\,\varphi$, n: $H \to f_*(G)$ (3.1.8 (1)); d'où la conclusion dans ce cas, car n est supposé pleinement fidèle. Dans le cas général on peut invoquer (3.1.2), car, en choisissant une section s de G, on peut interpréter (1) comme le foncteur (3.1.2 (1))

$$\mathbf{Tors}(E, f_*(A)) \to \mathbf{Tors}(E', A) \tag{2}$$

où $A = \mathbf{Aut}(s)$.

Proposition 3.1.10. Soient L un lien sur E', C son centre, G et G' deux L-gerbes. Supposons que la classe h de la C-gerbe $\mathrm{HOM}_L(G, G')$ (IV 2.3.2 (iii)) appartienne à l'image de

$$H^2(E, f_*(C)) \to H^2(E', C). \tag{1}$$

Alors on a un isomorphisme $\mathbf{Ger}(G) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Ger}(G')$ entre les faisceaux des sous-gerbes maximales de $f_*(G)$ et $f_*(G')$. En particulier, pour que G provienne d'une E-gerbe il faut et il suffit qu'il en soit ainsi de G'.

3.1.10.1. On notera que les conclusions restent valables si l'on remplace $\mathrm{HOM}_L(G, G')$ par $\mathrm{HOM}_u(G, G')$, où u est un automorphisme de L: changer l'action de L sur G'.

3.1.10.2. Posons $H = \mathrm{HOM}_L(G, G')$. D'après (3.1.9), il suffit de prouver que l'on a un morphisme de faisceaux sur E:

$$\mathbf{Ger}(H) \to \mathbf{Isom}(\mathbf{Ger}(G), \mathbf{Ger}(G')) \tag{2}$$

où $\mathbf{Ger}(H)$ désigne le faisceau des sous-gerbes maximales de l'image directe $f_*(H)$ de H par $f: E' \to E$, et où

$$I = \mathbf{Isom}(\mathbf{Ger}(G), \mathbf{Ger}(G'))$$

désigne le faisceau des isomorphismes (de faisceaux d'ensembles) $\mathbf{Ger}(G) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Ger}(G')$. On rappelle que $\mathbf{Ger}(H)$ est le faisceau associé au préfaisceau $\mathbf{Ge}(H)$ qui, à tout $Y \in \mathrm{Ob}(E)$ associe l'ensemble des classes à isomorphisme près d'objets de la fibre de H:

$$H_X = \mathbf{Hom}_L(G_{/X}, G'_{/X}), \qquad X = f^{-1}(Y), \tag{3}$$

où $G_{/X}$ et $G'_{/X}$ sont les restrictions de G et G' à $E'_{/X}$. Il suffit donc de décrire un morphisme $\mathbf{Ge}(H) \to I$ de préfaisceaux sur E. Or un $h \in \mathrm{Ob}(H_X)$ est un L-morphisme $G_{/X} \to G'_{/X}$, donc une équivalence, donc induit une équivalence $f_*(G_{/X}) \xrightarrow{\approx} f_*(G'_{/X})$ entre champs sur $E_{/Y}$, laquelle induit un isomorphisme $\mathbf{Ger}(G)(Y) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Ger}(G')(Y)$. D'où la conclusion.

Corollaire 3.1.10.3. Soient $f: E' \to E$ un morphisme de sites, A un faisceau de groupes sur E' et C son centre. Supposons que l'application (3.1.10 (1)) soit surjective. Alors, si $L = \mathbf{lien}(A)$ désigne le lien représenté par A, toute L-gerbe G sur E' provient d'une gerbe sur E.

En effet, la gerbe des A-torseurs provient de la gerbe des $f_*(A)$-torseurs et on applique (3.1.10).

Proposition 3.1.11. Soient $f: E' \to E$ un morphisme de sites, A un faisceau de groupes sur E' et C son centre. Supposons que $H^2(E', C)^{\mathrm{tr}} = H^2(E', C)$ et que le morphisme

$$R^1 f_*(C) \to R^1 f_*(A) \tag{1}$$

ait pour image la section unité. Alors, si on pose $L = \mathbf{lien}(A)$, toute L-gerbe sur E' provient d'une gerbe sur E.

3.1.11.1. Soit G une L-gerbe, posons

$$T' = \mathrm{TORS}(E', A) \quad \text{et} \quad T = \mathrm{TORS}(E, f_*(A)) \tag{2}$$

et considérons T comme une section du faisceau $\mathsf{Ger}(T')$ des sous gerbes maximales de $f_*(T')$. La gerbe $H = \mathrm{Hom}_L(T', G)$ est liée par le centre C de L, donc, par la première hypothèse, le faisceau $\mathsf{Ger}(H)$ a localement une section, d'où, par le morphisme (3.1.10.2 (2)), l'existence d'isomorphismes $\mathsf{Ger}(T') \xrightarrow{\sim} \mathsf{Ger}(G)$, *localement sur* E. Si l'on prouve que les images de la section $T \in H^0(E, \mathsf{Ger}(T'))$ par deux quelconques de ces isomorphismes sont égales localement, on sera assuré de l'existence d'une section de $\mathsf{Ger}(G)$, et l'on aura prouvé la proposition.

3.1.11.2. La seconde hypothèse étant de nature locale, on peut localiser et considérer deux sections $h, h' : T' \rightrightarrows G$ de H. Soit s' la section de T' définie par le torseur trivial A_d. On a un morphisme de faisceaux sur E' :

$$\mathsf{Isom}(h, h') \to \mathsf{Isom}(h\,s, h'\,s), \qquad u \mapsto u(s), \tag{3}$$

qui, puisque H et G sont des gerbes, est un morphisme de *torseurs* compatible avec le morphisme

$$\mathsf{Aut}(h) \to \mathsf{Aut}(h\,s), \qquad u \mapsto u(s), \tag{4}$$

et les opérations naturelles des faisceaux Aut. D'après (III 2.2.3), le morphisme (4) identifie $\mathsf{Aut}(h)$ au centre de $\mathsf{Aut}(h\,s)$ et, par ailleurs, on a un isomorphisme $A = \mathsf{Aut}_A(A_d) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(h\,s)$, induit par h: $T' \to G$. D'où l'on déduit que $\mathsf{Isom}(h\,s, h'\,s)$ est déduit de $\mathsf{Isom}(h, h')$ par extension de C à A de son groupe structural, donc, par la seconde hypothèse, la classe de $\mathsf{Isom}(h\,s, h'\,s)$ dans $H^0(E, R^1 f_*(A))$ est nulle. Par définition, cela signifie qu'il existe un raffinement R de E tel que, pour tout $Y \in \mathrm{Ob}(R)$, les objets $h\,s(f^{-1}(Y))$ et $h\,s'(f^{-1}(Y))$ de G_X, $X = f^{-1}(Y)$, sont isomorphes. Donc $h\,s$ et $h'\,s$ engendrent la même sous-gerbe maximale de $f_*(G)$. C.Q.F.D.

3.2. Le cas abélien; transgression

Proposition 3.2.1. Soient f: $E' \to E$ un morphisme de U-sites, A un faisceau de groupes *abéliens* sur E' et $c \in H^0(E, R^1 f_*(A))$.

(i) La gerbe $D(c)$ de (3.1.6) est une $f_*(A)$-gerbe.

(ii) En associant à tout $x \in H^0(E, R^1 f_*(A))$ la classe de la gerbe $D(x)$ de (3.1.6), on définit une application (appelée *transgression*)

$$H^0(E, R^1 f_*(A)) \to H^2(E, f_*(A)) \tag{1}$$

qui, par les isomorphismes $H^2(E, f_*(A)) \xrightarrow{\sim} H^2_\bullet(E, f_*(A))$ de (IV 3.4.2), s'identifie à l'application d de (3.1.4.1 (2)) définie en algèbre homologique grâce à la suite spectrale de Leray.

3.2.1.1. On a une action de A sur $\mathrm{TORS}(E', A)$ définie par les isomorphismes

$$U:\ A \xrightarrow{\sim} \mathbf{Aut}_A(P), \qquad U(a)(p) = p\,a. \tag{2}$$

D'où, par (1.3.1), une action de $f_*(A)$ sur $f_*(\mathrm{TORS}(E', A))$, donc aussi sur $D(c)$ qui en est une sous-gerbe pleine. D'où (i). Pour prouver (ii), nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme 3.2.2. Soient $f: E' \to E$ un morphisme de U-sites et

$$0 \to A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \to 0 \tag{1}$$

une suite exacte de faisceaux de groupes abéliens sur E' telle que la suite de faisceaux de groupes ci-dessous soit *exacte*

$$0 \to f_*(A) \xrightarrow{f_*(a)} f_*(B) \xrightarrow{f_*(b)} f_*(C) \xrightarrow{t} R^1 f_*(A) \to 0, \tag{2}$$

où t est le cobord de (2.3 (1)). Alors l'application (3.2.1 (1)) est *l'opposée* du cobord itéré (IV 3.4.5)

$$\Delta:\ H^0(E, R^1 f_*(A)) \to H^2(E, f_*(A)) \tag{3}$$

attaché à la suite exacte (2).

3.2.3. Par fonctorialité des cobords, on peut supposer que B est un objet *injectif* de $\tilde{E}^{ab}$, ce que nous ferons. Par ailleurs, les isomorphismes $H^i \simeq H^i_\bullet$ sont compatibles avec le cobord (par définition) donc le lemme ci-dessus réduit la proposition (3.2.1) à un énoncé d'algèbre homologique qui ne fait plus intervenir nos constructions «géométriques»; ce sera (3.2.7).

3.2.4. Prouvons (3.2.2). Soit $c \in H^0(E, R^1 f_*(A))$. Il nous suffira de trouver un morphisme de gerbes

$$F:\ G \to D(c), \tag{4}$$

où G est la gerbe définie par le cobord itéré, qui soit lié par le morphisme $f_*(A) \xrightarrow{\sim} f_*(A)$, $x \mapsto x^{-1}$. D'après (IV 3.4.5), un objet de G de projection $Y \in \mathrm{Ob}(E)$ est un couple (Q, q), où Q est un $f_*(B)$-torseur sur Y et $q: Q \to f_*(C)$ un morphisme compatible avec les opérations de $f_*(B)$ tel que le composé $t\,q: Q \to R^1 f_*(A)$ soit le morphisme constant défini par la restriction à Y de la section $c \in H^0(E, R^1 f_*(A))$. Puisque l'on a supposé

B injectif, on a
$$H^1(Y, f_*(B)) \subset H^1(f^{-1}(Y), B) = 0,$$
car la restriction de B à $f^{-1}(Y)$ est un injectif. Donc Q est trivial. Pour tout $(Q, q) \in \mathrm{Ob}(G_Y)$, $Y \in \mathrm{Ob}(E)$, choisissons une section
$$z \in Q(Y) \tag{5}$$
de Q. Le composé $q\,z$ est une section de $f_*(C)$, donc définit canoniquement une section $\overline{q\,z} \in C(f^{-1}(Y))$, d'où un A-torseur sur $f^{-1}(Y)$:
$$F(Q, q) = b^{-1}(\overline{q\,z}), \tag{6}$$
qui est l'image inverse de $\overline{q\,z}$ par la restriction à $f^{-1}(Y)$ de $b: B \to C$. Montrons que $F(Q, q)$ est un objet de $D(c)_Y$, autrement dit que l'image de sa classe p par $H^1(f^{-1}(Y), A) \to H^0(Y, R^1 f_*(A))$ est la restriction de c à Y. Par définition du cobord t de (3.2.2 (2)), cette image n'est autre que $t\,q\,z$, donc est égale à c, puisque (Q, q) est un objet de G (cf. supra).

3.2.5. Ayant défini l'action de $F: G \to D(c)$ sur les objets, on définit son action sur les morphismes. Par définition, une flèche $m: (Q, q) \to (Q', q')$ de G_Y, $Y \in \mathrm{Ob}(E)$, est un $f_*(B)$-morphisme $m: Q \to Q'$ vérifiant $q' m = q$. Soient z et z' les sections de Q et Q' choisies plus haut. On définit $\beta \in f_*(B)(Y)$ par
$$m(z)\,\beta = z' \tag{7}$$
et on note $\bar{\beta} \in B(f^{-1}(Y))$ la section correspondante. D'après (7), on a
$$\overline{q'\,z'} = \overline{q\,z} \cdot v(\bar{\beta}) \tag{8}$$
et, par suite, la translation à droite par $\bar{\beta}$ applique l'image inverse de $\overline{q\,z}$ dans celle de $\overline{q'\,z'}$. De plus, B est abélien, donc la dite translation est compatible avec les opérations de B et induit un isomorphisme de B-torseurs
$$F(m): F(Q, q) \xrightarrow{\sim} F(Q', q'), \qquad F(m)(s) = s\,\bar{\beta}. \tag{9}$$
De (7) on déduit trivialement que $F(m)\,F(n) = F(m\,n)$ et on vérifie aisément que l'on a défini un morphisme de gerbes $F: G \to D(c)$ (compatibilité avec la localisation).

3.2.6. Pour achever la preuve de (3.2.2), il reste à montrer que F est lié par
$$f_*(A) \xrightarrow{\sim} f_*(A), \qquad x \mapsto x^{-1}.$$
Soit (Q, q) un objet de G_Y, $Y \in \mathrm{Ob}(E)$ et soit $a \in f_*(A)(Y)$. D'après (IV 3.4.5), l'isomorphisme $\mathsf{a}: (Q, q) \xrightarrow{\sim} (Q, q)$ associé à a par l'action de $f_*(A)$ sur G est la translation par a. On a donc
$$\mathsf{a}(x) = x \cdot a \quad \text{donc} \quad \mathsf{a}(x) \cdot a^{-1} = x, \tag{10}$$

où x est la section de Q choisie plus haut. En vertu de (6)—(9), il en résulte que $F(\mathsf{a})$ est la translation par $(a)^{-1}$, d'où la conclusion d'après (3.2.1.1).

Pour prouver (3.2.1), il nous faut encore un lemme:

Lemme 3.2.7. Soit $F\colon C \to C'$ un foncteur additif exact à gauche, où C et C' sont des catégories abéliennes. Supposons que tout objet de C se plonge dans un objet injectif. Soit $M^\bullet$ un complexe de C nul en degrés <0. Soit

$$d_2^{p,q}\colon\ E_2^{p,q} \to E_2^{p+2,q-1}, \qquad E_2^{p,q} = R^pF\big(H^q(M^\bullet)\big), \qquad \big(3.2.7.3\,(12)\big), \quad (1)$$

le cobord de la seconde suite spectrale d'hyperhomologie de $M^\bullet$ par rapport à F. Soit encore δ le composé

$$R^pF\big(H^q(M)\big) \xrightarrow{m} R^{p+2}F\big(Z^{q-1}(M)\big) \xrightarrow{n} R^{p+2}F\big(H^{q-1}(M)\big), \qquad (2)$$

où n est déduit de la projection $Z^{q-1}(M) \to H^{q-1}(M)$ et où m est le cobord itéré (deux fois) attaché à la suite exacte de C

$$0 \to Z^{q-1}(M) \to M^{q-1} \to Z^q(M) \to H^q(M) \to 0. \qquad (3)$$

On a

$$\delta = d_2^{p,q}. \qquad (4)$$

3.2.7.1. Montrons comment (3.2.1 (ii)) résulte de ce lemme et du précédent. On choisit une résolution injective $L^\bullet$ de A sur E'. Moyennant quoi, la suite spectrale de Leray de A par rapport à $f\colon E' \to E$ est la seconde suite spectrale d'hyperhomologie de $M^\bullet = f_*(L^\bullet)$ par rapport au foncteur $H^0_\bullet(E, \cdot)$. Par le lemme ci-dessus, le morphisme $d_2^{0,1}$ de la suite spectrale de Leray est donc le cobord itéré relatif à la suite exacte

$$0 \to f_*(A) \to M^0 \to Z^1(M) \xrightarrow{t'} H^1(M) \to 0. \qquad (5)$$

Par ailleurs, appliquons (3.2.2) à la suite exacte $0 \to A \to L^0 \to Z^1(L) \to 0$. Par définition de $M^\bullet$ et de $R^1f_*(A)$, la suite exacte (3.2.2 (2)) est égale à (5), à ceci près que le morphisme t' de (5) est *l'opposé* du morphisme t de (3.2.2 (2)) en vertu de [4], chap. V prop. 7.1. En conjuguant les deux lemmes ci-dessus, on trouve donc (3.2.1).

3.2.7.2. Il nous reste à prouver (3.2.7). Pour ce faire, rappelons comment on construit la suite spectrale $E_2^{p,q}$. On choisit une résolution injective de Cartan-Eilenberg $X^{\bullet\bullet}$ de $M^\bullet$, [4] chap. XVII, mais conformément aux conventions de [EGA 0_{III} 11.4.2] et non de [4], nous supposons que les deux différentielles commutent:

$$d'\,d'' = d''\,d'. \qquad (6)$$

L'on fait de $X^{\bullet\bullet}$ un complexe simple en posant

$$d(x)=d'(x)+(-1)^p d''(x), \qquad x\in X^{p,q}. \tag{7}$$

Après quoi on construit la seconde suite spectrale du complexe simple $F(X^{\bullet\bullet})$ défini par (7), (le degré filtrant est le second degré de $X^{\bullet\bullet}$).

3.2.7.3. En vertu de (6), on a une suite exacte de complexes de C

$$0\to {}'Z^{q-1}(X)\to X^{q-1,\cdot}\to {}'Z^q(X)\to {}'H^q(X)\to 0 \tag{8}$$

dont chaque terme est, par définition de X, une résolution injective du terme correspondant de (3), les morphismes étant «au-dessus» de ceux de (3). Bien entendu, ${}'Z^q$ et ${}'H^q$ désignent respectivement les cycles et l'homologie de degré q calculés grâce à la différentielle d': $X^{q,\cdot}\to X^{q+1,\cdot}$. On a donc, par définition des foncteurs dérivés R^pF de F, des isomorphismes

$$R^pF\big(H^q(M)\big)\xrightarrow{\sim}{}''H^q\big(F({}'H^q(X))\big). \tag{9}$$

Par ailleurs, la suite (8) se scinde en vertu de l'hypothèse faite sur X et, par suite, (9) s'écrit également

$$\alpha^{pq}:\ R^pF\big(H^q(M)\big)\xrightarrow{\sim}{}''H^p\big({}'H^q(F(X))\big). \tag{10}$$

En composant avec les isomorphismes classiques (que nous expliciterons plus bas)

$$E_2^{p,q}\xrightarrow{\sim}{}''H^p\big({}'H^q(F(X))\big), \tag{11}$$

on trouve finalement des isomorphismes canoniquement attachés à $X^{\bullet\bullet}$

$$R^pF\big(H^q(M)\big)\xrightarrow{\sim}E_2^{p,q}. \tag{12}$$

D'après ce qui précède, l'image de (8) par F est une suite exacte de complexes de C':

$$0\to {}'Z^{q-1}(FX)\to FX^{q-1,\cdot}\to {}'Z^q(FX)\to {}'H^q(FX)\to 0 \tag{13}$$

et, par définition des R^pF et de leurs opérateurs cobords, le transporté par les isomorphismes (10) du composé (2):

$${}''H^p\big({}'H^q(FX)\big)\to {}''H^{p+2}\big({}'H^{q-1}(FX)\big) \tag{14}$$

se calcule à partir de la suite exacte (13) par le procédé usuel («diagramme du serpent»).

3.2.7.4. Il nous reste maintenant à prouver que le transporté de (14) par les isomorphismes (11) est le morphisme $d_2^{p,q}$. Pour pouvoir utiliser les calculs fort instructifs de Godement [15] p. 88, nous supposerons que C' est la catégorie des groupes abéliens, le cas général étant laissé au

lecteur. Convenons que $x^{i,j}$ désigne un élément de $FX^{i,j}$. D'après [15] p. 88, $E_2^{p,q}$ est le quotient du groupe des $(x^{q,p}, x^{q-1,p+1})$ vérifiant

$$d' x^{q,p}=0 \quad \text{et} \quad d' x^{q-1,p+1}+(-1)^q d'' x^{q,p}=0 \tag{15}$$

par le sous-groupe formé des $(x^{q,p}, x^{q-1,p+1})$ pour lesquels on peut résoudre

$$x^{q,p}=d' x^{q-1,p}+(-1)^q d'' x^{q,p+1} \quad \text{avec} \quad d' x^{q,p+1}=0. \tag{16}$$

De plus, d'après loc. cit., l'isomorphisme (11) est obtenu en associant à la classe de $(x^{q,p}, x^{q-1,p+1})$ celle de $x^{q,p}$. Enfin, on sait que $d_2^{p,q}$ est induit par la différentielle totale (7), donc est obtenu en associant à la classe de $(x^{q,p}, x^{q-1,p+1})$ la classe de

$$((-1)^{q-1} d'' x^{q-1,p+1}, 0). \tag{17}$$

Les vérifications sont maintenant triviales et laissées au lecteur.

Remarque 3.2.8. Pour accorder (3.2.7.2) avec les conventions de [4] et de [15], on remplace la seconde différentielle de $X^{\bullet\bullet}$ par

$$d'''(x)=(-1)^p d''(x), \qquad x\in X^{p,q}, \tag{1}$$

et l'on obtient un double complexe $Y^{\bullet\bullet}$ au sens de [4], autrement dit, on a $d' d'''+d''' d'=0$. Prenant pour différentielle totale $d'+d'''$, on a ${}'''H^p({}'H^q(FY))={}''H^p({}'H^q(FX))$ et on ne change rien à la suite spectrale $E_2^{p,q}$, ni aux $d_2^{p,q}$, ni aux isomorphismes (11). Cependant, il est alors naturel ([4] p. 367) de remplacer les isomorphismes (10) par les analogues obtenus en notant que ${}'H^q(Y)$ est une résolution injective de $H^q(M)$. Notons ceux-ci β^{pq}. Puisque ${}'H^q(Y)$ est déduite de ${}'H^q(X)$ en multipliant la différentielle par $(-1)^q$, on a $\beta^{pq}=(-1)^{pq}\alpha^{pq}$. Le nouveau transporté de d_2^{pq} *diffère donc du précédent par le signe* $(-1)^p$ et il faut modifier en conséquence (3.2.7). *On notera que* (3.2.1(ii)) *reste valable avec ces nouvelles conventions*, car dans ce cas $p=0$.

Proposition 3.2.9. Soient E un site standard d'objet final X,

$$1 \to A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \to 1 \qquad (A \textit{ central} \text{ dans } B) \tag{1}$$

une suite exacte de groupes de E et P un C-torseur de E. On note

$$p\colon\ P \to X \tag{2}$$

la projection, A le faisceau de groupes sur E représenté par A, A_p le groupe $A\times P$ de $E_{/P}$, $\mathsf{A}_P=p^*(\mathsf{A})$ le faisceau de groupe sur $E_{/P}$ qu'il représente et

$$r\colon\ \mathsf{A} \to p_* p^*(\mathsf{A})=p_*(\mathsf{A}_P) \tag{3}$$

le morphisme d'adjonction. Il existe une section

$$t \in H^0(E, R^1 p_*(\mathsf{A}_P)) \tag{4}$$

telle que, si $s \in H^2(E, A)$ est l'image de la classe de P par le cobord $H^1(E, C) \to H^2(E, A)$ (IV 4.2.10), alors on a $r^{(2)}(s) = \delta(t)$,

$$H^2(E, \mathsf{A}) \xrightarrow{r^{(2)}} H^2(E, p_*(\mathsf{A}_P)) \xleftarrow{\delta} H^0(E, R^1 p_*(\mathsf{A}_P)). \tag{5}$$

3.2.9.1. Précisons que, par définition, A, B, C et P sont des objets de E, et pas seulement des faisceaux et que l'hypothèse sur (1) signifie que v est couvrant et que u est le noyau de v. Définissons t. Soit R le raffinement de E sur lequel P est trivial, soit $X' \in \mathrm{Ob}(R)$ et soit $j\colon P' \xrightarrow{\sim} C'_d$ un isomorphisme de C-torseurs sur X' (on désigne par P', C' etc. la restriction à X' de P, C etc.). Puisque (1) est exacte, $v'\colon B' \to C'$ définit un torseur sur C' sous le C'-groupe $A' \times C'$. D'où, par le changement de base $j\colon P' \to C'_d$, un A_P-torseur $T(j)$ sur P' d'où une classe

$$t(j) \in R^1 p_*(\mathsf{A}_P)(X'). \tag{6}$$

Prouvons que $t(j)$ ne dépend pas de j. Soit donc $j'\colon P' \xrightarrow{\sim} C'_d$. En vertu de $C \xrightarrow{\sim} \mathsf{Aut}_C(C_d)$, il existe $c \in C(X')$ tel que $j' = L_c \cdot j$, où L_c désigne la translation à gauche par c. Puisque $v\colon B \to C$ est couvrant, il existe un raffinement R' de X' et, pour tout $X'' \in \mathrm{Ob}(R')$, une section $b \in B(X'')$ telle que $v(X'')(b) = c''$, où c'' est la restriction de c à X''. Puisque $R^1 f_*(A)$ est un faisceau, il nous suffit de prouver que les restrictions de $t(j)$ et $t(j')$ à X'' sont égales, ou mieux que celles de $T(j)$ et $T(j')$ sont isomorphes. Or on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} B'' & \xrightarrow{L_b} & B'' \\ {\scriptstyle v''}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v''} \\ C'' & \xrightarrow[L_{c''}]{} & C'' \end{array} \qquad L_b(x) = b\,x$$

et L_b est compatible avec les opérations du C''-groupe $A'' \times C''$. Donc $T(j) \approx T(j')$ par transitivité du changement de base. On a donc, pour tout objet X' du raffinement R de E sur lequel P est trivial un élément canonique $t(X') \in R^1 p_*(\mathsf{A}_P)(X')$ dont la définition est compatible avec la localisation. Puisque $R^1 p_*(\mathsf{A}_P)$ est un faisceau, on en déduit une section canonique (4).

3.2.9.2. Soit G la A-gerbe définie par le cobord (de classe s) et soit T la $p_*(\mathsf{A}_P)$-gerbe déduite de t par (3.1.6) (de classe $\delta(t)$). Il nous suffit de trouver un morphisme de gerbes

$$F\colon G \to T \tag{7}$$

lié par r: $\mathsf{A} \to p_*(\mathsf{A}_P)$. Un objet de $G_{X'}$, $X' \in \mathrm{Ob}(E)$, est un couple (Q, q), où Q est un B-torseur et q: $Q \to P$ un B-morphisme. On note

$$F(Q, q) \tag{8}$$

le A_P-torseur $Q \to P$ sur P obtenu en faisant opérer A_P sur Q grâce à u: $A \to B$ et aux opérations de B sur Q. Nous devons prouver que $F(Q, q) \in \mathrm{Ob}(T_{X'})$, ce qui est une condition locale. Nous pouvons donc supposer que Q est trivial, ce qui assure l'existence d'un carré commutatif où toutes les flèches sont des B-morphismes

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{k} & B \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ P & \xrightarrow[j]{} & C, \end{array}$$

les opérations de B sur B et C étant définies par les translations à droite. Donc Q est déduit de B par le changement de base j: $P \to C$, donc $F(Q, q)$ appartient à $\mathrm{Ob}(T_{X'})$, par définition de $T(j)$. Il est trivial, par définition des morphismes dans G, que l'on a bien défini un morphisme de gerbes F: $G \to T$.

3.2.9.3. Prouvons que F est lié par r. Soient $X' \in \mathrm{Ob}(E')$, $a \in \mathsf{A}(X')$ et $(Q, q) \in \mathrm{Ob}(G_{X'})$. D'après (IV 2.5.6), l'automorphisme a de (Q, q) associé à a par l'action de A sur la gerbe G est la translation à droite par $u(a) \in B(X')$. Donc $F(\mathsf{a})$: $F(Q, q) \xrightarrow{\sim} F(Q, q)$ est défini par la translation par la section constante $p\,a$: $P \to A$ de A_P, laquelle est $r(a)$, d'où la conclusion.

3.3. Interprétation du second cobord attaché à un revêtement de groupes topologiques

Proposition 3.3.1. Soient X un espace topologique et

$$1 \to A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \to 1 \tag{1}$$

une suite exacte de groupes topologiques telle que A soit discret et central et telle que C soit connexe. On désigne encore par A, B et C les faisceaux des germes d'applications continues de X à valeurs dans A, B et C. Soit P un C-torseur sur X. L'obstruction

$$d(P) \in H^2(X, A) \tag{2}$$

à relever P en un B-torseur est l'image par les morphismes

$$H^0(X, R^1p_*(A_P)) \xrightarrow{\delta} H^2(X, p_*(A_P)) \xleftarrow{\sim} H^2(X, A) \tag{3}$$

de la classe $t \in H^0(X, R^1 p_*(A_P))$ décrite dans (3.2.9.1), où A_P est le faisceau sur P des germes d'applications continues de P dans A et où $p\colon P \to X$ est la projection.

3.3.1.1. Il est immédiat que $p_*(A_P) \xrightarrow{\sim} A$ est un isomorphisme car les fibres de P sont connexes et A est discret. La proposition est donc une conséquence immédiate de (3.2.9), à ceci près que cet énoncé ne s'applique pas tel quel car P n'est pas un objet du site des ouverts de X. Il nous va donc falloir nous mettre en état d'appliquer (3.2.9) en prenant une voie détournée. Auparavant notons que (3.3.1) fournit, dans un cas particulier, une description de la classe $d(P)$ qui ne fait pas intervenir de cohomologie non abélienne. En 1956, Haefliger [20] avait profité de cette circonstance pour définir la classe t et obtenir ainsi une obstruction $\delta(t) \in H^2(X, A)$ dont la nullité est nécessaire et suffisante pour que P se relève. En dehors du cas favorable (3.3.1), la proposition (3.2.9) montre quels sont les rapports entre la classe t de Haefliger et l'obstruction à relever P.

3.3.1.2. Pour prouver la proposition, considérons un univers U convenable et la catégorie $\mathrm{Top}_{/X}$ des X-espaces topologiques appartenant à U. Munissons celle-ci de la topologie pour laquelle les familles couvrantes sont les familles surjectives $\{Y_i \to Y\}$ telles que chacune des flèches $Y_i \to Y$ soit étale au sens de Godement [15]. Notons $\mathbf{X}$ le site ainsi obtenu. Pour tout X-espace topologique X', on note $\mathbf{X}'$ le faisceau sur $\mathbf{X}$ qu'il représente. La proposition (3.2.9) s'applique et nous assure que, dans ce contexte, l'obstruction

$$d(\mathbf{P}) \in H^2(\mathbf{X}, \mathbf{A} \times \mathbf{X}) \tag{4}$$

à relever P est l'image de la classe t de (3.2.9.1) par le composé

$$H^0(\mathbf{X}, R^1 \mathbf{p}_*(\mathbf{A} \times \mathbf{P})) \xrightarrow{\delta} H^2(\mathbf{X}, \mathbf{p}_*(\mathbf{A} \times \mathbf{P})) \xleftarrow{\sim} H^2(\mathbf{X}, \mathbf{A} \times \mathbf{X}). \tag{5}$$

Il nous reste à en déduire (3.3.1). Pour cela, désignons par

$$x\colon \mathbf{X} \to \mathrm{Ouv}(X) \tag{6}$$

le morphisme de sites dont le foncteur sous-jacent

$$x^{-1}\colon \mathrm{Ouv}(X) \to \mathbf{X}$$

est l'inclusion, $\mathrm{Ouv}(X)$ désignant la catégorie des ouverts de X.

Lemme 3.3.2. Pour tout X-espace topologique G, soit $\mathbf{G}$ le faisceau sur $\mathbf{X}$ représenté par G et soit G' le faisceau sur $\mathrm{Ouv}(X)$ des germes

d'applications continues de X dans G. On a

$$x_*(\mathsf{G}) = G'. \tag{1}$$

De plus, pour tout X-groupe topologique G, l'application

$$H^i(\mathrm{Ouv}(X), x_*(\mathsf{G})) \to H^i(\mathsf{X}, \mathsf{G}) \tag{2}$$

est bijective pour $i=0, 1, 2$ et pour $i \in \mathcal{N}$ si G est abélien.

3.3.2.1. La première assertion est une conséquence immédiate de la définition du foncteur image directe de faisceaux. Donc (2) est bijectif pour tout X-espace topologique lorsque $i=0$. D'autre part, pour tout ouvert U de X, toute famille couvrant U au sens de X est majorée par l'image inverse par x: $\mathsf{X} \to \mathrm{Ouv}(X)$ d'un recouvrement de U. Il en résulte immédiatement que les faisceaux $R^i x_*(\mathsf{G})$ sont nuls pour $i>0$ si G est abélien. On en déduit déjà l'assertion relative aux faisceaux abéliens, d'où aussi le cas $i=2$ dans le cas non abélien: le cas $i=1$ n'offre pas non plus de difficulté. En effet, pour la même raison que plus haut, tout G-torseur sur $\mathsf{X}_{/U}$, $U \in \mathrm{Ouv}(X)$, est trivialisé par un recouvrement ouvert de U, et l'on applique (3.1.1).

3.3.3. Pour achever la preuve de (3.3.1) on note que $d(\mathsf{P})$ est l'image de $d(P)$ par l'application (3.3.2 (2)) attachée à A, ceci d'après la compatibilité du cobord avec l'image inverse (1.5.2.2). Il reste alors à vérifier la compatibilité des morphismes de transgression δ de (3.3.1 (3)) et (3.3.1 (5)) avec les isomorphismes (3.3.2 (2)) et l'analogue relatif à P. Cela résulte très aisément de l'interprétation donnée en (3.2.2) du morphisme de transgression et le détail est laissé au lecteur.

§4. Calculs formels concernant le groupe de Brauer

Le but de ce paragraphe est simplement de décrire dans un cadre général l'application classique

$$d\colon \mathrm{Br}(X) \to H^2(X, \mathscr{G}_m)$$

et de donner, dans trois cas particuliers, un procédé de calcul de d n'utilisant que les notions usuelles d'algèbre homologique commutative. Pour des résultats plus substantiels, le lecteur consultera les trois exposés de Grothendieck sur le groupe de Brauer [18] auxquels, à l'intérieur de ce paragraphe, on réfèrera par des sigles tels que [B I 8.1].

On considère un topos annelé en anneaux locaux X, c'est-à-dire un couple formé d'un topos X et d'un faisceau d'anneaux O_X sur X tels

que, pour tout objet U de X et toute section $f \in \mathsf{O}_X(U)$, on ait

$$U = \sup(U_f, U_{1-f}), \tag{*}$$

où U_f désigne le plus grand sous-objet de U tel que la restriction de f soit inversible. Soit alors $\mathscr{U}$ le site des ouverts du spectre de l'anneau $\mathsf{O}_X(U)$; on a un morphisme de sites

$$\mathsf{f}\colon\ X_{/U} \to \mathscr{U}, \tag{**}$$

dont le foncteur sous-jacent associe à tout ouvert $D(f) = \mathrm{Spec}(\mathsf{O}_X(U)_f)$, $f \in \mathsf{O}_X(U)$, de $\mathrm{Spec}(\mathsf{O}_X(U))$ l'objet U_f de $X_{/U}$. En effet, l'image inverse par f d'un recouvrement de $\mathrm{Spec}(\mathsf{O}_X(U))$ est une famille couvrant U, car, d'après l'hypothèse (*), il en est ainsi pour un recouvrement par des ouverts de la forme $D(f)$. Puisque f est inversible dans $\mathsf{O}_X(U_f)$, on a des morphismes naturels $\mathsf{O}_X(U)_f \to \mathsf{O}_X(U_f)$, d'où un morphisme de faisceaux d'anneaux sur U:

$$\mathsf{O}_{\mathscr{U}} \to \mathsf{f}_*(\mathsf{O}_X|U), \qquad U \in \mathrm{Ob}(X). \tag{***}$$

Il nous sera commode de parler de la topologie de Zariski de X, qui est la moins fine de celles pour lesquelles sont couvrantes les familles $\{U_{f_i} \to U\}$, où (f_i) est une famille de sections de $\mathsf{O}_X(U)$ engendrant l'idéal unité. L'hypothèse (*) implique que la topologie de Zariski est moins fine que la topologie canonique.

Lemme 4.1. La suite de morphismes de faisceaux de groupes

$$1 \to \mathsf{O}_X^* \xrightarrow{a} \mathrm{GL}(n, \mathsf{O}_X) \xrightarrow{b} \mathsf{Aut}(M_n(\mathsf{O}_X)) \to 1 \tag{1}$$

est exacte pour la topologie de Zariski de X.

Bien entendu, le faisceau O_X^* est celui qui, à tout objet U de X, associe le groupe $\mathsf{O}_X(U)^*$ des unités de $\mathsf{O}_X(U)$. Nous le noterons désormais $\mathscr{G}_{m,X}$ ou même $\mathscr{G}_m$. Ceci dit, l'assertion analogue lorsque X est le topos des faisceaux d'ensembles pour la topologie de Zariski sur un schéma affine est le résultat classique de Auslander et Goldman [2]. Prouvons que le lemme en résulte. Le seul point non trivial est que b est un épimorphisme de faisceaux. Soit

$$u \in \mathsf{Aut}(M_n(\mathsf{O}_X))(U) = \mathrm{Aut}(M_n(\mathsf{O}_X)|U) \simeq \mathrm{Aut}(M_n(\mathsf{O}_X(U))).$$

D'après le résultat cité, appliqué à l'anneau $\mathsf{O}_X(U)$, il existe un recouvrement ouvert R de $\mathrm{Spec}(\mathsf{O}_X(U))$ sur lequel l'automorphisme u est intérieur, d'où par le morphisme (***), une section v de $M_n(\mathsf{O}_X)$ sur l'image inverse par $\mathsf{f}\colon X_{/U} \to \mathscr{U}$ du recouvrement R, d'où la conclusion, car v

induit u Nous récrirons désormais (4.1 (1)) sous la forme

$$1 \to \mathscr{G}_{m,X} \xrightarrow{a} \mathrm{GL}(n)_X \xrightarrow{b} \mathrm{PGL}(n)_X \to 1 \tag{2}$$

en ommettant le plus souvent les indices X.

On appelle Algèbre d'Azumaya sur X un faisceau de O_X-algèbres A tel qu'il existe une famille X_i, $i \in I$, couvrant l'objet final de X et, pour tout $i \in I$, un entier n_i tel que la restriction de A à X_i soit isomorphe à $M_{n_i}(\mathsf{O}_X | X_i)$.

Une telle Algèbre sera dite *banale* s'il existe une *banalisation* (L, u) de A, c'est-à-dire, par définition,. un O_X-Module localement libre L et un isomorphisme d'Algèbres u: $\mathsf{End}(L) \xrightarrow{\sim} A$.

4.2. A toute Algèbre d'Azumaya A est associée une gerbe

$$d(A) \tag{1}$$

dont les objets de projection $U \in \mathrm{Ob}(X)$ sont les banalisations de $A|U$. On l'appelle la *gerbe des banalisations de A*. C'est en effet une gerbe, car on peut la considérer comme le champ des relèvements (IV 2.5.4) de A par rapport au morphisme de champs

$$\mathsf{Lol}(X) \to \mathsf{Az}(X), \quad L \rightsquigarrow \mathsf{End}(L), \tag{2}$$

qui, à tout Module localement libre L sur un objet U de X, associe l'Algèbre d'Azumaya $\mathsf{End}(L)$. D'après (IV 2.5.4), ce champ est bien une gerbe car, par définition, le foncteur (2) est localement surjectif sur les objets et, puisque la suite (4.1 (1)) est exacte, il est localement surjectif sur les flèches: plus précisément, tout automorphisme d'une Algèbre $\mathsf{End}(L)$ provient localement pour la topologie de Zariski d'un automorphisme de L. Ceci dit, on fait opérer $\mathscr{G}_m = \mathsf{O}_X^*$ sur la gerbe $d(A)$ en associant à tout objet U de X et à toute banalisation (L, u) de $A|U$ le morphisme

$$\mathscr{G}_m(U) = \mathsf{O}_X(U)^* \to \mathrm{Aut}_U(L, u) \tag{3}$$

défini par les homothéties. Puisque (3) est un isomorphisme, on en conclut que $\mathscr{G}_m$ est le lien de $d(A)$. D'où une classe

$$d(A) \in H^2(X, \mathscr{G}_m), \tag{4}$$

encore notée $d(A)$ par abus de notation, dont la nullité est nécessaire et suffisante pour que la gerbe $d(A)$ admette une section, c'est-à-dire pour que A soit banale. Nous avons donc obtenu:

Lemme 4.3. Pour qu'une Algèbre d'Azumaya A soit banale il faut et il suffit que la classe $d(A) \in H^2(X, \mathscr{G}_m)$ de la gerbe des banalisations de A soit nulle.

Si A et B sont deux Algèbres d'Azumaya, on a

$$d(A \otimes B) = d(A) + d(B). \tag{1}$$

En effet, d'après l'explicitation de la structure de groupe de $H^2(X, *)$ donnée en (IV 3.3.2), il nous suffit de trouver un morphisme de gerbes

$$d(A) \times d(B) \to d(A \otimes B) \tag{2}$$

lié par le morphisme $\mathscr{G}_m \times \mathscr{G}_m \to \mathscr{G}_m$, $(x, y) \mapsto x + y$. On prend celui qui, à tout objet U, toute banalisation (L, u) de $A|U$ et toute banalisation (M, v) de $B|U$ associe $(L \otimes M, u \otimes v)$, qui est évidemment une banalisation de $A \otimes B$. On en déduit que

$$d(A^0) = -d(A), \tag{3}$$

où A^0 désigne l'Algèbre opposée à A. En effet, *l'isomorphisme* $A \otimes A^0 \to \mathrm{End}(\mathsf{A})$, $a \otimes b \mapsto (x \mapsto a\,x\,b)$, où A désigne le Module sous-jacent à A, est une banalisation de $A \otimes A^0$. En appliquant (4.3) à $A \otimes B^0$, on prouve que $d(A)$ et $d(B)$ sont égales si, et seulement si, il existe deux Modules localement libres L et M et un isomorphisme d'Algèbres

$$A \otimes \mathsf{End}(L) \xrightarrow{\sim} B \otimes \mathsf{End}(M). \tag{4}$$

4.4. En résumé, la relation (4) munit l'ensemble des classes à isomorphisme près d'Algèbres d'Azumaya d'une relation d'équivalence, le produit tensoriel munit le quotient $\mathrm{Br}(X)$ d'une structure de groupe abélien, appelé *groupe de Brauer du topos annelé* X, et, en associant à toute Algèbre d'Azumaya A la classe de la gerbe des banalisations de A, on définit un morphisme *injectif*

$$\mathrm{Br}(X) \to H^2(X, \mathscr{G}_m). \tag{1}$$

Remarque 4.5. Soit n un entier. La gerbe $\mathsf{Az}(n)$ des algèbres d'Azumaya de rang n^2, c'est-à-dire localement isomorphes à $M_n(\mathsf{O}_X)$, est équivalente d'après (III 2.2.6) à celle des torseurs sous $\mathrm{PGL}(n)$, le torseur associé à une Algèbre A étant $P = \mathsf{Isom}(M_n(\mathsf{O}_X), A)$. De même, la gerbe $\mathsf{Lol}(n)$ des Modules localement libres de rang n est équivalente à celle des torseurs sous $\mathrm{GL}(n)$, cependant que le morphisme de gerbes

$$\mathsf{Lol}(n) \to \mathsf{Az}(n), \qquad L \rightsquigarrow \mathsf{End}(L), \tag{1}$$

induit sur les faisceaux d'automorphismes des sections marquées O_X^n et $M_n(\mathsf{O}_X)$ le morphisme b: $\mathrm{GL}(n) \to \mathrm{PGL}(n)$ de (4.1 (2)). Par la propriété universelle de la gerbe des relèvements, il en résulte une équivalence de gerbes

$$d(A) \xrightarrow{\approx} d(P) \tag{2}$$

de la gerbe des banalisations de A dans celle des relèvements à $\mathrm{GL}(n)$ du torseur $P=\mathsf{Isom}(M_n(\mathsf{O}_X), A)$. Cette équivalence est liée par le morphisme identique de $\mathscr{G}_m$. En effet, puisque $\mathscr{G}_m$ est central (IV 2.5.6 (iii ter)) nous assure que cette assertion résulte du fait que le morphisme

$$d(A)\to \mathsf{Lol}(n), \qquad (L,u)\rightsquigarrow L,$$

est lié par le morphisme $a\colon \mathscr{G}_m\to \mathrm{GL}(n)$ de (4.1 (2)), ce qui est trivial. En conclusion, si A est de rang n^2, la classe $d(A)$ de la gerbe des banalisations de A est l'image de celle de P par l'application cobord

$$H^1(X, \mathrm{PGL}(n))\to H^2(X, \mathscr{G}_m) \tag{3}$$

attachée à la suite exacte (4.1 (1)).

4.6. Montrons que si A est une Algèbre d'Azumaya de rang n^2, *la classe de* $d(A)$ *dans* $H^2(X, \mathscr{G}_m)$ *est annulée par* n. La gerbe $\mathsf{Inv}(X)$ des O_X-Modules localement libres de rang 1 est triviale et liée par $\mathscr{G}_m$; de plus, on a un morphisme de gerbes

$$d(A)\to \mathsf{Inv}(X), \qquad (L,u)\rightsquigarrow \Lambda^n L,$$

qui est lié par

$$p_n\colon \mathscr{G}_m\to\mathscr{G}_m, \qquad p_n(x)=x^n.$$

D'après (IV 3.1.5), l'image de la classe de $d(A)$ par $H^2(X, p_n)$ est donc la classe de $\mathsf{Inv}(X)$, c'est-à-dire 0, d'où la conclusion.

Si p_n *est un épimorphisme de faisceaux*, on a une suite exacte

$$0\to \boldsymbol{\mu}_n \xrightarrow{i} \mathscr{G}_m \xrightarrow{p_n} \mathscr{G}_m\to 0 \tag{1}$$

qui définit $\boldsymbol{\mu}_n$. De plus, la suite

$$1\to \boldsymbol{\mu}_n\to \mathrm{SL}(n)\to \mathrm{PGL}(n)\to 1 \tag{2}$$

est alors exacte. On a un morphisme évident de la suite exacte (2) dans (4.1 (2)); par fonctorialité du second cobord (IV 4.2.12), on sait donc que, pour toute Algèbre d'Azumaya A de rang n^2, *la classe de* $d(A)$ *est l'image de la classe à isomorphisme près de* A *par le composé*

$$H^1(X, \mathrm{PGL}(n))\xrightarrow{d'} H^2(X, \boldsymbol{\mu}_n)\to H^2(X, \mathscr{G}_m), \tag{3}$$

où d' est le cobord attaché à (2). Il est d'ailleurs immédiat que $d'(A)$ est la classe de la gerbe G des (L, u, c), où (L, u) est une banalisation de A et où c est une base de $\Lambda^n L$ et que le morphisme évident $G\to d(A)$ est lié par $i\colon \boldsymbol{\mu}_n\to\mathscr{G}_m$.

Remarque 4.7. *(Calcul de $d(A)$ dans le cas topologique.)* Tout ce qui précède est valable lorsque X est le topos des faisceaux d'ensembles sur un espace topologique et que O_X est le faisceau des germes de fonctions continues à valeurs complexes. Le PGL(n)-torseur $\mathsf{P} = \mathsf{Isom}(M_n(\mathsf{O}_X), A)$ correspondant à une Algèbre d'Azumaya de rang constant n^2 est alors le faisceau des sections d'un torseur représentable (par un X-espace topologique) P. Puisque $\mu_n \simeq \mathscr{Z}/n\mathscr{Z}$ est discret et que $\mathrm{PGL}(n, \mathscr{C})$ est connexe, on peut appliquer (3.3.1), pour calculer la classe $d(P) \in H^2(X, \mu_n)$, ce qui, par (4.6) fournira la classe $d(A) \in H^2(X, \mathscr{G}_m)$ de A. Si $p\colon P \to X$ est la projection, $d(A)$ sera l'image par

$$H^0(X, R^1 p_*(\mu_n)) \xrightarrow{\delta} H^2(X, \mu_n) \to H^2(X, \mathscr{G}_m) \tag{1}$$

de la classe $t \in H^0(X, R^1 p_*(\mu_n))$ qui est caractérisée de la manière suivante. Soit (X_i) un recouvrement ouvert de X qui trivialise P et soit, pour tout i, un isomorphisme de torseurs $u_i\colon P|X_i \xrightarrow{\sim} \mathrm{PGL}(n)|X_i$. Soit encore $s \in H^1(\mathrm{PGL}(n), \mu_n)$ la classe obtenue en considérant que le morphisme

$$\mathrm{SL}(n, \mathscr{C}) \to \mathrm{PGL}(n, \mathscr{C})$$

définit un torseur sur PGL(n) sous μ_n. Soit encore $s_i \in H^1(P|X_i, \mu_n)$ l'image inverse de s par l'application continue composée

$$P|X_i \to \mathrm{PGL}(n) \times X_i \to \mathrm{PGL}(n).$$

Soit enfin $t_i \in R^1 p_*(\mu_n)(X_i)$ l'image de s_i. La classe t est caractérisée par la condition que sa restriction à chacun des X_i soit égale à t_i.

Exemple 4.8. *Calcul de la classe attachée à un fibré de Severi-Brauer.* Soit X un schéma et notons encore X le topos étale de X [SGA 4 VII] muni du faisceau d'anneaux défini par O_X. Le faisceau des unités $\mathscr{G}_m$ introduit plus haut est ici représentable par le groupe multiplicatif $\mathscr{G}_{m,X}$, par définition de ce dernier. Suivant [B I 8], on appelle fibré de Severi-Brauer sur X un X-schéma P qui, localement pour la topologie étale, est isomorphe à un espace projectif type $\mathscr{P}^r_X$. Ceux qui sont de dimension relative r forment une gerbe, car on peut recoller de tels fibrés pour la topologie $fpqc$ [B I 8.1]. Cette gerbe est munie d'une section définie par $\mathscr{P}^r_X$, donc est équivalente à la gerbe des torseurs sous $\mathsf{Aut}(\mathscr{P}^r_X)$. Or le morphisme naturel

$$\mathrm{PGL}(r+1)_X \xrightarrow{\sim} \mathsf{Aut}(\mathscr{P}^r_X) \tag{1}$$

est un isomorphisme (cf. par exemple, Mumford, Geometric Invariant Theory, Ergebnisse, Springer-Verlag, chap. 0 § 5), d'où une équivalence entre cette gerbe et celle des Algèbres d'Azumaya de rang $(r+1)^2$, d'où

aussi, grâce à la suite exacte (4.1 (2)), une classe

$$d(P)\in H^2(X,\mathscr{G}_m), \tag{2}$$

qui, d'après (4.5 (3)), est la même que celle de la gerbe des banalisations de l'Algèbre correspondant à P. Nous allons voir que cette classe est celle de *la gerbe des banalisations de P*, une banalisation d'un fibré de Severi-Brauer P étant un couple (V, v), où V est un O_X-Module localement libre et v: $P \xrightarrow{\sim} \mathscr{P}(\check{V})$, ($\check{V}$ est le dual de V), un isomorphisme de X-schémas. L'argument est analogue à celui de (4.5): on note que la gerbe $b(P)$ des banalisations de P est la gerbe des relèvements de P relativement au morphisme de champs

$$\mathsf{Lol}(r+1)\to\mathsf{SB}(r),\qquad V\rightsquigarrow\mathscr{P}(\check{V}), \tag{3}$$

qui, à tout O_X-Module localement libre de rang $r+1$, associe le fibré de Severi-Brauer $\mathscr{P}(\check{V})$. (N.B. on a eu recours à $\check{V}$, car $V\rightsquigarrow\mathscr{P}(V)$ est contravariant.) Nous donnerons dans (4.8.3) une description moins banale de $b(P)$.

Lemme 4.8.1. Soit p: $P\to X$ un fibré de Severi-Brauer de dimension relative r sur X. On a une gerbe

$$\Lambda(P) \tag{1}$$

sur X dont les objets de projection X' sont les Modules inversibles très amples L sur $P'=P\times_X X'$ tels que le morphisme naturel u: $P'\to \mathscr{P}(p_*(L))$ soit un isomorphisme. Cette gerbe est liée par $p_*(\mathscr{G}_{m,P})\approx\mathscr{G}_{m,X}$. Sa classe dans $H^2(X,\mathscr{G}_m)$ est l'*opposée* de celle de la gerbe des banalisations de P.

Que $\Lambda(P)$ soit une catégorie fibrée sur le site étale de X est assez clair. Par définition, si L est un objet de $\Lambda(P)$ de projection X', $(p_*(L)^\vee, u)$ est une banalisation de P'. On a donc un morphisme cartésien

$$\Lambda(P)\to b(P)^0,\qquad L\rightsquigarrow(p_*(L)^\vee,u). \tag{2}$$

Celui-ci est pleinement fidèle, car le morphisme $\mathscr{G}_{m,X}\xleftarrow{\sim} p_*(\mathscr{G}_{m,P})$ qui le lie est un isomorphisme, puisque p est propre à fibres géométriques connexes. Il reste à prouver que (2) est essentiellement surjectif. Or, si $(V, v\colon\ P\to\mathscr{P}(\check{V}))$ est une banalisation de P, le Module inversible $L=v^*(\mathsf{O}(1))$ est muni d'un isomorphisme $p_*(L)\xrightarrow{\sim}\check{V}$, ce qui prouve que (V, v) est l'image de L par (2). D'où la conclusion, car la classe de l'opposée $b(P)^0$ de $b(P)$ est l'opposée de celle de $b(P)$ (IV 3.3.2 (iii)).

4.8.2. Cette remarque va nous permettre de donner de $d(P)$ une description ne faisant pas intervenir de gerbes. Par construction même,

la gerbe $\Lambda(P)$ est une sous-gerbe maximale de l'image directe par $p\colon P \to X$ de la gerbe des Modules inversibles sur P, (III 2.1.3, II 3.1.5). En traduisant «gerbe des Modules inversibles» par «gerbe des torseurs sous $\mathscr{G}_m$», on trouve donc que $\Lambda(P)$ est une sous-gerbe maximale de l'image directe

$$p_*(\mathrm{TORS}(P, \mathscr{G}_{m,P}))$$

de la gerbe des torseurs sur P sous $\mathscr{G}_{m,P}$. D'après (3.1.5), $\Lambda(P)$ définit donc une classe

$$t \in H^0\big(X, R^1 p_*(\mathscr{G}_{m,P})\big). \tag{1}$$

4.8.2.1. On sait caractériser t de la manière suivante. Soit $\{X_i \to X\}$ une famille couvrant X et soit, pour tout i, un Module inversible très ample L_i sur $P \times_X X_i$ tel que le morphisme $P \times_X X_i \to \mathscr{P}\big(p_{i*}(L_i)\big)$ soit un isomorphisme. Alors L_i définit une classe $s_i \in H^1(P \times_X X_i, \mathscr{G}_{m,P\times_X X_i})$ dont l'image dans $R^1 p_*(\mathscr{G}_{m,P})(X_i)$ est notée t_i. D'après (3.1.5), la classe t est caractérisée par la condition que sa restriction à chacun des X_i est t_i. Ceci dit, d'après la description en termes de gerbes du morphisme de transgression

$$H^0\big(X, R^1 p_*(\mathscr{G}_{m,P})\big) \to H^2\big(X, p_*(\mathscr{G}_{m,P})\big), \tag{2}$$

l'image de la classe t est tout simplement la classe de la gerbe $\Lambda(P)$. Utilisant maintenant (3.2.1), qui nous assure que le morphisme (2) coïncide avec celui que l'on définit en algèbre homologique, on conclut ce qui suit en appliquant (4.8.1).

Proposition 4.8.3. Si P est un fibré de Severi-Brauer et si $t \in H^0\big(X, R^1 p_*(\mathscr{G}_{m,P})\big)$ est la classe attachée à P par (4.8.2.1), la classe $d(P)$ de la gerbe des banalisations de P est l'image de t par le composé

$$H^0\big(X, R^1 p_*(\mathscr{G}_{m,P})\big) \xrightarrow{d} H^2\big(X, p_*(\mathscr{G}_{m,P})\big) \xrightarrow{\sim} H^2(X, \mathscr{G}_{m,P}) \tag{1}$$

où d est la transgression et où l'isomorphisme est induit par l'isomorphisme $\mathscr{G}_{m,X} \xrightarrow{\sim} p_*(\mathscr{G}_{m,P})$. Pour que P soit banal, il faut et il suffit que $d(P)$ soit nulle.

4.9. Groupe de Picard et groupe de Brauer

Nous donnons ici la démonstration d'une assertion de [B III 5.4 (b)]. Soient X un schéma et X_{pl} le site $f\,p\,p\,f$ de X, dont les objets sont les X-schémas localement de présentation finie, la topologie étant engendrée par les familles surjectives $\{X_i \to X\}$ telle que chaque morphisme $\{X_i \to X\}$ soit plat et localement de présentation finie. Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme de schémas quasi-compact et quasi-séparé tel que le morphisme $\mathsf{O}_Y \to f_*(\mathsf{O}_X)$ soit un isomorphisme. La suite spectrale de Leray

du morphisme de sites $f_{\mathrm{pl}}\colon X_{\mathrm{pl}} \to Y_{\mathrm{pl}}$ fournit alors une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Pic}(Y) \to \mathrm{Pic}(X) \to H^0\big(Y, R^1 f_{\mathrm{pl}*}(\mathscr{G}_m)\big) \to H^2(Y, \mathscr{G}_{m,Y}). \qquad (1)$$

En effet, le morphisme $\mathscr{G}_{m,Y} \to f_{\mathrm{pl}*}(\mathscr{G}_{m,X})$ induit un isomorphisme $\mathscr{G}_{m,Y}(Y') \xrightarrow{\sim} f_{\mathrm{pl}*}(\mathscr{G}_{m,X})(Y')$ pour tout Y-schéma *plat* Y', ce qui suffit à impliquer que les morphismes

$$H^i(Y, \mathscr{G}_{m,Y}) \to H^i\big(Y, f_{\mathrm{pl}*}(\mathscr{G}_{m,X})\big), \quad i \geqq 0, \qquad (2)$$

sont des *isomorphismes*. Par définition. on a

$$\mathrm{Pic}(X/Y) = H^0\big(Y, R^1 f_*(\mathscr{G}_{m,X})\big) \qquad (3)$$

d'où un morphisme de transgression

$$d\colon\ \mathrm{Pic}(X/Y) \to H^2(Y, \mathscr{G}_{m,Y}). \qquad (4)$$

Les groupes de cohomologie sont pris au sens du site *f p p f* de X, mais, puisque $\mathscr{G}_m$ est lisse, ils coïncident avec ceux du site étale de X [B III Appendice].

Grothendieck démontre dans [B III 5.4] que, sous certaines conditions, l'image de d est contenue dans celle de $\mathrm{Br}(Y)$. Pour cela, il considère une classe $x \in \mathrm{Pic}(X/Y)$. Par l'interprétation du morphisme (4) en termes de gerbes, on sait que $d(x)$ est la classe de la gerbe $D(x)$ dont les objets de projection Y'/Y sont les Modules inversibles L' sur $X' = X \times_Y Y'$ dont la classe dans $R^1 f_*(\mathscr{G}_{m,X})(Y')$ est la restriction de x à Y'. Supposons que, pour tout objet L' de $D(x)$ de projection Y'/Y, le faisceau $f'_*(L')$ soit localement libre sur Y' et que sa formation commute à tout changement de base; cette condition est manifestement satisfaite dès qu'elle l'est pour une famille L_i d'objets de $D(x)$ dont les projections Y_i couvrent Y. Dans ce cas, $\mathscr{P}\big(f'_*(L')^\vee\big)$ est un fibré de Severi-Brauer, ce qui donne un morphisme $D(x) \to SB(Y)$ de la gerbe $D(x)$ dans le champ des fibrés de Severi-Brauer sur Y; ce morphisme étant lié par le morphisme nul, il définit à isomorphisme unique près un fibré de Severi-Brauer P et l'on a par construction un morphisme $D(x) \to b(P)$ à valeurs dans la gerbe des banalisations de P. De plus, ce morphisme est lié par le morphisme identique de $\mathscr{G}_{m,Y}$, ce qui prouve que l'image $d(x)$ de x par d est la classe de $b(P)$, donc appartient à $\mathrm{Br}(Y)$. La proposition suivante résulte alors du fait que, sous ses hypothèses, toute classe $x \in \mathrm{Pic}(X/Y)$ est différence de deux classes x' et x'' satisfaisant à la condition ci-dessus, [EGA III 2.2.1, 7.9.13].

Proposition 4.9.1. Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme projectif, plat et de présentation finie tel que Y soit quasi-compact et tel que $\mathsf{O}_Y \to f_*(\mathsf{O}_X)$ soit un isomorphisme. Alors l'image de l'application $d\colon \mathrm{Pic}(X/Y) \to H^2(Y, \mathscr{G}_m)$ est contenue dans $\mathrm{Br}(Y)$.

Chapitre VI

Liens et 3-cohomologie

§ 1. Effaçabilité

Dans ce paragraphe nous prouvons la proposition suivante, qui est fondamentale pour le paragraphe suivant. La structure de la démonstration est donnée dans (1.11.1).

Proposition 1.1. Soient E un U-site et L un lien sur E. Si le centre C de L est un objet injectif de la catégorie des faisceaux de groupes abéliens, alors L est réalisable [autrement dit, il existe une L-gerbe, autrement dit $H^2(L) \neq \emptyset$].

1.1.1. D'après (V 1.2.4 et 1.4.2), on peut remplacer E par le U-topos associé et donc supposer que E *est un* U-*topos*, dont on choisit *un objet final noté* S. Puisque L est localement représentable, il existe une famille couvrante $\{T_i \to S\}$ telle que, pour tout i, la restriction de L à T_i soit représentable. Soit T la somme directe des T_i. Le morphisme

$$f\colon\ T \to S \tag{1}$$

est couvrant car il est dominé par une famille couvrante. Par ailleurs, la restriction de L à T est représentable. En effet, les représentants de L forment une gerbe $\mathrm{REP}(L)$ (IV 3.2.2), donc, en particulier $\mathrm{REP}(L)$ est un champ, donc, d'après [D 9.27] et (0 2.6 (iv) (b)), le foncteur produit des foncteurs images inverses

$$\mathrm{REP}(L)_T \xrightarrow{\approx} \prod_{i \in I} \mathrm{REP}(L)_{T_i}$$

est une équivalence, car $\{T_i \to T\}$ est couvrante. Nous avons donc prouvé le lemme que voici.

Lemme 1.2. Sous les hypothèses de (1.1), si, de plus, E est un U-topos, il existe un morphisme couvrant $f\colon T \to S$ et un représentant $(A, u\colon \mathrm{lien}(A) \xrightarrow{\sim} L^T)$ de la restriction de L à T, où S est l'objet final de E.

1.3. Nous désignerons par

$$\text{Simpl} \tag{1}$$

la sous-catégorie pleine de la catégorie des ensembles dont les objets sont les intervalles

$$\Delta_n=[0,n] \quad \text{de} \quad \mathcal{N}, \qquad n\in\mathcal{N}. \tag{2}$$

Nous considérerons certaines des applications suivantes, $n\in\mathcal{N}$,

$$\begin{aligned} &q_n^i\colon\ \Delta_0\to\Delta_n, \qquad 0\leqq i\leqq n,\\ &q_n^i(0)=i, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &q_n^{ij}\colon\ \Delta_1\to\Delta_n, \qquad 0\leqq i\leqq j\leqq n,\\ &q_n^{ij}(0)=i, \qquad q_n^{ij}(1)=j, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &q_n^{ijk}\colon\ \Delta_2\to\Delta_n, \qquad 0\leqq i\leqq j\leqq k\leqq n,\\ &q_n^{ijk}(0)=i, \qquad q_n^{ijk}(1)=j, \qquad q_n^{ijk}(2)=k, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &q_n^{ijki}\colon\ \Delta_3\to\Delta_n, \qquad 0\leqq i\leqq j\leqq k\leqq l\leqq n,\\ &q_n^{ijki}(0)=i, \qquad q_n^{ijki}(1)=j, \qquad q_n^{ijki}(2)=k, \qquad q_n^{ijki}(3)=l, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &p_n^i\colon\ \Delta_{n-1}\to\Delta_n, \qquad 0\leqq i\leqq n,\\ &p_n^i(j)=j \qquad \text{si} \quad j<i\\ &p_n^i(j)=j+1 \quad \text{si} \quad j\geqq i. \end{aligned} \tag{7}$$

De plus, nous choisissons un foncteur qui commute aux produits

$$[T]\colon\ (\text{Simpl})^0\to E, \tag{8}$$

et qui vérifie

$$[T](\Delta_0)=T. \tag{9}$$

Nous posons

$$[T](\Delta_n)=T_n, \qquad n\geqq 0, \qquad [\text{donc } T_0=T], \tag{10}$$

(donc T_n est la puissance $(n+1)$-ième de T dans E) et *nous désignons par les mêmes symboles les applications* (3) *à* (7) *et leurs images par* $[T]$ (lesquelles vont donc «en sens inverse»).

1.4. Il est temps de préciser comment les champs avec lesquels nous travaillons sont munis de *scindages*. Par construction, on a un morphisme de champs scindés

$$\text{lien}\colon\ \text{FAGRSC}\to\text{LIEN} \qquad (\text{IV } 1.1.5\,(5)) \tag{1}$$

où la fibre de FAGRSC en $X\in\text{Ob}(E)$ est la catégorie des faisceaux de groupes sur le site $E_{/X}$, le foncteur image inverse associé à une flèche

$m: X \to Y$ étant la composition avec le foncteur naturel $E_{/X} \to E_{/Y}$. Par ailleurs, L est un objet de la fibre de LIEN en l'objet final S (IV 1.1.6.1); grâce au *scindage* de LIEN, il définit une section cartésienne L' de LIEN au dessus de E. La gerbe $\mathrm{REP}(L)$ des représentants de L (définie grâce à L' (IV 3.2.1)) a donc pour objets de projection $X \in \mathrm{Ob}(E)$ les couples (A, u), où A est un faisceau de groupes sur $E_{/X}$, où $u: \mathsf{lien}(A) \xrightarrow{\sim} L^X$ est un X-isomorphisme dans LIEN, et où L^X désigne l'image inverse de L par le morphisme final $X \to S$. Il en résulte immédiatement que $\mathrm{REP}(L)$ est munie d'un *scindage* tel que l'image inverse de (A, u) par $m: Y \to X$ soit (A^m, u^m) où A^m est la restriction de A à Y et où $u^m: \mathsf{lien}(A)^m \xrightarrow{\sim} (L^X)^m$ est la restriction de u à m (image inverse par le scindage de LIEN) et s'écrit aussi $u^m: \mathsf{lien}(A^m) \xrightarrow{\sim} L^Y$, car (1) est un morphisme de catégories scindées. Enfin, si A et B sont deux faisceaux de groupes sur $E_{/X}$, $X \in \mathrm{Ob}(E)$, un A-B-bitorseur (III 1.5.3) sera considéré comme un faisceau d'ensembles sur $E_{/X}$ muni d'opérations de A et B, plutôt que comme un objet du topos $E_{/X}$; d'où, encore une fois, un *scindage canonique*.

Lemme 1.5. Sous les hypothèses de (1.2), soit $T \in \mathrm{Ob}(E)$ et soit $(A, u: \mathsf{lien}(A) \xrightarrow{\sim} L_0)$ un représentant de la restriction L_0 de L à T. Pour tout couple (n, i) d'entiers, $0 \leqq i \leqq n$, notons

$$(A_n^i, u_n^i: \mathsf{lien}(A_n^i) \xrightarrow{\sim} L_n) \tag{1}$$

l'image inverse de (A, u) par $q_n^i: T_n \xrightarrow{\sim} T$, $[T_0 = T$, (1.3)]. Soient i, j, n des entiers, $0 \leqq i \leqq j \leqq n$. Il existe un A_n^i-A_n^j-bitorseurs P_n^{ij} sur T_n, unique à isomorphisme près, tel que l'isomorphisme naturel

$$\pi(P_n^{ij}): \mathsf{lien}(A_n^j) \xrightarrow{\sim} \mathsf{lien}(A_n^i) \quad \text{(IV 3.2.5)} \tag{2}$$

soit égal au composé $(u_n^i)^{-1} \cdot u_n^j$.

En effet, la catégorie des A_n^i-A_n^j-bitorseurs sur T_n vérifiant la condition de l'énoncé est *équivalente* d'après (IV 5.2.5) à celle des L_n-morphismes $T^j \to T^i$ où T^j (resp. T^i) désigne la gerbe des A_n^j-torseurs (resp. A_n^i-torseurs) sur le site $E_{/T_n}$. Or la *gerbe* $\mathrm{HOM}_{L_n}(T^j, T^i)$ des L_n-morphismes de T^j dans T^i est liée par le centre C_n de L_n (IV 2.3.2 (iii)). Or C_n est la restriction à T_n du centre C de L, donc est un objet injectif de la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur T_n, donc $H^1(T_n, C_n) = H^2(T_n, C_n) = 0$. D'après (IV 3.4.2) (III 3.5.4) et (III 2.5.2), la fibre en T_n de la gerbe H a donc un objet et, à isomorphisme près, un seul, d'où le lemme car cette fibre est la catégorie des L_n-morphismes $T^j \to T^i$.

1.6. Jusqu'à la fin de ce paragraphe, *nous choisissons un représentant* (A, u) *de la restriction* L_0 *de* L *à* T *et un* A_1^0-A_1^1-*bitorseur* P *sur* T_1 *vérifiant*

la condition de (1.5). Soit

$$P_n^{ij}, \quad 0 \leqq i \leqq j \leqq n \tag{1}$$

l'image inverse de P par $q_n^{ij}: T_n \to T_1$ (1.3 (4)). Par transitivité de l'image inverse, P_n^{ij} est un A_n^i-A_n^j-bitorseur sur T_n, car on a (dans (Simpl)^0 et dans E)

$$q_1^0 \cdot q_n^{ij} = q_n^i, \quad q_1^1 \cdot q_n^{ij} = q_n^j, \quad 0 \leqq i \leqq j \leqq n. \tag{2}$$

De plus, toujours par transitivité de l'image inverse (1.4), le bitorseur P_n^{ij} vérifie la condition de (1.5). Posons

$$P_n^{ij} \wedge P_n^{jk} = P_n^{ij} \overset{A_n^j}{\wedge} P_n^{jk}, \quad 0 \leqq i \leqq j \leqq k \leqq n. \tag{3}$$

C'est un A_n^i-A_n^k-bitorseur qui, d'après (IV 5.2.6), vérifie la condition de (1.5). Prenons $n=2$. D'après (1.5), *il existe un isomorphisme de* A_2^0-A_2^2-bitorseurs sur T_2

$$\mathrm{m}: \ P_2^{01} \wedge P_2^{12} \xrightarrow{\sim} P_2^{02}. \tag{4}$$

Notons que, par la propriété universelle du produit contracté (III 1.3.1), la donnée de m équivaut à celle d'un morphisme

$$m: \ P_2^{01} \times P_2^{12} \to P_2^{02} \tag{5}$$

tel que, pour tout $X \in \mathrm{Ob}(E_{/T_2})$ et pour tout

$$(a, p, b, q, c) \in (A_2^0 \times P_2^{01} \times A_2^1 \times P_2^{12} \times A_2^2)(X),$$

on ait

$$m(a\,p\,b, b^{-1}\,q\,c) = a\,m(p, q)\,c. \tag{6}$$

1.7. Si m est un morphisme tel que (1.6 (5)), on notera

$$m_n^{ijk}: \ P_n^{ij} \times P_n^{jk} \to P_n^{ik}, \quad 0 \leqq i \leqq j \leqq k \leqq n, \tag{1}$$

son image inverse par le morphisme $q_n^{ijk}: T_n \to T_2$ (1.3). La source et le but de m_n^{ijk} sont bien celles indiquées par (1), car on a les relations (dans (Simpl)^0 et E)

$$q_2^{01}\, q_n^{ijk} = q_n^{ij}, \quad q_2^{12}\, q_n^{ijk} = q_n^{jk}, \quad q_2^{02}\, q_n^{ijk} = q_n^{ik}, \quad 0 \leqq i \leqq j \leqq k \leqq n. \tag{2}$$

D'autre part, la formation du produit contracté commute à la localisation. Donc (1) induit isomorphisme de A_n^i-A_n^k-bitorseurs

$$\mathrm{m}_n^{ijk}: \ P_n^{ij} \wedge P_n^{jk} \xrightarrow{\sim} P_n^{ik}, \quad 0 \leqq i \leqq j \leqq k \leqq n. \tag{3}$$

Nous travaillerons avec m plutôt que m en prévision de (1.11) et aussi pour éviter des choix et des identifications canoniques ...

Lemme 1.8. Sous les hypothèses de (1.5) et (1.6), il existe un morphisme

$$m\colon\ P_2^{01}\times P_2^{12}\to P_2^{02} \tag{1}$$

vérifiant (1.6 (6)) et tel que le carré ci-dessous soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} P_3^{01}\times P_3^{12}\times P_3^{23} & \xrightarrow{m_3^{012}\times I^{23}} & P_3^{02}\times P_3^{23} \\ \downarrow{\scriptstyle I^{01}\times m_3^{123}} & & \downarrow{\scriptstyle m_3^{023}} \\ P_3^{01}\times P_3^{13} & \xrightarrow[m_3^{013}]{} & P_3^{03} \end{array} \tag{2}$$

où I^{ij} désigne le morphisme identique de P_3^{ij} et où m_3^{ijk} est l'image inverse de m par q_3^{ijk} (1.7).

1.8.1. Nous allons devoir ajuster m car les P_n^{ij} ont des automorphismes non triviaux. En effet, d'après (IV 1.5.3), on a des morphismes de faisceaux de groupes sur T_1

$$z_i\colon\ C_1\to A_1^i,\qquad i=0,1, \tag{1}$$

caractérisés par $u_1^i\cdot \mathsf{lien}(z_i)=c_1$, où $c_1\colon \mathsf{lien}(C_1)\to L_1$ est la restriction à T_1 du morphisme structural du centre C de L. De plus, z_i *identifie* C_1 *au centre de* A_1^i. En vertu de (III 1.5.6), on a donc des isomorphismes

$$\begin{aligned} &v_i\colon\ C_1\xrightarrow{\sim}\mathsf{Aut}(P),\qquad i=0,1,\\ &v_0(x)(p)=z_0(x)\,p,\qquad v_1(x)(p)=p\,z_1(x). \end{aligned} \tag{2}$$

En fait on a

$$v_0=v_1, \tag{3}$$

comme il résulte immédiatement de l'hypothèse que $\pi(P)=(u_1^0)^{-1}\cdot u_1^1$, (1.6) (1.5), qui entraîne $\pi(P)\,\mathsf{lien}(z_1)=\mathsf{lien}(z_0)$, et de la définition de $\pi(P)$ (IV 3.2.5 (1)). On a donc des isomorphismes de groupes

$$v_0(T_n)\colon\ C(T_n)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Aut}(P_n^{ij}),\qquad 0\leqq i\leqq j\leqq n, \tag{4}$$

par lesquels, pour toute flèche $f\colon T_r\to T_n$ de E vérifiant $q_n^{ij}f=q_r^{ki}$, le morphisme $C(f)\colon C(T_n)\to C(T_r)$ s'identifie au morphisme

$$\mathrm{Aut}(P_n^{ij})\to\mathrm{Aut}(P_r^{ki}) \tag{5}$$

induit par le foncteur image inverse attaché à f. Enfin il résulte aisément de (3) et (1.6 (6)) que, pour tout $x\in C(T_n)$ et tout système d'entiers (i,j,k,l,n), $0\leqq i\leqq j\leqq k\leqq l\leqq n$, on a

$$x^{ik}\cdot m_n^{ijk}=m_n^{ijk}\cdot(x^{ij}\times I^{jk})=m_n^{ijk}\cdot(I^{ij}\times x^{jk}), \tag{6}$$

où m_n^{ijk} est le morphisme de (1.7 (1)), où I^{ij} est l'identité de P_n^{ij} et où x^{ij} est l'image de x par (4).

1.9. Pour tout morphisme m: $P_2^{01} \times P_2^{12} \to P_2^{02}$ comme dans (1.8), on définit une section

$$D(m) \in C(T_3) \tag{1}$$

en identifiant $D(m)$ à un automorphisme de P_3^{03} et en imposant

$$D(m) \cdot m_3^{023} \cdot (m_3^{012} \times I^{23}) = m_3^{013} \cdot (I^{01} \times m_3^{123}). \tag{2}$$

En effet, par la propriété universelle du produit contracté, le carré (1.8 (2)) définit deux isomorphismes de bitorseurs $P_3^{01} \wedge P_3^{12} \wedge P_3^{23} \xrightarrow{\sim} P_3^{03}$. Nous prouverons dans (1.9.1) que, pour tout $x \in C(T_2)$, on a

$$D(x\,m) = d(x)\,D(m) \tag{3}$$

où

$$d(x) = x^0 (x^1)^{-1} x^2 (x^3)^{-1}, \qquad x^i = C(p_3^i)(x), \qquad (1.3\,(7)), \tag{4}$$

et où, pour définir $x\,m$, on identifie x à un automorphisme de P_2^{02}. Nous prouverons dans (1.10) que $D(m)$ est un 3-*cocycle* du complexe $C^*(T/S, C)$ de (III 3.6.7). *Ces deux faits entrainent* (1.8). En effet, d'après (1.6), il existe au moins un morphisme m et, puisque C est un injectif, le cocycle $D(m)$ sera un cobord [SGA 4 V § 5.1.5], ce qui, d'après (3), permet de modifier m de telle sorte que (1.8 (2)) soit commutatif.

1.9.1. Prouvons (3). Par définition, si $\{i, j, k\} \cup \{l\} = [0, 3]$, on a

$$p_3^l = q_3^{ijk}. \tag{5}$$

Pour accorder les notations (4) et (1.7 (1)), on posera

$$m^l = m_3^{ijk}, \qquad \{i, j, k\} \cup \{l\} = [0, 3]. \tag{6}$$

Ceci dit, le diagramme (1.8 (2)) relatif à $x\,m$ s'écrit

$$\begin{array}{ccc} P_3^{01} \times P_3^{12} \times P_3^{23} & \xrightarrow{(x^3 m^3) \times I^{23}} & P_3^{02} \times P_3^{23} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle I^{01} \times (x^0 m^0)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle x^1 m^1} \\ P_3^{01} \times P_3^{13} & \xrightarrow[x^2 m^2]{} & P_3^{03} \end{array} \tag{7}$$

car les isomorphismes de (1.8.1 (4)) sont compatibles avec la localisation (loc. cit.). Posons

$$S = x^1 \cdot m^1 \cdot ((x^3 \cdot m^3) \times I^{23}). \tag{8}$$

On a trivialement

$$S = x^1 \cdot m^1 \cdot (x^3 \times I^{23}) \cdot (m^3 \times I^{23}), \tag{9}$$

et aussi, par (1.6 (6)),

$$S = x^1 \cdot x^3 \cdot m^1 \cdot (m^3 \times I^{23}), \tag{10}$$

d'où, pour les mêmes raisons

$$T = x^2 \cdot m^2 \cdot (I^{01} \times (x^0 \cdot m^0)) = x^2 \cdot x^0 \cdot m^2 \cdot (I^{01} \times m^0). \qquad (11)$$

Par définition, on a $D(x\,m) \cdot S = T$, d'où l'on déduit

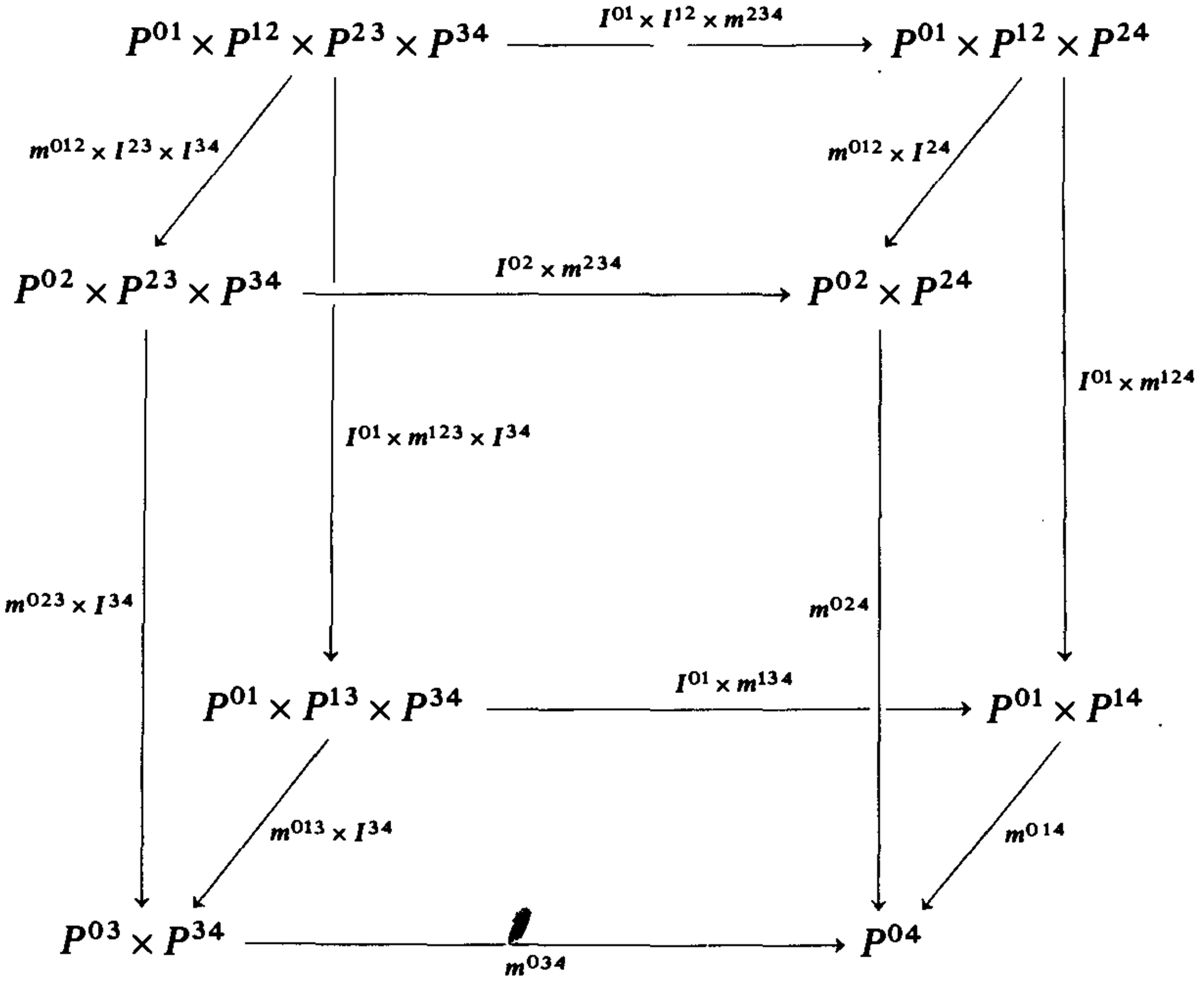
$$D(x\,m) \cdot x^1 \cdot x^3 \cdot m^1 \cdot (m^3 \times I^{23}) = x^2 \cdot x^0 \cdot D(m) \cdot m^1 \cdot (m^3 \times I^{23}), \qquad (12)$$

ce qui prouve (3), car on peut diviser par $m^1 \cdot (m^3 \times I^{23})$ qui est un épimorphisme (cf. 1.6 (5)).

1.10. Prouvons que $D(m)$ est un 3-cocycle. Remarquons d'abord que les dix morphismes

$$q_4^{ijk}\colon\ T_4 \to T_2, \quad 0 \leqq i < j < k \leqq 4, \quad (1.3\,(5)), \qquad (1)$$

donnent naissance, par image inverse, au diagramme ci-dessous, où l'on adopte les notations de (1.7 (1)), à ceci près que l'on a supprimé les indices inférieurs qui sont tous égaux à 4. De plus, I^{ij} désigne le morphisme identique de P^{ij}.



1.10.1. Nous allons donner des noms aux six composés possibles, lesquels, en fait, ne sont que cinq car la face supérieure du cube est

visiblement *commutative*. On pose

$$A = m^{024}(I^{02} \times m^{234})(m^{012} \times I^{23} \times I^{34})$$
$$= m^{024}(m^{012} \times I^{24})(I^{01} \times I^{12} \times m^{234})$$
$$B = m^{034}(m^{023} \times I^{34})(m^{012} \times I^{23} \times I^{34})$$
$$C = m^{034}(m^{013} \times I^{34})(I^{01} \times m^{123} \times I^{34})$$
$$D = m^{014}(I^{01} \times m^{134})(I^{01} \times m^{123} \times I^{34})$$
$$E = m^{014}(I^{01} \times m^{124})(I^{01} \times I^{12} \times m^{234}).$$

Nous allons relier les cinq faces restantes du cube aux images inverses du carré (1.8 (2)) par les projections p_4^i: $T_4 \to T_3$, $0 \leqq i \leqq 4$. Pour cela, remarquons que l'on a les relations

$$q_3^{ij} p_4^r = q_4^{i'j'}, \qquad 0 \leqq i < j \leqq 3, \qquad 0 \leqq r \leqq 4, \tag{1}$$

$$q_3^{ijk} p_4^r = q_4^{i'j'k'}, \quad 0 \leqq i < j < k \leqq 3, \quad 0 \leqq r \leqq 4 \tag{2}$$

où, pour $0 \leqq x \leqq 3$ et $0 \leqq r \leqq 4$, on définit x' par

$$x' = x \quad \text{si} \quad x < r \quad \text{et} \quad x' = x+1 \quad \text{si} \quad x \geqq r, \tag{3}$$

voir (1.3). Posons encore

$$X^i = C(p_4^i)(D(m)), \qquad 0 \leqq i \leqq 4, \tag{4}$$

où $D(m) \in C(T_3)$ est la section définie, d'après (1.9 (2)), par

$$D(m) \cdot m_3^{023} \cdot (m_3^{012} \times I^{23}) = m_3^{013} \cdot (I^{01} \times m_3^{123}). \tag{5}$$

Par définition de m_n^{ijk} (1.7 (1)) et P_n^{ij} (1.6 (1)), par transitivité du changement de base (1.4) et les formules (1) et (2) et enfin par (1.8.1 (5)), la formule (5) donne, en appliquant le foncteur image inverse défini par p_4^0,

$$X^0 m^{134}(m^{123} \times I^{34}) = m^{124}(I^{12} \times m^{234}). \tag{6}$$

En multipliant à gauche par le morphisme I^{01}, on trouve la relation

$$(I^{01} \times X^0)(I^{01} \times m^{134})(I^{01} \times m^{123} \times I^{34}) = (I^{01} \times m^{124})(I^{01} \times I^{12} \times m^{234}), \tag{7}$$

qui exprime le défaut de commutativité de la face arrière du cube. En vertu de (1.8.1 (6)), on a

$$m^{014}(I^{01} \times X^0) = X^0 m^{014}.$$

En composant à gauche par m^{014}, on déduit donc de (7) la relation

$$X^0 D = E. \tag{8}$$

L'image inverse de (5) par p_4^1 donne la relation

$$X^1 m^{034}(m^{023} \times I^{34}) = m^{024}(I^{02} \times m^{234}) \quad \text{(face avant)}; \tag{9}$$

en composant à droite par $m^{012} \times I^{23} \times I^{34}$, on trouve

$$X^1 B = A. \tag{10}$$

L'image inverse de (5) par p_4^2 donne la relation

$$X^2 m^{034}(m^{013} \times I^{34}) = m^{014}(I^{01} \times m^{134}) \quad \text{(face du bas)}. \tag{11}$$

En composant à droite par $I^{01} \times m^{123} \times I^{34}$, on trouve

$$X^2 C = D. \tag{12}$$

L'image inverse de (5) par p_4^3 donne la relation

$$X^3 m^{024}(m^{012} \times I^{24}) = m^{014}(I^{01} \times m^{124}) \quad \text{(face de droite)}. \tag{13}$$

En composant à droite avec $I^{01} \times I^{12} \times m^{234}$, on trouve

$$X^3 A = E. \tag{14}$$

L'image inverse de (5) par p_4^4 donne la relation

$$X^4 m^{023}(m^{012} \times I^{23}) = m^{013}(I^{01} \times m^{123}), \quad \text{(face de gauche)}, \tag{15}$$

d'où, en multipliant à droite par I^{34}

$$\begin{aligned}(X^4 \times I^{34})(m^{023} \times I^{34})(m^{012} \times I^{23} \times I^{34}) \\ = (m^{013} \times I^{34})(I^{01} \times m^{123} \times I^{34}).\end{aligned} \tag{16}$$

En vertu de (1.8.1 (6)), on a $m^{034}(X^4 \times I^{34}) = X^4 m^{034}$. En composant à gauche (16) par m^{034}, on trouve donc

$$X^4 B = C. \tag{17}$$

D'où

$$E = X^0 X^2 X^4 B = X^3 X^1 B. \tag{18}$$

Il est clair que B est un épimorphisme de faisceaux (1.6), donc (18) entraîne que $D(m)$ est un 3-cocycle, *ce qui achève la preuve de* (1.8).

Proposition 1.11. Soient E un U-site standard (0 2.5.2), S un objet final de E et

$$[T] : (\mathrm{Simpl})^0 \to E \tag{1}$$

un foncteur qui commute aux produits. On pose

$$T_n = [T](\Delta_n), \quad n \geqq 0, \tag{2}$$

et l'on désigne par les mêmes symboles les applications définies dans (1.3) et leurs images par $[T]$. Soit A un faisceau de groupes sur T_0 et soit

$$A_n^i \tag{3}$$

son image inverse (1.4) par q_n^i: $T_n \to T_0$, $0 \leqq i \leqq n$. Soit P un A_1^0-A_1^1-bitorseur sur T_1 et soit

$$P_n^{ij} \tag{4}$$

son image inverse par q_n^{ij}: $T_n \to T_1$, $0 \leqq i \leqq j \leqq n$, laquelle est un A_n^i-A_n^j-bitorseur (1.4) (1.6 (2)). *Soit*

$$\mathsf{m}\colon\ P_2^{01} \overset{A_2^1}{\wedge} P_2^{12} \xrightarrow{\sim} P_2^{02} \tag{5}$$

un isomorphisme de A_2^0-A_2^2-bitorseurs et soit

$$m\colon\ P_2^{01} \times P_2^{12} \to P_2^{02} \tag{6}$$

le morphisme correspondant (1.6 (5)). On note

$$m_n^{ijk}\colon\ P_n^{ij} \times P_n^{jk} \to P_n^{ik} \tag{7}$$

l'image inverse de m par q_n^{ijk}: $T_n \to T_2$, $0 \leqq i \leqq j \leqq k \leqq n$. *On suppose* que le morphisme final $T_0 \to S$ est couvrant et que

$$m_3^{023} \cdot (m_3^{012} \times I^{23}) = m_3^{013} \cdot (I^{01} \times m_2^{123}), \quad (1.8\,(2)). \tag{8}$$

Alors il existe une E-gerbe scindée G, un $t \in \mathrm{Ob}(G(T_0))$, un isomorphisme de faisceaux de groupes sur T_0

$$i\colon\ A \xrightarrow{\sim} \mathsf{Aut}_{T_0}(t) \tag{9}$$

et un isomorphisme de A_1^0-A_1^1-bitorseurs sur T_1

$$w\colon\ \mathsf{Isom}_{T_1}(t_1^1, t_1^0) \xrightarrow{\sim} P, \tag{10}$$

où

$$t_n^i \tag{11}$$

est l'image inverse de t par q_n^i: $T_n \to T_0$, $0 \leqq i \leqq n$, de telle sorte que m s'identifie par (10) à l'accouplement de composition:

$$\mathsf{Isom}_{T_2}(t_2^1, t_2^0) \times \mathsf{Isom}_{T_2}(t_2^2, t_2^1) \to \mathsf{Isom}_{T_2}(t_2^2, t_2^0). \tag{12}$$

1.11.1. *Montrons comment* (1.1) *résulte de* (1.11). D'après (1.1.1) il suffit de prouver (1.1) lorsque E est un U-topos, [donc un U-site standard]. Le lemme (1.2) fournit un morphisme couvrant $T_0 \to S$, un foncteur $[T]$, un faisceau de groupes A sur T_0 et un isomorphisme de liens sur T_0

$$u\colon\ \mathsf{lien}(A) \xrightarrow{\sim} L_0. \tag{1}$$

Le lemme (1.5) fournit un bitorseur P et (1.8) fournit un isomorphisme m vérifiant (8). Soient M le lien de la gerbe fournie par (1.11) et M_n son image inverse par le morphisme final $T_n \to S$. Pour prouver (1.1), il suffit de construire un isomorphisme $L \approx M$. On a des *isomorphismes* de liens sur T_0

$$M_0 \xrightarrow{a} \mathsf{lien}(\mathsf{Aut}_{T_0}(t)) \xrightarrow{b} \mathsf{lien}(A) \xrightarrow{u} L_0 \tag{2}$$

où $b^{-1} = \mathsf{lien}(i)$ et où a fait partie de la définition de M (IV 2.2.2.2). Il suffit de prouver que $u\,b\,a$ est compatible avec les données de descente naturelles [D 9.8] dont sont munis L_0 et M_0. En effet, par hypothèse $T_0 \to S$ est couvrant et, par construction, les liens forment un champ. Puisque le champ des liens est scindé, la condition susdite est simplement

$$u^1\,b^1\,a^1 = u^0\,b^0\,a^0 \tag{3}$$

où l'exposant i désigne l'image inverse par $p_1^i\colon T_1 \to T_0$, $0 \leqq i \leqq 1$. Or, en vertu de (1.5 (2)), on a $u^1 = u^0\,\pi(P)$; puisque w est un isomorphisme de A_1^0-A_1^1-bitorseurs on a

$$\pi(P)\,b^1 = b^0\,\pi(\mathsf{Isom}(x_1^1, x_1^0)) \tag{4}$$

et, en vertu de (IV 2.2.2.2, 2.5.2, 3.2.5), on a

$$\pi(\mathsf{Isom}(x_1^1, x_1^0))\,a^1 = a^0, \tag{5}$$

ce qui achève la preuve de (3) et réduit (1.1) à (1.11).

On notera que l'argument ci-dessus prouve le corollaire suivant.

Corollaire 1.11.2. Sous les hypothèses de (1.11), l'isomorphisme

$$\pi(P)\colon \mathsf{lien}(A_1^1) \xrightarrow{\sim} \mathsf{lien}(A_1^0), \quad \text{(IV 3.5.2)} \tag{1}$$

est une donnée de descente sur $\mathsf{lien}(A)$ relativement à $T_0 \to S$. La gerbe G est liée par le lien sur S obtenu par descente.

1.11.3. Prouvons (1.11). Définissons d'abord un faisceau de catégories G sur E. Pour tout $X \in \mathrm{Ob}(E)$, on pose

$$\mathrm{Ob}(G)(X) = \mathrm{Hom}(X, T_0) \quad (= T_0(X)). \tag{1}$$

Pour tout couple (x, y) d'éléments de $\mathrm{Ob}(G)(X)$, on définit

$$[x, y] \in \mathrm{Hom}(X, T_1) \quad \text{par} \quad x = q_1^0 \cdot [x, y], \quad y = q_1^1 \cdot [x, y], \tag{2}$$

ce qui est licite car le foncteur $[T]$ commute aux produits. On pose alors

$$\mathrm{Hom}(y, x) = P([x, y]), \quad (\text{nota } [x, y] \in \mathrm{Ob}(E_{/T_1})). \tag{3}$$

Notons que $\mathrm{Hom}(y, x)$ est l'ensemble des sections du *bitorseur* obtenu en restreignant P à X par $[x, y]: X \to T_1$. Si x, y et z sont des éléments de $\mathrm{Ob}(G)(X)$, on définit

$$[x, y, z] \in \mathrm{Hom}(X, T_2) \tag{4}$$

par

$$x = q_2^0 \cdot [x, y, z], \quad y = q_2^1 \cdot [x, y, z], \quad z = q_2^2 \cdot [x, y, z], \tag{5}$$

ce qui est licite car $[T]$ commute aux produits. Par définition des P_n^{ij} (1.11 (4)) (1.4), la valeur en l'objet $[x, y, z]$ de $E_{/T_2}$ du morphisme de faisceaux m de (1.11 (6)) s'écrit donc

$$\mathrm{Hom}(y, x) \times \mathrm{Hom}(z, y) \to \mathrm{Hom}(z, x). \tag{6}$$

On notera

$$(f, g) \mapsto f * g, \tag{7}$$

l'application (6). Il est immédiat que la relation (1.11 (8)) signifie que cette «loi de composition non partout définie» est *associative*. Par ailleurs, m provient d'un isomorphisme de bitorseurs (1.11 (5)). Or (6) est déduit de m par passage aux sections sur $[x, y, z] \in \mathrm{Ob}(E_{/T_2})$. Il en résulte que les applications «translations»

$$\mathrm{Hom}(y, x) \to \mathrm{Hom}(z, x), \quad f \mapsto f * g, \quad g \in \mathrm{Hom}(z, y)$$

$$\mathrm{Hom}(z, y) \to \mathrm{Hom}(z, x), \quad g \mapsto f * g, \quad f \in \mathrm{Hom}(y, x)$$

sont *bijectives*. Par des arguments standards, il en résulte que les formules (1), (3) et (6) définissent *un groupoïde* $G(X)$, modulo vérification que, pour tout $x \in \mathrm{Ob}(G)(X)$, l'ensemble $\mathrm{Hom}(x, x)$ *est non vide*. Or, par définition, c'est l'ensemble des sections du bitorseur Q déduit de P par restriction suivant $[x, x]: X \to T_1$. On a évidemment $q_2^{ij} \cdot [x, x, x] = [x, x]$, $0 \leqq i \leqq j \leqq 2$. Par restriction suivant $[x, x, x]: X \to T_2$, l'isomorphisme m de (1.11 (5)) fournit donc un isomorphisme de B-bitorseurs $Q \overset{B}{\wedge} Q \to Q$, où B est la restriction de A suivant $x: X \to T_0$ car on a (5). Donc Q est trivial, donc $\mathrm{Hom}(x, x)$ est non vide. Nous avons donc construit, pour tout $X \in \mathrm{Ob}(E)$ un groupoïde $G(X)$. Pour toute flèche $t: X' \to X$, on définit des applications

$$\mathrm{Ob}(G)(X) \to \mathrm{Ob}(G)(X'), \qquad x \rightsquigarrow x\,t,$$

$$\mathrm{Hom}(x, y) \to \mathrm{Hom}(x\,t, y\,t), \quad f \rightsquigarrow P(t)(f),$$

où t est considéré comme un morphisme d'objets au dessus de T_1

$$t: [x\,t, t\,y] \to [x, y], \tag{8}$$

ce qui est licite, car $[x\,t, y\,t] = [x, y] \cdot t$ (cf. (2)). Il est immédiat que les applications (7) sont compatible avec les lois de composition. Ce sont

donc des foncteurs car $G(X')$ est un groupoïde. D'où *un faisceau de groupoïdes G.*

1.11.4. Considérons G comme un préchamp scindé (II 2.2.1), et soit $g: G \to G'$ *un champ associé à* G (II 2.1.3). On peut supposer que G' est scindé et que g est un morphisme de catégories scindées (II 2.2.6.1). Les formules de loc. cit. montrent que les fibres de G' sont des groupoïdes. De plus, par construction, $\mathrm{Ob}(G)(X)$ est non vide, donc aussi $\mathrm{Ob}(G')(X)$, dès que X appartient au raffinement de E engendré par T_0 (c'est bien un raffinement car on a supposé que $T_0 \to S$ est *couvrant*). Puisque G est un préchamp, le foncteur $g: G \to G'$ est pleinement fidèle (II 2.1.3.3) et, par ailleurs, g est localement surjectif sur les objets (II 2.1.3 (ii), 1.4.1.1). Pour prouver que deux objets quelconques de $G'(X)$ sont localement isomorphes, il suffit donc de prouver que G possède la même propriété et l'on saura alors que G' *est une gerbe*. Or, si x et y sont deux objets de $G(X)$, on a

$$\mathsf{Hom}_X(y, x) = P|[x, y], \tag{1}$$

où le second terme désigne la restriction de P suivant $[x, y]: X \to T_1$ (1.11.3 (2)). En effet, on a défini $\mathsf{Hom}_X(y, x)$ (I 2.6.2.1) en posant, pour tout objet $t: X' \to X$

$$\mathsf{Hom}_X(y, x)(t) = \mathrm{Hom}(y\,t, x\,t) \quad (1.11.3\,(7)), \tag{2}$$

donc

$$\mathsf{Hom}_X(y, x)(t) = P([x\,t, y\,t]) = P([x, y]\,t) = (P|[x, y])(t),$$

d'après (1.11.3 (8)). Enfin P est un torseur, donc admet localement une section, donc aussi $\mathsf{Hom}_X(y, x)$, donc x et y sont localement isomorphes.

1.11.5. Le foncteur $g: G \to G'$ étant pleinement fidèle induit des isomorphismes de faisceaux $\mathsf{Hom}_X(x, y) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Hom}_X(g(x), g(y))$ compatibles avec la localisation et les accouplements de composition (I 2.6.2.1). Pour achever la preuve de (1.11), on pourra donc travailler dans le préchamp G et l'on posera

$$t = \mathrm{id}_{T_0}, \quad t \in \mathrm{Ob}(G)(T_0) = \mathrm{Hom}(T_0, T_0). \tag{1}$$

D'après (1.11.4 (1)), $\mathsf{Hom}(t, t)$ est un A-bitorseur, car $q_1^i \cdot [t, t] = t = \mathrm{id}_{T_0}$; de plus, il a une section, à savoir le morphisme identique I de t dans $G(T_0)$, d'où un isomorphisme de A-torseurs à droite:

$$i: A \xrightarrow{\approx} \mathsf{Hom}(t, t), \quad i(a) = I\,a. \tag{2}$$

Nota: on désigne par $*$ la loi de composition de $G(X)$ et par rien du tout les opérations déduites de la structure de bitorseur de P. Montrons que (2) est un morphisme de groupes. Pour tout $X \in \mathrm{Ob}(E_{/T_0})$ et tout

$a\in A(X)$, on a, en vertu de (1.6 (6)), $Ia*I=I*aI$, donc $Ia=aI$. Donc $i(ab)=Iab=Iab*I=Ia*bI=Ia*Ib=i(a)*i(b)$. En vertu de (1.11.4 (1)), on a

$$\mathsf{Hom}(t_1^1, t_1^0)=P, \tag{3}$$

car $[t_1^0, t_1^1]=\mathrm{id}_{T_1}$ d'après (1.11.3 (2)). Prouvons que (3) est un isomorphisme de A_1^1-torseurs à droite, où ce groupe opère sur $\mathsf{Hom}(t_1^1, t_1^0)$ grâce à (2) et à la composition des morphismes. Pour tout objet X de $E_{/T_1}$, tout $a\in A_1^1(X)$ et tout $p\in P(X)$, on a, d'après (1.6 (6)), $pa*I=p*aI$, donc $pa=p*i(a)$, car on a vu que $aI=Ia$. On procède de même pour les opérations de A_1^0. Enfin, on achève la preuve de (1.11) en notant que, par construction de G, l'accouplement de composition (1.11 (12)) est égal à m.

§ 2. L'obstruction $c(L)\in H^3(C)$ attachée à un lien L de centre C

Lemme 2.1. Soient L un lien, C son centre,

$$0\to C\xrightarrow{i} I\xrightarrow{j} Q\to 0 \tag{1}$$

une suite exacte de faisceaux de groupes abéliens et

$$p\colon\ L\times I\to M,\qquad M=L\overset{C}{\wedge} I,\qquad \text{(IV 1.6.1)}, \tag{2}$$

le morphisme naturel.

(i) On a une suite exacte de liens (IV 4.1.1)

$$1\to L\xrightarrow{u} M\xrightarrow{v} Q\to 1 \tag{3}$$

où u est le composé

$$L\xrightarrow{\mathrm{inj}_1} L\times I\xrightarrow{p} M\qquad \text{(IV 1.4.2)} \tag{4}$$

et où v est caractérisé (IV 1.6.1) par la condition que le composé vp: $L\times I\to Q$ soit égal à

$$j\cdot \mathrm{pr}_2\colon\ L\times I\to Q. \tag{5}$$

(ii) Le morphisme

$$d\colon\ I\to M,\qquad d=p\cdot \mathrm{inj}_2, \tag{6}$$

identifie I au centre de M et au centralisateur de u. De plus, le morphisme i (resp. j) est le morphisme induit par u (resp. v) sur les centres.

On rappelle que $M=L\overset{C}{\wedge} I$ est défini comme le conoyau du couple de morphismes

$$(c, 1), (1, i)\colon\ C\rightrightarrows L\times I, \tag{7}$$

où $c: C \to L$ est le morphisme structural. Prouvons (i). D'après (IV 1.4.1, 1.5.3 et 1.6.3), il suffit de prouver le même énoncé dans la catégorie des faisceaux de groupes, où il est trivial. Par ailleurs, (ii) résulte de (IV 1.6.6).

Lemme 2.2. Soit un diagramme commutatif de faisceaux de groupes abéliens

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & C & \xrightarrow{i} & I & \xrightarrow{j} & Q & \to & 0 \\ & & \uparrow{\scriptstyle g} & & \uparrow{\scriptstyle h} & & \uparrow{\scriptstyle k} & & \\ 0 & \to & C' & \xrightarrow[i']{} & I' & \xrightarrow[j']{} & Q' & \to & 0 \end{array} \tag{1}$$

dont les lignes sont exactes. Soit un diagramme commutatif de liens

$$\begin{array}{ccc} L & \xleftarrow{c} & C \\ {\scriptstyle f}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle g} \\ L' & \xleftarrow[c']{} & C' \end{array} \tag{2}$$

tel que c' soit central et tel que (C, c) soit à la fois le centre de L et le centralisateur de f.

(i) On a un diagramme commutatif de liens

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{v} & Q \\ {\scriptstyle t}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle k} \\ M' & \xrightarrow[v']{} & Q' \end{array} \qquad M = L \overset{C}{\wedge} I, \quad M' = L' \overset{C'}{\wedge} I', \tag{3}$$

où t est défini par $t \cdot p' = p \cdot (f \times h)$, (notations de (2.1)). De plus, le centralisateur de t est le centre I de M.

(ii) Si M est *réalisable* on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H^2(M) & \xrightarrow{v^{(2)}} & H^2(Q) & \xrightarrow{d} & H^3(C) \\ {\scriptstyle t^{(2)}}\uparrow & & {\scriptstyle k^{(2)}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle g^{(3)}} \\ H^2(M') & \xrightarrow[v'^{(2)}]{} & H^2(Q') & \xrightarrow[d']{} & H^3(C') \end{array} \tag{4}$$

où d et d' sont les cobords attachés aux suites exactes de (1).

La commutativité de (3) résulte de la propriété universelle du produit contracté $M' = L' \overset{C'}{\wedge} I'$. D'après (2.1 (ii)), le centre de M est I et c'est également le centralisateur de t d'après (IV 1.6.4). Les correspondances attachées aux morphismes de (3) sont ici des applications en vertu de (IV 3.1.5) et le carré gauche de (3) est commutatif d'après (IV 3.1.5.2). On obtient le carré droit en identifiant, par (IV 3.4.2), les groupes $H^2(Q)$ et $H^2(Q')$ à ceux définis en algèbre homologique.

Théorème 2.3. Soient L un lien et C son centre.

(i) Il existe une unique classe $c(L)\in H^3(C)$ telle que, pour toute suite exacte (2.1 (1)), l'ensemble $\{c(L)\}$ contienne l'image de l'application composée

$$H^2(M)\xrightarrow{v^{(2)}}H^2(Q)\xrightarrow{d}H^3(C),\qquad M=L\overset{C}{\wedge}I, \tag{1}$$

où v est le morphisme de (2.1 (2)) et où d est le cobord attaché à la suite exacte (2.1 (1)).

(ii) Pour que L soit réalisable (autrement dit $H^2(L)\neq\emptyset$) il faut et il suffit que $c(L)=0$.

2.3.1. Choisissons une suite exacte (2.1 (1)) telle que I soit un objet *injectif* de la catégorie des faisceaux de groupes abéliens, ce qui est possible d'après [SGA 4 V]. D'après (2.1 (ii)), I est le centre de M, donc $H^2(M)$ est *non vide* d'après (1.1). Soient x et y deux éléments de $H^2(M)$. Puisque I est le centre de M, il existe $h\in H^2(I)$ tel que $x=h\,y$, (IV 3.3.3). De plus, d'après (IV 3.3.4), on a

$$v^{(2)}(x)=j^{(2)}(h)\cdot v^{(2)}(y)$$

car j est le morphisme induit par v sur les centres (2.1 (ii)). Les isomorphismes de (IV 3.4.2) étant fonctoriels, on a $d\,j^{(2)}=0$, donc les images de x et y par (1) sont égales. L'image de (1) est donc réduite à un élément que l'on notera $c(L)$.

2.3.2. Soit maintenant une suite exacte

$$0\to C\xrightarrow{i'}I'\xrightarrow{j'}Q'\to 0 \tag{2}$$

de faisceaux de groupes abéliens. Puisque I est injectif, il existe un diagramme commutatif tel que (2.2 (1)), où $C=C'$ et où $g=\mathrm{id}_C$. On peut appliquer (2.2 (ii)) en prenant $L=L'$ et $f=\mathrm{id}_L$ car M est réalisable (cf. supra). D'où l'on déduit que l'image de l'application (1) attachée à (2) est contenue dans $\{c(L)\}$, ce qui prouve (i).

2.3.3. Prouvons (ii). Puisque M est réalisable et que le centre de M est le centralisateur de $u\colon L\to M$ (2.1 (ii)), la relation $u^{(2)}$ est fonctionnelle (IV 3.1.5). Si $H^2(L)$ est non vide, le composé

$$H^2(L)\xrightarrow{u^{(2)}}H^2(M)\xrightarrow{v^{(2)}}H^2(Q)$$

a donc pour image la classe unité, car $v\,u\colon L\to Q$ est le morphisme unité. Donc $c(L)=0$. Inversement, supposons que $c(L)=0$. Il existe un mor-

phisme de gerbes $m\colon F \to G$ lié par $v\colon M \to Q$, car M est réalisable et v surjectif. De plus, si $q \in H^2(Q)$ est la classe de G, on a $d(q)=c(L)=0$ d'après (i). Donc $q=0$ car $H^2(I)=0$, donc Q est triviale. Soient alors s une section de Q et $L(s)$ le lien de la gerbe des relèvements de s par rapport à $m\colon F \to G$, (IV 2.5.5). D'après loc. cit., on a une suite exacte de liens

$$1 \to L(s) \to M \xrightarrow{v} Q \to 1.$$

D'après (IV 4.1.7), on a donc un isomorphisme $L(s) \approx L$, car il est clair que Q opère trivialement sur L (IV 4.1.6 (iii)). Donc L est réalisable.

Corollaire 2.4. Soit $f\colon L' \to L$ un morphisme de liens tel que le centralisateur de f soit le centre de L (IV 1.5.4 (5)) et soit $g\colon C' \to C$ le morphisme induit par f sur les centres. On a

$$g^{(3)}(c(L'))=c(L). \tag{1}$$

En particulier, si L' est réalisable il en est de même de L.

Il existe un diagramme commutatif tel que (2.2 (1)), dans lequel I et I' sont *injectifs*. De plus, $M = L \overset{C}{\wedge} I$ est réalisable car son centre est I (2.1 (ii)) et car $H^3(I)=0$ on a donc le diagramme commutatif de (2.2 (4)). D'où la formule (1), d'après (2.3), car $M' = L' \overset{C'}{\wedge} I'$ est réalisable.

Remarque 2.5. Sous les conditions de (2.4), la relation $f^{(2)}$ est fonctionnelle et définit une application

$$f^{(2)}\colon\ H^2(L') \to H^2(L) \tag{1}$$

comme on voit en conjuguant (2.4) et (IV 3.1.5). On rappelle que l'hypothèse de (2.4) est vérifiée si l'une des conditions suivantes est vérifiée

(i) $f\colon L' \to L$ est surjectif (IV 1.3.4)
(ii) L est abélien
(iii) $g\colon C' \to C$ est un monomorphisme et $L = L' \overset{C'}{\wedge} C$, (IV 1.6.6 (i)).

Sous les hypothèses de (2.4), l'étude de l'application $f^{(2)}$ se réduit à un problème de cohomologie abélienne. En effet, si $H^2(L)$ est non vide la classe $c(L')$ appartient à $\mathrm{Ker}(H^3(C') \to H^3(C))$. Pour que $c(L')=0$ il faut et il suffit que $H^2(L')$ soit non vide. L'application (1) est alors un morphisme d'espaces principaux homogènes compatible avec le morphisme de groupes $H^2(C') \to H^2(C)$ (IV 3.3.3 et 3.3.4). Quant à l'application induite par $f^{(2)}$ sur les ensembles de classes neutres, on peut l'étudier en notant que f induit un morphisme de liens $\mathbf{Int}(L') \to \mathbf{Int}(L)$ et en utilisant les résultats de (IV 3.2), [ce n'est plus un problème «abélien»].

Corollaire 2.6. Soient L et L' deux liens, C et C' leurs centres.

(i) $C\times C'$ est le centre de $L\times L'$ et $(c(L), c(L'))$ est l'image de $c(L\times L')$ par l'isomorphisme

$$H^3(C\times C')\xrightarrow{\sim} H^3(C)\times H^3(C'). \tag{1}$$

(ii) Si $C=C'$, on a

$$c(L\overset{C}{\wedge} L')=c(L)\,c(L'). \tag{2}$$

(iii) Si L^0 désigne l'opposé de L (IV 1.2.5), on a

$$c(L^0)=c(L)^{-1}. \tag{3}$$

En particulier, $L\overset{C}{\wedge} L^0$ est réalisable.

Soient $c\colon C\to L$ et $c'\colon C'\to L'$ les morphismes structuraux. On identifie $C\times C'$ au centre de $L\times L'$ grâce au morphisme $c\times c'\colon C\times C'\to L\times L'$. Moyennant quoi on obtient (i) en appliquant (2.4) aux deux projections de $L\times L'$. On déduit (ii) de (i) en appliquant (2.4) au morphisme structural $L\times L'\to L\overset{C}{\wedge} L'$, car celui-ci induit sur les centres le morphisme $C\times C\to C$, $f(x, y)=x\,y$, (IV 1.6.2 et 1.6.6). Enfin on obtient (3) en appliquant (2.4) à l'isomorphisme $L\xrightarrow{\sim} L^0$ de (IV 1.2.5), car celui-ci induit sur les centres le morphisme $C\to C$, $x\mapsto x^{-1}$. D'où l'on déduit que $L\overset{C}{\wedge} L^0$ est réalisable par (ii) et (2.3 (ii)). On peut également prouver ce dernier point directement en notant que $L\overset{C}{\wedge} L^0$ *lie la gerbe* dont les objets sont les (A, P, B, u), où (A, P, B) est un bitorseur et $u\colon \mathsf{lien}(A)\to L$ un isomorphisme de liens. Le détail est laissé au lecteur.

2.7. Le groupe de Mac-Lane. Soit C un faisceau de groupes abéliens. On appelle *lien de centre* C un couple (L, c), où $c\colon C\to L$ est un morphisme de liens possédant la propriété universelle évidente (IV 1.5.3). Si (L, c) et (L', c') sont deux liens de centre C, on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{u} & L\overset{C}{\wedge} L' \\ {\scriptstyle c}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle u'} \\ C & \xrightarrow[c']{} & L' \end{array} \tag{1}$$

où u est le composé $L\xrightarrow{\mathrm{inj}_1} L\times L'\xrightarrow{p} L\overset{C}{\wedge} L'$, et où $u'=p\cdot \mathrm{inj}_2$, p étant la projection structurale (IV 1.6.1). Il est immédiat que le composé $u\,c=u'\,c'$ identifie C au centre de $L\overset{C}{\wedge} L'$ (IV 1.6.6). Soit $\mathbf{N}$ l'ensemble des classes à isomorphisme près de liens de centre C. La relation «il existe des liens *réalisables* de centre C, soient R et R', tels que $L\overset{C}{\wedge} R$

soit C-isomorphe à $L' \overset{C}{\wedge} R'$» induit une relation d'équivalence R dans $\mathbf{N}$. En effet, elle est évidemment symétrique; elle est réflexive car C est réalisable et $L \approx L \overset{C}{\wedge} C$, et enfin elle est transitive puisque le produit contracté est associatif (IV 1.6.3 (iii)) et puisque le produit contracté de deux liens réalisables est réalisable (2.3) et (2.6 (ii)). On posera

$$ML(C) = \mathbf{N}/R. \tag{2}$$

Nous allons voir que le produit contracté munit $ML(C)$ d'une loi de groupe abélien. On l'appellera *le groupe de Mac-Lane de C*. Nous ferons au chapitre VIII le raccord avec le groupe des classes de Π-kernels introduit par Eilenberg et Mac-Lane [8].

Théorème 2.8. Le produit contracté munit l'ensemble $ML(C)$ d'une loi de groupe abélien et l'on a un *monomorphisme* de groupes abéliens

$$c\colon\ ML(C) \to H^3(C) \tag{1}$$

obtenu en associant à tout lien L de centre C la classe $c(L)$ de (2.3).

En vertu de (2.6 (ii)), on a bien une application (1). Elle est *injective*. En effet, soient L et L' deux liens de centre C tels que $c(L)=c(L')$. Les liens $L'^{0} \overset{C}{\wedge} L'$ et $L'^{0} \overset{C}{\wedge} L$ sont réalisables d'après (2.6 (iii)), (2.6 (ii)) et (2.3 (ii)). Donc les classes de L et L' dans $ML(C)$ sont égales car on a un isomorphisme $L \overset{C}{\wedge} L'^{0} \overset{C}{\wedge} L' \xrightarrow{\sim} L' \overset{C}{\wedge} L'^{0} \overset{C}{\wedge} L$ d'après (IV 1.6.3). Puisque (1) est injective, la conclusion résulte formellement de (2.6).

Remarque 2.9. Il est possible que (1) soit un isomorphisme. C'est en tout cas vrai lorsque l'on prend pour site le topos des Π-ensembles où Π est un groupe appartenant à U: on déduit ceci des résultats d'Eilenberg et Mac-Lane sur les extensions de groupes [8]. J'ignore également si $ML(C)$ est un sous-foncteur de $H^3(C)$. Cependant, en vertu de (2.4) et (2.5 (iii)), ce dernier point serait acquis *si* l'on prouvait que:

«pour tout morphisme $g\colon\ C' \to C$ de faisceaux de groupes abéliens et tout lien L' de centre C', il existe un lien L de centre C et un morphisme de liens $f\colon\ L' \to L$ tel que C soit le centralisateur de f et tel que $g\colon\ C' \to C$ soit le morphisme induit par f sur les centres». On notera que la réponse est affirmative si g est un *monomorphisme* (2.1).

Proposition 2.10. Soient $f\colon\ E' \to E$ un morphisme de U-sites, L un lien sur E, C son centre, L' l'image inverse de L par f, (V 1.2.2) et C' le centre de L'. La classe $c(L')$ est l'image de $c(L)$ par l'application composée

$$H^3(E, C) \xrightarrow{\varphi} H^3\big(E', f^*(C)\big) \xrightarrow{g^{(3)}} H^3(E', C') \tag{1}$$

où $f^*(C)$ est l'image inverse de C, où $\varphi = H^3(f, C)$ est le morphisme induit par f: $E' \to E$ (V 1.5.3) et où g: $f^*(C) \to C'$ est le morphisme de (V 1.2.9.3).

2.10.1. On choisit une suite exacte de faisceaux de groupes abéliens

$$0 \to C \xrightarrow{i} I \xrightarrow{j} Q \to 0 \tag{2}$$

telle que $M = L \overset{C}{\wedge} I$ soit *réalisable* [ce qui est toujours possible (2.3 (i))] et on considère la suite exacte de liens de (2.1 (3))

$$1 \to L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} Q \to 1\,. \tag{3}$$

Par image inverse par f: $E' \to E$, on trouve une suite exacte de faisceaux de groupes abéliens sur E'

$$0 \to C'' \xrightarrow{i''} I'' \xrightarrow{j''} Q'' \to 0 \tag{4}$$

et une suite exacte de liens sur E' (V 1.2.7)

$$1 \to L' \xrightarrow{u''} M'' \xrightarrow{v''} Q'' \to 1\,. \tag{5}$$

En vertu de (V 1.5.1), $H^2(E, *)$ est fonctoriel par rapport à E, de plus, dans le cas abélien le morphisme de foncteurs de (V 1.5.1) coïncide avec celui défini en algèbre homologique, lequel est compatible avec les opérateurs cobords, (V 1.5.3). On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H^2(E, M) & \xrightarrow{u^{(2)}} & H^2(E, Q) & \xrightarrow{d} & H^3(E, C) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^2(E', M'') & \xrightarrow{u''^{(2)}} & H^2(E', Q'') & \xrightarrow{d''} & H^3(E', C'') \end{array} \tag{6}$$

où les flèches verticales sont définies par le morphisme f: $E' \to E$ et où d (resp. d'') est le cobord relatif à (2) (resp. (4)). Par (2.3 (i)), l'image de la ligne supérieure de (6) est égale à $\{c(L)\}$, car $H^2(M) \neq \emptyset$. Par ailleurs, d'après (V 1.2.5), l'image inverse c'': $C'' \to L'$ du morphisme structural c: $C \to L$ est un morphisme injectif et central et, par (V 1.2.8), on a un isomorphisme $M'' \xrightarrow{\sim} L' \overset{C''}{\wedge} I''$ qui identifie la suite (5) à celle obtenue à partir de (4) et de c'': $C'' \to L'$ par le procédé de (2.1). La conclusion résultera donc du lemme suivant, qui améliore (2.3 (i)).

Lemme 2.11. Soient L' un lien,

$$0 \to C'' \xrightarrow{i''} I'' \xrightarrow{j''} Q'' \to 0 \tag{1}$$

une suite exacte de faisceaux de groupes abéliens et c'': $C'' \to L'$ un morphisme de liens injectif et central. Soient c': $C' \to L'$ le centre de L'

et $g\colon C'' \to C'$ le morphisme caractérisé par $c'\,g = c''$. Soit $v''\colon M'' \to Q''$, $M'' = L' \overset{C''}{\wedge} I''$, le morphisme naturel (2.1 (3)). Si $H^2(M'')$ est *non vide*, le composé

$$H^2(M'') \xrightarrow{v''(2)} H^2(Q'') \xrightarrow{d} H^3(C'') \xrightarrow{g(3)} H^3(C') \qquad (2)$$

a pour image $\{c(L')\}$.

On considère un diagramme commutatif de faisceaux de groupes abéliens

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & C'' & \xrightarrow{i''} & I'' & \xrightarrow{j''} & Q'' & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & C' & \xrightarrow[i']{} & I' & \xrightarrow[j']{} & Q' & \to & 0 \end{array} \qquad (3)$$

dont les lignes sont exactes et tel que I' soit un injectif. On conclut en appliquant (2.2 (ii)) où l'on prend pour f le morphisme identique de L', ce qui est licite car $L' \overset{C'}{\wedge} I'$ a pour centre I', donc est réalisable.

Chapitre VII

Exemples tirés de la Géométrie Algébrique

§ 1. Relèvement infinitésimal de schémas lisses

A titre d'application de l'interprétation du H^2 abélien en termes de gerbes, nous donnons une description des obstructions introduites par Grothendieck dans [SGA 1 III], libérée d'une hypothèse de séparation superflue.

1.1. Relèvements d'homomorphismes

Soit $x\colon X \to S$ un morphisme de schémas et soit $X^{(1)}$ le premier voisinage infinitésimal de la diagonale $\Delta_{X/S}$ du produit fibré $X \times_S X$. Rappelons que si U est un voisinage ouvert de la diagonale dans lequel celle-ci est fermée et si I est un Idéal de définition de $\Delta_{X/S}$ dans U, $X^{(1)}$ est le sous-schéma fermé de U défini par l'Idéal I^2. Le morphisme diagonal identifie son espace topologique sous-jacent à celui de X et l'on a donc des morphismes de faisceaux d'anneaux sur X:

$$\mathsf{O}_X \xleftarrow{\delta} \mathsf{O}_{X^{(1)}} \underset{p_2}{\overset{p_1}{\leftleftarrows}} \mathsf{O}_X \tag{1}$$

induits par le morphisme diagonal et les projections de $X \times X$. On désigne par $\Omega^1_{X/S}$ le noyau de δ, c'est un Idéal de carré nul et, par suite, les morphismes p_1 et p_2 le munissent d'une même structure de O_X-Module.

Proposition 1.1.1. Soient encore Y un S-schéma, Y_0 un sous-schéma fermé de Y défini par un Idéal de carré nul J et $g\colon Y_0 \to X$ un S-morphisme. L'ensemble $\mathrm{Hom}^g(Y, X)$ des S-morphismes $h\colon Y \to X$ dont la restriction à Y_0 est égale à g est un pseudo-torseur sous le groupe

$$G = \mathrm{Hom}_{\mathsf{O}_{Y_0}}\left(g^*(\Omega^1_{X/S}), J\right), \tag{1}$$

où g^* désigne le foncteur image inverse de Modules.

On a un diagramme de faisceaux sur Y_0:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \leftarrow & g^*(\mathsf{O}_X) & \leftarrow & g^*(\mathsf{O}_{X^{(1)}}) & \xleftarrow{i} & g^*(\Omega^1_{X/S}) & \leftarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & & & & & \\ 0 & \leftarrow & \mathsf{O}_{Y_0} & \leftarrow & \mathsf{O}_Y & \leftarrow & J & \leftarrow & 0 \end{array} \tag{2}$$

où γ est l'isomorphisme induit par g. Puisque les espaces topologiques sous-jacents à X et $X^{(1)}$ d'une part, Y et Y_0 d'autre part, sont les mêmes, on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}^g(Y, X) \simeq \mathrm{Hom}^\gamma(g^*(\mathsf{O}_X), \mathsf{O}_Y) \tag{3}$$

où le second membre désigne l'ensemble des morphismes de faisceaux d'anneaux sur Y_0 compatibles avec γ. Pour prouver que $\mathrm{Hom}^\gamma(Y, X)$ est un pseudo-torseur sous G, il nous faut d'abord décrire un morphisme

$$\mathrm{Hom}^\gamma(g^*(\mathsf{O}_X), \mathsf{O}_Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathsf{O}_{Y_0}}(g^*(\Omega^1_{X/S}), J) \to \mathrm{Hom}^\gamma(g^*(\mathsf{O}_X), \mathsf{O}_Y) \tag{4}$$

noté

$$(h, u) \mapsto h \cdot u .$$

Pour cela, considérons la différentielle extérieure

$$d\colon \mathsf{O}_X \to \Omega^1_{X/S} \tag{5}$$

définie par $i \cdot d = p_1 - p_2$. On définit (4) par

$$h \cdot u = h + u \cdot d \tag{6}$$

d'où, pour une section de O_X, la jolie formule

$$(h \cdot u)(f) = h(f) + u(df), \tag{7}$$

où l'on note encore d l'image $g^*(d)$ de d par le foncteur g^*. Il résulte de la formule $d(fg) = f\,dg + g\,df$ et du fait que J est de carré nul que $h \cdot u$ est bien un morphisme d'anneaux $h \cdot u\colon g^*(\mathsf{O}_X) \to \mathsf{O}_Y$; il est compatible avec γ car la ligne du bas de (2) est exacte. Puisque $\Omega^1_{X/S}$ est engendré comme O_X-Module par l'image de d, il est clair que $h = h \cdot u$ équivaut à $u = 0$. Il reste à prouver que si $h, h' \in \mathrm{Hom}(g^*(\mathsf{O}_X), \mathsf{O}_Y)$, il existe un O_{Y_0}-morphisme $u\colon g^*(\Omega^1_{X/S}) \to J$ tel que $h' = h \cdot u$. Pour cela, on note d'abord que les deux projections $p_1, p_2\colon X^{(1)} \rightrightarrows X$ induisent un isomorphisme $X^{(1)}(Y) \xrightarrow{\sim} X(Y) \times_{X(Y_0)} X(Y)$, ceci d'après la construction même de $X^{(1)}$. Il existe donc un unique morphisme de faisceaux d'anneaux $k\colon g^*(\mathsf{O}_{X^{(1)}}) \to \mathsf{O}_Y$ tel que $(h', h) = (k p_1, k p_2)$. Il suffit maintenant de prendre pour u la restriction de k à $g^*(\Omega^1_{X/S})$, laquelle se factorise par J car h et h' sont compatibles avec γ.

1.1.2. Les opérations définies par (1.1.1(4)) et l'isomorphisme (1.1.1(3)) sont évidemment compatibles avec la localisation sur Y et si l'on définit un faisceau sur Y par la formule

$$\mathsf{Hom}^g(Y, X)(Y') = \mathrm{Hom}^{g'}(Y', X), \tag{1}$$

où Y' est un ouvert de Y et g' la restriction de g à $Y'_0 = Y' \cap Y_0$, on en déduit que $\mathsf{Hom}^g(Y, X)$ *est un pseudo-torseur sur* Y *pour la topologie de Zariski sous le faisceau de groupes*

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{O}_{Y_0}}(g^*(\Omega^1_{X/S}), J). \tag{2}$$

Par définition, [EGA IV 17.3.1], si X est *lisse* sur S, $\mathsf{Hom}^g(Y, X)$ est en fait un *torseur* sous le groupe (2). Dans ces cas, $\Omega^1_{X/S}$ est localement libre sur X et si l'on désigne son dual par $\mathfrak{g}_{X/S}$, on a le corollaire que voici:

Corollaire 1.1.3. Si X est lisse sur S, le faisceau $\mathsf{Hom}^g(Y, X)$ est un torseur sur Y pour la topologie de Zariski sous le faisceau de groupes

$$\mathsf{G} = g^*(\mathfrak{g}_{X/S}) \otimes_{\mathsf{O}_{Y_0}} J. \tag{1}$$

D'après (III 3.5.4), ce torseur définit une classe

$$P \in H^1(Y, \mathsf{G}) \tag{2}$$

dont la nullité est nécessaire et suffisante pour qu'il existe un prolongement $h\colon Y \to X$ de $g\colon Y_0 \to X$. En particulier, si ce torseur est trivial, par exemple si Y est affine, le morphisme g admet un prolongement, l'ensemble de ces prolongements étant isomorphe, non canoniquement, à

$$H^0(Y_0, g^*(\mathfrak{g}_{X/S}) \otimes_{\mathsf{O}_{Y_0}} J). \tag{3}$$

1.1.4. La formation du pseudo-torseur $\mathsf{Hom}^g(Y, X)$ est «fonctorielle» par rapport à X et Y. Tout d'abord, si $r\colon X \to X'$ est un morphisme de S-schémas, on a un morphisme naturel

$$r^*(\Omega^1_{X'/S}) \to \Omega^1_{X/S}. \tag{1}$$

Puisque (1) est compatible avec la différentielle extérieure, le morphisme

$$\mathsf{Hom}^g(Y, X) \to \mathsf{Hom}^g(Y, X'), \qquad h \mapsto r\,h, \tag{2}$$

est compatible avec le morphisme

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{O}_{Y_0}}(g^*(\Omega^1_{X/S}), J) \to \mathsf{Hom}_{\mathsf{O}_{Y_0}}(g^*\,r^*(\Omega^1_{X'/S}), J) \tag{3}$$

déduit de (1). En particulier, si X est *lisse* sur S, la source de (2) est un torseur et par (III 1.4.6 (iii)) on en déduit que $\mathsf{Hom}^g(Y, X')$ est le torseur

qui se déduit de $\mathsf{Hom}^g(Y, X)$ par extension du groupe structural suivant (3).

1.1.5. Par ailleurs, si $s\colon Y' \to Y$ est un morphisme de S-schémas, si on pose $Y'_0 = Y' \times_Y Y_0$ et si g' est la restriction de g à Y'_0, le morphisme

$$s^*(\mathsf{Hom}^g(Y, X)) \to \mathsf{Hom}^{g'}(Y', X) \tag{1}$$

est compatible avec le morphisme de faisceaux de groupes

$$s^*(\mathrm{Hom}_{\mathsf{O}_{Y_0}}(g^*(\Omega^1_{X/S}), J)) \to \mathsf{Hom}_{\mathsf{O}_{Y'_0}}(s^* g^*(\Omega^1_{X/S}), J\mathsf{O}_{Y'}), \tag{2}$$

comme on voit en prenant l'image inverse par s du diagramme (1.1.1 (2)).

D'après (III 3.4.5), ces deux assertions s'interprètent en termes des classes de cohomologie (1.1.3 (2)).

Corollaire 1.1.6. Soient S un schéma, S_0 un sous-schéma fermé défini par un Idéal de carré nul J et soient X et Y deux S-schémas. Supposons que X soit *lisse* sur S. Désignons par un indice 0 l'effet du changement de base de S à S_0. Pour tout S_0-morphisme $g_0\colon Y_0 \to X_0$, l'ensemble des S-morphismes $g\colon Y \to X$ se réduisant suivant g_0 est un torseur sur Y_0 sous

$$g_0^*(\mathfrak{g}_{X_0/S_0}) \otimes_{\mathsf{O}_{S_0}} J. \tag{1}$$

Il suffit d'interpréter le faisceau de groupes (1).

Corollaire 1.1.7. Sous les hypothèses du corollaire précédent, le groupe A des S-automorphismes de X induisant l'identité sur X_0 est canoniquement isomorphe au groupe

$$G = H^0(X, \mathfrak{g}_{X_0/S_0} \otimes_{\mathsf{O}_{S_0}} J). \tag{1}$$

1.1.7.1. Tout d'abord, l'on sait qu'un S-morphisme $X \to X$ qui se réduit suivant l'identité de X_0 est un isomorphisme [SGA 1 III 4.2], donc, d'après (1.1.6), l'ensemble sous-jacent à A est un torseur sous G. Par ailleurs, c'est également un torseur sous le groupe A opérant par translation à gauche. Or, d'après (1.1.4), G opère sur A par morphismes de A-torseurs. Puisque G est abélien, on en déduit, d'après (III 1.5.1, 1.5.7), un isomorphisme de groupes $G \to A$, $g \mapsto e \cdot g$, où e est l'élément neutre de A et où le produit est pris au sens des opérations de G sur A.

1.1.7.2. Soit encore X' un S-schéma et soient G' et A' les groupes analogues à G et A construits à partir de X'. Si $f\colon X' \to X$ est un S-isomorphisme, les isomorphismes $\gamma\colon G' \to G$ et $\alpha\colon A' \to A$ construits par transport de structure sont compatibles avec les isomorphismes attachés

à X et X' par le corollaire précédent. Cela résulte encore de (1.1.4) et de l'explicitation des isomorphismes γ et α.

1.2. Relèvements de schémas lisses

Théorème 1.2.1. Soient S un schéma, S_0 un sous-schéma fermé défini par un Idéal de carré nul J. Soit X_0 un S_0-schéma lisse. Soit R la catégorie

— dont les objets sont les (X, U, x), où X est un S-schéma lisse, U un ouvert de X_0 et $x: U \to X$ un S-morphisme tel que le carré ci-dessous soit cartésien

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{x} & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \longleftarrow & S_0 \end{array}$$

— dont l'ensemble des morphismes de source (X, U, x) et de but (X', U', x') est vide si $U \not\subset U'$ et égal à l'ensemble des S-morphismes $m: X' \to X$ tels que $m x = x' i$ si $U \subset U'$ et si $i: U \to U'$ est l'immersion naturelle

— et dont la loi de composition est induite par celle des morphismes de schémas.

Alors le foncteur

$$R \to \mathrm{Ouv}(X_0) \qquad (X, U, x) \rightsquigarrow U \tag{1}$$

fait de R une gerbe sur X_0 pour la topologie de Zariski qui est liée par le faisceau

$$\mathsf{G} = \mathfrak{g}_{X_0/S_0} \otimes_{\mathcal{O}_S} J \tag{2}$$

grâce aux isomorphismes $\mathsf{G}(U) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(X, U, x)$ de (1.1.7).

Corollaire 1.2.2. Il existe une classe $r \in H^2(X_0, \mathsf{G})$ dont la nullité est nécessaire et suffisante pour qu'il existe un S-schéma lisse X et un S_0-isomorphisme $X \times_S S_0 \to X_0$.

Le corollaire est une conséquence évidente du théorème et de (IV 3.4.2) car la fibre de la gerbe R en X_0 est la catégorie des «relèvements» de X_0. Il est clair que R est une catégorie fibrée sur la catégorie $\mathrm{Ouv}(X_0)$ des ouverts de X_0. C'est un champ car on sait recoller des schémas. Par construction même, la fibre $R(U)$ de R au dessus d'un ouvert U de X_0 est la catégorie des relèvements de U à S. C'est donc un groupoïde car un S-morphisme qui se réduit suivant un isomorphisme est un isomorphisme d'après [SGA 1 III 4.2]. Deux objets d'une même fibre sont localement isomorphes d'après (1.1.6) et pour achever de prouver que R est une gerbe, il nous suffit de savoir que si U est affine,

alors $R(U)$ est non vide, ce qui résulte de [EGA IV 18.1.1]. Quant à l'assertion concernant le lien de R, elle résulte du fait que, pour tout morphisme $m\colon (X, U, x) \to (X', U', x')$ de R, le diagramme ci-dessous est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Aut}_U(X, U, x) & \xleftarrow{\mu} & \mathrm{Aut}_{U'}(X', U', x') \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{G}(U) & \xleftarrow[\mathbf{G}(i)]{} & \mathbf{G}(U') \end{array}$$

où les flèches verticales sont celles de (1.1.7) et où μ est obtenu en notant que le morphisme m est $\mathrm{Ouv}(X_0)$-cartésien (comme tout morphisme appartenant à une gerbe). Cette commutativité résulte immédiatement de (1.1.4) et (1.1.5).

Corollaire 1.2.3. L'ensemble des classes à isomorphisme près de relèvements de X_0 (objets de $R(X_0)$) est un pseudo-torseur sous le groupe $H^1(X_0, \mathfrak{g}_{X_0/S_0} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} J)$.

Cela résulte de (III 2.5.1).

1.3. Relèvements de torseurs

Dans ce numéro, on considère un schéma S, un sous-schéma fermé S_0 défini par un idéal J de carré nul et un S-schéma en groupes G. Pour tout S-schéma X, on pose $X_0 = X \times_S S_0$.

Théorème 1.3.1. Soit P_0 un G_0-torseur sur S_0 pour la topologie étale (resp. de Zariski) et soit $\mathrm{Lie}(G_0/S_0)'$ le $\mathcal{O}_{S_0}$-module obtenu en tordant $\mathrm{Lie}(G_0/S_0)$ par P_0. Posons

$$W = \mathrm{Lie}(G_0/S_0)' \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} J. \tag{1}$$

Si G est *lisse*, il existe une classe $c \in H^2_{\mathrm{zar}}(S_0, W)$ dont la nullité est nécessaire et suffisante pour qu'il existe un G-torseur P pour la topologie étale (resp. de Zariski) sur S relevant P_0. Si $c = 0$, l'ensemble des classes à isomorphisme près de relèvements de P_0 est un torseur sous $H^1_{\mathrm{zar}}(S^0, W)$.

1.3.1.1. On rappelle que, puisque G est *lisse*, tout G-torseur pour la topologie f.p.p.f. provient d'un G-torseur pour *la topologie étale*, [18] exp. VI, 11.7, 11.8. Par ailleurs, l'objet tordu $\mathrm{Lie}(G_0/S_0)$ est a priori un faisceau sur le site étale de S_0; mais si l'on pose $A = \mathbf{Aut}(\mathrm{Lie}(G_0/S_0))$, l'application $H^1_{\mathrm{zar}}(S_0, A) \to H^1_{\text{ét}}(S_0, A)$ est bijective (descente de modules localement libres) et $\mathrm{Lie}(G_0/S_0)'$ est donc défini par un $\mathcal{O}_{S_0}$-module localement libre que l'on désignera par le même symbole.

1.3.1.2. Si le groupe tordu $G'_0 = \mathbf{Aut}_{G_0}(P_0)$ est représentable, (par exemple si G est affine ou commutatif, ou si la topologie est celle de Zariski, G étant alors quelconque), on a, par fonctorialité de la torsion:

$$W = \mathrm{Lie}(G'_0/S_0) \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} J\,.$$

Enfin, si tout G-torseur est représentable (par exemple si G est affine ou si la topologie est celle de Zariski) on peut remplacer partout dans le théorème «torseur» par «torseur représentable».

1.3.1.3. Notons encore que si S_1 est un sous-schéma fermé de S défini par un idéal nilpotent $K \supset J$ tel que $J \cdot K = 0$, (par exemple $J = K^n$ et $K^{n+1} = 0$), on a $S \supset S_0 \supset S_1$, les espaces topologiques sous-jacents étant les mêmes. De plus, le faisceau J est alors porté par S_1, donc aussi le faisceau W attaché à un G_0-torseur P_0, qui est alors

$$W = \mathrm{Lie}(G_1/S_1)' \otimes_{\mathcal{O}_{S_1}} J\,.$$

Les groupes de cohomologie qui interviennent dans le théorème ne dépendent donc que de la restriction de P_0 à S_1.

Avant de démontrer le théorème, notons qu'il implique les corollaires que voici.

Corollaire 1.3.2. Si S est affine et G lisse, l'application $H^1(S, G) \to H^1(S_0, G_0)$ est bijective, pour la topologie f.p.p.f., la topologie étale et celle de Zariski.

Corollaire 1.3.3. Si S_0 est un sous-schéma fermé d'un schéma *affine* S défini par un idéal nilpotent, l'application de restriction $\mathrm{Br}(S) \to \mathrm{Br}(S_0)$ est bijective.

En appliquant le corollaire (1.3.2) au groupe linéaire et au groupe projectif linéaire, on voit que toute Algèbre d'Azumaya sur S_0 provient d'une Algèbre d'Azumaya sur S, unique à isomorphisme non unique près; de même pour les Modules localement libres; d'où (1.3.3).

De même, en appliquant le théorème aux différents groupes classiques, on en tire des conclusions évidentes concernant le relèvement infinitésimal de modules localement libres, de modules localement libres munis d'une forme quadratique localement isomorphe à la forme standard (resp. d'une forme alternée) etc. Le théorème s'applique également aux torseurs sous les schémas abéliens, mais dans ce cas, rien n'assure a priori que les relèvements considérés soient représentables.

Il nous reste à démontrer le théorème. Nous ne traiterons que le cas de la topologie étale, le cas de la topologie de Zariski se traitant de la même manière, avec des simplifications évidentes.

1.3.4. Soit r: $\mathbf{Tors}(S, G) \to \mathbf{Tors}(S_0, G_0)$ le foncteur restriction. Il nous suffit de prouver que la catégorie K des relèvements de P_0, (dont les objets sont les couples (P, p), où P est un G-torseur et p: $r(P) \to P_0$ un isomorphisme), est la catégorie des sections d'une gerbe sur *le site des ouverts de* S_0 et que le lien de cette gerbe est W. Or, puisque W est un faisceau cohérent, ses groupes de cohomologie pour la topologie étale et celle de Zariski sont les mêmes [SGA 4 VII 4.3]; il nous suffira donc de construire une W-gerbe $\mathbf{K}$ sur *le site étale de* S_0 telle que $\mathbf{K}(S_0) \approx\!\!\approx K$. Considérons le morphisme

$$f\colon S_{0,\text{ét}} \to S_{\text{ét}} \tag{1}$$

entre les sites étales de S_0 et S qui est induit par l'immersion $S_0 \to S$. On a un morphisme $t: f^*(G) \to G_0$ et le composé

$$\mathbf{Tors}(S, G) \xrightarrow{s} \mathbf{Tors}(S_0, f^*(G)) \xrightarrow{t'} \mathbf{Tors}(S_0, G_0),$$

où s est induit par f et t' par t est isomorphe à r. Or le foncteur image inverse attaché à f est une équivalence de catégories [SGA 4 VIII 1.3]; il en est donc de même de s et la catégorie K s'interprète donc à équivalence près comme la catégorie des sections du champ des relèvements de P_0 relativement au morphisme de gerbes sur le site étale de S_0 induit par t

$$\mathrm{TORS}(S_0, t)\colon \mathrm{TORS}(S_0, f^*(G)) \to \mathrm{TORS}(S_0, G_0),$$

cf. (IV 2.5.4). D'après (IV 2.5.8 (i)), le lemme que voici assure que ce champ est une W-gerbe, ce qui prouve le théorème.

Lemme 1.3.5. Avec les notations ci-dessus, si G est *lisse*, on a une suite exacte de faisceaux de groupes sur le site étale de S_0:

$$1 \to \mathrm{Lie}(G_0/S_0) \otimes_{\mathbf{O}_{S_0}} J \to f^*(G) \xrightarrow{t} G_0 \to 1 \tag{1}$$

et les opérations de G_0 sur le noyau de t sont celles que l'on déduit de l'action de G_0 sur son algèbre de Lie.

Puisque le foncteur image inverse attaché à f est une équivalence de catégories, pour tout faisceau F sur $S_{0,\text{ét}}$, le morphisme d'adjonction $f^* f_*(F) \to F$ est un isomorphisme et, pour prouver l'exactitude de la suite (1) il suffit de trouver une suite exacte de faisceaux sur $S_{\text{ét}}$

$$1 \to f_*(\mathrm{Lie}(G_0/S_0) \otimes J) \xrightarrow{u} G \xrightarrow{v} f_*(G_0) \to 1, \tag{2}$$

où v est le morphisme qui correspond à t. Or pour tout S' étale sur S, on a

$$f_*(\mathrm{Lie}(G_0/S_0) \otimes J)(S') \xrightarrow{\sim} \mathbf{Hom}_{\mathbf{O}_{S_0}}(p^*(\omega^1_{G/S}), J\mathbf{O}_{S'}), \tag{3}$$

où p: $S'_0 \to S$ est le morphisme naturel; en effet, S' est *plat* sur S. Soit $L(S')$ le groupe qui figure dans (3); d'après (1.1.2), on a une bijection

$$L(S') \to T(S'), \qquad \alpha \mapsto e \cdot \alpha, \tag{4}$$

où e désigne la section unité de G et où $T(S')$ est le noyau de $v(S')$: $G(S') \to G_0(S'_0) = f_*(G_0)(S'_0)$. Pour S' variable, les morphismes (4) forment un morphisme de foncteurs d'après (1.1.5) et d'après [SGA 3 III Cor. 0.9], ils sont compatibles avec les structures de groupe de $L(S')$ et $T(S')$, ce qui définit le morphisme u cherché et prouve que L est le noyau de v. Enfin, puisque G est lisse, toute section de G_0 se relève localement pour la topologie de Zariski et, a fortiori, v est un épimorphisme pour la topologie étale. Puisque le foncteur image directe f_* est une équivalence, il ne nous reste plus qu'à vérifier que les opérations de G sur L déduites de celles de G_0 sur son algèbre de Lie sont induites par les automorphismes intérieurs de G, ce qui résulte de (1.1.4) et (1.1.5).

Du lemme précédent, on déduit ce qui suit dans le cas abélien.

Théorème 1.3.5. Si G est un S-schéma en groupes *lisse* et *commutatif*, on a une suite exacte infinie

$$0 \to H^0(S, W) \cdots \to H^i_{\text{zar}}(S, W) \to H^i_{\text{ét}}(S, G) \to H^i_{\text{ét}}(S_0, G_0) \to H^{i+1}_{\text{zar}}(S, W) \ldots$$

En effet, ceci n'est autre que la suite exacte de cohomologie attachée à (1) car le morphisme induit par t sur la cohomologie s'interprète comme le morphisme

$$H^i_{\text{ét}}(S, G) \to H^i_{\text{ét}}(S_0, G_0)$$

induit par f et t puisque le foncteur f^* est une équivalence de catégories. On notera que, puisque t est un épimorphisme pour la topologie de Zariski, on a encore une suite exacte analogue à la précédente en remplaçant la topologie étale par celle de Zariski.

§ 2. Deux théorèmes de M. Artin et A. Grothendieck

Nous allons donner des variantes non commutatives (dûes aux mêmes auteurs) du théorème de changement de base par un morphisme lisse [SGA 4 XVI] et du théorème de changement de base pour un morphisme propre [SGA 4 XII] de M. Artin et A. Grothendieck. Dans le présent paragraphe, le mot faisceau s'entend au sens de *la topologie étale*.

2.1. Le changement de base lisse

Définition 2.1.1. On dit qu'un morphisme de schémas $f: S' \to S$ est *prolisse* si S' est limite d'un système projectif de S-schémas affines et lisses dont les morphismes de transition sont affines.

Théorème 2.1.2. Soit un carré cartésien de schémas

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{g'} & X' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ Y & \xleftarrow[g]{} & Y' \end{array} \tag{1}$$

tel que f soit *quasi-compact et quasi-séparé*. On suppose que, pour tout point géométrique y' de Y' se projettant sur un point géométrique y de Y, le morphisme induit par g entre les localisés stricts de Y' et Y en y' et y est *prolisse*. Soit L le complémentaire, dans l'ensemble des nombres premiers, de l'ensemble des caractéristiques résiduelles des points de Y. Pour tout ind-L-champ C sur X, le morphisme de champs sur Y'

$$g^* f_*(C) \to f'_* g'^*(C) \tag{2}$$

est une équivalence.

2.1.2.1. L'hypothèse sur g est satisfaite si g est *lisse*. Quant à l'hypothèse faite sur C, elle signifie que, pour tout objet x de C de projection $U \in \mathrm{Ob}(X)$, le faisceau de groupes $\mathbf{Aut}_U(x)$ est un faisceau de ind-L-groupes [SGA 4 1.3]. D'après [SGA 4 IX 1.6], la propriété d'être un ind-L-groupe se vérifie fibre par fibre. D'après (V 1.3.3) et (2.1.5.3), il en est donc de même pour la condition d'être un ind-L-champ, ce qui prouve qu'elle est de nature locale et que, pour tout morphisme de schémas $f: X' \to X$, l'image inverse par f d'un ind-L-champ sur X est un ind-L-champ sur X'.

2.1.2.2. Le morphisme (2) est celui que l'on déduit, par la propriété universelle de l'image inverse par g du champ $f_*(C)$, du morphisme composé

$$f_*(C) \xrightarrow{a} f_* g'_* g'^*(C) \xrightarrow{\sim} g_* f'_* g'^*(C)$$

où a est l'image directe par f du morphisme structural $C \to g'_* g'^*(C)$. Par suite, d'après (II 3.2.1.6), le composé

$$f_*(C)(Y) \to g^* f_*(C)(Y') \to f'_* g'^*(C)(Y') \tag{3}$$

n'est autre que le foncteur naturel

$$C(X) \to g'^*(C)(X').$$

2.1.2.3. D'après [SGA 4 VIII 3.5], les points géométriques de Y' forment une famille conservative de points du topos étale de Y'. D'après (III 2.1.5.8), il nous suffit donc de prouver que, pour tout point géométrique y' de Y', la fibre en y' du morphisme de champs (2) est une équivalence. Soit alors y' un point géométrique de Y' à valeur dans le spectre k d'un corps séparablement clos et soit $y = g\,y'$ son image par g. Si S et S' désignent respectivement les localisés stricts de Y et Y' aux points y *et* y', [SGA 4 VIII 3.4.3], on a un diagramme commutatif de schémas

$$\begin{array}{ccccc} Y' & \xleftarrow{s'} & S' & \xleftarrow{t'} & k \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} & \swarrow{\scriptstyle t} & \\ Y & \xleftarrow[s]{} & S & & \end{array} \tag{4}$$

où $y' = s'\,t'$, donc $y = s\,t$. Par le changement de base $f\colon X \to Y$, on en déduit un carré commutatif de morphismes de schémas

$$\begin{array}{ccc} X' & \xleftarrow{u'} & T' \\ {\scriptstyle g'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h'} \\ X & \xleftarrow[u]{} & T. \end{array} \tag{5}$$

D'après le calcul des fibres d'un champ en topologie étale (2.1.5), le morphisme induit par (2) entre les fibres en y' n'est autre que le foncteur naturel

$$u^*(C)(T) \to h'^*\,u^*(C)(T). \tag{6}$$

D'après (2.1.2.1), $u^*(C)$ est un ind-**L**-champ et, par hypothèse, le morphisme h est prolisse. On voit donc que (6) est une équivalence en appliquant (2.1.3) à $u^*(C)$ et au carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} T & \xleftarrow{h'} & T' \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \xleftarrow[h]{} & S'. \end{array}$$

En résumé, nous avons prouvé que (2.1.3) et (2.1.5) impliquent (2.1.2). Notons encore que (2.1.3) est la forme que prend (2.1.2) quand on y suppose que g est un morphisme local d'anneaux strictement locaux. En effet, ceci résulte immédiatement du calcul des fibres d'un champ pour la topologie étale (2.1.5).

Théorème 2.1.3. Soit $g\colon S' \to S$ un morphisme *local* et *prolisse* entre les spectres de deux anneaux locaux strictement henséliens. Soit **L**

l'ensemble des nombres premiers qui ne sont pas la caractéristique résiduelle d'un point de S. Pour tout carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{g'} & X' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow \\ S & \xleftarrow[g]{} & S' \end{array}$$

et tout ind-L-champ C sur X, le foncteur $C(X) \to C'(X')$ est une équivalence, où $C' = g'^*(C)$.

Remarque 2.1.4. On notera que l'on peut prendre pour g le morphisme de schémas défini par une *extension de corps séparablement clos*. De plus, ainsi qu'il a été expliqué dans (III 2.1.5.12), cet énoncé implique, pour la cohomologie de degré $\leqq 2$, (abélienne ou non), des conséquences que le lecteur explicitera.

D'après [SGA 4 XVI], le morphisme g est *universellement 1-asphérique* pour L, ce qui signifie que, pour tout carré cartésien comme dans l'énoncé, la condition (iii) de (III 2.1.5.11) est satisfaite par le morphisme induit par g' entre les sites étales de X' et X, donc aussi la condition (i) du même énoncé, ce qui prouve (2.1.3). Bien entendu, dans (III 2.1.5.11), on prend pour P la condition d'être un ind-L-groupe.

Pour achever la preuve de (2.1.2), il nous reste à calculer les *fibres d'un champ* (III 2.1.5.9) *en topologie étale.*

Proposition 2.1.5. Soient $K \xrightarrow{y} Y \xleftarrow{f} X$ des morphismes de schémas, K étant le spectre d'un corps séparablement clos et f étant quasi-compact et quasi-séparé. Soit S le localisé strict de Y en son point géométrique y. On a des morphismes naturels $K \xrightarrow{u} S \xrightarrow{s} Y$ et un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{t} & X \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S & \xrightarrow[s]{} & Y. \end{array}$$

(i) Soit F un champ sur Y. Posons $F_y = y^*(F)(K)$. Le foncteur naturel $s^*(F)(S) \to F_y$ est une équivalence.

(ii) Soit F un champ sur X. On a une équivalence $t^*(F)(T) \to f_*(F)_y$, où $f_*(F)_y = y^* f_*(F)(K)$.

2.1.5.1. *Prouvons* (i). Par transitivité de l'image inverse de champs, le foncteur considéré n'est autre que

$$s^*(F)(S) \to u^* s^*(F)(K).$$

Il suffit donc de prouver que, pour tout champ H sur S, le foncteur $\eta\colon H(S)\to u^*(H)(K)$ est une équivalence, ce qui résulte de l'analogue relatif aux faisceaux d'ensembles [SGA 4 VIII 4.6]. En effet, d'après (III 2.1.5.9), le foncteur η est toujours pleinement fidèle et il suffit de prouver qu'il est une équivalence lorsque H est une gerbe. Mais puisque S est strictement local, toute gerbe sur S est triviale, donc une gerbe de torseurs, et puisque tout torseur sur K est trivial, η est toujours une équivalence.

2.1.5.2. Avant de prouver (ii), nous allons trouver une autre expression de F_y en utilisant le procédé de calcul de $y^*(F)$ donné dans (II 3.2.4.1 (1)), qui assure que $y^*(F)$ est le champ associé à une catégorie fibrée $y^\bullet(F)$ sur le site étale de K. Puisque le topos des faisceaux d'ensembles sur K est équivalent à U-ens, toute catégorie fibrée est un champ et, par suite, $y^*(F)=y^\bullet(F)$. D'après les formules (I 2.5.1), on a donc

$$y^*(F)(K)=\varinjlim(F[K]/Y[K]), \tag{1}$$

où $Y[K]$ est la catégorie dont les objets sont les couples $(Y', y'\colon K\to Y')$, où Y' est un Y-schéma étale et y' un Y-morphisme, et où $F[K]$ se déduit de F par le changement de base $Y[K]\to Y_{ét}$, $(Y', y')\rightsquigarrow Y'$. On a donc des équivalences

$$s^*(F)(S)\xrightarrow{\approx} F_y\xleftarrow{\approx}\varinjlim_{(Y',y')} F(Y'), \tag{2}$$

où le dernier terme écrit est une notation plus suggestive pour (1).

2.1.5.3. Notons au passage que la formule ci-dessus prouve que, pour tout objet x de F_y, il existe Y-schéma étale Y', un Y-morphisme $y'\colon K\to Y'$ et un objet x' de $F(Y')$ tels que l'image de x' dans F_y soit isomorphe à x. Par ailleurs, d'après (II 3.2.8), si $z'\in \mathrm{Ob}(F(Y'))$ et si z est son image dans F_y, l'ensemble $\mathrm{Hom}(x, z)$ est la fibre du faisceau $\mathrm{Hom}_{Y'}(x', z')$. On obtient donc ainsi *une description commode de la fibre d'un champ sur le site étale d'un schéma.*

2.1.5.4. *Pour prouver* (ii), appliquons ce qui précède à $f_*(F)$. Les formules (1) et (2) deviennent alors

$$f_*(F)_y=\varinjlim(f_*(F)[K]/Y[K]), \tag{3}$$

ce qui s'écrit de manière plus suggestive

$$f_*(F)_y=\varinjlim_{(Y',y')} F(X'),\qquad X'=X\times_Y Y'. \tag{4}$$

Pour chaque objet $(Y', y': K \to Y')$ de $Y[K]$, on a un morphisme $s': S \to Y'$ tel que $s' u = y'$, d'où deux carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} X & \longleftarrow & X' & \longleftarrow & T \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longleftarrow & Y' & \xleftarrow[s']{} & S. \end{array}$$

D'où un foncteur

$$F(X') \to t^*(F)(T). \tag{5}$$

Il est facile de vérifier que les morphismes (5) définissent, par la propriété universelle de $\varinjlim$, un foncteur

$$f_*(F)_y \to t^*(F)(T).$$

D'après ce qui précède, il reste à voir que ce dernier est une équivalence, ce qui résulte, comme dans le cas des faisceaux d'ensembles, d'un résultat de passage à la limite que voici.

Lemme 2.1.6. Soit I une catégorie pseudo-filtrante, soit X_i, $i \in \mathrm{Ob}(I)$, un système projectif de schémas quasi-compacts et quasi-séparés indexé par I tel que les morphismes de transition soient affines. Soit 0 un objet final de I et soit F un champ sur X_0. Pour tout $i \in I$, on note F_i l'image inverse de F par le morphisme de transition $X_i \to X_0$. On note X la limite projective des X_i et F l'image inverse de F_0 sur X. Le foncteur naturel

$$\varinjlim F_i(X_i) \to F(X) \tag{1}$$

est une équivalence.

D'après (II 3.2.3), les $F_i(X_i)$ définissent une catégorie fibrée (mais non nécessairement scindée) F sur I et les foncteurs $F_i(X_i) \to F(X)$ définissent un foncteur I-cartésien $\mathsf{F} \to F(X) \times I$, ce qui définit (1) par la propriété universelle de $\varinjlim$. Le fait que (1) soit pleinement fidèle résulte du résultat analogue pour les faisceaux d'ensembles [SGA 4 VII 5.8] et de (II 3.2.8). Le résultat cité montre d'ailleurs que (1) est une équivalence lorsque l'on prend pour F_0 un champ de torseurs (V 1.3.4). Le cas d'une gerbe non triviale s'en déduit en utilisant le fait que F_0 est trivialisée par une famille finie $X_{0a} \to X_0$ où les X_{0a} sont encore quasi-compacts et quasi-séparés et en faisant un petit calcul en termes de données de descente, licite parce que (1) est toujours pleinement fidèle. Enfin, par le procédé de (III 2.1.5.9), le cas général se réduit au cas d'une gerbe en notant que, d'après (III 2.1.5.5) et [SGA 4 VII 5.8), l'application

$$\varinjlim \mathrm{Ger}(F_i)(X_i) \to \mathrm{Ger}(F)(X)$$

est bijective, ce qui permet, quitte à remplacer I par une catégorie cofinale, de remplacer F_0 par une gerbe.

2.2. Le changement de base pour un morphisme propre

2.2.1. Le site et le topos étales d'un schéma X sont notés respectivement $X_{ét}$ et $\tilde{X}$. Un champ F sur le site étale d'un schéma X est dit *constructible* (resp. *ind-fini*) si, pour tout objet x de F se projetant sur $S \in \mathrm{Ob}(X_{ét})$, le faisceau de groupes $\mathbf{Aut}_S(x)$ est constructible (resp. ind-fini), [SGA 4 IX 2.3 et 1.3]. Il s'agit là d'une propriété qui se vérifie fibre par fibre (2.1.5.3) [SGA 4 IX 2.3 et 1.6] et qui est donc de nature locale et stable par images inverse.

Il serait plus naturel d'exiger en outre que le faisceau des sous-gerbes maximales d'un champ constructible (resp. ind-fini) soit constructible (resp. ind-fini). Nous ne le ferons pas, car cette condition n'intervient pas ici, contrairement à ce qui se passe pour le théorème de finitude de l'image directe d'un champ par un morphisme propre (cf. Michèle Raynaud [34]).

Nous désirons prouver le théorème suivant

Théorème 2.2.2. Soient Y un schéma localement noethérien et $f: X \to Y$ un morphisme propre. Pour tout champ ind-fini F sur X et tout carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{g'} & X' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ Y & \xleftarrow[g]{} & Y' \end{array} \qquad (1)$$

le morphisme naturel de champs sur Y

$$g^* f_*(F) \to f'_* g'^*(F) \qquad (2)$$

est une équivalence.

2.2.2.1. Il est vraisemblable que la conclusion reste satisfaite si l'on ne suppose plus que Y est localement noethérien cf. [SGA 4 XII 5.1]. A part l'hypothèse faite sur Y, le lecteur aura noté que notre énoncé implique [SGA 4 XII 5.1(ii)] en prenant pour F un champ de torseurs sous un faisceau en groupes ind-fini (cf. V 3).

2.2.2.2. De [SGA 4 XII] nous n'utiliserons que des résultats très simples et, au lieu de procéder par récurrence sur la dimension, nous utiliserons le résultat que voici, que M. Artin sait maintenant réduire facilement au cas d'un anneau local complet, cas traité par Grothendieck dès 1960, [SGA 2]. La méthode employée ici et qui est dûe à Grothendieck repose essentiellement sur (2.2.13) qui permet «d'effacer» une gerbe par un morphisme *entier* et sur (2.2.6)–(2.2.9) qui permet de «redescendre» à X.

Théorème 2.2.3. Soient S un anneau local hensélien, $f: X \to S$ un morphisme propre et A un faisceau de groupes *fini et constant* sur X. Si X_0 désigne la fibre de X au point fermé de S, le foncteur $\mathbf{Tors}(X, A) \to \mathbf{Tors}(X_0, A_0)$ est une équivalence de catégories, où A_0 est l'image inverse de A sur X_0.

Admis.

Par un argument facile de passage aux fibres, nous montrerons d'abord comment (2.2.2) résulte de (2.2.4) ci dessous, puis nous déduirons (2.2.4) de (2.2.3).

Théorème 2.2.4. Sous les hypothèses de (2.2.3), si S est noethérien, pour tout champ ind-fini F sur X, le foncteur $F(X) \to F_0(X_0)$ est une équivalence de catégories, où F_0 est l'image inverse de F sur X_0.

2.2.5. Montrons comment (2.2.4) implique (2.2.2). Notons d'abord que la conclusion est locale sur Y', donc aussi sur Y, ce qui permet de les supposer tous deux affines. On sait alors que Y' est limite projective filtrante de Y-schémas affines et de présentation finie Y_i, ce qui, grâce à (2.1.6), permet de supposer que Y' est de présentation finie sur Y. On sait alors que les points géométriques de Y' localisés en un point de Y' fermé dans sa fibre fournissent une famille conservative de points du topos Y', [SGA 4 VIII 3.13 (b)]. D'après (III 2.1.5.8), suffit donc de prouver que les fibres de (2.2.2 (2)) en ces points sont des équivalences. Soient donc y' un point de Y' fermé dans sa fibre, $y = g(y')$ et K le spectre d'une clôture séparable du corps résiduel de y'. Si S' et S désignent respectivement les localisés stricts de Y' et Y en y' et y, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} S & \longleftarrow & S' & & \\ \downarrow & & \downarrow & \nwarrow & \\ Y & \longleftarrow & Y' & \longleftarrow & K \end{array}$$

d'où, par le changement de base $f: X \dashrightarrow Y$, un diagramme commutatif de schémas

$$\begin{array}{ccccc} \overline{X} & \longleftarrow & \overline{X}' & & \\ \downarrow & & \downarrow & \nwarrow & \\ X & \longleftarrow & X' & \longleftarrow & X_0. \end{array}$$

Avec des notations évidentes pour les images inverses du champ F par ces différents morphismes, on a des foncteurs

$$\overline{F}(\overline{X}) \xrightarrow{u} \overline{F}'(\overline{X}') \xrightarrow{v} F_0(X_0),$$

où le composé vu est isomorphe au foncteur de restriction induit par $X_0 \to \overline{X}$. D'après (2.1.5 (ii)), la fibre en y' de (2.2.2 (2)) n'est autre que u et, d'après (2.2.4), les foncteurs v et vu sont des équivalences; ceci prouve que (2.2.4) $\Rightarrow$ (2.2.2). On notera que l'hypothèse que Y est localement noethérien n'est pas intervenue jusqu'ici.

Corollaire 2.2.6. Sous les hypothèses de (2.2.4),

(i) Pour tout faisceau de groupes ind-fini A sur X, l'application $H^i(X, A_X) \to H^i(X_0, A_{X_0})$ est bijective pour $i=0, 1$.

(ii) Pour tout lien ind-fini L, l'image inverse par l'application $H^2(X, L) \to H^2(X_0, L_0)$ de l'ensemble des classes neutres est l'ensemble des classes neutres.

(iii) Pour tout faisceau de groupes ind-fini et commutatif A, le morphisme $H^i(X, A) \to H^i(X_0, A_0)$ est bijectif pour $i=0, 1$ et injectif pour $i=2$.

Par définition de la cohomologie non abélienne, (i) et (ii) traduisent (2.2.4) dans le cas d'une gerbe. De plus, (iii) résulte de (i) et (ii) d'après (III 3.5.4) et (IV 3.4.2).

2.2.7. Il nous reste à prouver que (2.2.3) $\Rightarrow$ (2.2.4) et pour cela, nous utiliserons la construction que voici qui, à un champ F sur le site étale d'un schéma U, associe une catégorie fibrée F sur $\mathrm{Sch}_{/U}$ toute entière. Nous construisons d'abord une catégorie clivée dont nous oublierons le clivage. Pour tout U-schéma $u: U' \to U$, on pose

$$\mathsf{F}(U) = u^*(F)(U'). \tag{1}$$

Pour tout U-morphisme de schémas $m: U'' \to U'$, on a, par transitivité de l'image inverse de champs (II 3.2.1.5 (7)), un foncteur restriction $\mathsf{F}(u): \mathsf{F}(U') \to \mathsf{F}(U'')$ et, pour tout couple $U''' \xrightarrow{v} U'' \xrightarrow{u} U'$ de U-morphismes composables, un isomorphisme

$$c_{u,v}: \mathsf{F}(v)\,\mathsf{F}(u) \to \mathsf{F}(uv), \qquad \text{(II 3.2.3)}.$$

Par construction, ces objets satisfont aux conditions de compatibilité qui permettent de définir une catégorie clivée dont la catégorie fibrée sous-jacente est notée F. On l'appelle l'*extension de F à la catégorie des schémas*. On notera que, pour tout objet U' du site étale de U, on a $F(U') \approx\!\!\!\approx \mathsf{F}(U')$ en vertu de (II 3.2.7). On a par ailleurs une catégorie fibrée Faisc sur $\mathrm{Sch}_{/U}$ dont la fibre en U' est la catégorie des faisceaux d'ensembles sur le site étale de U'. Soit T la topologie la plus fine pour laquelle Faisc est un champ sur $\mathrm{Sch}_{/U}$. Bien entendu, T est plus fine que la topologie étale. D'après [SGA 4 VIII 9.4], elle est strictement plus fine, car tout morphisme *surjectif* $u: U'' \to U'$ qui est *entier*, ou *propre*, ou

plat et localement de présentation finie, est couvrant pour T. La proposition suivante est donc un «procédé de localisation» et c'est ainsi que nous l'utiliserons.

Proposition 2.2.8. Soit F un champ sur le site étale d'un schéma U. L'extension F de F à la catégorie $\mathrm{Sch}_{/U}$ est un champ pour la topologie T.

Il est immédiat que F est un préchamp pour T. En effet, cela résulte de (II 1.2.3) et de (II 3.2.8). Pour prouver que F est un champ, on peut se limiter au cas d'une gerbe. En effet, si $\mathbf{S}=\{S_i \to S\}$ est une famille couvrante pour T et $x_i \in \mathsf{F}(S_i)$ une famille d'objets munie d'une donnée de descente (u_{ij}) relative à $\mathbf{S}$, il existe une sous-gerbe maximale G de l'image inverse de F sur S telle que, pour chaque i, x_i soit un objet de l'image inverse de G sur S_i. En effet, on a un préfaisceau d'ensembles $\mathbf{Ger}(\mathsf{F})$ sur $\mathrm{Sch}_{/U}$ dont les sections sur U' sont les sous-gerbes maximales de l'image inverse de F sur U'. D'après (III 2.1.5.5 (ii)) et par définition de T, le préfaisceau $\mathbf{Ger}(\mathsf{F})$ est un faisceau, d'où ce point. Puisque toute gerbe est trivialisée par une famille couvrante étale et que ces familles sont de descente effective pour F (car il en est ainsi pour F), on peut supposer que F est une gerbe triviale, donc est équivalente à la gerbe des torseurs sous un faisceau de groupes A sur $U_{ét}$. D'après (III 2.1.5.7), son image inverse par $u\colon U' \to U$ est la gerbe des torseurs sous l'image inverse de A. Dans ce cas l'énoncé résulte facilement du fait que $\mathbf{Faisc}$ est un champ pour T et du fait que le foncteur image inverse de faisceaux d'ensembles commute aux limites projectives finies.

Corollaire 2.2.9. Soit $i\colon X_0 \to X$ un morphisme de schémas et soit $p\colon X' \to X$ un morphisme couvrant pour T (2.2.7, 2.2.8). Pour tout entier $i \geqq 0$, on pose $X^i=(X'/X)^{i+1}$ et $X_0^i = X^i \times_X X_0$. Soit F un champ sur X et soit F son extension à $\mathrm{Sch}_{/X}$. Supposons que le foncteur $\mathsf{F}(X^i) \to \mathsf{F}(X_0^i)$ soit (2-i)-fidèle pour $i=0,1,2$. Alors le foncteur $\mathsf{F}(X) \to \mathsf{F}(X_0)$ est une équivalence.

D'après (2.2.8), F est un champ pour T, d'où la conclusion par un petit raisonnement en termes de données de descente, ou en invoquant [D 10.4].

Proposition 2.2.10. Soit $i\colon X_0 \to X$ une immersion fermée et soit $j\colon U \to X$ l'immersion ouverte, où $U=X-X_0$. Soit F un champ sur $X_{ét}$. Le morphisme d'adjonction $v\colon F \to i_*\, i^*(F)$ est couvrant (II 1.4.1); de plus, l'image inverse de v par i est une équivalence et l'image inverse par j de $i_*\, i^*(F)$ est le champ final.

D'après la description que l'on a donnée en (2.1.5.3) des fibres d'un champ pour la topologie étale, il est clair que les fibres de $i_*\, i^*(F)$ aux

points géométriques de U sont toutes équivalentes à la catégorie finale, d'où il résulte que $j^* i_* i^*(F)$ est le champ final. Par ailleurs, pour tout point géométrique y de Y, la fibre en y du morphisme v est une équivalence; en effet, par dévissage (III 2.1.5.5), on est réduit au cas des faisceaux d'ensembles, traité dans [SGA 4 VIII 6.2]. Donc $i^*(v)$ est une équivalence. Il résulte de ceci que v est couvrant, car il suffit de vérifier que ses fibres aux points géométriques de X le sont, ce qui vient d'être vu.

2.2.11. Soit $i\colon X_0 \to X$ une immersion fermée. Considérons les conditions suivantes

(A) X est noethérien

(B) pour tout X-schéma fini X' et tout groupe fini A, le foncteur

$$\mathbf{Tors}(X', A_{X'}) \to \mathbf{Tors}(X'_0, A_{X'_0})$$

est une équivalence, où $X'_0 = X' \times_X X_0$.

(C) Pour tout faisceau d'ensembles F sur X, l'application $F(X) \to F_0(X_0)$ est bijective, où F_0 est l'image inverse de F sur X_0.

(D) Pour tout champ constructible F sur X, le foncteur

$$\mathbf{F}(X) \to \mathbf{F}(X_0) \tag{1}$$

est une équivalence, où $\mathbf{F}$ est l'extension de F à $\mathrm{Sch}_{/X}$.

(E) Pour tout champ ind-fini, le foncteur (1) est une équivalence.

Sous les hypothèses et avec les notations de (2.2.4), on a (A) par hypothèse, (B) d'après (2.2.3) et (C) d'après [SGA 4 XII 6.5 (i)]. Pour prouver que (2.2.3) $\Rightarrow$ (2.2.4), il nous suffit donc de montrer que (E) résulte de la conjonction de (A), (B) et (C).

Lemme 2.2.12. Si l'immersion fermée $i\colon X_0 \to X$ satisfait à (B) (resp. (C)), alors, pour tout X-schéma *entier* X', le morphisme $i'\colon X'_0 \to X'$ déduit de i par changement de base satisfait à (B) (resp. (C)).

Examinons d'abord la condition (B). Notre assertion est évidente si X' est *fini* sur X. Si X' est entier sur X, tout X'-schéma fini sur X' est entier sur X, donc limite projective de X-schémas finis, d'où la conclusion par (2.1.6) ou [SGA 4 VII 5.8 et 5.14]. Par ailleurs, si F est un faisceau d'ensembles sur un X-schéma entier X', on a un carré commutatif de schémas

$$\begin{array}{ccc} X' & \longleftarrow & X'_0 \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_0} \\ X & \xleftarrow[i]{} & X_0 \end{array}$$

et l'application $F(X') \to F_0(X'_0)$ s'identifie à l'application composée

$$f_*(F)(X) \to i^* f_*(F)(X_0) \to f_{0*}(F_0)(X_0).$$

La première est bijective d'après (B) et la seconde est bijective d'après [SGA 4 VIII 5.6], d'où la conclusion.

Proposition 2.2.13. Soit X un schéma intègre quasi-compact et quasi-séparé de point générique x et soit G une gerbe constructible (resp. ind-finie) sur X. Il existe un morphisme entier et surjectif $f\colon X' \to X$, un faisceau de groupes F sur X', un morphisme de gerbes

$$r\colon G' \to \mathrm{TORS}(X', F), \quad G' = f^*(G), \tag{1}$$

et un ouvert non vide U de X tels que

(i) la restriction de r à $U' = f^{-1}(U)$ est une équivalence

(ii) F est le faisceau constant attaché à un groupe fini A (resp. F est ind-fini).

2.2.13.1. Soit L une clôture algébrique du corps résiduel de x et soit X' le normalisé de X dans L. Le morphisme $f\colon X' \to X$ est entier et surjectif. Par ailleurs, le site étale de X' est équivalent à son site zariskien. Il existe donc une famille couvrante $(X_i \to X')$, $i \in I$, qui trivialise G', où les X_i sont des ouverts non vides de X'; de plus, puisque X' est quasi-compact, on peut supposer que l'ensemble d'indices I est fini. Soit $a_i \in \mathrm{Ob}(G'(X_i))$, $i \in I$, une famille. Puisque I est fini, il existe un ouvert dense U' de X', contenu dans chacun des X_i, tel que les images inverses sur U' des a_i soient isomorphes à un même objet a de $G'(U')$. Si G' est constructible, le faisceau $\mathbf{Aut}_{U'}(a)$ est constructible et, quitte à rétrécir U', on peut supposer qu'il est *constant*. Enfin, puisque $f\colon X' \to X$ est entier donc fermé, il existe un voisinage ouvert U de x dans X, que l'on peut choisir quasi-compact, dont l'image inverse est contenue dans U'. Remplaçons U' par $f^{-1}(U)$ et a par son image inverse sur $f^{-1}(U)$. De plus, l'immersion ouverte $j\colon U' \to X'$ est *quasi-compacte* car il en est ainsi de $U \to X$ puisque X est quasi-séparé. En résumé, nous avons choisi U' de telle sorte que, si G est *constructible*, il existe un groupe fini A et un isomorphisme $A_{U'} \approx \mathbf{Aut}_{U'}(a)$. Posant

$$B = \mathbf{Aut}_{U'}(a) \quad \text{et} \quad F = j_*(B), \tag{2}$$

on en déduit que F est isomorphe à $A_{X'}$, car X' est normal et j est dominant et quasi-compact [SGA 4 IX 2.14.1]. Par ailleurs, si G est *ind-finie*, il en est de même de G' (2.2.1), donc aussi de B, donc aussi de F [SGA 4 IX 1.6 (iii)]. Il nous reste donc à trouver un morphisme de gerbes tel que

(1) satisfaisant à la condition (i). Or l'objet a de $G'(U')$ fournit une équivalence de gerbes sur U'

$$u\colon\ j^*(G')\to \mathrm{TORS}(U', B), \qquad b \rightsquigarrow \mathsf{Isom}(a, b); \tag{3}$$

d'où, d'après (II 3.2.1 et 3.2.7), un morphisme de champs sur X'

$$v\colon\ G'\to j_*\big(\mathrm{TORS}(U', B)\big), \tag{4}$$

qui, à tout X'-schéma étale Y, associe le foncteur composé

$$G'(Y)\to G'(Y\times_{X'}U')\to \mathrm{TORS}(U', B)(Y\times_{X'}U').$$

La restriction de v à U' est donc une équivalence. Par ailleurs, on a un morphisme de champs sur X'

$$w\colon\ \mathrm{TORS}(X, F)\to j_*\big(\mathrm{TORS}(U', B)\big), \quad \text{(V 3.1.2)}, \tag{5}$$

qui est pleinement fidèle et dont la restriction à U' est également une équivalence. Il nous reste donc à prouver l'existence d'un morphisme

$$r\colon\ G'\to \mathrm{TORS}(X', F) \tag{6}$$

tel que $w\,r$ soit isomorphe à v, car la restriction de r à U' sera une équivalence. Puisque w est pleinement fidèle et que G' et $\mathrm{TORS}(X', F)$ sont des gerbes, il suffit de prouver que tout objet de l'image de v est localement isomorphe à un objet de l'image de w; puisque les X_i couvrent X', ceci résulte du fait que, pour chaque $i\in I$, $v(a_i)$ est l'image par w du torseur trivial, ce qui est immédiat puisque l'image inverse de a_i sur U' est isomorphe à a. D'où la conclusion.

2.2.14. Notons maintenant que si le couple (X, X_0) satisfait à (A)(B)(C), alors pour tout couple (X_2, X_1) de sous-schémas fermés de X tels que $X\supset X_2\supset X_1\supset X_0$, le couple (X_2, X_1) satisfait à (A) (B) (C), car d'après (2.2.12) il en est ainsi de (X_2, X_0) et (X_1, X_0). Soit alors F un champ sur X. Il résulte de (C) que les foncteurs $\mathsf{F}(X_i)\to \mathsf{F}(X_j)$ et $\mathsf{F}(X)\to \mathsf{F}(X_i)$ sont pleinement fidèles. Pour prouver que $\mathsf{F}(X)\to \mathsf{F}(X_0)$ est une équivalence, il suffit donc, par récurrence noethérienne, de prouver qu'il existe un fermé X_1 contenant X_0 et distinct de X_0 tel que $\mathsf{F}(X)\to \mathsf{F}(X_1)$ soit une équivalence. Pour cela, on peut déjà remplacer X par le schéma réduit sous-jacent, ce qui ne change pas le site étale [SGA 4 VIII 1.3]. On peut alors remplacer X par le schéma X' somme des composantes irréductibles de X. En effet, la projection $f\colon X'\to X$ est *finie* et le couple (X', X'_0) satisfait encore à (A) (B) (C) d'après (2.2.12). De plus, si X'_1 est un fermé de X' distinct de X' et contenant X'_0, il en est de même de $f^{-1}(f(X'_1))$ et si $\mathsf{F}(X')\to \mathsf{F}(X'_1)$ est une équivalence, il en est de même de $\mathsf{F}(X')\to \mathsf{F}\big(f^{-1}(f(X'_1))\big)$. Il résulte alors de (2.2.9) que $\mathsf{F}(X)\to \mathsf{F}\big(f(X_1)\big)$ est une

équivalence. Notons encore que, pour prouver (D) ou (E), on peut supposer que F est une gerbe. En effet, nous avons déjà noté que le foncteur $\mathsf{F}(X) \to \mathsf{F}(X_0)$ est pleinement fidèle. Or si s est un objet de $\mathsf{F}(X_0)$, la sous-gerbe maximale qu'il engendre est l'image inverse d'une sous-gerbe maximale de F. En effet, d'après (III 2.1.5.5), le faisceau des sous-gerbes maximales de $i^*(F)$ est l'image inverse du faisceau des sous-gerbes maximales de F et il suffit d'appliquer (C). En résumé, pour prouver que (A) (B) (C) impliquent (D) (resp. (E)), il suffit de prouver le lemme suivant.

Lemme 2.2.15. Soit $i\colon X_0 \to X$ une immersion fermée, où X est intègre, qui satisfait aux conditions (B) et (C). Pour toute gerbe *constructible* (resp. *ind-finie*) G sur X, il existe un fermé X_1 de X contenant X_0 et distinct de X tel que le foncteur $\mathsf{G}(X) \to \mathsf{G}(X_1)$ soit une équivalence.

Appliquons (2.2.13) et remplaçons l'ouvert U ainsi obtenu par son intersection avec $X - X_0$, ce qui n'affecte pas les conclusions de (2.2.13). Posons $X_1 = X - U$ et $X_1' = f^{-1}(X_1)$. D'après (2.2.9), il suffit de prouver que $\mathsf{G}'(X') \to \mathsf{G}'(X_1')$ est une équivalence, sachant déjà qu'il est pleinement fidèle. Avec les notations de (2.2.13), nous avons des immersions $U' \xrightarrow{j} X' \xleftarrow{i} X_1'$, un faisceau F sur X' et un morphisme $r\colon G' \to \mathrm{TORS}(X', F)$ dont l'image inverse par j est une équivalence. Soit s_1 un objet de $\mathsf{G}'(X_1')$ et soit s l'objet correspondant de $i_* i^*(G')$. D'après (2.2.10), le morphisme d'adjonction $p\colon G' \to i_* i^*(G')$ est couvrant. D'après (IV 2.5.4), le champ $K(s)$ des relèvements de s relativement à p est donc une gerbe. On a ainsi des morphismes de gerbes

$$K(s) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{TORS}(X', F) \xrightarrow{\beta} i_* i^*\big(\mathrm{TORS}(X', F)\big)$$

où α est le composé $K(s) \xrightarrow{k} G' \xrightarrow{r} \mathrm{TORS}(X', F)$, k étant le morphisme structural, et où β est le morphisme d'adjonction, (noter que $i_* i^*(\mathrm{TORS}(X', F))$ est bien une gerbe car β est couvrant (2.2.10)). La suite de morphismes de liens

$$1 \to L \xrightarrow{a} M \xrightarrow{b} N \to 1$$

où a et b sont induits par α et β est exacte (IV 2.5.5). En effet, cela se voit sur les fibres aux points géométriques de X'; or la restriction de α à U' est une équivalence et celle de $i_* i^*\big(\mathrm{TORS}(X', F)\big)$ est la gerbe finale, cependant que la restriction de β à X_1' est une équivalence et celle de K la gerbe triviale. D'après (IV 2.5.5.5), la gerbe K s'interprète donc comme la gerbe des relèvements relativement à β d'une section de $i_* i^*\big(\mathrm{TORS}(X', F)\big)$, à savoir l'image du composé $\beta\alpha$. Or le morphisme induit par β (resp. p) entre les catégories de sections cartésiennes s'interprète comme le foncteur restriction $\mathsf{Tors}(X', F) \to \mathsf{Tors}(X_1', F_1)$ (resp.

$\mathsf{G}'(X') \to \mathsf{G}'(X'_1)$). Par suite, pour que s se relève, il faut et il suffit que K soit triviale, ce qui signifie que t se relève. Si la gerbe G est *constructible*, le faisceau F est constant d'après (2.2.13) et par suite, t se relève d'après la condition (B) et (2.2.12). Nous avons donc prouvé le lemme dans ce cas et nous savons donc que (A) (B) (C) impliquent (D). Lorsque la gerbe G est ind-finie, le faisceau F est ind-fini d'après (2.2.13), et le lemme résulte donc du lemme ci-dessous.

Lemme 2.2.16. Soit $i\colon X_0 \to X$ une immersion fermée telle que l'on ait (C) et (D). Pour tout morphisme entier $f\colon X' \to X$ et tout faisceau de groupes ind-fini F sur X', l'application $H^1(X', F) \to H^1(X'_0, F_0)$ est bijective, où F_0 est l'image inverse de F sur $X'_0 = f^{-1}(X_0)$.

Si f est l'identité et si F est constructible, la gerbe des F-torseurs est constructible, d'où la conclusion dans ce cas par (D). Comme tout faisceau ind-fini est limite inductive filtrante de faisceaux constructibles [SGA 4 IX 2.7.2], le cas où f est l'identité s'en déduit par [SGA 4 IX 5.7 et 5.14]. Enfin, dans le cas général, si l'on noté $f_0\colon X'_0 \to X_0$ le morphisme induit par $f\colon X' \to X$, on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1(X', F) & \longrightarrow & H^1(X'_0, F_0) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^1\big(X, f_*(F)\big) & \longrightarrow & H^1\big(X_0, f_{0*}(F)\big) \end{array}$$

où les flèches verticales sont des isomorphismes, car f est entier [SGA 4 VIII 5.8]. De plus, le morphisme $f_*(F)_0 \to f_{0*}(F_0)$ est un isomorphisme car f est entier [SGA 4 VIII 5.6]; il suffit donc de prouver que l'application

$$H^1\big(X, f_*(F)\big) \to H^1\big(X_0, (f_*(F))_0\big)$$

est bijective. Or $f_*(F)$ est ind-fini car f est quasi-compact, d'où la conclusion.

Chapitre VIII

Extension d'un topos

Le principal résultat de ce chapitre est la possibilité d'effacer de façon universelle une classe de cohomologie de degré 2 par un topos. Ce résultat est la clef de l'interprétation de $H^2(X, G)$ comme classifiant certains X-topos que l'on pourrait appeler des extensions de X, la terminologie étant inspirée par le cas des extensions de groupe d'un topos, traité au §7.

§0. Conventions

Nous commençons par trois paragraphes de compléments sur les topos. Comme dans ce qui précède, U désigne, dans ce qui suit, un univers non vide. Si X et Y sont deux U-topos, on note

$$\mathbf{Mor}(X, Y) \tag{1}$$

la catégorie des morphismes de topos $f: X \to Y$ qui, on le rappelle, est définie comme la sous-catégorie pleine de la catégorie de tous les foncteurs $f_*: X \to Y$ dont les objets sont ceux qui admettent un adjoint à gauche $f^*: Y \to X$, celui-ci commutant aux limites projectives finies. Les U-topos forment ainsi une 2-catégorie; le «produit de composition» de deux morphismes de morphismes de topos

$$X \underset{a'}{\overset{a}{\underset{m\downarrow}{\overset{\longrightarrow}{\longrightarrow}}}} Y \underset{b'}{\overset{b}{\underset{n\downarrow}{\overset{\longrightarrow}{\longrightarrow}}}} Z,$$

qui n'est autre que celui des morphismes de foncteurs sous-jacents est noté $n * m$. Si $x: X \to S$ et $y: Y \to S$ sont deux morphismes de U-topos, on note (par abus de notations)

$$\mathbf{Mor}_S(X, Y) \tag{2}$$

la catégorie dont les objets sont les (f, i), où $f: X \to Y$ est un morphisme de topos et $i: yf \to x$ un *isomorphisme* de morphismes de topos, les flèches de (2) de source $(f, i): X \to Y$ et de but $(g, j): X \to Y$ étant les

morphismes de morphismes de topos

$$m\colon f \to g \tag{3}$$

tels que $j \cdot (y * m) = i$. Les morphismes de topos $x\colon X \to S$ (appelés S-topos) forment ainsi une 2-catégorie que l'on appelle la 2-catégorie des S-topos.

Remarque 0.1. Dans ce qui suit, nous observerons qu'il est souvent plus commode de travailler avec le foncteur image inverse $f^*\colon Y \to X$ sous-jacent à un morphisme de topos $f\colon X \to Y$ qu'avec le foncteur image directe $f_*\colon X \to Y$. De ce fait, nous devrons utiliser le lemme suivant qui assure que si $f, g\colon X \rightrightarrows Y$ sont deux morphismes de topos, on a une bijection naturelle entre l'ensemble $\mathrm{Hom}(f_*, g_*)$ des morphismes $f \to g$ et l'ensemble $\mathrm{Hom}(g^*, f^*)$. On notera que par cette opération, on «retourne toutes les flèches», ainsi que l'expliquent les lemmes (0.3) et (0.4).

Si $m\colon f \to g$ est un morphisme de topos, nous conviendrons, s'il y a ambiguïté, de noter

$$m_*\colon f_* \to g_* \quad \text{et} \quad m^*\colon g^* \to f^* \tag{1}$$

les morphismes de foncteurs sous-jacents, liés par les formules du lemme suivant. Lorsque le contexte le permet, nous remplacerons l'un ou l'autre des signes m_* et m^* par m.

Lemme 0.2. Soient $f_*, g_*\colon X \rightrightarrows Y$ deux foncteurs admettant des adjoints à gauche f^* et g^*. On a deux bijections inverses l'une de l'autre:

$$A\colon \mathrm{Hom}(f_*, g_*) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(g^*, f^*) \tag{1}$$

$$A(m) = (a_g * f^*)(g^* * m * f^*)(g^* * b_f)$$

$$B\colon \mathrm{Hom}(g^*, f^*) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(f_*, g_*) \tag{2}$$

$$B(n) = (g_* * a_f)(g_* * n * f_*)(b_g * f_*)$$

où $a_f\colon f^* f_* \to \mathrm{id}_X$ et $b_f\colon \mathrm{id}_Y \to f_* f^*$ sont les morphismes d'adjonction (notations analogues pour g).

0.2.1. On notera que, pour tout $m\colon f_* \to g_*$ et tout $y \in \mathrm{Ob}(Y)$, on a

$$A(m)(y) = a_g\big(f^*(y)\big) \cdot g^*\big(m(f^*(y))\big) \cdot g^*\big(b_f(y)\big),$$

autrement dit, $A(m)(y)$ est l'image du composé

$$y \xrightarrow{b_f(y)} f_* f^*(y) \xrightarrow{m(f^*(y))} g_* f^*(y)$$

par l'isomorphisme habituel

$$\mathrm{Hom}(y, g_* f^*(y)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(g^*(y), f^*(y)).$$

0.2.2. Prouvons que $BA(m)=m$, $m\in\mathrm{Hom}(f_*, g_*)$. Par définition, on a $BA(m)=XYZTU$, où $X=g_**a_f$, $Y=g_**a_g*f^*f_*$, $Z=g_*g^**m*f^*f_*$, $T=g_*g^**b_f*f_*$ et $U=b_g*f_*$. Or on a

$$a_f\cdot(a_g*f^*f_*)=a_g*a_f=a_g\cdot(g^*g_**a_f),$$

donc

$$XY=(g_**a_g)(g_*g^*g_**a_f).$$

Or on a

$$(g_**a_f)(m*f^*f_*)=m*a_f=m\cdot(f_**a_f),$$

donc

$$XYZ=(g_**a_g)(g_*g^**m)(g_*g^*f_**a_f).$$

Or on a $(f_**a_f)(b_f*f_*)=\mathrm{id}_{f_*}$ car f^* est adjoint à gauche de f_*, donc

$$XYZT=(g_**a_g)(g_*g^**m).$$

Or on a

$$(g_*g^**m)(b_g*f_*)=b_g*m=(b_g*g_*)\cdot m,$$

donc $XYZTU=(g_**a_g)(b_g*g_*)\,m$, donc $BA(m)=m$, car $(g_**a_g)(b_g*g_*)$ $=\mathrm{id}_{g_*}$ puisque g^* est adjoint à gauche de g_*.

0.2.3. Prouvons que $AB(n)=n, n\in\mathrm{Hom}(g^*, f^*)$. On a $AB(n)=XYZTU$, où $X=(a_g*f^*)$, $Y=(g^*g_**a_f*f^*)$, $Z=(g^*g_**n*f_*f^*)$, $T=(g^**b_g*f_*f^*)$ et $U=(g^**b_f)$. Or on a

$$(b_g*f_*f^*)\cdot b_f=b_g*b_f=(g_*g^**b_f)\cdot b_g,$$

donc $TU=(g^*g_*g^**b_f)(g^**b_g)$. Or on a

$$(n*f_*f^*)(g^**b_f)=n*b_f=(f^**b_f)\cdot n,$$

donc $ZTU=(g^*g_*f^**b_f)(g^*g_**n)(g^**b_g)$. Or on a

$$(a_f*f^*)(f^**b_f)=\mathrm{id}_{f^*},$$

donc $XYZTU=(a_g*f^*)(g^*g_**n)(g^**b_g)$. Or on a

$$(a_g*f^*)(g^*g_**n)=a_g*n=n\cdot(a_g*g^*),$$

donc $AB(n)=XYZTU=n\cdot(a_g*g^*)\cdot(g^**b_g)=n$. C.Q.F.D.

Lemme 0.3. Soient $f_*, g_*, h_*\colon X\rightrightarrows Y$ des foncteurs admettant des adjoints à gauche $f^*, g^*, h^*\colon Y\rightrightarrows X$ et soient $f_*\xrightarrow{m}g_*\xrightarrow{n}h_*$ des

morphismes de foncteurs. On a

$$A(n\,m)=A(m)\,A(n), \tag{1}$$

où $h^* \xrightarrow{A(n)} g^* \xrightarrow{A(m)} f^*$ sont les morphismes des foncteurs attachés à m et n par le lemme précédent.

Pour les morphismes d'adjonction, on adopte les notations du lemme précédent. On a $A(n\,m)=XYZT$, où $X=a_h * f^*$, $Y=h^* * n * f^*$, $Z=h^* * m * f^*$, $T=h^* * b_f$. Puisque $\mathrm{id}_{g_*}=(g_* * a_g)(b_g * g_*)$, on a

$$n=n\cdot(g_* * a_g)(b_g * g_*)=(n * a_g)(b_g * g_*)=(h_* * a_g)(n * g^* g_*)(b_g * g_*)$$

d'où

$$Y=(h^* h_* * a_g * f^*)(h^* * n * g^* g_* f^*)(h^* * b_g * g_* f^*).$$

Or $a_h\cdot(h^* h_* * a_g)=a_h * a_g=a_g\cdot(a_h * g^* g_*)$ donc

$$\begin{aligned} XY&=(a_g * f^*)(a_h * g^* g_* f^*)(h^* * n * g^* g_* f^*)(h^* * b_g * g_* f^*)\\ &=(a_g * f^*)\big(A(n) * g_* f^*\big). \end{aligned}$$

Or $\big(A(n) * g_*\big)(h^* * m)=A(n) * m=(g^* * m)\big(A(n) * f_*\big)$, donc

$$\begin{aligned} XYZT&=(a_g * f^*)(g^* * m * f^*)\big(A(n) * f_* f^*\big)(h^* * b_f)\\ &=(a_g * f^*)(g^* * m * f^*)\big(A(n) * b_f\big)\\ &=(a_g * f^*)(g^* * m * f^*)(g^* * b_f)\big(A(n)\big)\\ &=A(m)\,A(n). \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

Lemme 0.4. Soient des morphismes de foncteurs

$$X \underset{g_*}{\overset{f_*}{\underset{\downarrow m}{\rightrightarrows}}} Y \underset{k_*}{\overset{h_*}{\underset{\downarrow n}{\rightrightarrows}}} Z.$$

On suppose que les foncteurs f_*, g_*, h_* et k_* admettent des adjoints à gauche notés respectivement f^*, g^*, h^* et k^*. Si l'on désigne par $m\mapsto A(m)$ l'application qui fait passer d'un morphisme de foncteurs au morphisme correspondant entre les adjoints à gauche (0.2), on a

$$A(n * m)=A(m) * A(n) \tag{1}$$

$$A(h_* * m)=A(m) * h^* \quad \text{et} \quad A(n * f_*)=f^* * A(n). \tag{2}$$

0.4.1. Compte tenu de (0.3), il suffit de prouver les formules (2). Nous ne prouverons que la première de celles-ci, la seconde se vérifiant de manière analogue. Nous utilisons pour les morphismes d'adjonction

les mêmes notations que dans (0.2) en notant que les morphismes

$$a_{hf} = a_f \cdot (f^* * a_h * f_*) \tag{3}$$

$$b_{hf} = (h_* * b_f * h^*) \cdot b_h \tag{4}$$

font du composé $f^* h^*$ un adjoint à gauche de $h_* f_*$, ce qui, compte tenu des énoncés analogues relatifs aux autres composés possibles donne un sens aux formules (1) et (2). On a

$$\begin{aligned} A(h_* * m) &= (a_{hg} * f^* h^*)(g^* h^* h_* * m * f^* h^*)(g^* h^* * b_{hf}) \\ &= (a_g * f^* h^*)(g^* * a_h * g_* f^* h^*)(g^* h^* h_* * m * f^* h^*)(g^* h^* * b_{hf}). \end{aligned}$$

Or $(a_h * g_*)(h^* h_* * m) = a_h * m = m \cdot (a_h * f_*)$, donc

$$A(h_* * m) = (a_g * f^* h^*)(g^* * m * f^* h^*)(g^* * a_h * f_* f^* h^*)(g^* h^* * b_{hf}).$$

Pour en déduire que $A(h_* * m) = A(m) * h^*$, il suffit de prouver que, si l'on pose $X = (a_h * f_* f^* h^*)(h^* * b_{hf})$, on a $X = b_f * h^*$. Or on a

$$\begin{aligned} X &= (a_h * f_* f^* h^*)(h^* h_* * b_f * h^*)(h^* * b_h) \\ &= (a_h * b_f * h^*)(h^* * b_h) \\ &= (b_f * h^*)(a_h * h^*)(h^* * b_h) \\ &= b_f * h^*, \end{aligned}$$

d'où la conclusion.

Définition 0.5. Soit un diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{y'} & Z \\ {\scriptstyle x}\downarrow & \overset{m}{\swarrow} & \downarrow{\scriptstyle x'} \\ S & \xleftarrow[y]{} & Y \end{array} \tag{1}$$

où x, y, x', y' sont des morphismes de topos et où $m: x\,y' \to y\,x'$ est un *isomorphisme* de morphismes de topos. On dit que (1) est 2-cartésien si, pour tout X-topos $w: V \to S$, le foncteur

$$\begin{aligned} \mathbf{Mor}_S(V, Z) &\to \mathbf{Mor}_S(V, X) \times \mathbf{Mor}_S(V, Y) \\ (v, i) &\rightsquigarrow \big((y'\,v, i \cdot (m * v)), (x'\,v, i)\big) \end{aligned} \tag{2}$$

est une équivalence de catégories.

Dans ce cas, on dit également que (x', y', m) fait de Z *un 2-produit fibré de* X *et* Y *au-dessus de* S et on écrit abusivement

$$Z \approx\!\!\approx X \times_S Y. \tag{3}$$

Le lecteur aura noté que, pour définir (2), nous avons choisi de faire de Z un S-topos grâce à yx', ce qui explique la disymétrie des formules. M. Hakim a démontré (non publié) que le produit fibré de deux topos existe toujours. Le lecteur qui répugnerait à admettre ou à démontrer ce résultat observera que nous ne l'utilisons que dans (3.7) et que lorsqu'il est fait usage de (3.7), on est assuré pour d'autres raisons de l'existence des produits fibrés considérés.

0.6. On dit qu'un morphisme de S-topos $f\colon X \to Y$, $i\colon yf \to x$ est une *S-équivalence* si le foncteur image inverse f^* est une équivalence, ce qui revient à dire que le foncteur image directe f_* en est une.

§ 1. Localisation d'un topos

1.1. Soient X un U-topos, U un objet de X et

$$F\colon T \to X_{/U} \tag{1}$$

un morphisme de topos. Par composition avec le morphisme

$$u\colon X_{/U} \to X, \quad u^*(U') = (U' \times U \to U), \tag{2}$$

F définit un morphisme de topos

$$f = u \cdot F, \quad f\colon T \to X. \tag{3}$$

Par ailleurs, soit $U^{(1)}$ l'objet de $X_{/U}$ défini par la seconde projection de $U \times U$. La diagonale

$$d\colon U \to U \times U \tag{4}$$

définit une flèche de $X_{/U}$ de source l'objet final id_U et de but $U^{(1)}$. Son image par F^* est donc un morphisme

$$\varphi\colon e_T \to f^*(U) \tag{5}$$

car $F^*(\mathrm{id}_U)$ est l'objet final e_T de T et $F^*(U^{(1)}) = f^*(U)$. Au morphisme $F\colon T \to X_{/U}$, nous avons donc associé un objet de *la catégorie*

$$M(T, U) \tag{6}$$

dont les objets sont les couples (f, φ) où $f\colon T \to X$ est un morphisme de topos et où $\varphi\colon e_T \to f^*(U)$ est une section de $f^*(U)$. Les morphismes de cette catégorie sont définis de façon naturelle: une flèche $m\colon (f, \varphi) \to (g, \gamma)$ est un morphisme de morphismes de topos $m\colon f \to g$ tel que

$$m^*(U) \cdot \gamma = \varphi. \tag{7}$$

Il est alors clair que, pour tout morphisme de morphismes de topos

$$T \underset{G}{\overset{F}{\underset{m\downarrow}{\rightrightarrows}}} X_{/U},$$

le morphisme

$$u * m\colon\ uF \to uG$$

est une flèche de $M(T, U)$, car, d'une part, m est un morphisme de foncteurs et, d'autre part, $m(\mathrm{id}_U)$ ne peut être que la flèche identique puisque $F^*(\mathrm{id}_U) = G^*(\mathrm{id}_U)$ est l'objet final de T. On définit donc ainsi un foncteur

$$\mathbf{Mor}(T, X_{/U}) \to M(T, U), \qquad F \rightsquigarrow \big(uF, F^*(d)\big). \tag{8}$$

Proposition 1.2. Soient X et T deux U-topos et soit $U \in \mathrm{Ob}(X)$. Le foncteur (8) est une équivalence de catégories.

La démonstration étant fastidieuse et triviale nous n'en donnerons que l'essentiel. Elle est basée sur le fait que, pour tout objet $p\colon U' \to U$ de $X_{/U}$, le carré ci-dessous est cartésiens dans X

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{(\mathrm{id}_{U'},\, p)} & U' \times U \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p \times \mathrm{id}_U} \\ U & \xrightarrow[d]{} & U \times U. \end{array} \tag{1}$$

De plus, (1) se déduit du carré de $X_{/U}$ ci-dessous par oubli des flèches structurales (à valeurs dans U)

$$\begin{array}{ccc} p & \longrightarrow & (\mathrm{pr}_2\colon\ U' \times U \to U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{id}_U & \xrightarrow{d} & U^{(1)}. \end{array} \tag{2}$$

Le carré (2) est donc lui-même cartésien dans $X_{/U}$. Son image par F^* est donc un carré cartésien de T:

$$\begin{array}{ccc} F^*(U'/U) & \longrightarrow & F^*(\mathrm{pr}_2) = f^*(U') \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^*(p)} \\ e_T = F^*(\mathrm{id}_U) & \xrightarrow{\varphi} & F^*(U^{(1)}) = f^*(U). \end{array} \tag{3}$$

On en déduit donc un isomorphisme canonique

$$F^*(U'/U) \simeq \varphi^{-1}\big(f^*(U')\big) \tag{4}$$

qui permet de reconstruire F à partir de (f, φ). Plus précisément, les isomorphismes (4) fournissent un isomorphisme entre F et le composé

des morphismes de topos

$$T_{/\varphi}\colon\ T \to T_{/f^*(U)}, \quad f_{/U}\colon\ T_{/f^*(U)} \to X_{/U}, \tag{5}$$

dont les foncteurs image inverse sont donnés par

$$\varphi^{-1}(V) \leftsquigarrow (V/f^*(U)), \quad (f^*(U')/f^*(U)) \leftsquigarrow (U'/U).$$

Ces foncteurs sont définis à partir de (f, φ) seulement, et l'on vérifie aisément qu'en associant à (f, φ) le composé (5), on définit un foncteur quasi-inverse de (8).

Corollaire 1.3. Pour tout morphisme de U-topos $f\colon\ T \to X$ et tout objet U de X, la catégorie $\mathbf{Mor}_X(T, X_{/U})$ est équivalente à la catégorie *discrète* définie par l'ensemble $\mathrm{Hom}(e_T, f^*(U)) = H^0(T, f^*(U))$.

On rappelle qu'une catégorie est dite discrète si les seules flèches y sont les flèches identiques. L'action de l'équivalence (1.1 (8)) sur les flèches est donnée par $M \rightsquigarrow u * M$. La catégorie $\mathbf{Mor}_X(T, X_{/U})$ est donc discrète et le corollaire résulte immédiatement de (1.2). En explicitant le corollaire lorsque $T = X_{/V}$, où $V \in \mathrm{Ob}(X)$, on trouve ce qui suit.

Corollaire 1.4. Soient U et V deux objets d'un U-topos X. La catégorie $\mathbf{Mor}_X(X_{/U}, X_{/V})$ est discrète et équivalente à celle définie par l'ensemble $\mathrm{Hom}(U, V)$.

Bien entendu, le foncteur image inverse du morphisme $X_{/f}\colon X_{/U} \to X_{/V}$ attaché à une flèche $f\colon\ U \to V$ de X est

$$(X_{/f})^*\colon\ X_{/V} \to X_{/U}, \quad (V'/V) \rightsquigarrow V' \times_V U. \tag{1}$$

Remarque 1.5. En résumé, la sous-2-catégorie de la 2-catégorie des X-topos dont les objets sont les $X_{/U}$, $U \in \mathrm{Ob}(X)$, «est» en fait une catégorie, équivalente à X.

Ces préliminaires nous conduisent au résultat suivant qui sera utilisé plus bas.

Proposition 1.6. Soient $f\colon\ X \to Y$ un morphisme de U-topos et soit $V \in \mathrm{Ob}(Y)$. On a des morphismes de topos

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{u} & X_{/U} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{/V}} \\ Y & \xleftarrow[v]{} & Y_{/V} \end{array} \qquad U = f^*(V) \tag{1}$$

et un isomorphisme de morphismes de topos

$$i\colon f u \xrightarrow{\sim} v f_{/V} \tag{2}$$

qui fait de (1) un *carré 2-cartésien* dans la 2-catégorie des topos.

1.6.1. Le morphisme u a pour foncteur image inverse $U' \rightsquigarrow U' \times U$; de même, le morphisme v a pour foncteur image inverse $V' \rightsquigarrow V' \times V$ et enfin $f_{/V}$ a pour foncteur image inverse

$$(V' \to V) \rightsquigarrow \big(f^*(V') \to f^*(V)\big).$$

Enfin

$$i(V')\colon\ f^*(V' \times V) \to f^*(V') \times f^*(V) \tag{3}$$

est l'isomorphisme déduit du fait que f^* commute aux produits fibrès finis. Ceci dit, la proposition est une conséquence immédiate de (1.2).

On en déduit le corollaire suivant:

Corollaire 1.7. Sous les hypothèses de (1.6), pour tout morphisme de U-topos $t\colon T \to Y_{/V}$, le foncteur

$$\mathbf{Mor}_{Y_{/V}}(T, X_{/U}) \to \mathbf{Mor}_Y(T, X), \tag{1}$$

$(t', \tau) \rightsquigarrow \big(u t', (v * \tau)(i * t')\big)$, est une équivalence de catégories.

On dira souvent que $X_{/U}$, où $U = f^*(V)$, est *la restriction du Y-topos* X à l'objet V de Y, auquel cas on posera

$$X|V = X_{/f^*(V)}. \tag{2}$$

Pour accorder les notations, on écrira parfois

$$Y|V, \qquad V \in \mathrm{Ob}(Y), \tag{3}$$

au lieu de $Y_{/V}$.

§ 2. Champs de topos

Définition 2.1. Soient E un site. On appelle champ de U-topos sur E un E-champ C tel que, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$ la fibre C_S soit un U-topos et tel que, pour toute flèche $f\colon T \to S$ de E, le foncteur changement de base

$$f^*\colon\ C_S \to C_T \tag{1}$$

définisse un morphisme de topos $f\colon C_T \to C_S$.

La définition a un sens car deux foncteurs changement de base relatifs à un même f sont canoniquement isomorphes.

Exemple 2.2. Soit X un U-topos. La catégorie $\mathrm{FL}(X)$ des flèches de X se projettant sur X grâce au foncteur but est un champ d'après (II 3.4.8.2); c'est même un champ de U-topos, car sa fibre en $S \in \mathrm{Ob}(X)$ est le U-topos $X_{/S}$, et le foncteur changement de base attaché à une flèche $f: T \to S$ de X n'est autre que

$$X_{/S} \to X_{/T}, \qquad S' \rightsquigarrow S' \times_S T. \tag{1}$$

Soit alors $f: X \to Y$ un morphisme de U-topos. La catégorie

$$f_*(\mathrm{FL}(X)) \tag{2}$$

qui se déduit de $\mathrm{FL}(X)$ par changement de base suivant le foncteur image inverse $f^*: Y \to X$ est *un champ de* U*-topos sur* Y. C'est un champ car c'est *l'image directe par* f *du* X*-champ* $\mathrm{FL}(X)$ (II 3.1.1). C'est un champ de topos car le foncteur changement de base attaché à une flèche $u: T \to S$ de Y est, par construction, le foncteur changement de base attaché à $\mathrm{FL}(X)$ et au morphisme $f^*(u): f^*(T) \to f^*(S)$. Dans ce chapitre, nous ne nous intéresserons guère qu'à des champs de topos de cette espèce. Ils possèdent une vertu particulière: les foncteurs changement de base admettent à la fois un foncteur adjoint à gauche et un adjoint à droite. En effet, il suffit de prouver notre assertion pour le champ $\mathrm{FL}(X)$ et il est alors clair que l'adjoint à gauche de (1) n'est autre que

$$X_{/T} \to X_{/S}, \qquad (t: T' \to T) \rightsquigarrow (ft: T' \to S). \tag{2}$$

L'existence d'adjoints à gauche aux foncteurs changement de base nous servira dans la proposition suivante à prouver l'existence de U-générateurs.

Proposition 2.3. Soient E un U-site et C un E-champ. Soit S_i, $i \in I$, $I \in \mathrm{U}$, une famille d'objets de E engendrant un raffinement de E telle que, pour tout $i \in I$, le champ $C_{/S_i}$ soit un champ de U-topos sur $E_{/S_i}$.

(i) Pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$, la fibre C_S est une U-catégorie qui vérifie les conditions (a), (b) et (c) de (0 2.6).

(ii) Pour toute flèche $f: T \to S$ de E, le foncteur changement de base $f^*: C_S \to C_T$ commute aux limites projectives finies et aux limites inductives.

(iii) Supposons de plus que, pour toute flèche $f: T \to S$ de E, le foncteur changement de base $f^*: C_S \to C_T$ admette un adjoint à gauche. Alors C est un champ de U-topos.

L'hypothèse signifie aussi que, si R désigne le raffinement de E engendré par les S_i, le champ $C_{/R}$ est un champ de U-topos sur R. Pour prouver (i), on peut supposer que S est objet final de E, car les fibres et les foncteurs changement de base ne sont pas affectés par le passage de E à $E_{/S}$.

2.3.1. Nous allons prouver que les limites inductives indexées par une catégorie J appartenant à U et les limites projectives finies existent dans C_S. Pour cela, notons que, puisque C est un champ, on a une équivalence de catégories:

$$C_S \xleftarrow{\approx} \varprojlim(C/R). \tag{1}$$

Soit alors $X\colon J \to \varprojlim(C/R)$ un foncteur. Pour tout $j \in \mathrm{Ob}(J)$, $X(j)$ est une section cartésienne de C au-dessus de R. Supposons que J appartienne à U et soit, pour tout $T \in \mathrm{Ob}(R)$, $X'(T)$ la limite inductive du foncteur

$$X(T)\colon J \to C_T, \qquad X(T)(j) = X(j)(T).$$

Puisque les foncteurs image inverse commutent aux limites inductives, il existe, pour toute flèche $g\colon U \to T$ de R, une unique flèche g-cartésienne $X'(g)\colon X'(U) \to X'(T)$ telle que, pour tout $j \in \mathrm{Ob}(J)$, le carré ci-dessous soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} X(j)(T) & \xleftarrow{X(j)(g)} & X(j)(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X'(T) & \xleftarrow[X'(g)]{} & X'(U), \end{array}$$

où les flèches verticales sont les morphismes structuraux. Il est facile de vérifier que X' est la limite inductive de X. On raisonne de même pour les limites projectives finies.

2.3.2. Prouvons maintenant que, pour toute flèche $f\colon T \to S$ de E, le foncteur changement de base $f^*\colon C_S \to C_T$ commute aux limites projectives finies et aux limites inductives quelconques. Soient R^S et R^T les raffinements de $E_{/S}$ et $E_{/T}$ définis par le raffinement R de E engendré par les S_i. Le foncteur changement de base f^* s'interprète comme le foncteur restriction $\varprojlim(C/R^S) \to \varprojlim(C/R^T)$. Celui-ci est compatible avec les limites projectives finies et les limites inductives indexées par une catégorie élément de U d'après le procédé de calcul de ces limites. Ceci prouve (ii).

2.3.3. Pour prouver que les fibres sont des U-topos, nous allons utiliser le lemme (III 1.2.8.4). Soit $S \in \mathrm{Ob}(E)$. Quitte à remplacer les S_i par les $S_i \times S$, on peut supposer que S est objet final de E. De plus, la famille $\{S_i \to S\}$ est couvrante et le produit des foncteurs image inverse

$$f\colon C_S \to \prod_{i \in I} C_{S_i} = C' \tag{1}$$

est donc *conservatif* (raisonner avec les données de descente). De plus, puisque $I \in \mathsf{U}$, la catégorie C' est un U-topos. Il nous reste à vérifier les

conditions de (III 1.2.8.4). On sait déjà que les limites projectives finies et les limites inductives indexées par une catégorie appartenant à U existent dans C_S et que le foncteur f les respecte; donc C_S vérifie les conditions (a), (b) et (c) de (0 2.6), ce qu'on peut d'ailleurs prouver directement en utilisant la construction de (2.3.1). *Ceci achève de prouver* (i). Pour prouver (iii), il nous reste à prouver que C_S admet une U-famille de générateurs topologiques. D'après (III 1.2.8.4 (ii)), il nous suffit pour cela de prouver que le foncteur (1) admet un adjoint à gauche. Or chacun des foncteurs changement de base $f_i\colon C_S \to C_{S_i}$ admet un adjoint à gauche g_i, et le foncteur défini par

$$g(X) = \coprod_{i \in I} g_i(X_i), \qquad X = (X_i) \in \mathrm{Ob}(\Pi\, C_{S_i}), \tag{2}$$

est évidemment un adjoint à gauche de f. C.Q.F.D.

2.4. Pour être complet, l'énoncé devrait indiquer que la condition de (iii) est elle aussi *de nature locale*. Cela est vrai sous une hypothèse supplémentaire à laquelle satisfont les champs de topos de l'exemple (2.2) et que nous allons indiquer.

Lemme 2.5. Soient E un site où les produits fibrés finis existent et soit C une E-catégorie fibrée. Soit c un clivage de C (choix des images inverses). Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) C est *cofibrée* et pour tout carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} T & \xleftarrow{v} & T' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ S & \xleftarrow[u]{} & S' \end{array} \tag{1}$$

de E et tout carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} y & \xleftarrow{b} & y' \\ {\scriptstyle m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m'} \\ x & \xleftarrow[a]{} & x' \end{array} \tag{2}$$

de C se projettant sur (1), tel que a et b soient cartésiens et m cocartésien, m' est cocartésien.

(ii) Pour toute flèche $f\colon T \to S$, le foncteur changement de base $f^*\colon C_S \to C_T$ admet un adjoint à gauche

$$f_!\colon C_T \to C_S, \tag{3}$$

et pour tout carré cartésien de E noté comme (1), le morphisme naturel

$$f'_! v^* \to u^* f_! \tag{4}$$

est un isomorphisme.

Remarque 2.5.1. Avant de démontrer ce lemme, notons que la condition (i) est évidemment stable par tout changement de base u: $E' \to E$ qui transforme carrés cartésiens en carrés cartésiens. Pour prouver qu'elle est satisfaite pour le champ de topos $f_*^{\mathrm{ch}}(\mathrm{FL}(X))$ sur Y attaché au morphisme de topos $f: X \to Y$ (2.2), il suffit donc de la vérifier pour le champ de topos $\mathrm{FL}(X)$ sur X car le foncteur u est alors le foncteur image inverse $f^*: Y \to X$. Or, dans $\mathrm{FL}(X)$, une flèche

$$\begin{array}{ccc} y & \xleftarrow{b} & y' \\ {\scriptstyle m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m'} \\ x & \xleftarrow[a]{} & x' \end{array}$$

de $\mathrm{FL}(X)$ de projection $a: x' \to x$ est cartésienne (resp. cocartésienne) si, et seulement si, le carré est cartésien (resp. b est un isomorphisme). La vérification de (i) est donc immédiate. *La condition de* (2.5) *est donc satisfaite par le Y-champ* $f_*^{\mathrm{ch}}(\mathrm{FL}(X))$ *attaché à un morphisme de* U*-topos* $f: X \to Y$.

2.5.2. Remarquons déjà que dans une catégorie fibrée, le composé de deux morphismes cocartésiens est cocartésien. Dire que C est cofibrée signifie donc que, pour toute flèche $f: T \to S$ de E et tout $x \in \mathrm{Ob}(C_T)$ il existe une flèche cocartésienne de C de source x se projettant sur f. Il est immédiat que, pour f fixé, cette condition signifie que le foncteur changement de base f^* admet un adjoint à gauche $f_!$. De plus, on a une bijection entre l'ensemble des adjoints à gauche de f^* et l'ensemble des familles (f_x), $x \in \mathrm{Ob}(C_T)$, de flèches cocartésiennes de projection f, qui s'obtient en attachant à un tel adjoint $f_!: C_T \to C_S$ la famille qui, à $x \in \mathrm{Ob}(C_T)$, associe la flèche composée

$$x \xrightarrow{r(x)} f^* f_!(x) \xrightarrow{c_f(f_!(x))} f_!(x) \tag{5}$$

où $r(x)$ est le morphisme d'adjonction et où $c_f(f_!(x))$ est la flèche cartésienne attachée par le clivage c à l'objet $f_!(x)$ de C_S et à $f: T \to S$ [D 1.6].

2.5.3. Pour prouver l'équivalence de (i) et (ii), nous pouvons donc supposer que C est cofibrée et que l'on a choisi un coclivage de C (c'est à dire les foncteurs $f_!$). Choisissons donc un carré tel que (1). On a un morphisme de foncteurs (le morphisme d'adjonction)

$$r: \mathrm{id}_{C_T} \to f^* f_!$$

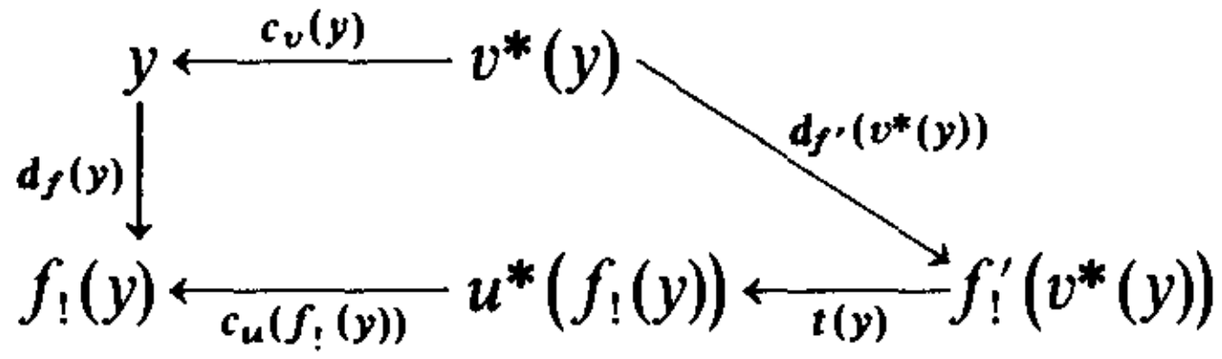
d'où un morphisme $v^* * r\colon\ v^* \to v^* f^* f_!$, d'où, en composant avec l'isomorphisme $v^* f^* \xrightarrow{\sim} f'^* u^*$ donné par le clivage (car (2.5 (1)) est commutatif), un morphisme

$$s\colon\ v^* \to f'^* u^* f_!$$

d'où, puisque $f'_!$ est adjoint à gauche de f'^*, un morphisme

$$t\colon\ f'_! v^* \to u^* f_!$$

qui est le morphisme «naturel» de (2.5 (4)). Pour tout $y \in \mathrm{Ob}(C_T)$, on peut d'ailleurs expliciter $t(y)$ comme l'unique S'-morphisme qui rend commutatif le diagramme



où $c_v(y)$ et $c_u(f_!(y))$ sont les flèches cartésiennes attachées par le clivage à (y, v) et $(f_!(y), u)$ et où $d_f(y)$ et $d_{f'}(v^*(y))$ sont les flèches cocartésiennes attachées par la coclivage à (y, f) et $(v^*(y), f')$. Pour que t soit un isomorphisme, il faut et il suffit que, pour tout $y \in \mathrm{Ob}(C_T)$, le morphisme $t(y)$ soit un isomorphisme, ce qui signifie que le composé

$$t(y)\, d_{f'}(v^*(y))$$

est cocartésien. Le carré (2.5 (1)) étant fixé, cette condition équivaut à celle de (2.5 (i)), car tout carré tel que (2.5 (2)) est isomorphe à un carré obtenu en composant dans un diagramme tel que celui ci-dessus les morphismes $t(y)$ et $d_{f'}(v^*(y))$. Donc (i) équivaut à (ii).

2.5.4. On notera que, dans la démonstration, nous avons seulement utilisé le fait que le carré (2.5 (1)) est commutatif, mais que dans l'exemple (2.5.1), la condition n'est vérifiée que pour les carrés cartésiens.

Lemme 2.6. Soit E un site où les produits fibrés finis existent et soit C un E-champ. Soit (S_i), $i \in I$, une famille d'objets de E engendrant un raffinement R de E. Pour que C vérifie les conditions équivalentes de (2.5) il faut et il suffit que, pour tout $i \in I$, il en soit ainsi du champ $C_{/S_i}$ sur $E_{/S_i}$.

La condition est évidemment nécessaire car le foncteur changement de base

$$E_{/S_i} \to E, \qquad (S'/S_i) \rightsquigarrow S',$$

commute aux produits fibrés finis. Inversement, supposons que, pour tout $i \in I$, le champ $C_{/S_i}$ vérifie la condition (i) de (2.5). Cela implique que

le champ $C_{/R}$ vérifie la même condition. Soit alors $f\colon T\to S$ une flèche de E. On a deux foncteurs qui commutent aux produits fibrés finis

$$u, v\colon\ E_{/S} \rightrightarrows E, \qquad u(S'/S)=S', \qquad v(S'/S)=S'\times_S T,$$

et la première projection de $S'\times_S T$ fournit un morphisme de foncteurs

$$m\colon\ v\to u.$$

Choisissons un clivage c de C. D'après (D 1.17), on a un morphisme de champs sur $E_{/S}$

$$m^*\colon\ C^u\to C^v \tag{1}$$

entre les catégories déduites de C par les changements de base u et v, qui, pour tout $S'\in\mathrm{Ob}(E_{/S})$ induit sur les fibres en S' le foncteur image inverse

$$m^*(S')\colon\ C_{S'}\to C_{S'\times_S T}$$

attaché par le clivage à la première projection $m(S')\colon S'\times_S T\to S'$. Nous allons démontrer que m^* admet un E-adjoint à gauche (I 1.11.2) *cartésien* noté $m_!$. Il en résultera que $m^*(S)\colon C_S\to C_T$ admet un adjoint à gauche. De plus, le fait que $m_!$ soit cartésien implique que, pour tout carré cartésien de la forme

$$\begin{array}{ccc} T & \longleftarrow & T' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow \\ S & \longleftarrow & S' \end{array}$$

où f est le morphisme indroduit plus haut, la seconde condition de (2.5 (ii)) est vérifiée. On aura ainsi achevé la démonstration du lemme. Notons encore R le raffinement de $E_{/S}$ défini par le raffinement R de E. Pour que m^* admette un adjoint à gauche cartésien, il faut et il suffit qu'il en soit ainsi de sa restriction à R

$$m^*_{/R}\colon\ C^u_{/R}\to C^v_{/R}.$$

En effet, nous cherchons un morphisme de champs $m_!\colon C^v\to C^u$ et des morphismes de morphismes de champs $i\colon \mathrm{id}_{C^v}\to m^*\, m_!$ et $j\colon m_!\, m^*\to \mathrm{id}_{C^u}$ tels que

$$(j*m_!)(m_!*i)=\mathrm{id}_{m_!} \quad\text{et}\quad (m^**j)(i*m^*)=\mathrm{id}_{m^*}.$$

Or C^u et C^v sont des champs sur $E_{/S}$ et, d'après (II 2.1.5.2) pour tout couple (F, G) de champs sur $E_{/S}$, le foncteur restriction

$$\mathbf{Cart}_{E/S}(F, G)\xrightarrow{\approx}\mathbf{Cart}_R(F_{/R}, G_{/R})$$

est une équivalence de catégories. D'où l'existence de $(m_!, i, j)$ si l'on connaît celle de leurs restrictions à R. Mais, pour tout $S'\in\mathrm{Ob}(R)$, le foncteur induit par m^* sur les fibres en S' admet un adjoint à gauche, car c'est le foncteur changement de base attaché à une flèche du raffinement

de E engendré par les S_i. D'après (I 1.11.3), on sait donc que $m_{/R}^*$ admet un adjoint à gauche. Il reste à voir que celui-ci est cartésien, ce qui est une conséquence de la seconde condition de (2.5 (ii)).

Remarque 2.7. Chemin faisant, nous avons démontré que la condition (ii) de (2.5) équivaut à la suivante:

(iii) Pour toute flèche $f: T \to S$ de E, le foncteur

$$m^*: C^u \to C^v$$

de (2.6 (1)) admet un adjoint à gauche cartésien.

Théorème 2.8. Soit E un site où les produits fibrés finis existent et soit (S_i), $i \in I$, $I \in \mathsf{U}$, une famille d'objets de E engendrant un raffinement de E. Pour qu'un E-champ C soit un champ de U-topos vérifiant les conditions de (2.5), il faut et il suffit que, pour tout $i \in I$, il en soit ainsi du champ $C_{/S_i}$ sur le site $E_{/S_i}$.

C'est une conséquence immédiate de (2.3) et (2.6).

§ 3. Morphismes de champs de topos

Définition 3.1. Soient E un site, C et C' deux champs de U-topos sur E. On appelle morphisme de champs de topos de source C et de but C' un E-foncteur cartésien $m^*: C' \to C$ tel que, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$, le foncteur induit sur les fibres $m^*(S): C'_S \to C_S$ soit le foncteur image inverse sous-jacent à un morphisme de topos.

3.1.1. On notera $\mathbf{Mor}_E(C, C')$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Cart}_E(C', C)^0$ dont les objets sont les morphismes de champs de topos. On rappelle que l'on a une E-catégorie scindée

$$\mathrm{CART}_E(C', C) \tag{1}$$

dont les objets de projection $S \in \mathrm{Ob}(E)$ sont les $E_{/S}$-foncteurs cartésiens $C'_{/S} \to C_{/S}$ (I 3.3.1.2) et que celle-ci est un E-champ dès que C est un E-champ. Puisque la condition d'être un morphisme de champs de topos se voit sur les fibres, on a une sous-catégorie scindée pleine

$$\mathrm{MOR}_E(C, C') \tag{2}$$

de $\mathrm{CART}_E(C', C)^0$, dont les objets sont les morphismes de champs de topos.

Proposition 3.2. $\mathrm{MOR}_E(C, C')$ est un sous-champ plein de

$$\mathrm{CART}_E(C', C)^0, \quad \text{(II 1.2.5.1)}.$$

En effet, puisque c'est une sous-catégorie fibrée pleine de $\mathrm{CART}_E(C', C)^0$, il nous suffit d'après (II 1.2.5.1) de prouver que *la condition d'être un morphisme de champs de topos est locale.* Soit donc R un raffinement de E et soit $m^*\colon C' \to C$ dont la restriction à R est un morphisme de champs de topos. Soit $S \in \mathrm{Ob}(E)$. Nous devons prouver que $m_S^*\colon C'_S \to C_S$ commute aux limites projectives finies et aux limites inductives indexées par une catégorie appartenant à U. On introduit le raffinement R^S de $E_{/S}$ défini par R, moyennant quoi le foncteur m_S s'interprète comme le foncteur induit par m^*:

$$M^*\colon \varprojlim(C'/R^S) \to \varprojlim(C/R^S).$$

En reprenant le calcul des limites dans $\varprojlim(C'/R^S)$ fait dans (2.3.1), on voit immédiatement que M^* les respecte, d'où la conclusion.

Exemple 3.3. Soient

$$X \xrightarrow{x} S \xleftarrow{y} Y$$

des morphismes de U-topos. Tout S-morphisme de topos (f, i),

$$f\colon X \to Y \qquad i\colon y f \xrightarrow{\sim} x \tag{1}$$

induit un morphisme de champs de topos sur S

$$F\colon x_*(\mathrm{FL}(X)) \to y_*(\mathrm{FL}(Y)) \tag{2}$$

dont le foncteur sous-jacent F^* est obtenu en associant à tout objet $(Y' \to y^*(U))$ de la fibre $Y_{/y^*(U)}$ de $y_*(\mathrm{FL}(Y))$ en $U \in \mathrm{Ob}(S)$ le morphisme composé

$$f^*(Y') \to f^*(y^*(U)) \xrightarrow[\sim]{i(U)^{-1}} x^*(U), \tag{3}$$

qui est bien un objet de la fibre $X_{/x^*(U)}$ de $x_*(\mathrm{FL}(X))$ en U. C'est bien un S-foncteur cartésien car f^* commute aux produits fibrés finis. C'est un morphisme de champs de topos, car sa restriction aux fibres en $U \in \mathrm{Ob}(S)$ est, d'après (3), le morphisme

$$f_{/y^*(U)}\colon X_{/f^* y^*(U)} \to Y_{/y^*(U)}, \quad \text{cf. (1.6 (1))}. \tag{4}$$

De plus, une flèche

$$m\colon (f, i) \to (g, j) \tag{5}$$

de $\mathbf{Mor}_S(X, Y)$ donne naissance à un morphisme de morphismes de champs

$$y_*(\mathrm{FL}(Y)) \underset{G}{\overset{F}{\underset{M\downarrow}{\rightrightarrows}}} x_*(\mathrm{FL}(X)), \tag{6}$$

où $M(Y' \to y^*(U)) = m(Y')$; cette dernière formule définit bien un S-morphisme de S-foncteurs car, par définition, on a $j(m * y^*) = i$.

Nous avons ainsi défini un foncteur

$$\mathbf{Mor}_S(X, Y) \to \mathbf{Mor}_S(x_*(\mathrm{FL}(X)), y_*(\mathrm{FL}(Y))). \tag{7}$$

Exercice 3.4. Soient $X \xrightarrow{x} S \xleftarrow{y} Y$ deux morphismes de U-topos. Montrer que le foncteur (3.3 (7)) induit une équivalence entre $\mathbf{Mor}_S(X, Y)$ et la sous-catégorie pleine du but de (3.3 (7)) dont les objets sont les morphismes de champs de topos dont le foncteur sous-jacent est à la fois cartésien et cocartésien. Montrer que l'on obtient l'équivalence quasi-inverse de la précédente en attachant à tout morphisme de champs de topos satisfaisant à la condition indiquée

$$F\colon\ x_*(\mathrm{FL}(X)) \to y_*(\mathrm{FL}(Y)) \tag{1}$$

le morphisme qu'il induit sur les catégories fibres en l'objet final de S.

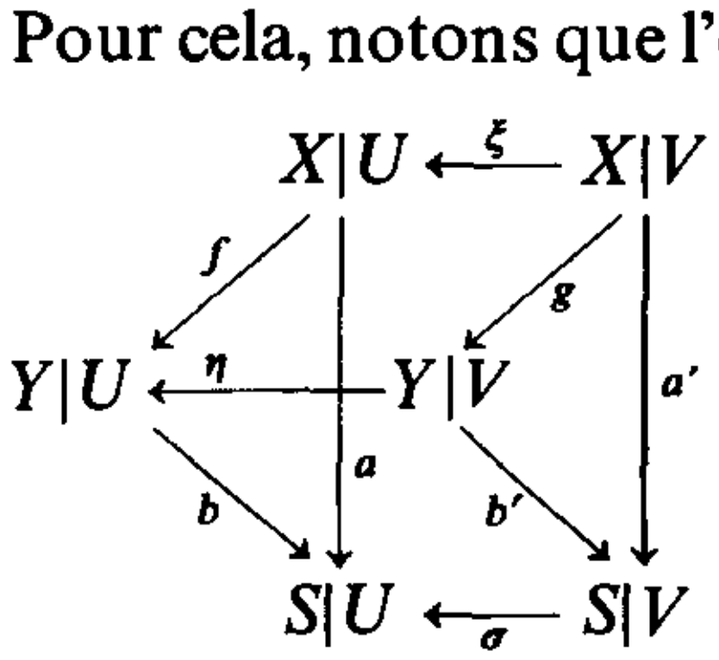
3.5. Soient $X \xrightarrow{x} S \xleftarrow{y} Y$ deux morphismes de U-topos. Nous allons maintenant définir *un champ sur* S

$$\mathrm{MOR}_S(X, Y), \tag{1}$$

dont la fibre en $U \in \mathrm{Ob}(S)$ sera la catégorie des $S_{/U}$-morphismes de topos

$$\mathbf{Mor}_{S|U}(X|U, Y|U), \tag{2}$$

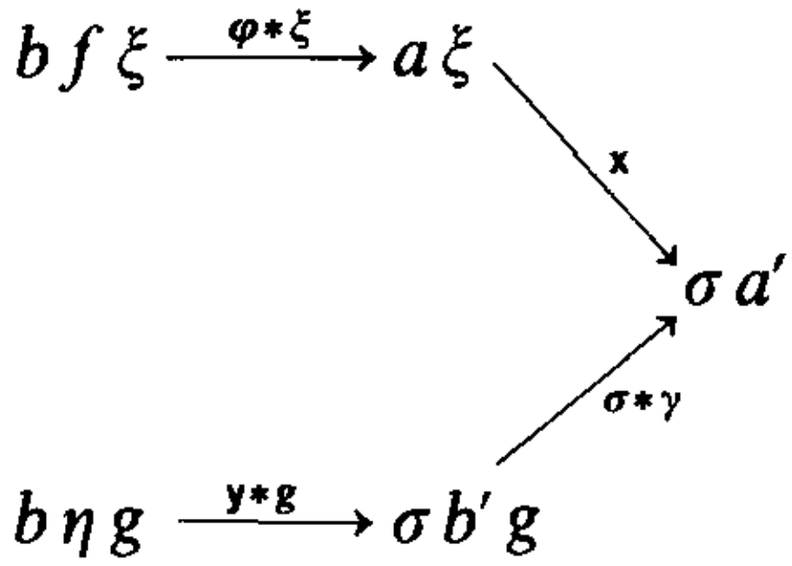
où $S|U$, $X|U$ et $Y|U$ désignent les restrictions de S, X et Y à U (1.7). Nous venons de définir les objets de ce champ, définissons l'ensemble des flèches de projection $s\colon V \to U$, $s \in \mathrm{FL}(S)$, de source $g\colon X|V \to Y|V$ et de but $f\colon X|U \to Y|U$. Pour cela, notons que l'on a des morphismes de topos



(cf. 1.6). (3)

De plus, pour chacun des topos figurant dans (3), tous les morphismes l'ayant pour source et ayant pour but $S_{/U}$ sont canoniquement isomorphes. Ainsi, pour $X|V$, on a quatre isomorphismes de morphismes de

champs



(4)

où $\varphi\colon b f \to a$ est l'isomorphisme de morphismes de topos sous-jacent au $S_{/U}$-morphisme f, où γ est l'analogue pour g et où x (resp. y) est l'isomorphisme naturel rendant commutatif la «face avant» (resp. arrière) de (3). Ceci dit, on définit l'ensemble des morphismes de projection $s\colon V \to U$, de source g et de but f, comme l'ensemble des morphismes de morphismes de topos

$$m\colon f \xi \to \eta g \tag{5}$$

tels que $b * m$ rende commutatif le diagramme (4); ce sont donc les morphismes $m\colon f \xi \to \eta g$ qui sont des 2-flèches dans la 2-catégorie des topos au-dessus de $S_{/U}$.

3.6. Le fait que $\mathrm{MOR}_S(X, Y)$ soit une *catégorie fibrée sur S est* alors une conséquence immédiate de (1.6). Toujours d'après (1.6), on a, pour tout $U \in \mathrm{Ob}(S)$, une équivalence

$$\mathbf{Mor}_{S|U}(X|U, Y|U) \xrightarrow{\approx} \mathbf{Mor}_S(X|U, Y), \tag{6}$$

la première de ces catégories étant, par définition, la fibre en U de $\mathrm{MOR}_S(X, Y)$. De plus, puisque (1.6 (2)) est un isomorphisme, une flèche de $\mathrm{MOR}_S(X, Y)$ est *cartésienne* si, et seulement si, le morphisme de morphismes de topos sous-jacent est un *isomorphisme*. Il reste à prouver que $\mathrm{MOR}_S(X, Y)$ *est un champ*, et nous référerons pour cela à la thèse de M. Hakim [Orsay, 1967]. On pourrait d'ailleurs déduire ce fait de l'exercice (3.4) en prouvant que, par localisation, le foncteur (3.3 (7)) donne une S-équivalence

$$\mathrm{MOR}_S(X, Y) \xrightarrow{\approx} \mathrm{MOR}_S(x_*(\mathrm{FL}(X)), y_*(\mathrm{FL}(Y))), \tag{7}$$

car, d'après (3.2), le but de celle-ci est un champ.

3.7. Nous considérerons également *le champ sur X*

$$\mathrm{MOR}_S^X(X, Y) \tag{1}$$

obtenu *en localisant sur X* (et non sur S) la catégorie $\mathbf{Mor}_S(X, Y)$. Autrement dit, (1) est la catégorie fibrée sur X dont la fibre en $U \in \mathrm{Ob}(X)$ est

$$\mathbf{Mor}_S(X|U, Y), \quad U \in \mathrm{Ob}(X). \tag{2}$$

Si l'on admet l'existence du produit fibré de topos $X \times_S Y$ (M. Hakim [Thèse]), on voit que (1) est un champ, car on a une X-équivalence

$$\mathrm{MOR}_X(X, X \times_S Y) \approx \mathrm{MOR}_S^X(X, Y).$$

Par la propriété universelle du produit fibré de deux topos, on a des équivalences

$$\mathbf{Mor}_{S|U}(X|U, Y|U) \approx \mathbf{Mor}_S(X|U, Y), \quad U \in \mathrm{Ob}(S). \tag{3}$$

Par suite, $\mathbf{Mor}_S(X, Y)$ se déduit de $\mathrm{MOR}_S^X(X, Y)$ par le changement de base $x^*: S \to X$. Autrement dit, par définition de *l'image directe d'un champ* (II 3.1.5) on a une équivalence de champs sur S

$$\mathrm{MOR}_S(X, Y) \xrightarrow{\approx} x_*(\mathrm{MOR}_S^X(X, Y)). \tag{4}$$

§ 4. Le topos classifiant d'un faisceau de groupes

Ce paragraphe est entièrement dû à Grothendieck. Outre sa propriété universelle, B_G joue pour la cohomologie un rôle analogue aux classifiants classiques (cf. (8.7)) mais dans une situation plus générale car l'on ne se limite pas aux faisceaux constants. Profitant de cette remarque, il semble possible, grâce à la cohomologie étale, de transcrire en arithmétique certains raisonnements de la topologie ordinaire.

4.1. Soient X un U-topos et G un groupe de X. On désigne par

$$B_G(X) \quad \text{ou} \quad B_G \tag{1}$$

la catégorie des G-objets à gauche de X. D'après (III 1.2.8) c'est un U-topos et l'on a trois foncteurs dont chacun est adjoint à gauche de celui qui est écrit sous lui

$$B_G \underset{\tau_*}{\overset{\tau_!}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\tau^*}}}} X, \tag{2}$$

où

$$\tau_!(A) = G \backslash A$$

$$\tau^*(E) = E + \text{opérations triviales (noté } E^\tau)$$

$$\tau_*(A) = A^G \text{ (invariants)}.$$

Il en résulte que τ^* est le foncteur image inverse d'un morphisme de topos

$$\tau_G: B_G \to X. \tag{3}$$

Si $u: G \to H$ est un morphisme de groupes de X, on a un morphisme de topos

$$B_u(X): B_G(X) \to B_H(X), \quad \text{aussi noté } B_u, \tag{4}$$

dont le foncteur image inverse B_u^* est celui qui, d'un H-objet V fait un G-objet grâce à u: $G \to H$. On définit un adjoint à droite B_{u*} de B_u^* par

$$B_{u_*}(U) = \mathrm{Hom}_G(H, U)$$

et un adjoint à gauche $B_{u!}$ de B_u^* par

$$B_{u!}(U) = H \overset{G}{\wedge} U \qquad \text{(III 1.3.6)}.$$

On notera que τ_G: $B_G \to X$ n'est autre que le morphisme attaché au morphisme unité $G \to 1$ et que le morphisme unité $1 \to G$ définit un morphisme

$$\omega_G\colon\ X \to B_G(X) \tag{5}$$

dont *le foncteur image inverse* n'est autre que le foncteur «*oubli des opérations de* G», aussi noté

$$U \rightsquigarrow U^{\omega}. \tag{6}$$

Si v: $H \to K$ est un morphisme de groupes de X composable avec u, on a $B_u^*\, B_v^* = B_{vu}^*$, donc $B_v\, B_u = B_{vu}$. En particulier, $B_u(X)$: $B_G(X) \to B_H(X)$ est un morphisme de X-*topos* et, par ailleurs, on a

$$\tau_G\, \omega_G = \mathrm{id}_X. \tag{7}$$

S'il n'y a pas d'ambiguité, nous écrirons τ et ω au lieu de τ_G et ω_G. Enfin, les adjoints à gauche et à droite de ω^* sont donnés par

$$\omega_!(U) = G \times U \quad \text{et} \quad \omega_*(U) = \mathbf{Hom}(G, U). \tag{8}$$

4.2. De plus, désignons par E_G l'objet de B_G obtenu en faisant opérer G sur lui-même par translations à gauche. Les translations à droite en font un torseur de B_G sous le groupe G^{τ} de B_G. On posera

$$G^{\mathrm{int}} = \mathbf{ad}(E_G) \qquad \text{(III 1.4.8)}. \tag{1}$$

Par définition, c'est le groupe des G^{τ}-automorphismes du torseur E_G de B_G; il est clair que c'est le groupe de B_G obtenu en faisant opérer G sur lui-même par automorphismes intérieurs. Le triple (B_G, τ, E_G) joue le rôle d'un classifiant:

Théorème 4.3. Pour tout U-topos X' et tout morphisme de topos f: $X' \to X$, le foncteur

$$\pi\colon\ \mathbf{Mor}_X(X', B_G)^0 \to \mathbf{Tors}\big(X', f^*(G)\big), \qquad p \rightsquigarrow p^*(E_G), \tag{1}$$

est une équivalence de catégories.

4.3.1. Pour préciser la définition de (1), rappelons qu'un objet de $\mathbf{Mor}_X(X', B_G)$ est un (p, i), où p: $X' \to B_G$ est un morphisme de topos et

$i: f \xrightarrow{\sim} \tau p$ un isomorphisme de morphismes de topos. Moyennant quoi, $p^*(E_G)$ est un torseur de X' sous $p^*(G^\tau)$, dont on fait un $f^*(G)$-torseur grâce à l'isomorphisme

$$i(G):\ p^*\tau^*(G) \to f^*(G). \tag{2}$$

Si $m: (q, j) \to (p, i)$ est une flèche de $\mathbf{Mor}_X(X', B_G)$ dont le morphisme sous-jacent est $m^*: p^* \to q^*$, son image par (1) est, par définition, le morphisme

$$m^*(E_G):\ p^*(E_G) \to q^*(E_G). \tag{3}$$

Puisque m est un morphisme entre foncteurs qui commutent aux limites projectives finies, (3) est compatible avec le morphisme de groupes

$$m^*(G^\tau):\ p^*(G^\tau) \to q^*(G^\tau). \tag{4}$$

Il en résulte que $m^*(E_G)$ est un morphisme de $f^*(G)$-torseurs car, par définition de $\mathbf{Mor}_X(X', B_G)$, on a

$$j(\tau * m) = i, \tag{5}$$

donc $j(G)\, m(G^\tau) = i(G)$.

4.3.2. Nous allons décrire un foncteur

$$\rho:\ \mathbf{Tors}(X', f^*(G)) \to \mathbf{Mor}_X(X', B_G)^0 \tag{6}$$

dont nous prouverons que c'est un quasi-inverse de (1). Soit P un $f^*(G)$-torseur de X'. Pour tout $A \in \mathrm{Ob}(B_G)$, le groupe G opère sur l'objet A^ω de X, donc le groupe $f^*(G)$ opère sur $f^*(A^\omega)$. Grâce à ces opérations, on peut former le produit contracté

$$P \overset{f^*(G)}{\wedge} f^*(A^\omega) \tag{7}$$

noté $p^*(A)$. On obtient ainsi un foncteur

$$p^*:\ B_G(X) \to X'. \tag{8}$$

De plus, pour tout $E \in \mathrm{Ob}(X)$, la seconde projection de $P \times f^*(E)$ induit un isomorphisme

$$i(E):\ P \overset{f^*(G)}{\wedge} f^*(E) \xrightarrow{\sim} f^*(E), \tag{9}$$

où le produit contracté est construit grâce aux opérations triviales de $f^*(G)$ sur $f^*(E)$. Puisque $E = E^{\tau\omega}$, on obtient ainsi un isomorphisme de foncteurs

$$i:\ f^* \xrightarrow{\sim} p^*\tau^*. \tag{10}$$

Pour prouver que (p, i) est un objet de $\mathbf{Mor}_X(X', B_G)$, il nous reste à prouver que p^* est le foncteur image inverse d'un morphisme de topos $p: X' \to B_G$. Il suffit pour cela de prouver qu'il respecte les limites projec-

tives finies et les familles épimorphiques. Or il en est ainsi du foncteur induit par f^*:

$$(B_f)^*\colon\ B_G(X)\to B_{G'}(X'),\quad \text{où}\quad G'=f^*(G), \tag{11}$$

ceci, d'après le calcul des limites dans les topos B_G (III 1.2.8.3). De plus, le foncteur «torsion»

$$B_{G'}\to X',\qquad E\rightsquigarrow P\overset{G'}{\wedge}E, \tag{12}$$

possède la même propriété. En effet, la question est locale sur X', P est localement trivial et, lorsque P est trivial, le foncteur torsion est isomorphe au foncteur oubli des opérations de G. D'où la conclusion, car (8) est isomorphe au composé de (12) et de (11). Nous laissons au lecteur le soin de décrire l'action de (6) sur les flèches.

4.3.3. Construisons un isomorphisme de foncteurs entre le composé $\rho\pi$ et le foncteur identique de $\mathbf{Mor}_X(X', B_G)$. Soit (p, i), $p\colon X'\to B_G$, $i\colon p^*\tau^*\xrightarrow{\sim} f^*$, un objet de celle-ci. Pour tout objet A de B_G, on a

$$\rho\pi(p, i)^*(A)=p^*(E_G)\overset{f^*(G)}{\wedge}f^*(A^\omega). \tag{13}$$

Grâce à l'isomorphisme i, cet objet s'écrit également

$$p^*(E_G)\overset{p^*(G^\tau)}{\wedge}p^*(A^{\omega\tau}) \tag{14}$$

qui, à isomorphisme canonique près, n'est autre que

$$p^*(E_G\overset{G^\tau}{\wedge}A^{\omega\tau}), \tag{15}$$

où l'objet à opérateurs triviaux $A^{\omega\tau}$ de B_G est un G^τ-objet de B_G grâce à la structure de G-objet de A^ω et au foncteur τ. D'après (III 1.3.1.3), le morphisme $E_G\times A\to A$ qui définit les opérations de G sur A fournit un isomorphisme $E_G\overset{G^\tau}{\wedge}A^{\omega\tau}\to A$, dont l'image par $p^*\colon B_G\to X'$ donne, en composant avec les isomorphismes précédents, un isomorphisme

$$\rho\pi(p, i)^*(A)\xrightarrow{\sim}p^*(A). \tag{16}$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que cet isomorphisme est fonctoriel en A et compatible avec i, c'est-à-dire qu'il fournit un isomorphisme d'objets de $\mathbf{Mor}_X(X', B_G)^0$:

$$\rho\pi(p, i)\xrightarrow{\sim}(p, i). \tag{17}$$

Quelques vérifications supplémentaires montrent alors que l'on a bien défini un isomorphisme de foncteurs de $\rho\pi$ dans l'identité de $\mathbf{Mor}_X(X', B_G)^0$.

4.3.4. Indiquons rapidement comment construire un isomorphisme entre le composé $\pi\rho$ et le foncteur identique de $\mathbf{Tors}(X', G')$, où $G'=f^*(G)$.

Soit donc P un $f^*(G)$-torseur. Par définition, on a

$$\pi\rho(P)=\rho(P)^*(E_G)=P\overset{f^*(G)}{\wedge}f^*(E_G^\omega).$$

Puisque $f^*(E_G^\omega)$ est le torseur à gauche trivial sous $f^*(G)$, on a un isomorphisme naturel $\pi\rho(P)\xrightarrow{\sim}P$. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que l'on obtient ainsi l'isomorphisme de foncteurs annoncé, ce qui donne la conclusion.

Corollaire 4.4. Soient $f\colon X'\to X$ un morphisme de U-topos et G un groupe de X. Posons $G'=f^*(G)$. On a un diagramme commutatif de morphismes de topos

$$\begin{array}{ccc} B_G(X) & \xleftarrow{B_f} & B_{G'}(X') \\ {\scriptstyle\tau}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tau'} \\ X & \xleftarrow[f]{} & X' \end{array} \tag{1}$$

qui est 2-cartésien (0.5).

4.4.1. Le foncteur image inverse sous-jacent à B_f est celui induit par f^*. Le carré est visiblement commutatif. Qu'il soit 2-cartésien résulte du théorème précédent, car, pour tout U-topos X'' et tout morphisme g: $X''\to X$, la catégorie des X-morphismes $X''\to B_G$ est anti-équivalente à celle des $(fg)^*(G)$-torseurs de X'' et celle des X-morphismes $X''\to B_{G'}$ est anti-équivalente à celle des torseurs de X'' sous $g^*(G')\simeq(fg)^*(G)$.

4.4.2. On notera que si $U\in\mathrm{Ob}(X)$ et si on pose $X'=X_{/U}$, on a $G'=G|U$ et l'on a une équivalence de catégories

$$B_G(X)|U\approx\!\approx B_{G|U}(X|U), \tag{2}$$

où le premier membre est la restriction de $B_G(X)$ à U (1.7).

4.4.3. On peut aussi énoncer (4.4) en disant que l'on a une équivalence de topos

$$B_G(X)\times_X X'\xrightarrow{\approx}B_{G'}(X'), \tag{3}$$

ce qui fournit un exemple de produit fibré de deux topos.

Corollaire 4.5. Soient X un U-topos et G un groupe de X. Le X-champ $\mathrm{MOR}_X(X, B_G)$ est une gerbe, anti-équivalente à celle des G-torseurs de X.

4.5.1. D'après la définition (3.5 (1)) de $\mathrm{MOR}_X(X, B_G)$, la fibre de celle-ci en un objet U de X, n'est autre que

$$\mathbf{Mor}_X(X|U, B_G)\approx\!\approx\mathbf{Mor}_{X|U}(X|U, B_G|U), \tag{1}$$

c'est-à-dire la catégorie des morphismes $p\colon X|U \to B_G$ munis d'un isomorphisme $i\colon \tau p \xrightarrow{\sim} u$, où $u\colon X|U \to X$ est le morphisme naturel. D'après (4.3), on a une équivalence entre l'opposée de la fibre en U de (1) et la catégorie des G-torseurs de $X|U$ et il suffit de voir qu'il existe un X-foncteur cartésien

$$\mathrm{MOR}_X(X, B_G)^0 \to \mathrm{TORS}(X, G), \tag{2}$$

induisant sur chaque fibre l'équivalence de (4.3 (1)). Ce travail est laissé au lecteur.

4.5.2. L'image par (2) du morphisme ω est le torseur E_G^ω, sous $G^{\tau\omega} = G$. C'est donc le G-torseur trivial de X. Le foncteur (2) induit donc un isomorphisme de faisceaux de groupes sur X (c'est-à-dire un isomorphisme de groupes de X)

$$\mathsf{Aut}_X(\omega) \xrightarrow{\sim} G^0, \tag{3}$$

où le premier est le faisceau des automorphismes de ω dans le champ (1), c'est-à-dire le faisceau des X-automorphismes du morphisme de topos $\omega\colon X \to B_G$, et où G est identifié au faisceau des automorphismes du torseur trivial grâce aux translations à gauche.

§ 5. Topos classifiant d'une gerbe et effacement d'une classe de cohomologie de degré 2

Dans ce paragraphe, nous démontrons que, pour toute gerbe G sur un U-topos X, il existe un X-topos

$$\tau_{\mathsf{G}}\colon B_{\mathsf{G}} \to X$$

qui 2-représente le 2-foncteur qui, à tout X-topos X', associe l'opposée de la catégorie des sections de l'image inverse de G sur X'. L'image inverse de G sur B_{G} est donc trivialisée (munie d'une section) et le topos B_{G} joue le rôle du topos universel qui efface (annule) la classe de cohomologie définie par G. Le topos $B_{\mathsf{G}}(X)$ est construit dans (5.1), sa propriété universelle est établie dans (5.2) et dans (5.3) nous prouvons qu'il y a une 2-équivalence entre la 2-catégorie des gerbes sur le topos X et la 2-catégorie des X-topos B qui, localement, sont de la forme $B_G(X)$ où G est un groupe du topos X. Un tel X-topos B est appelé *une extension du topos* X car une extension de groupes du topos X

$$1 \to F \xrightarrow{u} G \xrightarrow{v} H \to 1$$

fournit un morphisme de topos $B_v(X)\colon B_G(X) \to B_H(X)$ qui fait de $B_G(X)$ une extension du topos $B_H(X)$. Cette circonstance sera utilisée au paragraphe 7 pour étudier les extensions de groupes dans un topos.

5.1. Construction du topos classifiant $B_{\mathsf{G}}(X)$ d'une gerbe G

Proposition 5.1.1. Soient X un U-topos et G une gerbe sur X, dont les fibres sont des U-catégories. Posons

$$B_{\mathsf{G}}(X)=\mathbf{Cart}_X(\mathsf{G}, \mathrm{Fl}(X)), \quad [\text{on écrit aussi } B_{\mathsf{G}}], \tag{1}$$

où $\mathrm{Fl}(X)$ est le champ (II 3.4.8.2) des flèches de X, se projettant sur X grâce au foncteur but. Soit

$$\tau_{\mathsf{G}}^*\colon X \to B_{\mathsf{G}} \tag{2}$$

le foncteur qui, à tout objet U de X, associe le X-foncteur cartésien «constant»

$$\tau_{\mathsf{G}}^*(U)\colon \mathsf{G} \to \mathrm{Fl}(X), \quad \tau_{\mathsf{G}}^*(U)(x/V)=U\times V. \tag{3}$$

La catégorie B_{G} est un U-topos. Le foncteur (2) admet un adjoint à droite et un adjoint à gauche; c'est le foncteur image inverse d'un morphisme de topos

$$\tau_{\mathsf{G}}\colon B_{\mathsf{G}} \to X. \tag{4}$$

5.1.1.1. Pour définir le foncteur (2) de manière plus correcte que dans l'énoncé, on choisit d'abord un quasi-inverse s de l'équivalence de catégories:

$$v\colon \varprojlim(\mathrm{Fl}(X)/X) \to X, \quad v(t)=t(e_X), \tag{5}$$

où e_X est l'objet final de X, et l'on compose s avec le foncteur

$$\varprojlim(\mathrm{Fl}(X)/X) \to \mathbf{Cart}_X(\mathsf{G}, \mathrm{Fl}(X)), \quad t \rightsquigarrow t\,p, \tag{6}$$

où $p\colon \mathsf{G} \to X$ est la projection. On rappelle que, puisque la projection p est couvrante (II 1.4.1), le foncteur (6) est pleinement fidèle. Il est clair que son image essentielle est formée des foncteurs cartésiens $x\colon \mathsf{G} \to \mathrm{Fl}(X)$ qui, pour tout $V\in \mathrm{Ob}(X)$, appliquent tout V-automorphisme d'un objet g de la fibre G_V sur le morphisme identique de $x(g)$. De tels foncteurs sont appelés *constants*.

5.1.1.2. Pour prouver la proposition, remarquons que B_{G} est la fibre en l'objet final de X de la X-catégorie scindée

$$\mathbf{B}_{\mathsf{G}}(X)=\mathrm{CART}(\mathsf{G}, \mathrm{Fl}(X)), \quad (\text{I } 3.3.1.2). \tag{7}$$

D'après (II 2.1.5), $\mathbf{B}_{\mathsf{G}}$ est un X-champ car il en est ainsi de $\mathrm{Fl}(X)$ (II 3.4.8.2). Prouvons que $\mathbf{B}_{\mathsf{G}}$ est un champ de U-topos satisfaisant aux conditions de (2.5). D'après (2.8), cette condition est locale et elle est satisfaite par un X-champ de la forme $f_*(\mathrm{Fl}(Y))$, où $f\colon Y \to X$ est un morphisme de U-topos. Comme toute gerbe, G est localement triviale, la première assertion de la proposition résulte donc du lemme suivant.

Lemme 5.1.2. Sous les conditions de (5.1.1), soit g une section de G. Posons $G = \mathsf{Aut}(g)$. On a une X-équivalence

$$\mathsf{B}_{\mathsf{G}} \to \tau_{G_*}(\mathrm{Fl}(B_G)) \tag{1}$$

qui induit une équivalence

$$B_{\mathsf{G}} \xrightarrow{\approx} B_G, \qquad x \rightsquigarrow x(g). \tag{2}$$

5.1.2.1. Puisque G est trivialisée, un morphisme $x\colon \mathsf{G} \to \mathrm{FL}(X)$ définit une section $x(g)$ de $\mathrm{FL}(X)$ et un morphisme de faisceaux de groupes

$$G = \mathsf{Aut}(g) \to \mathsf{Aut}(x(g)),$$

autrement dit *un objet à opérateurs de* $\mathrm{FL}(X)$. D'après (III 2.2.2), on sait que l'on obtient ainsi une *équivalence* de X-champs

$$k\colon \mathrm{CART}(\mathsf{G}, \mathrm{FL}(X)) \xrightarrow{\approx} \mathrm{OPER}(G, \mathrm{FL}(X)), \tag{3}$$

dont le but est le champ des G-objets de $\mathrm{FL}(X)$. Ce foncteur s'écrit également

$$k\colon \mathsf{B}_{\mathsf{G}} \xrightarrow{\approx} \tau_{G_*}(\mathrm{FL}(B_G)), \tag{4}$$

comme on voit en notant qu'un objet de $\tau_{G_*}(\mathrm{FL}(B_G))$ de projection $U \in \mathrm{Ob}(X)$ n'est autre qu'un G-objet A de X muni d'un G-morphisme $A \to U^{\tau}$, et s'interprète comme un objet de la fibre en U du but de (3). Ceci prouve la première assertion du lemme; la seconde en résulte par passage aux fibres en l'objet final de X.

Pour achever de prouver la proposition (5.1.1), il suffit de prouver que le foncteur τ_{G}^* admet un adjoint à droite et un adjoint à gauche. En effet, il en résultera que c'est le foncteur image inverse sous-jacent à un morphisme de topos.

5.1.3. Prouvons que τ_{G}^* admet un adjoint à gauche

$$\tau_{\mathsf{G}!}\colon B_{\mathsf{G}} \to X. \tag{1}$$

Il suffit de prouver que, pour tout $x \in \mathrm{Ob}(B_{\mathsf{G}})$, il existe un $A \in \mathrm{Ob}(X)$ et un morphisme $r\colon x \to \tau_{\mathsf{G}}^*(A)$ tel que, pour tout objet B de X, l'application composée

$$\mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(\tau_{\mathsf{G}}^*(A), \tau_{\mathsf{G}}^*(B)) \to \mathrm{Hom}(x, \tau_{\mathsf{G}}^*(B)) \tag{2}$$

soit bijective. D'après (5.1.1.1), le foncteur τ_{G}^* identifie la catégorie X à la sous-catégorie pleine de B_{G} formée des foncteurs constants $x\colon \mathsf{G} \to \mathrm{FL}(X)$. Nous devons donc construire un foncteur constant

$$\mathsf{A}\colon \mathsf{G} \to \mathrm{FL}(X) \tag{3}$$

et un morphisme $\mathsf{r}\colon x \to \mathsf{A}$. Pour tout objet g de G de projection $U \in \mathrm{Ob}(X)$, on pose

$$\mathsf{A}(g) = \mathsf{Aut}_U(g) \backslash x(g), \tag{4}$$

où $\mathsf{Aut}_U(g)$ opère sur $x(g)$ par l'intermédiaire du foncteur $x\colon \mathsf{G} \to \mathrm{FL}(X)$ et où le quotient est pris dans la catégorie fibre $X_{/U}$. Puisque la formation des faisceaux d'automorphismes d'un objet de G et celle des quotients dans $X_{/U}$ commutent à la localisation, on définit ainsi un foncteur cartésien $\mathsf{A}\colon \mathsf{G} \to \mathrm{FL}(X)$, qui est évidemment constant. Pour définir $\mathsf{r}\colon x \to \mathsf{A}$, on prend pour $\mathsf{r}(g)\colon x(g) \to \mathsf{Aut}_U(g) \backslash x(g)$ la projection du quotient. Il reste à vérifier que l'application (2), qui s'écrit maintenant

$$\mathrm{Hom}(\mathsf{A}, \mathsf{B}) \to \mathrm{Hom}(x, \mathsf{B}), \qquad m \rightsquigarrow m\,\mathsf{r}, \tag{5}$$

est bijective pour tout morphisme constant $\mathsf{B}\colon \mathsf{G} \to \mathrm{FL}(X)$. Cela est immédiat.

5.1.4. On démontre de même l'existence d'un adjoint à droite

$$\tau_{\mathsf{G}*}\colon B_{\mathsf{G}} \to X \tag{1}$$

de τ_{G}^*. Disons simplement que, pour tout objet g de G de projection $U \in \mathrm{Ob}(X)$, et tout objet $x\colon \mathsf{G} \to \mathrm{FL}(X)$ de B_{G}, on pose

$$\mathsf{A}(x)(g) = x(g)^{\Gamma}, \tag{2}$$

plus grand sous-objet de $x(g)$ sur lequel $\Gamma = \mathsf{Aut}_U(g)$ opère trivialement. On obtient ainsi un morphisme de champs

$$\mathsf{A}(x)\colon \mathsf{G} \to \mathrm{FL}(X) \tag{3}$$

qui est constant, et un morphisme de morphismes de champs

$$\mathsf{r}\colon \mathsf{A}(x) \to x, \tag{4}$$

ce dernier associant à tout $g \in \mathrm{Ob}(\mathsf{G}_U)$, $U \in \mathrm{Ob}(X)$, le monomorphisme structural $r(g)\colon x(g)^{\Gamma} \to x(g)$. L'objet $\tau_{\mathsf{G}*}(x)$ de X correspondant au foncteur constant $\mathsf{A}(x)$ et la flèche $\tau_{\mathsf{G}}^*\tau_{\mathsf{G}*}(x) \to x$ correspondant à r définissent la valeur en x d'un foncteur adjoint à droite de τ_{G}^*, comme on voit aisément. C.Q.F.D.

5.2. La propriété universelle de $B_{\mathsf{G}}(X)$

Proposition 5.2.1. Soient X un U-topos, G une gerbe sur X. On a une X-équivalence de gerbes

$$V\colon \mathsf{G} \xrightarrow{\approx} \mathrm{MOR}_X(X, B_{\mathsf{G}})^0. \tag{1}$$

5.2.1.1. D'après la définition (3.5 (2)), un objet du but de (1) de projection $U \in \mathrm{Ob}(X)$ est un morphisme de topos

$$p\colon\ X_{/U} \to B_{\mathsf{G}} \tag{2}$$

muni d'un isomorphisme $i\colon u \xrightarrow{\sim} \tau_{\mathsf{G}} \cdot p$ où $u\colon X_{/U} \to X$ est le morphisme naturel. A tout objet g de G de projection $U \in \mathrm{Ob}(X)$, nous devons donc associer un foncteur image inverse

$$V(g)^*\colon\ B_{\mathsf{G}} \to X_{/U} \tag{3}$$

et un isomorphisme

$$v(g)\colon\ V(g)^*\,\tau_{\mathsf{G}}^* \xrightarrow{\sim} u^*. \tag{4}$$

On pose

$$V(g)^*(x) = x(g), \tag{5}$$

qui est bien un objet de $X_{/U}$, car un objet x de B_{G} est, par définition, un X-foncteur cartésien $x\colon \mathsf{G} \to \mathrm{FL}(X)$, donc respecte les fibres, et la fibre en U de $\mathrm{FL}(X)$ n'est autre que $X_{/U}$. Pour définir (4), on rappelle que, pour tout $V \in \mathrm{Ob}(X)$, l'objet $\tau_{\mathsf{G}}^*(V)\colon \mathsf{G} \to \mathrm{FL}(X)$ de B_{G} n'est autre que le foncteur «constant» (5.1.1.1)

$$(g'/U') \rightsquigarrow U' \times V.$$

On a donc

$$V(g)^*\,\tau_{\mathsf{G}}^*(V) = U \times V = u^*(V), \tag{6}$$

et l'on peut prendre pour $v(g)$ le morphisme identique. Il est clair que $V(g)^*$ est un foncteur et $v(g)$ un isomorphisme de foncteurs.

5.2.1.2. Pour prouver que l'on a ainsi défini l'action sur les objets d'un foncteur (1), nous devons voir que $V(g)^*$ commute aux limites projectives finies et aux limites inductives quelconques. Supposons pour commencer que U soit l'objet final de X et soit g une section cartésienne de G dont la valeur en U soit égale à g. Le foncteur $V(g)^*$ est alors le composé

$$B_{\mathsf{G}} \xrightarrow{\gamma} B_G \xrightarrow{\omega} X, \tag{7}$$

où $G = \mathsf{Aut}(\mathsf{g})$, où γ est l'équivalence de (5.1.2 (2)) et où ω est le foncteur oubli. Dans ce cas, $V(g)^*$ définit donc un morphisme de topos. Dans le cas général, $V(g)^*$ est le composé des foncteurs

$$B_{\mathsf{G}}(X) \xrightarrow{a} B_{\mathsf{G}_{/U}}(X_{/U}) \xrightarrow{b} X_{/U}, \tag{8}$$

où a est le foncteur image inverse dans le champ de topos B_{G} (5.1.1) et où b est l'analogue de $V(g)^*$ relatif au topos $X_{/U}$, à la gerbe $\mathsf{G}_{/U}$ et à l'objet g de $\mathsf{G}_{/U}$. D'où la conclusion, car a est un foncteur image inverse.

5.2.1.3. Pour achever de définir (1), il faut définir son action sur les flèches. A toute flèche $m\colon g' \to g$ de G de projection $M\colon U' \to U$, nous devons associer un morphisme de morphismes de topos $V(m)$:

$$\begin{array}{ccc} B_{\mathsf{G}} & \xleftarrow{V(g')} & X_{/U'} \\ & {\scriptstyle V(g)}\nwarrow \quad \uparrow {\scriptstyle V(m)} \quad \nearrow {\scriptstyle X_{/M}} & \\ & X_{/U} & \end{array} , \tag{9}$$

tel que

$$v(g') \cdot \big(\tau_{\mathsf{G}} * V(m)\big) = v(g), \tag{10}$$

ceci, par définition de $\mathrm{MOR}_X(X, B_{\mathsf{G}})^0$. Soit donc $x\colon \mathsf{G} \to \mathrm{FL}(X)$ un objet de B_{G}. On a une flèche de $\mathrm{FL}(X)$

$$x(m)\colon\ x(g') \to x(g), \tag{11}$$

dont la projection est $M\colon U' \to U$, d'où, puisque $x(m)$ est cartésienne, un isomorphisme dans $X_{/U'}$

$$V(m)^*(x)\colon\ x(g') \xrightarrow{\sim} x(g) \times_U U', \tag{12}$$

qui s'écrit également

$$V(m)^*(x)\colon\ V(g')^*(x) \xrightarrow{\sim} X^*_{/M}\, V(g)^*(x). \tag{13}$$

On vérifie aisément que l'on définit ainsi un morphisme de morphismes de topos $V(m)$, et que l'on a bien défini un foncteur

$$V\colon\ \mathsf{G} \to \mathrm{MOR}_S(X, B_{\mathsf{G}})^0.$$

Il est immédiat que c'est un X-foncteur, et il est cartésien car, pour toute flèche m de G, son image $V(m)$ est cartésienne, puisque $V(m)$ est un isomorphisme.

5.2.1.4. Il nous reste à prouver que le foncteur (1) ainsi construit est une équivalence de catégories. Puisque sa source et son but sont des champs sur X, il suffit de prouver qu'il existe un raffinement de X tel que, pour tout objet U de ce raffinement, le foncteur (1) induise sur les fibres en U une équivalence de catégories. Or la construction de (1) est compatible avec la localisation (5.2.1.2). On peut donc supposer que G admet une section notée g, et il suffit de prouver que la restriction aux fibres en l'objet final de X du foncteur V de (1) s'interprète comme l'équivalence (4.3.2 (6)), où $X' = X$ et où $G = \mathsf{Aut}(\mathsf{g})$. Pour cela, il suffira de montrer que le carré ci-dessous est commutatif à isomorphisme près, car les foncteurs autres que V_e sont des équivalences de catégories.

5.2.1.5. Considérons les foncteurs

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Mor}_X(X, B_G)^0 & \xrightarrow{F} & \mathbf{Mor}_X(X, B_{\mathbf{G}})^0 \\ \uparrow{\scriptstyle E} & & \uparrow{\scriptstyle V_e} \\ \mathbf{Tors}(X, G) & \xrightarrow[D]{} & \mathbf{G}_e, \end{array} \tag{14}$$

où V_e est l'effet sur les fibres en l'objet final e_X de X du foncteur V de (1), où D est le foncteur torsion (III 2.3.9 (1))

$$D(P) = P \overset{G}{\wedge} g, \quad \text{avec} \quad g = \mathbf{g}(e_X), \tag{15}$$

qui est une équivalence (III 2.5.1), où E, qui est défini par

$$E(P)^*(A) = P \overset{G}{\wedge} A, \quad (4.3.2\,(6)), \tag{16}$$

est aussi une équivalence, et où F est donné par la composition avec l'équivalence

$$C\colon\ B_{\mathbf{G}} \to B_G, \quad C(x) = x(g), \quad (5.1.2). \tag{17}$$

Soit P un G-torseur. Le foncteur image inverse $V_e D(P)^*$ attaché au morphisme de topos $V_e D(P)$ est défini par

$$V_e D(P)^*(x) = x(P \overset{G}{\wedge} g), \quad x \in \mathrm{Ob}(B_{\mathbf{G}}). \tag{18}$$

Le foncteur image inverse attaché au morphisme de topos $FE(P)$ est donné par

$$FE(P)^*(x) = P \overset{G}{\wedge} x(g), \quad x \in \mathrm{Ob}(B_{\mathbf{G}}). \tag{19}$$

Ces deux objets sont canoniquement isomorphes (III 2.3.11). Il reste à vérifier que la famille de ces isomorphismes, pour x variable, fournit un isomorphisme de foncteurs entre $V_e D(P)^*$ et $FE(P)^*$ et que celui-ci est compatible avec $\tau_{\mathbf{G}}\colon B_{\mathbf{G}} \to X$ autrement dit qu'il définit un morphisme de morphismes de X-champs (0 (3)). On doit enfin vérifier que, pour P variable, on obtient ainsi un isomorphisme entre les deux composés possibles de (14). Nous laissons ce travail au lecteur.

Corollaire 5.2.1.6. Pour que le morphisme $\tau_{\mathbf{G}}\colon B_{\mathbf{G}} \to X$ admette une section il faut et il suffit que la gerbe $\mathbf{G}$ soit triviale.

Ayant ainsi établi la propriété universelle (5.2.5) dans un cas particulier, nous déduirons le cas général de la proposition que voici.

Proposition 5.2.2. Soient $f\colon X' \to X$ un morphisme de U-topos, $\mathbf{G}$ une gerbe sur X et $\mathbf{G}' = f_{\mathrm{ch}}^*(\mathbf{G})$ son image inverse par f. Le carré com-

mutatif

$$\begin{array}{ccc} B_{\mathsf{G}}(X) & \xleftarrow{b} & B_{\mathsf{G}'}(X') \\ {\scriptstyle \tau_{\mathsf{G}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau_{\mathsf{G}'}} \\ X & \xleftarrow[f]{} & X' \end{array} \tag{1}$$

est 2-cartésien (0.5), où b est le morphisme de topos décrit plus bas.

5.2.2.1. Pour définir le foncteur image inverse b^* sous-jacent au morphisme de topos b, rappelons qu'il s'explicite comme un foncteur

$$b^*\colon \mathbf{Cart}_X(\mathsf{G}, \mathrm{FL}(X)) \to \mathbf{Cart}_{X'}(\mathsf{G}', \mathrm{FL}(X')). \tag{2}$$

Par définition de G' comme image inverse de G, on a une équivalence

$$\mathbf{Cart}_{X'}(\mathsf{G}', \mathrm{FL}(X')) \to \mathbf{Cart}_X(\mathsf{G}, f_*^{\mathrm{ch}}(\mathrm{FL}(X'))); \tag{3}$$

il nous suffit donc de trouver un foncteur

$$b^*\colon \mathbf{Cart}_X(\mathsf{G}, \mathrm{FL}(X)) \to \mathbf{Cart}_X(\mathsf{G}, f_*^{\mathrm{ch}}(\mathrm{FL}(X'))). \tag{4}$$

On prend pour (4) le foncteur induit par composition avec le morphisme de X-champs

$$\mathrm{FL}(X) \to f_*^{\mathrm{ch}}(\mathrm{FL}(X')), \quad (U \to V) \rightsquigarrow (f^*(U) \to f^*(V)). \tag{5}$$

On rappelle que $f_*^{\mathrm{ch}}(H)$, où H est un X'-champ est le X-champ déduit de H par le changement de base $f^*\colon X \to X'$.

5.2.2.2. Notons que (1) est commutatif, car, pour tout objet U de X l'objet $b^*(\tau_{\mathsf{G}}^*(U))$ est le foncteur constant (5.1.1.1)

$$\mathsf{G} \to f_*^{\mathrm{ch}}(\mathrm{FL}(X')), \quad (g/U) \rightsquigarrow f^*(U), \tag{6}$$

et il en est de même de $\tau_{\mathsf{G}'}^*(f^*(U))$, comme on voit en explicitant l'équivalence (3).

5.2.2.3. Pour démontrer que le carré (1) est 2-cartésien, on doit prouver que, pour tout X'-topos X'', le foncteur

$$\mathbf{Mor}_{X'}(X'', B_{\mathsf{G}'}) \to \mathbf{Mor}_X(X'', B_{\mathsf{G}}) \tag{7}$$

est une équivalence de catégories. Or ce dernier est l'effet sur les fibres en l'objet final de X d'un morphisme de X-champs

$$f_*^{\mathrm{ch}}(\mathrm{MOR}_{X'}(X'', B_{\mathsf{G}'})) \to \mathrm{MOR}_X(X'', B_{\mathsf{G}}), \tag{8}$$

obtenu à partir de (7) en localisant sur X (1.6). Que (8) soit une équivalence est une question locale car sa source et son but sont des champs. On peut donc supposer que G est triviale et il reste à prouver que, dans ce cas, le carré (1) s'interprète comme le carré (4.4 (1)), dont on a démontré qu'il est 2-cartésien. Or si g est une section de G, on pose $G = \mathsf{Aut}(\mathsf{g})$ et $G' = f^*(G)$, moyennant quoi, d'après (II 3.2.8), G' s'identifie à $\mathsf{Aut}(\mathsf{g}')$, où g' est la section de G' définie par g. On a des équivalences

$$B_{\mathsf{G}} \xrightarrow{\approx} B_G \qquad (\text{resp. } B_{\mathsf{G}'} \xrightarrow{\approx} B_{G'}),$$

obtenues en attachant à $x\colon \mathsf{G} \to \mathrm{FL}(X)$ (resp. $x\colon \mathsf{G}' \to \mathrm{FL}(X')$) l'objet à opérateurs $x(\mathsf{g})$ (resp. $x(\mathsf{g}')$). En explicitant (3), on voit que ces équivalences permettent d'interpréter le foncteur b^* comme le foncteur induit par f:

$$B_G \to B_{G'}, \qquad A \rightsquigarrow f^*(A),$$

qui est précisément celui qui figure dans (4.4 (1)), ce qui démontre la proposition.

Corollaire 5.2.4. Soient $f\colon X' \to X$ un morphisme de U-topos et B le X-topos classifiant d'une X-gerbe G. Si l'on pose $B' = B \times_X X'$, on a une X'-équivalence de gerbes

$$\mathrm{MOR}_{X'}(X', B') \approx\!\!\approx f^*(\mathrm{MOR}_X(X, B)) \tag{1}$$

et une X-équivalence de gerbes

$$\mathrm{MOR}_X(X', B) \approx\!\!\approx f_*(\mathrm{MOR}_{X'}(X', B')). \tag{2}$$

L'existence de B' est assurée, sans recours au théorème général de M. Hakim, par (5.2.2) qui assure que l'on a $B' = B_{\mathsf{G}'}$, où G' est l'image inverse de la gerbe G. L'équivalence (2), qui assure que $\mathrm{MOR}_X(X', B)$ est l'image directe de la gerbe $\mathrm{MOR}_{X'}(X', B')$ est alors une conséquence triviale des définitions (3.7 (4)). Par définition de l'image inverse d'une gerbe, pour prouver (1), il faut déjà définir un morphisme de champs sur X:

$$\mathrm{MOR}_X(X, B) \to f_*(\mathrm{MOR}_{X'}(X', B')), \tag{3}$$

c'est-à-dire un morphisme $\mathrm{MOR}_X(X, B) \to \mathrm{MOR}_X(X', B)$ et l'on prend *celui qui est défini par composition avec* $f\colon X' \to X$. Pour prouver que le morphisme (1) qu'il définit est une équivalence, on note que, par les équivalences $\mathsf{G} \approx\!\!\approx \mathrm{MOR}_X(X, B)$ et $\mathsf{G}' \approx\!\!\approx \mathrm{MOR}_{X'}(X', B')$, le foncteur (3) s'interprète comme le morphisme d'adjonction $\mathsf{G} \to f_* f^*(\mathsf{G})$.

Par passage aux catégories de sections cartésiennes, on déduit de (5.2.4 (1)) et (5.2.1) *la propriété universelle du topos classifiant* $B_{\mathsf{G}}(X)$:

Théorème 5.2.5. Pour tout morphisme de U-topos $f: X' \to X$ et toute gerbe G sur X, on a une équivalence de catégories:

$$\varprojlim(f^*(\mathsf{G})/X') \xrightarrow{\approx} \mathbf{Mor}_X(X', B_{\mathsf{G}}(X))^0.$$

5.3. Extensions d'un topos

Par la propriété universelle du classifiant d'une gerbe G sur un topos X, on sait reconstruire celle-là à partir de celui-ci grâce à l'équivalence de X-gerbes

$$\mathsf{G} \xrightarrow{\approx} \mathrm{MOR}_X(X, B_{\mathsf{G}}(X))^0, \quad (5.2.1). \tag{1}$$

Inversement, nous allons voir que si $\tau: B \to X$ est un morphisme de U-topos tel que B soit localement le classifiant d'une gerbe, alors le X-champ $\mathsf{G} = \mathrm{MOR}_X(X, B)^0$ est une X-gerbe et l'on a une X-équivalence de X-topos $B \xrightarrow{\approx} B_{\mathsf{G}}(X)$. Mais les gerbes forment une 2-catégorie et il en est de même des X-topos; pour utiliser la correspondance précédente, il nous faudra comparer les 2-catégories en jeu et pas seulement leurs «ensembles» d'objets.

Proposition 5.3.1. Soit $\tau: B \to X$ un morphisme de U-topos. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) il existe une X-gerbe G et une X-équivalence de X-topos $B \approx\!\!\!\approx B_{\mathsf{G}}(X)$;

(ii) le X-champ $\mathsf{G} = \mathrm{MOR}_X(X, B)^0$ est une gerbe et le foncteur naturel

$$f^*: B \to B_{\mathsf{G}}(X), \quad f^*(b)(x) = x^*(b), \tag{1}$$

est une équivalence de catégories;

(iii) il existe une famille $(U_i, i \in I)$ d'objets de X, couvrant l'objet final de X, et, pour chaque $i \in I$, un groupe G_i du topos $X|U_i$ tels que, pour tout $i \in I$, la restriction $B|U_i$ de B à $X|U_i$ soit $(X|U_i)$-équivalente au topos classifiant $B_{G_i}(X|U_i)$.

5.3.1.1. Précisons la définition de (1). Par définition, un objet de B_{G} est un X-foncteur cartésien

$$\mathsf{G} \to \mathrm{FL}(X). \tag{2}$$

Or un objet de G de projection $U \in \mathrm{Ob}(X)$ est un X-morphisme de topos

$$x: X_{/U} \to B, \tag{3}$$

c'est-à-dire un foncteur $x^*: B \to X_{/U}$. Pour tout objet b de B et tout objet x de G de projection $U \in \mathrm{Ob}(X)$, on a donc $x^*(b) \in \mathrm{Ob}(X_{/U})$; donc $x^*(b)$ est un objet de $\mathrm{FL}(X)$ de projection U. La «formule» (1) définit donc bien l'action sur les objets d'un foncteur $B \to B_{\mathsf{G}}$. Nous laissons au lecteur le soin de définir son action sur les flèches.

Construisons un isomorphisme de foncteurs

$$f^* \cdot \tau^* \simeq \tau_{\mathsf{G}}^*. \tag{4}$$

Il en résultera que (ii) ⇒ (i). En effet, si f^* est une équivalence de catégories, c'est un morphisme de topos et l'isomorphisme (4) en fait une X-équivalence de topos. Nous devons construire, pour tout $U \in \mathrm{Ob}(X)$, un isomorphisme d'objets de B_{G}:

$$i(U):\ f^*\big(\tau^*(U)\big) \xrightarrow{\sim} \tau_{\mathsf{G}}^*(U)$$

satisfaisant aux conditions de compatibilité habituelles, c'est-à-dire, puisque $B_{\mathsf{G}} = \mathsf{Cart}_X(\mathsf{G}, \mathrm{Fl}(X))$, une famille

$$i(U)(x/V):\ f^*\big(\tau^*(U)(x/V)\big) \to \tau_{\mathsf{G}}^*(U)(x/V), \quad (x/V) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{G}).$$

Or, par définition de G, l'objet (x/V) est un X-morphisme de topos $x: X/U \to B$, et, par définition de f^* et de τ_{G}, nous devons trouver une famille d'isomorphismes

$$x^*\big(\tau^*(U)\big) \to (V \times U/V).$$

Or le X-morphisme (x/V) détermine un isomorphisme de foncteurs $j:\ x^*\,\tau^* \xrightarrow{\sim} v^*$, où $v:\ X_{/V} \to X$ est le morphisme naturel et l'on pose $i(U)(x/V) = j(U)$. Il reste à vérifier les diverses conditions de compatibilité habituelles, ce qui est aisé.

5.3.1.2. Il est immédiat que (i) ⇒ (iii), car toute gerbe G est localement équivalente à une gerbe de torseurs. Prouvons que (iii) ⇒ (ii). Pour un champ, la condition d'être une gerbe est de nature locale et, par ailleurs, le foncteur f^* est l'effet sur les fibres en l'objet final de X du morphisme de X-champs

$$\tau_*(\mathrm{Fl}(B)) \to \mathsf{B}_{\mathsf{G}}(X).$$

La condition que f^* soit une équivalence est donc elle aussi de nature locale. Il reste donc à prouver (ii) lorsque $B = B_G(X)$, où G est un groupe du topos X. Par la propriété universelle du topos classifiant d'un groupe, on sait que $\mathrm{MOR}_X(X, B_G)$ est une gerbe et f^* est une équivalence de catégories, car on vérifie que c'est un foncteur quasi-inverse de l'équivalence (5.1.2 (2)).

Définition 5.3.2. Soit X un U-topos. On appelle extension du topos X un X-topos $\tau:\ B \to X$ satisfaisant aux conditions équivalentes de la proposition précédente.

La proposition suivante donne un exemple d'extension de topos et explique la terminologie.

Proposition 5.3.3. Soient X un U-topos et

$$1 \to F \xrightarrow{u} G \xrightarrow{v} H \to 1 \tag{1}$$

une suite exacte de groupes de X. On a un diagramme commutatif de morphismes de topos

$$\begin{array}{ccc} B_F & \xrightarrow{B_u} & B_G \\ {\scriptstyle \tau_F}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle B_v} \\ X & \xrightarrow[\omega_H]{} & B_H \end{array} \tag{2}$$

qui est 2-cartésien. De plus, $B_v\colon B_G \to B_H$ est une extension du topos B_H.

Que le carré soit commutatif est une conséquence de la fonctorialité en G du topos classifiant B_G (4.1 (4)). D'après la propriété universelle des classifiants, pour prouver que ce carré est 2-cartésien, il suffit de montrer que, pour tout X-topos $f\colon X' \to X$, la catégorie des $f^*(F)$-torseurs de X' est équivalente à la catégorie des $f^*(G)$-torseurs P de X', munis d'une section de $P \overset{f^*(G)}{\wedge} f^*(H)$, ce qui a été fait au chapitre III, d'où la conclusion. Il en résulte que B_G est une extension de B_H. En effet, d'après (III 1.2.8.9), le morphisme $\omega_H\colon X \to B_H$ s'interprète comme le morphisme de topos $B_H|E_H \to B_H$ attaché à l'objet E_H de B_H; comme cet objet couvre l'objet final, la condition de (5.3.1 (iii)) est satisfaite.

Corollaire 5.3.4. Soit $\mathsf{m}\colon \mathsf{G} \to \mathsf{H}$ un morphisme de gerbes sur un U-topos X. Supposons que, pour tout objet (x/U) de G, le morphisme de faisceaux de groupes

$$\mathsf{Aut}_U(x) \to \mathsf{Aut}_U(m(x))$$

soit un épimorphisme (ce qui signifie que m est lié par un épimorphisme de liens). Alors le morphisme de topos $B_{\mathsf{m}}(X)\colon B_{\mathsf{G}}(X) \to B_{\mathsf{H}}(X)$ est une extension du topos $B_{\mathsf{H}}(X)$.

Par localisation sur X, on peut supposer que G est triviale, donc aussi H, ce qui permet d'interpréter m comme le morphisme de gerbes $\mathrm{TORS}(X, m)\colon \mathrm{TORS}(X, G) \to \mathrm{TORS}(X, H)$ attaché à un épimorphisme de groupes $m\colon G \to H$ et le corollaire résulte ainsi du théorème.

Proposition 5.3.5. Soient G et H deux gerbes sur un U-topos X. Le foncteur

$$\mathsf{Hom}(\mathsf{G}, \mathsf{H}) \to \mathsf{Mor}_X(B_{\mathsf{G}}, B_{\mathsf{H}})^0 \tag{1}$$

qui, à un morphisme de gerbes $\mathsf{m}\colon \mathsf{G} \to \mathsf{H}$, associe le morphisme de topos $B_{\mathsf{m}}\colon B_{\mathsf{G}} \to B_{\mathsf{H}}$ dont le foncteur image inverse est

$$B_{\mathsf{m}}^* = \mathsf{Cart}_X(\mathsf{m}, \mathrm{Fl}(X))\colon\ \mathsf{Cart}_X(\mathsf{H}, \mathrm{Fl}(X)) \to \mathsf{Cart}_X(\mathsf{G}, \mathrm{Fl}(X)), \tag{2}$$

est une équivalence de catégories. Soient B et B' deux extensions d'un U-topos X. Le foncteur

$$\mathbf{Mor}_X(B, B') \to \mathbf{Hom}(\mathrm{MOR}_X(X, B), \mathrm{MOR}_X(X, B')) \tag{3}$$
$$m \rightsquigarrow (u \rightsquigarrow m\,u)$$

est une équivalence de catégories.

5.3.5.1. Pour donner un sens à la première partie de l'énoncé, il faut s'assurer que le foncteur B_{m}^* commute aux limites projectives finies et aux limites inductives, ce qui résulte du calcul de celles-ci dans les topos classifiants (s'inspirer de (2.3.1)). On notera que si $\mathsf{u}: \mathsf{m} \to \mathsf{n}$ est un morphisme de morphismes de gerbes, $\mathsf{m}, \mathsf{n}: \mathsf{G} \rightrightarrows \mathsf{H}$, on a un morphisme de foncteurs naturel $B_{\mathsf{u}}^*: B_{\mathsf{m}}^* \to B_{\mathsf{n}}^*$, donc, d'après la définition d'un morphisme de morphismes de topos, un tel morphisme «en sens inverse» $B_{\mathsf{u}}: B_{\mathsf{n}} \to B_{\mathsf{m}}$, ce qui explique l'intervention dans (1) de l'opposée de $\mathbf{Mor}_X(B_{\mathsf{G}}, B_{\mathsf{H}})$.

5.3.5.2. Pour prouver cette proposition, il suffit de montrer que les deux foncteurs de l'énoncé sont quasi-inverses l'un de l'autre lorsque $B = B_{\mathsf{G}}$ et $B' = B_{\mathsf{H}}$, du moins si l'on identifie G et $\mathrm{MOR}_X(X, B_{\mathsf{G}})^0$ d'une part, H et $\mathrm{MOR}_X(X, B_H)^0$ d'autre part, comme il est dit dans (5.2.1). Les vérifications sont pénibles mais faciles. Nous ne les écrirons pas. On pourrait également remarquer que chacun des foncteurs de l'énoncé est l'effet sur les fibres en l'objet final de X d'un morphisme de X-champs. Ceci montre que la conclusion est locale sur X, ce qui permet de supposer que G et H sont les gerbes de torseurs attachées à des groupes G et H de X. Par la propriété universelle de B_G, la catégorie $\mathbf{Mor}_X(B_G, B_H)$ est équivalente à l'opposée de la catégorie des H^{r}-torseurs de B_G qui est la catégorie des G-H-bitorseurs de X. D'après (III 2.2.2), la catégorie $\mathbf{Hom}(\mathsf{G}, \mathsf{H})$ est équivalente à la catégorie des G-objets de la gerbe H qui est égale à la précédente. Il reste à vérifier que chacun des deux foncteurs de l'énoncé redonne l'équivalence ainsi obtenue, ce qui est aisé.

§ 6. Interprétation de $H^2(X, L)$ en termes d'extensions du topos X

Au chapitre IV, nous avons donné une définition en termes de gerbes de l'ensemble $H^2(X, L)$ attaché à un lien L sur un topos X, obtenant ainsi, dans le cas abélien, une interprétation du groupe $H^2(X, A)$ attaché, en algèbre homologique, à un groupe abélien A de X. Grâce à la construction du topos $B_{\mathsf{G}}(X)$ attaché à une gerbe G sur X, nous allons prouver que $H^2(X, L)$ classifie certaines extensions du topos X munies d'une structure supplémentaire faisant intervenir L. Dans (6.2), nous remarquons

qu'une extension $\tau: B \to X$ détermine un objet plus satisfaisant que le lien $L(B/X)$ de la gerbe attachée à B, à savoir un groupe $A(B/X)$ de B, qui, d'ailleurs, détermine $L(B/X)$ à isomorphisme unique près. Pour cela, nous utilisons les renseignements rassemblés en (6.1) sur la catégorie des liens sur un topos classifiant B_{G}.

6.1. Liens sur un topos classifiant

Proposition 6.1.1. Soit H un groupe d'un U-topos X et soit F un champ sur le topos B_H.

(i) Le champ $\omega^*(F)$ sur X déduit de F par le changement de base

$$\omega_!: X \to B_H, \qquad \omega_!(U) = E_H \times U^{\tau}, \tag{1}$$

est une image inverse de F par le morphisme de topos

$$\omega_H: X \to B_H. \tag{2}$$

Le foncteur naturel

$$\varprojlim(F/B_H) \to \varprojlim(\omega^*(F)/X) \tag{3}$$

s'interprète à équivalence près comme le foncteur changement de base attaché au morphisme final $E_H \to e$ de l'objet E_H de B_H:

$$F_e \to F_{E_H} \quad \text{noté} \quad x \rightsquigarrow x^{\omega}. \tag{4}$$

(ii) Soit $x \in \mathrm{Ob}(F_e)$ et soit A le groupe de B_H qui représente son faisceau d'automorphismes. La catégorie des données de descente sur x^{ω} relativement au morphisme final de E_H est équivalente à la catégorie

$$\mathbf{Z}^1(H, A) \tag{5}$$

des 1-cocycles de H à valeurs dans A.

6.1.1.1. D'après (III 1.2.8.9), le morphisme ω_H s'interprète comme le morphisme de topos $\sigma: B_{H/E_H} \to B_H$ grâce à l'équivalence

$$X \to B_{H/E_H}, \qquad U \rightsquigarrow (E_H \times U^{\tau})/E_H. \tag{6}$$

L'image inverse de F par le morphisme σ est la restriction de F à B_{H/E_H} et, par suite, l'image inverse de F par le foncteur ω_H est $\omega^*(F)$, puisque le foncteur (1) est la composé de (6) et du foncteur source $B_{H/E_H} \to B_H$. La seconde assertion de (i) en résulte. On peut également invoquer (II 3.2.6) qui assure, puisque $\omega_!$ est adjoint à gauche du foncteur image inverse ω_H^*, que le champ associé à $\omega^*(F)$ est une image inverse de F. Or il est clair que $\omega^*(F)$ est un champ.

6.1.1.2. La catégorie $\mathbf{Z}^1(H, A)$ est définie comme suit: un 1-cocycle est un morphisme $f: H \to A$ entre les objets de X sous-jacents à H et A, vérifiant

$$f(h\,h') = f(h) \cdot {}^h f(h'), \tag{7}$$

cependant qu'un morphisme $a: f \to g$ est une section a de l'objet de X sous-jacent à A, vérifiant

$$a \cdot f(h) = g(h) \cdot {}^h a. \tag{8}$$

Ceci dit, une donnée de descente sur x^ω est une section

$$u \in A(E_H \times E_H), \qquad A = \mathbf{Aut}(x), \tag{9}$$

vérifiant

$$u^2\, u^0 = u^1, \tag{10}$$

où u^i est l'image de u par $A(q_i)$, où $q_i: E_H^3 \to E_H^2$ est la projection qui oublie le i-ème facteur. Donc u est un H-morphisme $u: E_H \times E_H \to A$ vérifiant $u(g, g') \cdot u(g', g'') = u(g, g'')$. Le morphisme $U: H \to A$ défini par $U(h) = u(\mathbf{e}, h)$, où $\mathbf{e}$ est la section unité de H, est un 1-cocycle et l'on vérifie immédiatement que l'on obtient ainsi une bijection entre l'ensemble des données de descente sur x^ω et l'ensemble des 1-cocycles de H à valeurs dans A. L'assertion relative aux morphismes est aussi aisée à démontrer, ce qui prouve (ii).

Proposition 6.1.2. Soit H un groupe d'un U-topos. On obtient une équivalence de catégories

$$\mathbf{Lien}(B_H) \xrightarrow{\approx} \mathbf{Opér}(H, \mathrm{LIEN}(X)) \tag{1}$$

en associant à tout lien L sur B_H son image inverse L^ω par $\omega_H: X \to B_H$, munie du morphisme $H \to \mathbf{Aut}(L^\omega)$ défini par la donnée de descente naturelle sur L^ω, (6.1.1).

Le but de (1) désigne, conformément à (III 2.2.1), la catégorie des liens L sur X munis d'un morphisme de groupes $H \to \mathbf{Aut}(L)$ [*faisant opérer H sur L*]. Par ailleurs si L est un lien sur B_H et si $L^{\omega\tau}$ désigne l'image inverse de L^ω par $\tau_H: B_H \to X$, on a, par transitivité de l'image inverse, un isomorphisme canonique $L^\omega \xrightarrow{\sim} L^{\omega\tau\omega}$. Donc le lien L correspond à une donnée de descente sur $L^{\omega\tau\omega}$, laquelle correspond à un objet de $Z^1(H, \mathbf{Aut}(L^{\omega\tau}))$. *Or H opère trivialement sur* $\mathbf{Aut}(L^{\omega\tau})$, donc un 1-cocycle est simplement un morphisme et la proposition est démontrée. On notera que, comme il se doit, $L^{\omega\tau}$ correspond au morphisme unité $H \to \mathbf{Aut}(L^\omega)$.

6.1.3. Interprétant un groupe de B_H comme un groupe de X sur lequel opère H, on en déduit que le lien sur B_H représenté par un groupe A de

B_H est celui qui correspond au lien $\mathbf{lien}(A^\omega)$ sur X, muni du morphisme composé

$$H \to \mathbf{Aut}(A^\omega) \to \mathbf{Out}(A^\omega), \tag{1}$$

où $\mathbf{Out}(A^\omega) = \mathbf{Aut}(A^\omega)/\mathbf{Int}(A^\omega)$ est le groupe (de $\tilde{X}$) des automorphismes du lien représenté par A^ω. Enfin, un groupe F de X muni d'un morphisme de groupes

$$f\colon\ H \to \mathbf{Out}(F) \tag{2}$$

détermine un lien $\mathbf{F} = (F, f)$ sur B_H muni d'un isomorphisme $\mathrm{f}\colon \mathbf{F}^\omega \xrightarrow{\sim} \mathbf{lien}(F)$; autrement dit, l'image inverse de $\mathbf{F}$ par le morphisme oubli $\omega\colon X \to B_H$ est représentée par F.

Proposition 6.1.4. Soit $\tau\colon B \to X$ une extension d'un U-topos X. Le foncteur

$$\tau^*\colon\ \mathbf{Lien}(X) \to \mathbf{Lien}(B) \tag{1}$$

qui, à un lien L sur X associe son image inverse par τ, est pleinement fidèle.

On peut localiser sur X. En effet, par construction, le foncteur (1) est l'effet sur les fibres en l'objet final d'un morphisme de champs sur X

$$\mathrm{LIEN}(X) \to \tau^{\mathrm{ch}}_*(\mathrm{LIEN}(B)), \quad (\mathrm{V}\ 1.2.1\,(1)), \tag{2}$$

et il suffit de voir que ce dernier est pleinement fidèle, ce qui se voit fibre par fibre. On peut donc supposer que $B = B_H(X)$, où H est un groupe de X. Auquel cas, le foncteur (1) est celui qui, à un lien L sur X, associe le lien sur B_H défini par $(L, f\colon H \to \mathbf{Aut}(L))$, où f est le morphisme unité; d'où la conclusion.

Proposition 6.1.5. Soit $v\colon G \to H$ un morphisme de groupes d'un U-topos X. Le foncteur

$$\mathbf{Lien}(B_H(X)) \to \mathbf{Lien}(B_G(X)) \tag{1}$$

qui, à un lien sur B_H associe son image inverse par le morphisme de topos $B_v\colon B_G \to B_H$ s'interprète grâce à (6.2.2) comme le foncteur qui, à un couple (L, f), où L est un lien sur X et $f\colon H \to \mathbf{Aut}(L)$ un morphisme de groupes de X, associe le couple (L, fv). En particulier, ce foncteur est *fidèle*.

C'est un exercice sur les données de descente qui est laissé au lecteur. Par localisation, on en déduit que pour tout morphisme $m\colon B \to B'$ d'extensions de X, le foncteur image inverse de liens $\mathrm{LIEN}(B') \to \mathrm{LIEN}(B)$ est fidèle.

6.2. La classe $b \in H^2(X, L)$ attachée à une extension B d'un topos X

6.2.1. La définition n'est pas difficile: à une extension $\tau: B \to X$ d'un U-topos X, on attache la classe de la gerbe $\mathsf{G} = \mathrm{MOR}_X(X, B)^0$; celle-ci appartient à l'ensemble $H^2(X, L(B/X))$ attaché par (IV 3.1) au *lien sur* X

$$L(B/X) \tag{1}$$

de la gerbe G, lequel est appelé *le lien de l'extension* B/X. Puisque le foncteur image inverse de liens attaché à τ est pleinement fidèle, pour connaître $L(B/X)$ à isomorphisme unique près, il suffit de connaître son image inverse par τ. Nous allons voir que celle-ci est représentée par le *groupe de* B:

$$A(B/X) = \mathsf{Aut}(d_B)^0 \tag{2}$$

qui représente l'opposé du faisceau des automorphismes du morphisme diagonal $d_B: B \to B \times_X B$. En effet, d'après (5.2.4 (1)), l'image inverse de G est la gerbe $\mathrm{MOR}_B(B, B \times_X B)^0$ et, d'après (V 1.4.2), cette dernière est liée par l'image inverse de $L(B/X)$. Puisque d_B est un objet de $\mathrm{MOR}_B(B, B \times_X B)^0$, on a donc *un isomorphisme de liens sur* B:

$$\tau^*(L(B/X)) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Lien}(A(B/X)). \tag{3}$$

On notera que si $B = B_G(X)$, où G est un groupe de X, le morphisme d_B correspond, par la propriété universelle du classifiant B_G, au torseur canonique E_G de B_G et l'on a donc des *isomorphismes de groupes de* B_G

$$A(B_G/X) \approx \mathsf{Aut}(E_G) \approx G^{\mathbf{int}}, \tag{4}$$

où le dernier est le groupe de B_G obtenu en faisant opérer G sur lui-même par automorphismes intérieurs. On notera que ce groupe n'est pas l'image inverse par $\tau: B \to X$ d'un groupe de G, car les opérations de G sur $G^{\mathbf{int}}$ ne sont pas triviales (à moins que G ne soit abélien). Cependant, par passage aux liens, ces opérations deviennent triviales et le lien $L(B_G/X) = \mathsf{lien}(G^{\mathbf{int}})$ est bien l'image inverse par τ de $\mathsf{lien}(G)$.

6.2.2. *Extensions abéliennes.* On dira qu'une extension $\tau: B \to X$ est abélienne si son lien $L(B/X)$ l'est, ce qui revient à dire que le groupe $A(B/X)$ l'est, ce qui revient à dire que, pour toute section $\omega: X \to B$ de B/X le groupe (de X) $\mathsf{Aut}(\omega)$ est abélien. On sait qu'un lien abélien est essentiellement un groupe abélien (IV 1.2.3); par suite, si B est abélienne, l'isomorphisme (6.2.1 (3)) fournit un isomorphisme de groupes abéliens de B:

$$\tau^*(L(B/X)) \xrightarrow{\sim} A(B/X), \tag{1}$$

d'où un morphisme de groupes abéliens de X

$$L(B/X) \xrightarrow{\sim} \tau_*\big(A(B/X)\big), \tag{2}$$

qui est un *isomorphisme* car le foncteur τ^* est pleinement fidèle.

6.2.3. Puisque $A(B/X)^0$ est le groupe d'automorphismes de la section canonique de $\tau^*(\mathsf{G})$, il permet, par la propriété universelle de B, de reconstruire, pour tout morphisme de topos $f\colon X' \to X$ et tout X-morphisme de topos $\omega\colon X' \to B$, le faisceau des automorphismes de ω (défini en localisant sur X'). Plus précisément, on a un isomorphisme canonique de groupes de X':

$$\omega^*\big(A(B/X)^0\big) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Aut}_{X'}(\omega). \tag{1}$$

D'où, par passage aux liens et grâce à (6.2.1 (3)), un isomorphisme de liens sur X'

$$f^*\big(L(B/X)\big) \xrightarrow{\sim} \mathsf{lien}\big(\mathsf{Aut}_{X'}(\omega)^0\big). \tag{2}$$

D'après (V 1.4.1), ce dernier est l'isomorphisme qui provient du fait que $f^*\big(L(B/X)\big)$ s'identifie au lien de l'image inverse $f^*(\mathsf{G})$.

Proposition 6.2.4. Soient B et B' deux extensions d'un U-topos X et soit $m\colon B \to B'$ un X-morphisme de topos. On a un morphisme de groupes de B

$$A(m/X)\colon\ A(B/X) \to m^*\big(A(B'/X)\big). \tag{1}$$

Il existe un unique morphisme de liens sur X

$$L(m/X)\colon\ L(B/X) \to L(B'/X) \tag{2}$$

dont l'image inverse par $\tau\colon B \to X$ soit représenté par (2). De plus, $L(m/X)$ est le morphisme de liens qui lie le morphisme de gerbes

$$\mathrm{MOR}_X(X, B)^0 \to \mathrm{MOR}_X(X, B')^0 \tag{3}$$

induit par $m\colon B \to B'$.

Le morphisme m induit un B-morphisme de topos $m'\colon B \times_X B \to B \times_X B'$ et la composition avec m' induit un morphisme de faisceaux de groupes sur B

$$\mathsf{Aut}_B(d_B) \to \mathsf{Aut}_B(m'\, d_B). \tag{4}$$

Or la B-gerbe $\mathrm{MOR}_B(B, B \times_X B')$ est l'image inverse par m de la B'-gerbe $\mathrm{MOR}_{B'}(B', B' \times_X B')$ (5.2.4) et la section $m'\, d_B$ est l'image inverse de la section canonique $d_{B'}$ de $\mathrm{MOR}_{B'}(B', B' \times_X B')$. On a donc un isomorphisme de groupes de B'

$$\mathsf{Aut}_B(m'\, d_B) \xrightarrow{\sim} m^*\big(\mathsf{Aut}_{B'}(d_{B'})\big) \tag{5}$$

et en composant (5) et (4), on trouve l'opposé du morphisme (1).

Nous pouvons maintenant décrire en termes de topos l'ensemble $H^2(X, L)$ attaché à un lien L sur un U-topos X. Bien entendu, *une L-extension* est une extension B munie d'un isomorphisme de liens $b: L \xrightarrow{\sim} L(B/X)$, et un L-morphisme de L-extensions est un morphisme de X-topos $m: B \to B'$ tel que $L(m/X)$ soit l'identité de L. C'est toujours une équivalence, car un morphisme de gerbes qui induit un isomorphisme de liens est une équivalence, et on reconstruit $m: B \to B'$ à partir de l'équivalence de gerbes $\mathsf{G}(m): \mathsf{G}(B) \to \mathsf{G}(B')$ qui lui est attachée. On dira donc *L-équivalence* pour L-morphisme.

Théorème 6.2.5. Soit L un U-lien sur un U-topos X. On a une bijection entre l'ensemble $H^2(X, L)$ et l'ensemble des classes à L-équivalence près de L-extensions de X. Pour que la classe de la L-extension B soit neutre il faut et il suffit que B soit triviale, c'est à dire admette une section. Si $L = \mathsf{lien}(G)$, où G est un groupe de X, pour que la classe d'une L-extension B soit la classe unité (IV 3.1.3) il faut et il suffit que B soit L-équivalente à $B_G(X)$.

Il n'y a plus rien à démontrer: la classe de la L-extension B est celle de la gerbe $\mathrm{MOR}_X(X, B)$.

Corollaire 6.2.6. Soit A un groupe commutatif d'un U-topos X. On a une bijection entre l'ensemble sous-jacent au groupe $H^2(X, A)$ défini en algèbre homologique, et l'ensemble des classes à A-équivalence près d'extensions $\tau: B \to X$ de X munies d'un isomorphisme de groupes $b: A \xrightarrow{\sim} \tau_*(A(B/X))$.

On utilise d'abord (IV 3.4.2) qui interprète $H^2(X, A)$ en termes de gerbes, puis le théorème précédent, en tenant compte de (6.2.2) qui nous donne ici une description agréable du lien de B. Nous laissons au lecteur le soin d'expliciter la loi de groupe de $H^2(X, A)$ sachant qu'elle s'exprime en utilisant uniquement la fonctorialité de $H^2(X, A)$ par rapport à A, cf. (IV 3.3.2.1).

Explicitons cette fonctorialité.

Proposition 6.2.7. *(Fonctorialité.)* Soit $u: F \to G$ un morphisme de groupes abéliens de X et soit B (resp. B') une F-extension (resp. G-extension) du topos X. Pour que la classe de B' soit l'image de celle de B par le morphisme

$$H^2(X, u): H^2(X, F) \to H^2(X, G),$$

il faut et il suffit qu'il existe un X-morphisme de topos $m: B \to B'$ tel que le morphisme $A(m/X)$ de (6.2.4) s'identifie à $\tau^*(u): \tau^*(F) \to \tau^*(G)$ grâce aux isomorphismes $F \xrightarrow{\sim} \tau_*(A(B/X))$ et $G \xrightarrow{\sim} \tau'_*(A(B/X))$.

En effet, d'après (IV 3.1.4, 3.1.8), la condition de l'énoncé signifie qu'il existe un morphisme de gerbes $\mathrm{MOR}_X(X, B)^0 \to \mathrm{MOR}_X(X, B')^0$ lié par $u\colon F \to G$.

Proposition 6.2.8. Soient $f\colon X' \to X$ un morphisme de U-topos et B une extension du topos X de lien L. Le produit fibré de topos $B \times_X X'$ (0 5), aussi noté

$$f^*(B/X) \quad \text{ou} \quad f^*(B) \tag{1}$$

existe et est une extension de X' de lien $f^*(L)$, dont la classe est l'image de celle de B par l'application

$$H^2(f, L)\colon\ H^2(X, L) \to H^2\big(X', f^*(L)\big) \tag{2}$$

de (V 1.5.2).

D'après (5.2.2), le produit fibré existe, c'est une extension de X' et d'après (5.2.4), la gerbe qui lui est associée est l'image inverse de celle attachée à B. D'où la conclusion par (V 1.5.2). On rappelle que si $L = \mathrm{lien}(A)$ est défini par un groupe abélien A de X, l'application (2) est celle que l'on définit en algèbre homologique (V 1.5.3).

Proposition 6.2.9. Soit

$$1 \to F \xrightarrow{u} G \xrightarrow{v} H \to 1 \tag{1}$$

une suite exacte de groupes d'un U-topos X et soit P un H-torseur, correspondant par la propriété universelle du classifiant B_H à un X-morphisme $\omega_P\colon X \to B_H$. On a un carré 2-cartésien de topos

$$\begin{array}{ccc} B_{K(P)} & \xrightarrow{\pi} & B_G \\ {\scriptstyle \tau_{K(P)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle B_v} \\ X & \xrightarrow[\omega_P]{} & B_H \end{array} \tag{2}$$

où $K(P)$ est la gerbe des relèvements à G du H-torseur P (IV 4.2.7.2).

6.2.9.1. Soient $T(G)$ et $T(H)$ les gerbes de torseurs sous G et H. On a des morphismes de gerbes

$$K(P) \xrightarrow{k(P)} T(G) \xrightarrow{T(v)} T(H) \tag{3}$$

et un isomorphisme

$$\kappa(P)\colon\ T(v) \cdot k(P) \xrightarrow{\sim} P_0, \tag{4}$$

où $P_0\colon K(P) \to T(H)$ est le composé de la projection $K(P) \to X$ et de la section de $T(H)$ définie par P. Par les propriétés universelles des X-topos $B_{K(P)}$, B_G et B_H, les foncteurs $k(P)$, $T(v)$ et P_0 définissent des X-morphismes π, B_v et ω_P et l'isomorphisme (4) définit un isomorphisme de morphismes de X-topos qui rend commutatif le carré (2). De plus, la formation

de la gerbe $K(P)$ commute aux changements de topos $f: X' \to X$. Le carré (2) est donc 2-cartésien, car une section de $K(P)$ sur X s'interprète comme une section s de $T(G)$ munie d'un isomorphisme $T(v) \cdot s \to P_0$ et l'on conclut par la propriété universelle des X-topos en jeu.

Proposition 6.2.10. (Cobord.) Soit

$$1 \to F \xrightarrow{u} G \xrightarrow{v} H \to 1 \tag{1}$$

une suite exacte de groupes d'un U-topos X et soit F le lien sur $B_H(X)$ correspondant par (6.1.2) au couple $(\mathsf{lien}(F), \varphi)$, où

$$\varphi: H \to \mathsf{Aut}(\mathsf{lien}(F)) = \mathsf{Out}(F), \tag{2}$$

est le morphisme induit par les automorphismes intérieurs de G.

(i) L'extension $B_v: B_G \to B_H$ du topos B_H (5.3.3) a pour lien F et définit donc une classe

$$\delta \in H^2(B_H, \mathsf{F}). \tag{3}$$

(ii) Pour tout H-torseur P, l'obstruction

$$d(P) \in H^2(X, L(P)), \quad \text{(IV 2.5.8)}, \tag{4}$$

à relever P en un G-torseur est l'image inverse de δ par le morphisme de topos $\omega_P: X \to B_H$ correspondant à P par la propriété universelle du classifiant B_H.

Par définition, $d(P)$ est la classe de $\kappa(P)$, donc (ii) résulte de (6.2.9) et de (6.2.8). Pour prouver (i), il suffit, d'après (6.2.1), de trouver un isomorphisme de liens sur B_H:

$$B_v^*(\mathsf{F}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{lien}(A(B_G/B_H)). \tag{5}$$

Or $B_v^*(\mathsf{F})$ est, d'après (6.1.5), le lien sur B_G correspondant au lien $\mathsf{lien}(F)$ sur X muni du morphisme $\varphi v: G \to \mathsf{Out}(F)$. Ce lien est représenté par le groupe

$$F^{(G)} \tag{6}$$

de B_G obtenu en faisant opérer G par automorphismes intérieurs sur le groupe F de X. Il reste à trouver un isomorphisme de groupes de B_G

$$F^{(G)} \xrightarrow{\sim} A(B_G/B_H). \tag{7}$$

Or on a une suite exacte de groupes de B_G:

$$1 \to \mathsf{Aut}_{B_H}(\mathrm{id}_{B_G}) \to \mathsf{Aut}_X(\mathrm{id}_{B_G}) \to \mathsf{Aut}_X(B_v) \tag{8}$$

qui, par la propriété universelle des classifiants B_G et B_H et par définition de $A(B_G/B_H)$ s'écrit

$$1 \to A(B_G/B_H) \to G^{\mathrm{int}} \xrightarrow{v} B_v^*(H^{\mathrm{int}}) \to 1, \tag{9}$$

où l'on a rajouté un 1 à droite pour rappeler que v est un épimorphisme. D'où l'isomorphisme (7).

6.2.11. En résumé, la classe δ joue le rôle d'une classe universelle donnant par «pull-back» l'obstruction à relever P. On notera d'ailleurs que la classe δ elle-même est l'obstruction à relever le H^{τ}-torseur canonique E_H de B_H en un G^{τ}-torseur. En effet, δ est la classe de la gerbe $\mathrm{MOR}_{B_H}(B_H, B_G)^0$ et, puisque le morphisme identique de B_H correspond au torseur canonique, cette gerbe est équivalente à la gerbe des relèvements du H^{τ}-torseur E_H.

§ 7. Extensions de groupes dans un topos

Nous donnons ici un analogue non commutatif de la suite exacte pour les extensions de groupes à noyau abélien. Celle-ci étant bien connue [cf. par exemple l'exposé 9 du Séminaire Heidelberg-Strasbourg, Groupes algébriques linéaires, cité [GAL]], nous nous contentons de l'établir rapidement dans (7.1) pour qu'elle serve de guide aux calculs de (7.3). Quant à ceux-ci, on peut deviner d'après ce qui précède qu'ils reposent sur le fait qu'à une extension de groupes

$$1 \to F \xrightarrow{u} G \xrightarrow{v} H \to 1 \qquad (*)$$

d'un topos X on associe la classe $c \in H^2(B_H, \mathsf{F})$ de l'extension $B_v : B_G \to B_H$ du topos B_H, cf. (6.2.10) et 7.3. On verra que la neutralité de celle-ci est nécessaire et suffisante pour qu'il existe un F-torseur P sur X tel que l'extension obtenue en tordant $(*)$ par P soit un produit semi-direct. Par la propriété universelle des classifiants B_G et B_H, cette condition signifie également que le foncteur extension du groupe structural

$$\mathsf{Tors}(X, G) \to \mathsf{Tors}(X, H), \qquad P \rightsquigarrow P \overset{G}{\wedge} H,$$

admet une section, ce qui implique que tout H-torseur se relève en un G-torseur.

7.1. Une suite exacte pour les extensions de groupes à noyau abélien

Pour la plupart des démonstrations, nous renvoyons à [GAL].

Proposition 7.1.1. Soit H un groupe d'un U-topos X. Il existe un anneau $\mathscr{Z}[H]$ de X et un morphisme

$$\eta : H \to \mathscr{Z}[H] \qquad (1)$$

qui représentent le foncteur qui, à toute Algèbre A de X, associe l'ensemble des morphismes $f: H \to A$ entre les objets de X sous-jacents qui vérifient

$$f(g\,g') = f(g)f(g') \quad \text{et} \quad f(1) = 1. \tag{2}$$

On dit que $\mathscr{Z}[H]$ est *l'Algèbre du groupe* H; c'est en effet une $\mathscr{Z}$-Algèbre, où $\mathscr{Z}$ désigne, par abus de notations, l'Anneau de X qui représente le faisceau associé au préfaisceau constant $\mathscr{Z}$. Par la propriété universelle de $\mathscr{Z}[H]$, on a un morphisme appelé *augmentation*

$$\varepsilon: \mathscr{Z}[H] \to \mathscr{Z} \tag{3}$$

tel que $\varepsilon\eta: H \to \mathscr{Z}$ soit le morphisme constant défini par 1. On définit un Idéal $I[H]$, appelé *Idéal d'augmentation* par l'exactitude de la suite de $\mathscr{Z}[H]$-Modules

$$0 \to I[H] \xrightarrow{\iota} \mathscr{Z}[H] \xrightarrow{\varepsilon} \mathscr{Z} \to 0. \tag{4}$$

Par définition de $\mathscr{Z}[H]$, on a un isomorphisme

$$(\mathscr{Z}[H]\text{-Mod}) \xrightarrow{\sim} (B_H)^{a\,b} \tag{5}$$

entre la catégorie des $\mathscr{Z}[H]$-Modules de X et celle des groupes abéliens de X sur lesquels H opère, laquelle s'interprète comme la catégorie $(B_H)^{a\,b}$ des groupes abéliens du topos $B_H(X)$ des H-objets de X. Un objet de l'une des catégories de (5) s'appelle un *H-Module*. Pour tout H-Module A, on note

$$\text{Crois}(H, A) \tag{6}$$

l'ensemble des morphismes $f: H \to A$ entre les objets de X sous-jacents à H et A qui vérifient

$$f(g\,g') = f(g) + g \cdot f(g'); \tag{7}$$

un tel f s'appelle un *morphisme croisé* de H dans A. Le morphisme croisé

$$\kappa: H \to I[H], \qquad \kappa(g) = g - e, \tag{8}$$

où e est la section unité de H, induit pour tout H-module A un isomorphisme

$$\text{Hom}_H(I[H], A) \xrightarrow{\sim} \text{Crois}(H, A), \qquad f \mapsto f\kappa. \tag{9}$$

7.1.2. Soit H un groupe d'un U-topos X et A un H-module. On note $\text{Ext}(H, A)$ l'ensemble des classes d'équivalence de suites exactes de groupes de X

$$1 \to A^{\omega} \to E \to H \to 1, \tag{1}$$

où A^{ω} désigne le groupe abélien de X sous-jacent à A, telles que les opérations de H sur A^{ω} définies par les automorphismes intérieurs de E

soient celles définies par A. La relation d'équivalence est définie comme dans le cas des extensions de groupes ordinaires et l'on munit $\mathrm{Ext}(H, A)$ d'une loi de groupe abélien par le procédé de Baer. D'après [GAL], on obtient un isomorphisme de groupes abéliens

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{X}[H]}(I[H], A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}(H, A) \tag{2}$$

en associant à la classe d'une extension de H-Modules

$$0 \to A \to E \to I[H] \to 0 \tag{3}$$

le morphisme évident entre les produits semi-directs:

$$m\colon\ E \cdot H \to I[H] \cdot H \tag{4}$$

puis le morphisme $n\colon B \to H$ qui se déduit de m par le changement de base $q\colon H \to I[H] \cdot H$, $q(h) = (h - e, h)$.

Proposition 7.1.3. Soit H un groupe d'un U-topos X. On a un isomorphisme canonique de δ-foncteurs définis sur $(B_H)^{a\,b}$ à valeurs dans $(\mathsf{U} - a\,b)$

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{X}[H]}(\mathscr{Z}, A) \xrightarrow{\sim} H^i(B_H, A), \quad i \geqq 0. \tag{1}$$

Ce sont tous deux des δ-foncteurs exacts et universels [17] 2.2. Il suffit donc de trouver un isomorphisme en degré zéro qui sera

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{X}[H]}(\mathscr{Z}, A) \xrightarrow{\sim} H^0(B_H, A), \quad f \mapsto f(1). \tag{2}$$

Un élément de la source de (2) est un morphisme de H-Modules $f\colon \mathscr{Z} \to A$; il est donc connu lorsque l'on connaît $f(1)$ qui est une section de A^ω invariante par H, car H opère trivialement sur $\mathscr{Z}$, donc une section de l'objet A de B_H. Il est immédiat que l'on obtient ainsi une bijection.

Proposition 7.1.4. Soit H un groupe d'un U-topos X et soit

$$\omega^*\colon\ (B_H)^{a\,b} \to X^{a\,b} \quad \text{(ou encore } A \rightsquigarrow A^\omega) \tag{1}$$

le foncteur «oubli des opérations de H», induit par le morphisme de topos

$$\omega_H\colon\ X \to B_H(X). \tag{2}$$

(i) On a un isomorphisme de δ-foncteurs

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{X}[H]}(\mathscr{Z}[H], A) \xrightarrow{\sim} H^i(X, A^\omega). \tag{3}$$

(ii) Par les isomorphismes (3) et (7.1.3 (1)), le morphisme de δ-foncteurs

$$\varepsilon^{(i)}\colon\ \mathrm{Ext}^i_{\mathscr{X}[H]}(\mathscr{Z}, A) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathscr{X}[H]}(\mathscr{Z}[H], A), \quad i \geqq 0, \tag{4}$$

induit par l'augmentation $\varepsilon\colon \mathscr{X}[H] \to \mathscr{X}$ s'identifie au morphisme

$$\omega^{(i)}\colon\ H^i(B_H, A) \to H^i(X, A^\omega), \qquad i \geqq 0, \tag{5}$$

induit par le morphisme de topos $\omega\colon X \to B_H$.

Puisque le foncteur ω^* est exact, le δ-foncteur $H^*(X, A^\omega)$ est exact. Montrons qu'il est effaçable, ce qui prouvera qu'il est universel. Il suffit pour cela de prouver que ω^* transforme injectifs en injectifs et pour cela il suffit de noter que le foncteur extension des scalaires suivant $\mathscr{X} \to \mathscr{X}[H]$,

$$\omega_!\colon\ X^{ab} \to (B_H)^{ab}, \qquad \omega_!(B) = \mathscr{X}[H] \otimes_{\mathscr{X}} B, \tag{6}$$

est un adjoint à gauche de ω^* et est exact. Les deux δ-foncteurs de (3) étant universels, on prouve (i) en définissant un isomorphisme en degré zéro, ce qui est immédiat: on associe à un H-morphisme $f\colon \mathscr{X}[H] \to A$ sa valeur sur l'élément unité de l'Anneau $\mathscr{X}[H]$. Il suffit maintenant de vérifier la seconde assertion en degré 0, ce qui revient à noter que $\varepsilon^{(0)}$ est l'application naturelle

$$H^0(X, A^G) \to H^0(X, A). \tag{7}$$

7.1.5. La suite exacte des Ext attachée à la suite exacte de $\mathscr{X}[H]$-Modules (7.1.1 (4)) s'écrit, grâce aux trois propositions précédentes:

$$0 \to H^0(B_H, A) \xrightarrow{\omega^{(0)}} H^0(X, A^\omega) \xrightarrow{\iota^{(0)}} \mathrm{Crois}(H, A) \xrightarrow{d^{(1)}}$$

$$\to H^1(B_H, A) \xrightarrow{\omega^{(1)}} H^1(X, A^\omega) \xrightarrow{\iota^{(1)}} \mathrm{Ext}(H, A) \xrightarrow{d^{(2)}}$$

$$\to H^2(B_H, A) \xrightarrow{\omega^{(2)}} H^2(X, A^\omega) \xrightarrow{\iota^{(2)}} \mathrm{Ext}^2_{\mathscr{X}[H]}(I[H], A) \ldots$$

Il reste à expliciter, sans utiliser la théorie des $\mathrm{Ext}_{\mathscr{X}[H]}(\cdot, \cdot)$, les morphismes $\iota^{(0)}$ et $\iota^{(1)}$ attachés au morphisme $\iota\colon I[H] \to \mathscr{X}[H]$, et les opérateurs cobord $d^{(1)}$ et $d^{(2)}$. Tout d'abord, on a facilement

$$\iota^{(0)}(a)(h) = h \cdot a - a, \tag{1}$$

et, d'après [GAL, exp. 9, prop. 3.3], on sait que $\iota^{(1)}$ s'obtient en associant à la classe d'un A^ω-torseur P sur X l'extension de H par A obtenue de la manière suivante. On considère le produit semi-direct

$$1 \to A^\omega \to A \cdot H \to H \to 1 \tag{2}$$

défini à l'aide des opérations de H sur A^ω. Par automorphismes intérieurs, le Groupe A opère sur chacun des Groupes figurant dans (2), les morphismes étant compatibles avec ces opérations. Les opérations de A^ω sur lui-même et sur H sont triviales; *en tordant par P la suite exacte* (2), on trouve donc une extension de H par A^ω et l'on vérifie que les opérations de H sur A^ω qu'elle définit sont celles de A. C'est *l'image par* $\iota^{(1)}$ *de la classe de P.*

Soit maintenant $u: H \to A$ un morphisme croisé. Son *image par* $d^{(1)}$ *est la classe du A-torseur P* de B_H obtenu en faisant opérer H sur le A^ω-torseur trivial $(A^\omega)_d$ de X par la formule $(h, a) \mapsto u(h)\, h(a)$. La démonstration est laissée au lecteur. On notera que l'exactitude en $H^1(B_H, A)$ de la suite ci-dessus fournit ainsi l'interprétation habituelle en termes de cocycles «galoisiens» de la catégorie des A-torseurs P de B_H tels que P^ω soit trivial. Enfin, on démontre que *l'image par* $d^{(2)}$ *de la classe d'une extension*

$$1 \to A \to E \xrightarrow{v} H \to 1$$

est celle de l'extension $B_v: B_E \to B_H$ du topos B_H.

7.2. Extensions d'un groupe H et extensions du topos B_H

Dans tout ce numéro, nous fixons un U-topos X et un Groupe H de X.

7.2.1. Nous avons vu qu'à toute suite exacte

$$1 \to F \xrightarrow{u} G \xrightarrow{v} H \to 1 \qquad (\varepsilon)$$

de groupes de X, on associe une extension $B_v: B_G \to B_H$ du topos B_H (5.3.3) et un B_H-morphisme de topos $\omega_G: X \to B_G$, où X est considéré comme un B_H-topos grâce au morphisme $\omega_H: X \to B_H$. *On peut d'ailleurs reconstituer la suite exacte* (ε) *grâce à l'extension* B_G/B_H *et au morphisme* ω_G. En effet, par les propriétés universelles des topos B_G et B_H, on a des isomorphismes $G^0 \simeq \mathbf{Aut}_X(\omega_G)$ et $H^0 \simeq \mathrm{Aut}_X(\omega_H)$ qui identifient $v: G \to H$ au morphisme $\mathbf{Aut}_X(\omega_G)^0 \to \mathbf{Aut}_X(\omega_H)^0$ induit par $B_v: B_G \to B_H$.

Inversement, étant donnés une extension $\tau: B \to B_H$ du topos B_H et un B_H-morphisme $\sigma: X \to B$, on a une suite de morphismes de groupes de X

$$1 \to F \xrightarrow{u} G \xrightarrow{v} H \qquad (1)$$

où F est défini comme le noyau de v et où v est le morphisme $\mathbf{Aut}_X(\sigma)^0 \to \mathbf{Aut}_X(\omega_H)^0$ induit par $\tau: B \to B_H$. Or le 2-produit fibré $B' = B \times_{B_H} X$ est une extension de X (5.2.2) et σ définit une section $\sigma': X \to B'$ de B'/X. Par la propriété universelle de B', on a un isomorphisme $F \simeq \mathrm{Aut}_X(\sigma')^0$,

et par suite, une X-équivalence $B' \approx B_F$. En résumé, le couple (B, σ) donne naissance à un carré 2-cartésien de topos

$$\begin{array}{ccc} B_F & \xrightarrow{i} & B \\ {\scriptstyle \tau_F}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau} \\ X & \xrightarrow[\omega_H]{} & B_H \end{array}$$

tel que $i\,\omega_F$ soit isomorphe à σ.

Proposition 7.2.2. Soient $\tau\colon B \to B_H$ une extension du topos B_H et soit $\sigma\colon X \to B$ un B_H-morphisme.

(i) Le morphisme $\mathbf{Aut}_X(\sigma) \xrightarrow{v} \mathbf{Aut}_X(\omega_H)$ est un épimorphisme.

(ii) Posant $G = \mathbf{Aut}_X(\sigma)^0$, on a une B_H-équivalence $r\colon B_G \to B$ et un isomorphisme de B_H-morphisme de topos $r\,\omega_G \simeq \sigma$.

Autrement dit, *le couple* (B, σ) *détermine une extension du groupe* H *qui permet de reconstituer* (B, σ).

Prouvons que le morphisme $v\colon G \to H$ est un épimorphisme. Les constructions ci-dessus étant stables par localisation sur X, il suffira de prouver que toute section $h \in H^0(X, H)$ provient localement d'une section de G, ou encore que $v^{-1}(h)$, qui est un pseudo-torseur sous F car la suite (7.2.1 (1)) est exacte, est en fait un torseur. Or la section h de H détermine un morphisme de B_H-topos

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\omega_H} & B_H \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_X}\downarrow & \overset{h}{\searrow} & \nearrow \\ X & & \end{array}$$

qui, puisque X s'interprète comme B_{H/E_H}, s'interprète comme le morphisme de B_H-topos

$$B_{H/\eta}\colon\ B_{H/E_H} \to B_{H/E_H}$$

attaché à la flèche $\eta\colon E_H \to E_H$ définie par la translation à droite par h. Par définition de $v\colon G \to H$ comme le morphisme induit par $\tau\colon B \to B_H$, et par définition de la gerbe $\mathrm{MOR}_{B_H}(B_H, B)$, on a donc un isomorphisme

$$v^{-1}(h) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Isom}_\eta(i\,\omega_F, i\,\omega_F),$$

où le second désigne le faisceau (sur X ou sur B_{H/E_H}, au choix) des isomorphismes entre les objets $i\,\omega_F$ et $i\,\omega_F$ de la gerbe $\mathrm{MOR}_{B_H}(B_H, B)$ qui se projettent sur la flèche η. Par définition d'une gerbe, ce faisceau est

un torseur sous $\mathbf{Aut}_{\omega_H}(i\,\omega_F)$, ce qui prouve que $v^{-1}(h)$ est un torseur; donc v est un épimorphisme, ce qui prouve (i).

Nous allons maintenant décrire un B_H-morphisme

$$r\colon\ B_G \to B.$$

Son foncteur image inverse est simplement

$$r^*\colon\ B \to B_G,$$

où, pour tout $b \in \mathrm{Ob}(B)$, $r^*(b)$ est l'objet de B_G obtenu en munissant l'objet $(i\,\omega_F)^*(b)$ de X des opérations naturelles de $G = \mathbf{Aut}_X(i\,\omega_F)^0$. Pour voir que r^* est un foncteur image inverse, il suffit prouver que le composé $\omega_G^* \cdot r^*$ en est un; or, par construction, ce dernier est égal à $(i \cdot \omega_F)^*$. Puisque le morphisme $v\colon G \to H$ est le morphisme

$$\mathbf{Aut}_X(i\,\omega_F)^0 \to \mathbf{Aut}_X(\omega_H)^0$$

induit par τ, il est clair que τr est isomorphe à $B_v\colon B_G \to B_H$, et donc que r est un B_H-morphisme. Par ailleurs, puisque $v\colon G \to H$ est un épimorphisme, $B_v\colon B_G \to B_H$ est une extension de B_H; pour prouver que r est une équivalence, il suffit de prouver qu'il induit un isomorphisme sur les liens. Puisque le foncteur image inverse de liens attaché à $\omega_H\colon X \to B_H$ est conservatif, il suffit de prouver que l'image inverse par ω_H du morphisme de liens qui lie r est un isomorphisme. Cette image inverse est le morphisme qui lie le morphisme de X-topos $r'\colon B_F \to B_F$ qui se déduit de $r\colon B_G \to B$ par le changement de base ω_H. Or il est immédiat que r' est isomorphe à l'identité de B_F. Nous avons donc trouvé une B_H-équivalence $r\colon B_G \to B$ et prouvé (7.2.2).

Corollaire 7.2.3. Soient X un U-topos, $\theta\colon B' \to X$ une extension de X et $\tau\colon B \to B'$ une extension de B; alors le composé $\theta\tau\colon B \to X$ fait de B une extension de X.

D'après (5.3.1), on peut localiser sur X. On peut donc supposer que $\theta\colon B' \to X$ est triviale, donc de la forme $\tau_H\colon B_H \to X$ où H est un groupe de X. Si, de plus, l'image inverse par $\omega_H\colon X \to B_H$ de l'extension $\tau\colon B \to B_H$ est triviale, nous venons de voir que B est X-équivalente à B_G où G est un groupe de X, donc est une extension de X. Si (X_i) est une famille d'objets de X qui trivialise l'extension $\omega_H^*(B/B_H)$, le morphisme composé $B_i \xrightarrow{\tau_i} B_{H_i} \xrightarrow{\theta_i} X_{/X_i}$, qui se déduit de $\tau_H\tau$ par le changement de base $X_{/X_i} \to X$, admettra une section et l'hypothèse supplémentaire sera vérifiée, d'où la conclusion.

Corollaire 7.2.4. Soit $v\colon G \to H$ un morphisme de groupes d'un U-topos X. Pour que $B_v\colon B_G \to B_H$ soit une extension du topos B_H il

faut et il suffit que v soit un épimorphisme. Soit $\mathsf{v}\colon \mathsf{G} \to \mathsf{H}$ un morphisme de gerbes sur X. Pour que $B_{\mathsf{v}}\colon B_{\mathsf{G}} \to B_{\mathsf{H}}$ soit une extension du topos B_{H} il faut et il suffit que v soit lié par un épimorphisme de liens, c'est-à-dire soit localement surjectif sur les objets et sur les flèches.

La seconde assertion résulte de la première car en localisant sur X, on peut supposer que v est le foncteur extension du groupe structural

$$\mathrm{TORS}(X, G) \to \mathrm{TORS}(X, H)$$

attaché à un morphisme convenable $v\colon G \to H$ de groupes de X. Si $v\colon G \to H$ est un épimorphisme, B_G est une extension de B_H d'après (5.3.3). Inversement, si B_G est une extension de B_H, le morphisme v est un épimorphisme d'après (7.2.2).

Pour terminer, notons que les couples (B, s), où B est une extension du topos B_H et où $s\colon X \to B$ est un B_H-morphisme forment naturellement une 2-catégorie dont les objets de $\mathsf{Hom}\big((B, s), (B', s')\big)$ sont les B_H-morphismes $t\colon B \to B'$ munis d'un isomorphisme de B_H-morphismes $i\colon t\, s \to s'$. En fait cette 2-catégorie «est» une catégorie, autrement dit, étant donnés deux éléments (t, i) et (t', i') de $\mathsf{Hom}\big((B, s), (B', s')\big)$, l'ensemble $I = \mathrm{Hom}\big((t, i), (t', i')\big)$ est réduit à un seul élément qui est nécessairement un isomorphisme. En effet, un élément de I est un B_H-isomorphisme $u\colon t \xrightarrow{\sim} t'$ tel que $i' \cdot (u * s) = i$; or cette relation détermine $u * s$, donc aussi u, car le foncteur image inverse s^* est fidèle et conservatif puisqu'il s'interprète comme le foncteur $\omega_G\colon B_G \to X$, [oubli des opérations de G], pour un groupe G convenable (7.2.2).

Théorème 7.2.5. La catégorie dont les objets sont les épimorphismes de Groupes $v\colon G \to H$ de but H est équivalente à la catégorie dont les objets sont les couples (B, s), où B est une extension du topos B_H et $s\colon X \to B$ un B_H-morphisme de topos.

Il est clair qu'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{a} & G' \\ & {\scriptstyle v}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle v'} & \\ & H & \end{array}$$

de groupes de X détermine un morphisme $(B_a, \mathrm{id}_{\omega_{G'}})\colon (B_G, \omega_G) \to (B_{G'}, \omega_{G'})$. Compte tenu de (7.2.2) et des remarques qui précèdent l'énoncé, il reste à prouver que, étant donnés deux épimorphismes $G \xrightarrow{v} H \xleftarrow{v'} G'$, un B_H-morphisme de topos $t\colon B_G \to B_{G'}$ et un isomorphisme de B_H-topos $i\colon t\, \omega_G \xrightarrow{\sim} \omega_{G'}$, il existe un H-morphisme de groupes $a\colon G \to G'$ et un isomorphisme de B_H-morphismes $j\colon B_a \xrightarrow{\sim} t$ tels que $i \cdot (j * \omega_G) = \mathrm{id}_{\omega_{G'}}$. Par les propriétés universelles de B_G, $B_{G'}$ et B_H, le B_H-morphisme

t s'interprète comme un G'-torseur Q de B_G muni d'un G-G'-morphisme $p: Q \to H$, où G et G' opèrent respectivement sur H par v et les translations à gauche et par v' et les translations à droite. L'isomorphisme i s'interprète comme une trivialisation du G'-torseur Q qui permet de définir sa structure de G-objet à gauche à l'aide d'un morphisme de groupes $a: G \to G'$. Enfin, la condition que i soit un B_H-morphisme signifie que l'image par $p: Q \to H$ de la section marquée de Q est la section unité de H, ce qui implique que le composé $v'a$ est égal à v. On a donc trouvé un H-morphisme $a: G \to G'$ et la conclusion en résulte immédiatement.

7.3. Extensions d'un groupe H par un lien F sur B_H

Dans tout ce numéro, nous fixons un U-topos X et un groupe H de X.

7.3.1. A une suite exacte

$$1 \to F \to G \to H \to 1 \qquad (\varepsilon)$$

de groupes de X on associe le lien sur $B_H(X)$, noté

$$\mathsf{F}(\varepsilon), \qquad (1)$$

qui correspond par (6.1.2) au lien $\mathsf{lien}(F)$ sur X muni du morphisme

$$\varphi(\varepsilon): H \to \mathsf{Out}(F) \qquad (2)$$

induit par les automorphismes intérieurs de G. Etant donné un lien F sur B_H, on appelle *extension de H par F* une suite exacte telle que (ε) munie d'un isomorphisme de liens sur B_H

$$\mathsf{F}(\varepsilon) \xrightarrow{\sim} \mathsf{F}. \qquad (3)$$

Un isomorphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & F & \to & G & \to & H & \to & 1 \quad (\varepsilon) \\ & & \downarrow{\scriptstyle a} & & \downarrow{\scriptstyle b} & & \| & & \\ 1 & \to & F' & \to & G' & \to & H & \to & 1 \quad (\varepsilon') \end{array} \qquad (4)$$

induit un isomorphisme de liens sur B_H

$$\mathsf{F}(\varepsilon) \xrightarrow{\sim} \mathsf{F}(\varepsilon'), \qquad (5)$$

caractérisé d'après (6.1.2) par la condition que son image inverse par $\omega_H: X \to B_H$ soit $\mathsf{lien}(a)$; en effet, $\mathsf{lien}(a)$ est compatible avec les opérations de H sur $\mathsf{lien}(F)$ et $\mathsf{lien}(F')$. *Un isomorphisme d'extensions de H*

par un lien F *sur* B_H sera un isomorphisme tel que (4) sur les suites exactes sous-jacentes tel que (5) s'identifie au morphisme identique de F. On prendra garde que, si $F=F'$ et si $\mathsf{F}=\mathsf{F}(\varepsilon)=\mathsf{F}(\varepsilon')$, la condition ci-dessus signifie que a est *un automorphisme intérieur de* F, et non pas l'identité de F. Mais *localement*, il existe une section f de F telle que $a=\mathrm{Int}(f)$ et, en composant avec (4) l'automorphisme intérieur de G définit par f^{-1}, on trouve une section du faisceau I des isomorphismes entre (ε) et (ε') qui induisent l'identité sur F et H. Par suite I est un torseur sous le Groupe A des automorphismes de G qui induisent l'identité sur F et H; autrement dit, étant donné un isomorphisme (4) tel que $F=F'$ et $\mathsf{F}(\varepsilon)=\mathsf{F}(\varepsilon')$, *l'obstruction à l'existence d'un isomorphisme induisant l'identité sur* F *et* H *est une classe* $c\in H^1(X, A)$. Pour conclure sur ce point, notons que l'on a une bijection entre A et l'ensemble des homomorphismes croisés $r: G\to F$ dont la restriction à F est le morphisme unité, obtenue en attachant à un $a\in A$ le morphisme défini par $r(g)=a(g)\,g^{-1}$.

Définition 7.3.2. Soit F un lien sur B_H. On note

$$\mathrm{Ext}(H, \mathsf{F}) \tag{1}$$

l'ensemble des classes à isomorphisme près d'extensions de H par F. On dit qu'une classe est *neutre* si l'extension correspondante admet une section.

7.3.2.1. Une condition évidemment nécessaire pour que $\mathrm{Ext}(H, \mathsf{F})$ soit *non vide* est que l'image inverse $\omega_H^*(\mathsf{F})=\mathsf{F}^\omega$ de F par le morphisme de topos $\omega_H: X\to B_H$ soit *représentable* (par un groupe de X (IV 1.2.1)), autrement dit que F soit le lien obtenu en munissant un groupe F de X d'un morphisme de groupes $H\to \mathsf{Out}(F)$, (6.1.2). En effet, étant donnée une extension (ε), le groupe F de X est un représentant de $\omega_H^*(\mathsf{F})$. Cette condition n'est pas suffisante. Ainsi, lorsque $X=\mathsf{U}$-ens, elle est toujours satisfaite mais, d'après Eilenberg et Mac-Lane, il existe une classe $c\in H^3(B_H, C)$, où C est le centre de F, dont la nullité est nécessaire et suffisante pour que (1) soit non vide et, de plus, toute classe $c\in H^3(B_H, C)$ s'obtient ainsi.

7.3.2.2. Si F est le lien sur B_H représenté par *un groupe* F^* *de* B_H (c'est-à-dire un groupe F de X muni d'opérations de H), on a dans $\mathrm{Ext}(H, \mathsf{F})$ une classe privilégiée appelée *classe unité*, qui est celle du produit croisé, lequel est le groupe de X

$$G=F\cdot H \tag{2}$$

obtenu en munissant l'objet $F\times H$ de X de la loi

$$(f, h)(f', h')=(f\cdot {}^h f', h\,h'). \tag{3}$$

Cette classe unité est évidemment neutre. On note alors

$$\mathrm{Ext}(H, F^*) \tag{4}$$

l'ensemble pointé obtenu en munissant $\mathrm{Ext}(H, \mathsf{F})$ de sa classe unité. On peut alors définir une suite exacte à huit termes analogue à celle de (7.1.5), (cf. (7.3.7)). Si l'on ne suppose plus que le lien F soit représentable, les termes $H^i(B_H, F^*)$, $i=0, 1$, de cette suite n'ont plus de sens; mais, pour $i=2$ ils en ont un et l'on a encore une suite exacte formée des trois termes de plus haut degré de la suite (7.3.7), cf. (7.3.4), (7.3.5) et (7.3.6). Enfin, si l'on part d'une extension non nécessairement triviale, on a une suite exacte à quatre termes obtenue en accolant (7.3.4.1 (1)) et (7.3.3 (1)).

7.3.3. Soit à nouveau F un lien sur B_H et soit F^ω son image inverse par $\omega_H: X \to B_H$. On a des applications

$$\mathrm{Ext}(H, \mathsf{F}) \xrightarrow{d} H^2(B_H, \mathsf{F}) \xrightarrow{\omega^{(2)}} H^2(X, \mathsf{F}^\omega), \tag{1}$$

où $\omega^{(2)}$ est induite par le morphismc de topos ω_H, et où d associe à la classe d'une extension (ε, φ)

$$1 \to F \to G \xrightarrow{v} H \to 1, \tag{ε}$$

$\varphi: \mathsf{F}(\varepsilon) \to \mathsf{F}$, la classe de l'extension $B_v: B_G \to B_H$ de B_H, qui, d'après (6.2.10 (i)), a pour lien $\mathsf{F}(\varepsilon)$, que l'on identifie à F grâce à φ. Nous devons vérifier que deux extensions isomorphes déterminent la même classe dans $H^2(B_H, \mathsf{F})$. Avec les notations de (7.3.1 (4)), on a un morphisme de B_H-topos

$$B_b: B_G \to B_{G'},$$

qui est une équivalence car b est un isomorphisme, et nous devons vérifier qu'il est lié par le morphisme identique de F. Or l'isomorphisme $a: F \to F'$ est compatible avec les opérations de G sur F définies par les automorphismes intérieurs et celles de G sur F' définies de même grâce à b. C'est donc un isomorphisme de groupes de B_G

$$A(B_G/B_H) \xrightarrow{\sim} B_b^*\big(A(B_{G'}/B_H)\big), \tag{4}$$

d'après le calcul de ces derniers (6.2.10 (7)). De plus, le morphisme (4) est le morphisme $A(B_b/B_H)$ induit par le morphisme de B_H-topos $B_b: B_G \to B_{G'}$. Puisque le couple (b, a) est un morphisme d'extensions de H par F, le morphisme $\mathsf{lien}(a)$ est le morphisme identique de F^ω, d'où il résulte par (6.2.4) que B_b est lié par l'identité de F. Le procédé ci-dessus définit donc bien une application d comme dans (7.3.3 (1)).

Etudions d'abord la relation d'équivalence définie par d dans $\mathrm{Ext}(H, \mathsf{F})$.

Proposition 7.3.4. Soit F un lien sur B_H et soit (ε, φ) une extension de H par F, notée

$$1 \to F \xrightarrow{u} G \xrightarrow{v} H \to 1, \qquad (\varepsilon)$$

$\varphi\colon \mathsf{F} \xrightarrow{\sim} \mathsf{F}(\varepsilon)$. Soit (ε', φ') une extension de H par F. Pour que l'image par $d\colon \mathrm{Ext}(H, \mathsf{F}) \to H^2(B_H, \mathsf{F})$ de la classe de (ε', φ') soit la même que celle de (ε, φ) il faut et il suffit qu'il existe un F-torseur P de X tel que (ε', φ') s'obtienne en tordant (ε, φ) par P.

7.3.4.1. Soit P un F-torseur de X. Par automorphismes intérieurs, F opère sur les groupes F, G et H et il opère trivialement sur H. En tordant par P chacun des termes de (ε), on obtient donc une suite exacte de groupes

$$1 \to {}^P F \xrightarrow{{}^P u} {}^P G \xrightarrow{{}^P v} H \to 1. \qquad ({}^P\varepsilon)$$

De plus, le lien $\mathsf{F}({}^P\varepsilon)$ de cette extension est défini par les opérations de ${}^P G$ sur $\mathsf{lien}({}^P F) \simeq {}^P\mathsf{lien}(F)$, lesquelles sont celles déduites par fonctorialité de la torsion de celle de G sur F. Par suite, on a un isomorphisme de liens sur B_H: $\mathsf{F}({}^P\varepsilon) \simeq {}^P\mathsf{F}(\varepsilon)$. Or F opère trivialement sur $\mathsf{F}(\varepsilon)$, d'où un isomorphisme canonique $\mathsf{F}(\varepsilon) \simeq {}^P\mathsf{F}(\varepsilon)$, qui fait de $({}^P\varepsilon)$ une extension de H par $\mathsf{F}(\varepsilon)$. De plus, par fonctorialité en P des objets tordus ${}^P F$, ${}^P G$ et H, la classe de $({}^P\varepsilon)$ ne dépend que de celle du F-torseur P et l'on a donc une application

$$\iota\colon\ H^1(X, F) \to \mathrm{Ext}(X, \mathsf{F}) \qquad (1)$$

attachée à l'extension (ε, φ). L'énoncé signifie que son image est l'ensemble des $x \in \mathrm{Ext}(H, \mathsf{F})$ dont l'image par d est celle de la classe (ε, φ).

7.3.4.2. Notons maintenant que $({}^P\varepsilon)$ s'interprète comme l'extension associée par (7.2.2) au couple $(B_G, B_u \cdot \omega_P)$, où $\omega_P\colon X \to B_F$ est le morphisme de topos attaché à P. En effet, la suite $({}^P\varepsilon)$ s'interprète comme la suite des morphismes

$$\mathsf{Aut}_F(P) \to \mathsf{Aut}_G(P \overset{F}{\wedge} G) \to \mathsf{Aut}_H(P \overset{F}{\wedge} H)$$

où les flèches sont celles qu'induisent les foncteurs extension du groupe structural

$$\mathrm{TORS}(X, F) \to \mathrm{TORS}(X, G) \to \mathrm{TORS}(X, H).$$

Or, par les propriétés universelles des classifiants de F, G et H, ces foncteurs s'interprètent comme les foncteurs induits par B_u et B_v

$$\mathrm{MOR}_X(X, B_F) \to \mathrm{MOR}_X(X, B_G) \to \mathrm{MOR}_X(X, B_H)$$

et les torseurs P, $P \overset{F}{\wedge} G$ et $P \overset{F}{\wedge} H = H$ s'interprètent comme les morphismes ω_P, $B_u \cdot \omega_P$ et $B_{vu} \cdot \omega_P = \omega_H$, d'où la conclusion.

7.3.4.3. Il est maintenant aisé de prouver la proposition. En effet, si (ε', φ') s'obtient en tordant (ε, φ) par un F-torseur P, sa classe dans $H^2(B_H, \mathsf{F})$ est, d'après ce qui précède, celle de l'extension B_G/B_H qui est celle de (ε, φ). Réciproquement, si les deux extensions ont même classe, la seconde correspond par (7.2.2) à un B_H-morphisme $s\colon X \to B_G$, qui, du fait que B_F est le produit fibré $B_G \times_{B_H} X$ est de la forme $s = B_u \cdot t$, où $t\colon X \to B_F$ est un X-morphisme, donc il existe un F-torseur P tel que t soit isomorphe à ω_P et l'extension (ε') se déduit de (ε) en la tordant par P.

Corollaire 7.3.5. Sous les conditions de (7.3.4), pour que l'image par d de la classe (ε, φ) soit *neutre*, il faut et il suffit qu'il existe un F-torseur P tel que l'extension obtenue en tordant (ε, φ) par P soit *triviale* c'est à dire un produit semi-direct. [Lorsque ces conditions sont satisfaites, (7.3.7.1 (i)) donne une condition pour que (ε, φ) soit triviale.]

La condition est suffisante, car, si P est un F-torseur, les extensions (ε, φ) et $({}^P\varepsilon, {}^P\varphi)$ ont la même classe dans $H^2(B_H, \mathsf{F})$ d'après (7.3.4) et, si $s\colon H \to {}^PG$ est une section de $({}^P\varepsilon)$, on a une section du $B_s\colon B_H \to B_{P_G}$ du B_H-topos B_{P_G} qui n'est autre que B_G, d'après ce qu'on a vu. Inversement, si l'extension $\tau\colon B \to B_H$ attachée à (ε, φ) admet une section $s\colon B_H \to B$, on a une extension de H (7.2.2):

$$1 \to \mathsf{Aut}_{B_H}(s\omega_H) \to \mathsf{Aut}_X(s\omega_H) \to \mathsf{Aut}_X(\omega_H) \to 1,$$

qui admet évidemment une section, donc est un produit semi-direct. Sa classe dans $H^2(B_H, \mathsf{F})$ est celle de B/B_H, donc celle de $d(\varepsilon, \varphi)$, donc la nouvelle extension se déduit de la précédente par torsion d'après (7.3.4).

Proposition 7.3.6. Soit F un lien sur B_H et soient

$$\mathrm{Ext}(H, \mathsf{F}) \xrightarrow{d} H^2(B_H, \mathsf{F}) \xrightarrow{\omega^{(2)}} H^2(X, \mathsf{F}^\omega) \qquad (1)$$

les applications de (7.3.3 (1)). Pour qu'une classe $x \in H^2(B_H, \mathsf{F})$ appartienne à l'image de d, il faut et il suffit que son image par $\omega^{(2)}$ soit neutre.

Ceci résulte immédiatement de la proposition (7.2.2).

7.3.7. Le cas d'un produit croisé. Comme annoncé au début de (7.3), voici l'analogue complet de (7.1.5). Soit F^* un Groupe de B_H, dont le Groupe de X sous-jacent est noté F et soit $f\colon H \to \mathsf{Aut}(F)$ le morphisme sous-jacent. Soit F le lien sur B_H représenté par F^*, qui correspond par (6.1.3) au couple $(\mathsf{lien}(F), \varphi)$, où $\varphi\colon H \to \mathsf{Out}(F)$ est induit par f. On a

une suite de morphismes d'ensembles pointés

$$1 \to H^0(B_H, F^*) \xrightarrow{\omega^{(0)}} H^0(X, F) \xrightarrow{\iota^{(0)}} \mathrm{Crois}(H, F) \xrightarrow{d^{(1)}}$$
$$\to H^1(B_H, F^*) \xrightarrow{\omega^{(1)}} H^1(X, F) \xrightarrow{\iota} \mathrm{Ext}(H, F^*) \xrightarrow{d}$$
$$\to H^2(B_H, F^*) \xrightarrow{\omega^{(2)}} H^2(X, F)$$

où $\mathrm{Crois}(H, F)$ est l'ensemble des morphismes $u\colon H \to F$ d'objets de X qui vérifient

$$u(h\,h') = u(h) \cdot {}^h u(h'), \tag{1}$$

(on note $(h, x) \mapsto {}^h x$ les opérations de H sur F^*), où l'on a posé

$$\iota^{(0)}(x)\,(h) = x^{-1} \cdot {}^h x, \tag{2}$$

où $d^{(1)}$ est l'application qui, à un morphisme croisé $a\colon H \to F$, associe la classe du F^*-torseur P^* de B_H obtenu en faisant opérer H sur le F-torseur trivial F_d par

$$(h, x) \mapsto a(h) \cdot {}^h x, \tag{3}$$

où ι est l'application (7.3.4.1 (1)) obtenue en associant à la classe d'un F-torseur P celle de l'extension obtenue en tordant par P l'extcnsion du produit croisé

$$1 \to F \xrightarrow{u} G \xrightarrow{v} H \to 1, \tag{ε}$$

où d est l'application de (7.3.3 (1)) et où $\omega^{(i)}$, $i = 0, 1, 2$, est l'application induite par le morphisme de topos $\omega_H\colon X \to B_H$.

Proposition 7.3.7.1. Sous les conditions de (7.3.7), on a:

(i) Si l'on omet le morphisme $\omega^{(2)}$, la suite ci-dessus est une suite exacte d'ensembles *marqués*, (7.3.7.2).

(ii) Soit $x \in H^2(B_H, F^*)$. Pour que x appartienne à l'image de d il faut et il suffit que $\omega^{(2)}(x)$ soit *neutre*. Pour que $\omega^{(2)}(x)$ soit la *classe unité* il faut et il suffit qu'il existe une extension de H par F de classe x et de noyau F.

(iii) Soit (ε', φ') une extension de H par F notée

$$1 \to F' \xrightarrow{u'} G' \xrightarrow{v'} H \to 1, \qquad \varphi'\colon\ H \to \mathsf{Out}(F'). \tag{ε'}$$

Pour que l'image par d de la classe de (ε', φ') soit *neutre* il faut et il suffit qu'il existe un F'-torseur P tel que l'extension obtenue en tordant (ε', φ') par P soit triviale.

7.3.7.2. Un *ensemble marqué* est un ensemble X muni d'une partie X'; si la partie n'a qu'un seul élément, on dit ensemble pointé. Une suite de morphismes d'ensembles marqués $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$ est dite *exacte* si $\mathrm{Im}(u)=v^{-1}(Z')$. On notera que les ensembles de classes neutres de $\mathrm{Ext}(H, F^*)$ et de $H^2(B_H, F^*)$ peuvent posséder plus d'un élément.

7.3.7.3. La première assertion de (ii) résulte de (7.3.6) et la seconde de (7.2.2). L'assertion (iii) répète (7.3.5). Par ailleurs, il est immédiat que $\omega^{(0)}$ est un morphisme de groupes dont l'image inverse par $\iota^{(0)}$ du morphisme croisé unité.

Exactitude en crois(H, F). Soit $a: H \to F$ un morphisme croisé. Un isomorphisme $P(a) \xrightarrow{\sim} F_d^*$ entre le F^*-torseur $P(a)$ défini par (7.3.7 (3)) et le F^*-torseur trivial est un isomorphisme entre les F-torseurs sous-jacents qui est compatible avec les opérations de H, autrement dit, une translation à gauche par un $b \in H^0(X, F)$ qui vérifie, pour toute section h de H et toute section x de F

$$b \cdot a(h) \cdot {}^h x = {}^h(b\, x) = {}^h b \cdot {}^h x,$$

ce qui signifie que $\iota^{(0)}(b)=a$.

Exactitude en $H^1(B_H, F^*)$. Par construction, le composé $\omega^{(1)} \cdot d^{(1)}$ a pour image la classe unité. Inversement, un $p \in H^1(B_H, F^*)$ dont l'image par $\omega^{(1)}$ est la classe unité est représenté par un F^*-torseur P dont le F-torseur sous-jacent est le torseur trivial F_d. On définit un morphisme $a: H \to F$ d'objets de X par

$$a(h)=h(e),$$

où $(h, x) \mapsto h(x)$ note les opérations de H sur P. Il est immédiat que a est un morphisme croisé et que les opérations de H sur P sont données par (7.3.7 (3)), donc $d^{(1)}(a)=p$.

On retrouve ainsi l'interprétation classique en termes de cocycles de la catégorie des F^*-torseurs dont le F-torseur sous-jacent est trivial.

Exactitude en $H^1(X, F)$. Puisque $G=F \cdot H$ est un produit semi-direct, on a une équivalence de B_H-topos $B_G \approx B_{F^*}(B_H)$. On a donc un carré 2-cartésien de topos

$$\begin{array}{ccc} B_F & \xrightarrow{u} & B_{F^*}(B_H) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow[\omega_H]{} & B_H . \end{array}$$

Soit P un F-torseur de X. D'après (7.3.4.2), l'extension obtenue en tordant par P le produit semi-direct est celle qui correspond par (7.2.2) au

B_H-morphisme $u \cdot \omega_P$: $X \to B_{F^*}(B_H)$. D'après, (7.2.5), pour que cette extension soit triviale, il faut et il suffit qu'il existe une section s: $B_H \to B_{F^*}(B_H)$ telle que $s \cdot \omega_H$ soit isomorphe à $u \cdot \omega_P$, ce qui, par les propriétés universelles de $B_{F^*}(B_H)$ et de B_F, signifie que P est l'image inverse par ω_H d'un F^*-torseur de B_H, d'où la conclusion.

Exactitude en $\mathrm{Ext}(H, \mathsf{F})$. Elle résulte de (7.3.4), qui, de plus, décrit la relations d'équivalence définie par d dans $\mathrm{Ext}(H, \mathsf{F})$. C.Q.F.D.

7.4. Extensions de groupes et cohomologie des groupes discrets

Nous supposons maintenant que $X = \mathsf{U}$-ens. Soit H un groupe. D'après (6.1.2), un lien F sur le topos $B_H(\mathsf{U}\text{-ens})$ des H-ensembles à gauche s'interprète comme un lien sur U-ens [c'est-à-dire un groupe F] muni d'un morphisme de groupes $H \to \mathrm{Out}(F) = \mathrm{Aut}(F)/\mathrm{Int}(F)$. Dire que F est représentable par un groupe de B_H signifie que le morphisme $H \to \mathrm{Out}(F)$ provient d'un morphisme $H \to \mathrm{Aut}(F)$. On notera qu'ici, si deux liens F et F' sur B_H sont isomorphes, les groupes F et F' sous-jacents le sont aussi. Il en résulte que l'ensemble $\mathrm{Ext}(H, \mathsf{F})$ coïncide avec l'ensemble des extensions de H par le «kernel» F défini par Eilenberg et Mac Lane dans [8]. En effet, deux extensions qui sont isomorphes au sens de (7.2.1) sont équivalentes au sens habituel d'après (7.3.1), car tout torseur de U-ens est trivial. Puisque toute famille couvrante de U-ens admet une section, toute gerbe sur U-ens est triviale et l'application

$$d\colon \mathrm{Ext}(H, \mathsf{F}) \xrightarrow{\sim} H^2(B_H, \mathsf{F}) \tag{1}$$

de (7.3.3 (1)) est ici bijective et induit une bijection sur les ensembles de classes neutres d'après (7.3.4, 7.3.5 et 7.3.6). On retrouve donc en partie les résultats d'Eilenberg et Mac Lane, puisque l'on sait d'après (IV 3.3.3) que $H^2(B_H, \mathsf{F})$ est un pseudo-torseur sous le groupe $H^2(B_H, C)$, où C est le centre de F, et qu'il existe une classe $c \in H^3(B_H, C)$ dont la nullité est nécessaire et suffisante pour que $H^2(B_H, \mathsf{F})$ soit non vide, (IV 2.3). Cependant, nous ne retrouvons pas le résultat de Eilenberg et Mac Lane qui assure que toute classe $c \in H^3(B_H, C)$ s'obtient ainsi. D'après (IV 3.6.4), lorsque F est abélien, l'application (1) est celle de [8].

Par ailleurs, à l'occasion d'un problème sur la dimension cohomologique d'un groupe de Galois, T. Springer [29] a défini un ensemble $H^2(B_H, \mathsf{F})$ comme l'ensemble des classes d'extensions de H par F et en a étudié le formalisme (dans le cas profini). On voit par ce qui précède que la définition du H^2 en termes de gerbes (ou d'extensions du topos B_H) redonne, dans ce cas, la théorie de Springer, à ceci près qu'un passage à la limite serait nécessaire pour étudier comme lui le cas d'un groupe profini.

§8. Extensions de groupes topologiques

8.1. Pour appliquer ce qui précède à l'étude des extensions de groupes topologiques, nous considérerons, comme en (V 3.3.1.3), la catégorie des espaces topologiques appartenant à un univers U. En la munissant de la topologie la moins fine pour laquelle sont couvrantes les familles surjectives $(X_i \to X)$ de morphismes étales on en fait un site, qui est un V-site pour tout univers V auquel U appartient, et que l'on note Top. C'est un site standard et le foncteur habituel

$$\mathrm{Top} \to \widetilde{\mathrm{Top}}, \qquad X \rightsquigarrow \mathsf{X}, \tag{1}$$

qui, à un espace topologique X, associe le fonctcur qu'il représente, est *pleinement fidèle*. Soient F et H deux groupes topologiques. Pour toute extension de faisceaux de groupes

$$1 \to \mathsf{F} \xrightarrow{u'} E' \xrightarrow{v'} \mathsf{H} \to 1, \tag{2}$$

le faisceau E' est représentable: en effet, puisque v' est un épimorphisme de faisceaux, il admet localement sur H une section, donc, localement sur H, le faisceau E' est représentable; par recollement, il est donc représentable. La suite exacte (1) est donc représentable par une suite de morphismes de groupes topologiques

$$1 \to F \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} H \to 1 \tag{3}$$

qui est exacte au sens suivant: *F est le noyau de v*, (donc est fermé si H est séparé), *H est le groupe topologique quotient E/F et v est une fibration localement triviale*. On dira que (3) est *une extension de groupes topologiques* (de H par F). Inversement, une telle extension représente une extension de faisceaux de groupes et nous sommes donc conduits à étudier les extensions dans le topos Top. On notera que nous nous limitons aux extensions (3) telles que v soit localement triviale afin que le morphisme représenté par v soit un épimorphisme de faisceaux; cette condition est automatiquement satisfaite lorsque F est un groupe de Lie et que H est localement compact. Supposons maintenant que F soit *localement compact*. Le faisceau $\mathsf{Aut}(\mathsf{F})$ des automorphismes du faisceau F est alors représenté par le groupe $\mathrm{Aut}(F)$ des automorphismes (bicontinus) de F, muni de la topologie la moins fine pour laquelle sont ouverts les ensembles $\{g \in \mathrm{Aut}(F) \mid g(C) \subset U, g^{-1}(C) \subset U\}$, où C est un compact de F et U un ouvert de F. En particulier, si F est *commutatif*, les opérations du faisceau H sur le faisceau F attachées à l'extension (2), correspondent donc à un morphisme de groupes topologiques $r: H \to \mathrm{Aut}(F)$ qui est un premier invariant de l'extension considérée. Si r est fixé, les classes d'extensions de H par F (au sens des faisceaux ou des

groupes topologiques, c'est la même chose) forment un groupe noté $\mathrm{Ext}(H, F, r)$ où même $\mathrm{Ext}(H, F)$, car il en est ainsi dans le topos $\widetilde{\mathrm{Top}}$ (cf. § 7).

Proposition 8.2. Soit H un groupe topologique séparé, soit F un groupe topologique commutatif localement compact et soit $r: H \to \mathrm{Aut}(F)$ un morphisme de groupes topologiques. Le groupe $\mathrm{Ext}(H, F, r)$ des r-extensions de H par F est isomorphe au groupe $H^2(B_H(\mathrm{Top}), (\mathsf{F}, \mathsf{r}))$, où $B_H(\mathrm{Top})$ est le topos classifiant de l'objet groupe H de $\widetilde{\mathrm{Top}}$ représenté par H et où (F, r) est l'objet-groupe de ce topos classifiant représenté par F et r.

D'après (7.3.7), on a une suite exacte

$$H^1(\mathrm{Top}, \mathsf{F}) \to \mathrm{Ext}(H, F, r) \to H^2(B_H(\mathrm{Top}), (\mathsf{F}, \mathsf{r})) \to H^2(\mathrm{Top}, \mathsf{F}), \quad (1)$$

et d'après (V. 3.3.2), les termes extrêmes de cette suite sont nuls puisque, pour tout espace topologique X, le groupe $H^i(\mathrm{Top}_{/X}, \mathsf{F})$ est isomorphe au groupe de cohomologie habituel $H^i(X, F')$, où F' est le faisceau des germes d'applications continues de X dans F. D'où la conclusion.

8.3. D'après (7.3), nous sommes en mesure de traiter de façon analogue le cas *non commutatif*. Une extension telle que (8.1 (3) ou (2)) définit un morphisme de faisceaux de groupes

$$\mathsf{s}: \mathsf{H} \to \mathsf{Out}(\mathsf{F}) \quad (1)$$

où $\mathsf{Out}(\mathsf{F})$ est le faisceau quotient $\mathsf{Aut}(\mathsf{F})/\mathsf{F}$, autrement dit, (F, s) est un lien sur le topos classifiant $B_H(\mathrm{Top})$, (6.1). D'après (7.3.3 (1)), on a une application

$$\mathrm{Ext}(H, F, \mathsf{s}) \to H^2(B_H(\mathrm{Top}), (\mathsf{F}, \mathsf{s})). \quad (2)$$

Comme plus haut, $H^2(\mathrm{Top}, \mathsf{F})$ est réduit à son élément unité car toute gerbe sur $\widetilde{\mathrm{Top}}$ a une section puisque tout morphisme couvrant l'objet final de $\widetilde{\mathrm{Top}}$ admet une section; d'après (7.3.6), l'application (2) est donc surjective. D'après (7.3.4), pour que les classes de deux extensions aient même image par (2), il faut et il suffit que ces extensions se déduisent l'une de l'autre par torsion par un F-torseur de (Top), lequel est nécessairement trivial, donc (2) est *bijective*. De plus, d'après (7.3.5), la bijection (2) identifie l'ensemble $H^2(B_H(\mathrm{Top}), (\mathsf{F}, \mathsf{s}))'$ des classes neutres à l'ensemble $\mathrm{Ext}(H, \mathrm{F}, \mathsf{s})'$ des classes des extensions qui sont des *produits semi-directs* comme extensions de faisceaux. Puisque le foncteur $\mathrm{Top} \to \widetilde{\mathrm{Top}}$ est pleinement fidèle et commute aux produits, de telles extensions

sont aussi des produits semi-directs au sens topologique. Pour utiliser les résultats du chapitre IV concernant cet ensemble de cohomologie, il nous faut introduire le centre du lien (F, s), qui n'est autre que le centre Z du faisceau F, muni du morphisme de faisceaux $\mathsf{r}: \mathsf{H} \to \mathsf{Aut}(Z)$ défini par s. Si F est localement compact, son centre Z l'est aussi, il représente Z et le morphisme r est représenté par un morphisme de groupes topologiques $r: H \to \mathrm{Aut}(Z)$. D'après (IV 3.3.3 et VI 2.3), on a donc ce qui suit.

Théorème 8.4. Soit F un groupe topologique localement compact, soit H un groupe topologique et soit $\mathsf{s}: \mathsf{H} \to \mathsf{Out}(\mathsf{F})$ un morphisme de faisceaux de groupes sur Top. Soit Z le centre de F et soit $r: H \to \mathrm{Aut}(Z)$ le morphisme de groupes topologiques induit par s.

(i) On a une bijection $\mathrm{Ext}(H, F, \mathsf{s}) \xrightarrow{\sim} H^2(B_H(\mathrm{Top}), (\mathsf{F}, \mathsf{s}))$.

(ii) Il existe une classe $c \in H^3(B_H(\mathrm{Top}), (Z, r))$ dont la nullité est nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{Ext}(H, F, \mathsf{s})$ soit non vide.

(iii) si $c = 0$, l'ensemble $\mathrm{Ext}(H, F, \mathsf{s})$ est un torseur sous $H^2(B_H(\mathrm{Top}), (Z, r))$.

8.5. Pour étudier l'ensemble $\mathrm{Ext}(H, F, \mathsf{s})'$ des classes des extensions qui sont des produits semi-directs, il convient d'introduire le lien

$$\mathsf{Int}(\mathsf{F}) = \mathsf{F}/Z \tag{1}$$

sur $B_H(\mathrm{Top})$ et d'appliquer (IV 3.2.4 et 3.2.6). On peut également procéder autrement et noter que cet ensemble est un quotient de l'ensemble (éventuellement vide) des $\mathsf{r}: \mathsf{H} \to \mathsf{Aut}(\mathsf{F})$ qui relèvent $\mathsf{s}: \mathsf{H} \to \mathsf{Out}(\mathsf{F})$, par une relation d'équivalence que nous laissons au lecteur le soin d'expliciter; bien entendu, ces morphismes r sont représentables puisque $\mathsf{Aut}(\mathsf{F})$ l'est, puisque F est localement compact.

8.6. Pour étudier les extensions d'un groupe topologique par un groupe de Lie F, on peut donc se limiter au cas où F est *un groupe de Lie commutatif* sur lequel un groupe topologique H opère continûment grâce à un morphisme $r: H \to \mathrm{Aut}(F)$. En introduisant la composante neutre F^0 de F, on a une suite exacte de faisceaux sur $B_H(\mathrm{Top})$

$$0 \to \mathsf{F}^0 \to \mathsf{F} \to \mathsf{F}/\mathsf{F}^0 \to 0 \tag{1}$$

qui donne une suite exacte de cohomologie qui réduit le problème au cas où F est connexe; on a de plus une suite exacte

$$0 \to \pi_1(F^0) \to \widetilde{F^0} \to F^0 \to 0 \tag{2}$$

où $\widetilde{F^0}$ est le revètement universel de F^0, c'est à dire un espace vectoriel réel. L'analyse que nous avons faite réduit donc le problème à l'étude

des groupes $H^i(B_H(\mathrm{Top}), F)$, lorsque F est *discret* ou bien *un espace vectoriel réel.* En particulier, on a évidemment l'énoncé suivant

Proposition 8.6.1. Si $H^i(B_H(\mathrm{Top}), \widetilde{F^0})=0$, $i=2,3$, on a une suite exacte

$$\begin{aligned} H^1(B_H, F/F^0) \to H^3\big(B_H, \pi_1(F^0)\big) \to \mathrm{Ext}(H, F) \\ \to H^2(B_H, F/F^0) \to H^4\big(B_H, \pi_1(F^0)\big), \end{aligned} \tag{3}$$

où B_H est mis pour $B_H(\mathrm{Top})$.

8.6.2. En effet, la suite exacte (2) donne un morphisme $H^i(B_H, F^0) \to H^{i+1}\big(B_H, \pi_1(F^0)\big)$, qui est bijectif pour $i=2$ et injectif pour $i=3$ en vertu de l'hypothèse, et il suffit de tenir compte de ce fait en écrivant la suite exacte de cohomologie attachée à (1). Lorsque H est *compact*, on a même une suite exacte infinie, en vertu de la proposition (8.6.4).

8.6.3. Pour étudier les $H^i(B_H, F)$, nous utiliserons la suite spectrale de descente liée au morphisme final $E_H \to e$ du topos classifiant B_H, analogue formellement à la suite spectrale liant la cohomologie d'un recouvrement à celle de l'espace [SGA 4]. Son aboutissement est $H^*(B_H, F)$ et le terme $E_2^{p,q}$ est le p-ème groupe de cohomologie du complexe simplicial

$$n \mapsto H^q\big(B_H(\mathrm{Top})|E_H^{n+1}, F\big), \qquad n \geqq 0, \tag{4}$$

obtenu par passage à la cohomologie à partir du complexe simplicial d'objets de $B_H(\mathrm{Top})$

$$n \mapsto E_H^{n+1}, \qquad n \geqq 0. \tag{5}$$

Pour $q=0$, le complexe (4) n'est autre que *le complexe de cochaines continues* (homogènes) *de H à valeurs dans F*; si l'on note

$$H^i_{\mathrm{co}}(H, F) \tag{6}$$

ses groupes de cohomologie, on a des edges-morphisms

$$H^i_{\mathrm{co}}(H, F) \to H^i\big(B_H(\mathrm{Top}), F\big). \tag{7}$$

Proposition 8.6.4. Supposons que F soit un espace vectoriel réel. Si H est localement compact et dénombrable à l'infini, les morphismes (7) sont des isomorphismes. Si H est compact, on a $H^i(B_H, F)=0$, $i \geqq 1$.

8.6.5. Pour tout groupe topologique F sur lequel H opère continûment, on a des isomorphismes

$$H^i(B_H|E_H^{n+1}, F) \simeq H^i(\mathrm{Top}|H^n, F) \simeq H^i(H^n, F'), \tag{8}$$

où le dernier terme écrit est la cohomologie habituelle du faisceau F' des germes d'applications continues de H^n dans F. En effet, le second isomorphisme est construit dans (V 3.3.2) et le premier est induit par l'équivalence de catégories

$$\mathrm{Top}|H^n \to B_H|E_H^{n+1} \tag{9}$$

obtenue par passage aux topos induits à partir de l'équivalence de catégories

$$f^*\colon \mathrm{Top} \to B_H|E_H, \quad f^*(X)=E_H\times X^\tau, \quad (6.1.1.1), \tag{10}$$

et de l'isomorphisme entre objets de $B_H(\mathrm{Top})$

$$\varepsilon\colon f^*(H^n)\to E_H^{n+1}, \quad \varepsilon(e,h_1,\ldots,h_n)=(e,e\,h_1,e\,h_1\,h_2,\ldots,e\,h_1\ldots h_n). \tag{11}$$

Puisque H est localement compact et dénombrable à l'infini, il en est de même de H^n, $n\geqq 0$, lequel est donc paracompact; le faisceau F' figurant dans (7) est donc, mou et les groupes (7) sont nuls pour $i>0$, ce qui prouve que la suite spectrale dégénère et prouve la première assertion du théorème. Si H est compact, le complexe des cochaines homogènes à valeurs dans l'espace vectoriel F est homotopiquement trivial, comme on voit en attachant à la n-cochaine f la $(n-1)$-cochaine $f'(g_1,\ldots,g_n)=\int_H f(g_1,\ldots,g_n,g)\,dg$ obtenue en intégrant f par rapport à la dernière variable pour la mesure de Haar normalisée de H. On retrouve ainsi le fait bien connu que toute extension d'un groupe compact par un espace vectoriel réel est triviale. D'après Hochschild (1950), on sait que si H est un groupe de Lie semi-simple, connexe et simplement connexe, les $H^i(B_H,F)$ sont encore nuls pour $i=1,2$ lorsque F est un espace vectoriel réel, ce qui permet dans ce cas encore d'appliquer une variante de la proposition (8.6.1). Mais ce résultat n'est pas valable pour tout groupe de Lie comme on voit en divisant par son centre le groupe des matrices carrées d'ordre 3 strictement triangulaires.

Proposition 8.7. Soit H un groupe topologique et soit $\mathsf{p}\colon \mathsf{E}_H\to\mathsf{B}_H$ un espace classifiant pour H. Pour tout groupe discret F muni d'opérations continues de H, on a des isomorphismes canoniques

$$H^i(B_H(\mathrm{Top}),F)\to H^i(\mathsf{B}_H,\mathsf{E}_H\overset{H}{\wedge}F). \tag{1}$$

Par la construction de Milnor, on sait que H admet un espace classifiant qui est contractile, la fibration p étant localement triviale. Cette seconde propriété se traduit dans notre langage par le fait que $\mathsf{E}_H/\mathsf{B}_H$ est un torseur de Top, ce qui, par la propriété universelle du topos classifiant, fournit un morphisme de topos $u\colon \mathrm{Top}|\mathsf{B}_H\to B_H$ dont

le foncteur image inverse est

$$u^*\colon\ B_H(\mathrm{Top}) \to \mathrm{Top}|\,\mathsf{B}_H, \qquad u^*(X) = \mathsf{E}_H \overset{H}{\wedge} X, \tag{2}$$

qui donne naissance, pour tout faisceau de groupes abéliens F sur $B_H(\mathrm{Top})$, à des morphismes

$$H^i\big(B_H(\mathrm{Top}), F\big) \to H^i\big(\mathrm{Top}|\,\mathsf{B}_H, u^*(F)\big). \tag{3}$$

Il suffit de prouver que (3) est un isomorphisme si F est discret, car d'après (V 3.3.2) le second membre de (3) est égal à celui de (1). Par définition même de u, l'image par u^* du morphisme final $E_H \to e$ est le morphisme $\mathsf{p}\colon \mathsf{E}_H \to \mathsf{B}_H$ et l'on a donc un morphisme entre les deux suites spectrales de descente (cf. 8.6.3 (4)), dont l'aboutissement est (3) et qui est induit par le morphisme de complexes

$$H^q\big(B_H(\mathrm{Top})|E_H^{n+1}, F\big) \to H^q\big(\mathrm{Top}|\,\mathsf{E}_H^{n+1}, u^*(F)\big), \qquad n \geqq 0. \tag{4}$$

D'après (8.6.5 (8)), le premier terme s'identifie à $H^q(\mathrm{Top}|H^n, F)$ grâce à l'équivalence de catégories (8.6.5 (9)); or le composé de (8.6.5 (9)) et de (2) est évidemment le foncteur

$$v\colon\ \mathrm{Top}|H^n \to \mathrm{Top}|\,\mathsf{E}_H^{n+1}, \qquad v(X) = \mathsf{E}_H \times X, \tag{5}$$

où $\mathsf{E}_H \times X$, qui est un objet au dessus de $\mathsf{E}_H \times H^n$, est considéré comme un objet au dessus de E_H^{n+1} grâce à l'isomorphisme $u^*(\varepsilon)$, (8.6.5 (11)). Le composé de (4) et du premier morphisme de (8.6.5 (8)) est donc le morphisme

$$H^q(\mathrm{Top}|H^n, F) \to H^q\big(\mathrm{Top}|(\mathsf{E}_H \times H^n), p^*(F)\big),$$

où $p\colon \mathsf{E}_H \times H^n \to H^n$ est la seconde projection. Si F est *discret*, c'est un isomorphisme, puisque E_H est contractile et que la cohomologie du site Top est la cohomologie habituelle, d'où la conclusion.

Bibliographie

1. Artin, M.: Grothendieck topologies, mimégraphié. Harvard University (1962).
2. Auslander, M., Goldmann, O.: The Brauer group of a commutative ring. Trans. Amer. Math. Soc. **97**, 367—409 (1960).
3. Benabou, J.: Thèse. Paris 1966.
4. Cartan, H., Eilenberg, S.: Homological algebra. Princeton: Princeton University Press 1956.
5. Dedecker, P.: Sur la Cohomologie non abélienne, I. Canad. J. Math. (1960); II. Canad. J. Math. (1963).
6. — Cohomologie non abélienne. Lille 1965.
7. Ehresman, C.: Sur la théorie des espaces fibrés. Colloque International de Topologie Algébrique. Paris: C.N.R.S. 1949.
8. Eilenberg, S., MacLane, S.: Cohomology theory in abstract groups. I. II. Ann. of Math. **48** (1947); III. Ann. of Math. **50** (1949).
9. Frenkel, J.: Cohomologie non abélienne et espaces fibrés. Bull. Soc. Math. France **85**, 135—218 (1957).
10. Gabriel, P.: Des catégories abèliennes. Bull. Soc. Math. France **90**, 323—448 (1962).
11. Giraud, J.: Méthode de la descente. Mémoires Soc. Math. Fr. **2** (1964) (cité [D]).
12. — Cohomologie non abélienne. C. R. Ac. Sc. **260**, 2392—2394 et 2666—2668 (1965).
13. — Effacement d'une classe de cohomologie de degré 2. C. R. Ac. Sc. **265**, 229—231 (1967).
14. — Cohomologie non abélienne. Miméographié, Columbia University (1966).
15. Godement, R.: Théorie des faisceaux. Paris: Hermann 1958.
16. Grothendieck, A., Dieudonné, J.: Eléments de Géométrie Algébrique. P. U. F. (cité [EGA]).
17. — Sur quelques points d'algèbre homologique. Tohoku Math. J. **9**, 119—221 (1957).
18. — Giraud, J., Grothendieck, A., Kleiman, S. L., Raynaud, M., Tate, J.: Dix exposès sur la cohomologie des schémas. Paris: Masson & Cie.; Amsterdam: North-Holland Publishing Company 1968.
19. — A general theory of fibre spaces with structure sheaf, University of Kansas (1955).
20. Haefliger, A.: Sur l'extension du groupe structural d'un espace fibré. C. R. Ac. Sc. **243**, 558 (1956).
21. Hakim, M.: Schémas relatifs. Thèse, Paris 1967 et livre à paraître. North Holland Pub. Co.
22. Kan, D. M.: Ajoint functors. Trans. Amer. Math. Soc. **87**, 294—329 (1958).
23. Nguyen Dinh Ngoc.: Sur les espaces fibrés et les prolongements. Thèse, Paris 1963.
24. — Cohomologie non abélienne et classes caractéristiques. C. R. Ac. Sc. **251**, 2453 (1960).
25. Olum, P.: Non abelian cohomology and Van Kampen's theorem. Ann. of Math. **52**, 1—50 (1950).
26. Roos, J. E.: Sur les foncteurs dérivés de $\varprojlim$. Applications. C. R. Ac. Sc. **252**, 2702—3704 (1961).
27. Serre, J. P.: Corps locaux. Paris: Hermann 1962.
28. — Cohomologie Galoisienne. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1965.

29. Springer, T.A.: Non abelian H^2 in Galois cohomology, University of California (1965).
30. Verdier, J.L.: Théorie des faisceaux. Séminaire de Géométrie Algébrique de l'I. H. E. S. (1963—1964).
31. Gabriel, P., Zisman, M.: Homotopie. Séminaire Mathématique de l'Université de Strasbourg (1964).
32. Demazure, M., Gabriel, P.: Groupes Algébriques Linéaires. Séminaire Heidelberg-Strasbourg (1965—1966).
33. — — Groupes Algébriques Linéaires. Livre à paraitre, North Holland Pub. Co.
34. Raynaud, Michèle: Thèse, Paris 1970.
35. Hüsemoller: Fibre bundles. New York: MacGraw-Hill 1968.
36. Hoobler: Non abelian sheaf cohomology by derived functors. Category theory, homology theory and their applications III, Lecture Notes in Math. 99. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1969.

SGA 1 Séminaire de Géométrie Algébrique de l'I. H. E. S., 1960—1961, dirigé par A. Grothendieck.

SGA 3 Séminaire de Géométrie Algébrique de l'I. H. E. S., 1963—1964, schémas en groupes, dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck. Lecture Notes in Math. 151—153. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970.

SGA 4 Séminaire de Géométrie Algébrique de l'I. H. E. S., 1963—1964, Cohomologie étale des schémas, dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J.-L. Verdier.

Index des notations

$X \approx Y$ se lit X est isomorphe à Y
$X \xrightarrow{\sim} Y$ $X \to Y$ est un isomorphisme
$X \approx\!\!\approx Y$ les catégories X et Y sont équivalentes
$X \xrightarrow{\approx} Y$ le foncteur $X \to Y$ est une équivalence

Chapitre 0

$\hat{E}_U, \hat{E}, \eta: E \to \hat{E}$ 0, 2.4, p. 7
$\tilde{E} \underset{a}{\overset{i}{\leftrightarrows}} \hat{E}, \varepsilon = a\eta$ 0, 2.5, p. 7
f^{-1}, f_*, f^* 0, 3.3, p. 10

Chapitre I

$\mathbf{Hom}_a(F, G)$, $\mathbf{Cart}_a(F, G)$ I, 1.1.1, p. 19
$\mathbf{Scin}_a(F, G)$ I, 1.1.2, p. 19
$\mathrm{Hom}_a(F, G)$, $\mathrm{Cart}_a(F, G)$, $\mathrm{Scin}_a(F, G)$ I, 1.1.3, p. 20
$\underset{\leftarrow}{\mathrm{Lim}}(F/A)$, $\underset{\leftarrow}{\mathrm{lim}}(F/A)$ I, 1.1.5, p. 20
$m * n$, $u * m$, $m * u$ I, 1.2.1, p. 21
$\mathbf{Hom}_a(u, H)$, $\mathbf{Cart}_a(u, H)$, $\mathbf{Scin}_a(u, H)$ I, 1.3.1, p. 22
$\mathbf{Hom}_a(F, v)$, $\mathbf{Cart}_a(F, v)$, $\mathbf{Scin}_a(F, v)$ I, 1.3.2, p. 22
$\mathbf{Hom}_E(u, H)$, $\mathbf{Cart}_E(u, H)$ etc. I, 1.3.3, p. 22
$\mathscr{Fib}(E)$, $\mathbf{Fib}(E)$, $\mathrm{Fib}(E)$ I, 1.8.1, p. 26
$\mathscr{Scin}(E)$, $\mathbf{Scin}(E)$, $\mathrm{Scin}(E)$ I, 1.9.1, p. 27
$\underset{\rightarrow}{\mathrm{Lim}}(F/A)$ I, 1.10.1, p. 28
$u_\bullet^{\mathrm{fib}}$, $u_\bullet^{\mathrm{scin}}$, $\mathscr{C}ub_u$, (2-foncteurs changement de base) I, 2.3.1, p. 35
u_{fib}^+, u_{scin}^+, $\mathscr{D}r_u$ (leurs 2-adjoints à droite) I, 2.5.3, 2.3.2, 2.4.4, pp. 36, 40, 43
$u_{\mathrm{fib}}^\bullet$, $u_{\mathrm{scin}}^\bullet$, $\mathscr{G}au_u$ (leurs 2-adjoints à gauche) I, 2.5.1, 2.3.2, 2.4.2, pp. 36, 37, 41
$\mathrm{l}F: F \to \mathbf{L}F$ I, 2.4.3, p. 39
$\mathrm{v}F: \mathbf{S}F \to F$ I, 2.4.5, p. 41
$\mathrm{PREF}(E)$ I, 2.6.1.1, p. 47
$\mathrm{PREFSCIN}(E)$ I, 2.6.1.4, p. 48
$\mathbf{Hom}_S(x, y)$, $\mathrm{Hom}_S(x, y)$ I, 2.6.2.1 et 2.6.3.1, pp. 49, 50
$F_{/P}$, $(f: F \to E, P \in \mathrm{Ob}(\hat{E}))$ I, 3.2.1, p. 53
$F^+, m^+: F^+ \to G^+ . F^+(P)$ I, 3.2.2, p. 54
$\mathrm{CART}^+(F, G)$, $\mathrm{CART}(F, G)$ I, 3.3.1.2, p. 57

Chapitre II

$\mathbf{Desc}(F/E, c, S)$, (données de descente) II, 1.1.1.2, p. 64
$\mathscr{C}hamp(E)$, $\mathrm{Champ}(E)$ II, 1.2.2, p. 67
$(\mathsf{U}-P)$, $(\mathsf{U}-p)$ II, 1.3.5, p. 72
$\mathsf{k}(F): F \to \mathbf{K}(F)$, (Faisceau de catégories associé) II, 2.2.2, p. 78
$\mathsf{a}(F): F \to \mathbf{A}(F)$, (champ scindé associé) II, 2.2.3, p. 79
$f_*^{\mathrm{ch}}(F)$, (image directe d'un champ) II, 3.1.5, p. 83
$f_{\mathrm{ch}}^*(F)$, (image inverse d'un champ) II, 3.2.4.1, p. 87
F^*, (extension à $\tilde{E}$ d'un champ) II, 3.3.3, p. 92
$\mathbf{Faisc}(E; \mathscr{V})$, $\mathrm{FAISCIN}(E; \mathscr{V})$ II, 3.4.1, p. 94
$\mathrm{FAISCIN}(E)$, $\mathrm{FAGRSC}(E)$, $\mathrm{FABSC}(E)$ II, 3.4.1.1, p. 95
$\mathrm{FAISCIN}^+(E; \mathscr{V})$ II, 3.4.3, p. 96
$\mathrm{FAISC}(E)$, $\mathrm{FAISC}^+(E)$ II, 3.4.7, p. 99
$\mathbf{Gr}(F/E)$ II, 3.4.11.1, p. 101
$\mathrm{GREL}(E)$ II, 3.4.11.5, p. 102
$\mathrm{FAGR}(E)$ II, 3.4.12, p. 102
$u^{\mathrm{cart}}: F^{\mathrm{cart}} \to G^{\mathrm{cart}}$ II, 3.5.1, p. 104
$\mathbf{Aut}_S(x)$, $\mathsf{Int}(m): \mathbf{Aut}_S(x) \to \mathbf{Aut}_S(y)$ II, 3.5.2, p. 104
$\mathrm{AUT}(F): F^{\mathrm{cart}} \to \mathrm{FAGRSC}(E)$ II, 3.5.2(4), p. 104
$\mathrm{AUT}(u): \mathrm{AUT}(F) \to \mathrm{AUT}(G) \cdot u^{\mathrm{cart}}$, $(u: F \to G)$ II, 3.5.3, p. 105

Chapitre III

Opér(E; G) III, 1.1.2, p. 106
$\check{F}$ III, 1.1.3, p. 106
OPER(E; G) III, 1.1.6, p. 107
$\mathsf{Hom}_G(P, Q)$, $\mathsf{Hom}_u(P, Q)$, $\mathsf{Aut}_G(P)$ III, 1.2.1, à 4, p. 108
G_d, (G est un Groupe) III, 1.2.7, p. 109
$P \overset{G}{\wedge} Q$, (P et Q objets à opérateurs) III, 1.3.1, p. 114
${}^uP$, $Pu: P \to {}^uP$ III, 1.3.6, p. 116
TORS(T), Tors(T), TORS(T; G), Tors(T; G), TORS(G), Tors(G) III, 1.4.4, pp. 118, 119
TORS(T; u): TORS(T; F) → TORS(T; G) III, 1.4.6, p. 119
ad(P), ad(m): ad(P) → ad(Q) III, 1.4.8, p. 120
BITORS(T) III, 1.5.4, p. 121
$\mathscr{P}^0$ III, 1.5.5.1, p. 122
P^0 III, 1.5.5.2, p. 122
TORS(E), Tors(E), TORS(E; G), Tors(E; G) III, 1.7.1, p. 126
Ger(C) III, 2.1.3.3, p. 131
Ger(C) III, 2.1.5.1, p. 131
OPER(A; C), Opér(A; C) III, 2.2.1.1, p. 137
$\mathsf{Hom}_{S\text{-}A}(x, y)$ III, 2.2.1, p. 137
Tw^P, («twist») III, 2.3.4, p. 144
Tw_x, Tw_f III, 2.3.9, p. 147
$Tw_x(P)$, ${}^Px$, $P \overset{A}{\wedge} x$, (objet tordu de x par P) III, 2.3.5, p. 145
$H^0(A)$, $H^1(A)$, $H^0(E, A)$, $H^1(E, A)$ III, 2.4.1, p. 148
$u^{(i)}: H^i(A) \to H^i(B)$, $i = 0, 1$ III, 2.4.2.1, p. 148
$H^i(E/S, A)$, $i = 0, 1$ III, 2.4.6, p. 150
$\mathsf{H}^1(A)$ III, 2.4.6.3, p. 150
Θ_P, ($\Theta_P(Q) = Q \overset{A}{\wedge} P^0$, P et Q torseurs) III, 2.6.1, p. 153
$\theta_P: H^1(A) \to H^1(\mathsf{ad}(P))$ III, 2.6.3, p. 154
$\theta_P: H^1(A) \to H^1(pA)$ III, 2.6.3.1, p. 154
$d: H^0(E, X/A) \to H^1(E, A)$ III, 3.1.3, p. 158
$p \times c$, ($p \in H^1(A)$, $c \in H^0(B/A)$) III, 3.3.2, p. 162
$b(p)$, ($p \in H^1(A)$, $b \in H^0(B)$, A sous-groupe de B) III, 3.3.3, p. 162
$p \cdot q$, ($p \in H^1(A)$, $q \in H^1(B)$, A central dans B) III, 3.4.4, p. 166
$c(q)$, ($q \in H^1(B)$, $c \in H^0(C)$, $C = B/A$, A central) III, 3.4.4.2, p. 166
$H^i_\bullet(E, A)$ III, 3.5.4, p. 169
$H^1(\mathbf{S}; A)$, (A non abélien, $\mathbf{S}$ famille couvrante) III, 3.6.1, p. 171
$\mathsf{C}^i(\mathbf{S}; A)$, $C^i(\mathbf{S}; A)$, $H^i(\mathbf{S}; A)$, (A abélien) III, 3.6.7, p. 175
$H^1(E/S, A)^R$ III, 3.6.2, p. 172
$Z^1(G, A)$, $H^1(G, A)$ III, 3.7.1, p. 178

Chapitre IV

Int(G) IV, 1.1.2 (1), p. 184
Hex(F, G), Isex(F, G), Autex(F) IV, 1.1.3, p. 185
Hex(F, G), Isex(F, G), Autex(F) IV, 1.1.4, p. 185
LI(E)(S), (catégorie) IV, 1.1.4 (1), p. 185
LI(E), (champ) IV, 1.1.5 (1), p. 185
LIEN(E), (champ des liens) IV, 1.1.6, p. 186
Lien(E), (catégorie des liens) IV, 1.1.6, p. 186
lien(E): FAGRSC(E) → LIEN(E) IV, 1.1.5 (5), p. 186
lien(E): Fagr(E) → Lien(E) IV, 1.1.6 (2), p. 186
L^0 IV, 1.2.5, p. 193
$L \times M$, (produit de liens) IV, 1.4.1.1, p. 198
$(a, b): X \to L \times M$ IV, 1.4.1 (2), p. 198
$a \times b: L \times M \to L' \times M'$ IV, 1.4.1 (3), p. 198
$\mathrm{inj}_i: L_i \to \prod L_i$ IV, 1.4.2 (1), p. 199
$a + b: L \times M \to N$ IV, 1.4.3 (1), p. 199
(C_u, c_u), (Centralisateur de $u: L \to M$) IV, 1.5.1.1, p. 199
$\gamma_u: C_u \to M$ IV, 1.5.2 (2), p. 200
(C_L, c_L), (centre d'un lien L) IV, 1.5.3.1, p. 202
$L \overset{C}{\wedge} M$, (produit contracté de liens) IV, 1.6.1, p. 204
$\mathrm{Hom}_u(P, Q)$, $\mathsf{Hom}_u(P, Q)$, $\mathrm{HOM}_u(P, Q)$, (P et Q des gerbes) IV, 2.3.1, p. 217
$P \overset{C}{\wedge} Q$, (produit contracté de gerbes) IV, 2.4.1, p. 229
$\mathrm{HOM}_L(P, Q)$ IV, 2.3.2 (3), p. 219
K_s, $K(s)$ IV, 2.5.1, p. 237
$k(s)$, $\kappa(s)$, $K(i): K(s) \to K(t)$ IV, 2.5.2, p. 237
$u(s): L(s) \to M$ IV, 2.5.5, p. 239
$L(i): L(s) \to L(t)$ IV, 2.5.5.2, p. 240
$H^2(L)$, $H^2(L)'$, (L un lien) IV, 3.1.1, p. 247
$H^2(A)$, $H^2(A)'$, (A un faisceau de groupes) IV, 3.1.3, p. 247

$p \overset{u}{\multimap} q$, $H^2(L) \overset{u^{(2)}}{\multimap} H^2(M)$ IV, 3.1.4, p. 248
Rep(L), Rep(L), REP(L), (L un lien) IV, 3.2.1, p. 252
Int(L), (L un lien) IV, 3.2.2, p. 252
$r_L \in H^2(\mathrm{Int}(L))$, ($L$ un lien) IV, 3.2.3, p. 253
$H^2(A)$ (A un faisceau abélien) IV, 3.3.2, p. 256
$x\,p$, ($x \in H^2(C)$, $p \in H^2(L)$, C centre de L) IV, 3.3.3, p. 257
$(q:p)$, $(u: L \to M, p \in H^2(L), q \in H^2(M))$ IV, 3.3.8, p. 259
Noy(v), Noy(v), NOY(v), (v morphisme de liens) IV, 4.1.2, p. 274
$\mathrm{Aut}^M(L)$, $(L \in \mathrm{Noy}(v))$ IV, 4.1.4 (i), p. 275
O(v), O(v)′, ($v: M \to N$ épimorphisme de liens) IV, 4.2.3, p. 280
O(b), O(b)′, $(1 \to A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \to 1)$ IV, 4.2.4, p. 280
$H^1(C) \xrightarrow{d} \mathrm{O}(b) \overset{u^{(2)}}{\multimap} H^2(B)$ IV, 4.2.7.2, p. 282
$s(X): S(X) \to \mathrm{lien}(A)$, ($X$ un A-espace homogène) IV, 5.1.3, p. 294
$c(X) \in H^2(S(X))$ IV, 5.1.4, p. 294

Chapitre V

$R^i f_*(A)$, $i = 0, 1$ V, 2.1, p. 319
Br(X) V, 4.4, p. 342

Chapitre VI

$c(L) \in H^3(C)$, (C le centre d'un lien L) VI, 2.3, p. 363
$ML(C)$ VI, 2.7, p. 365

Chapitre VIII

$\mathrm{Mor}_S(X, Y)$, (X et Y des S-topos) VIII, 0 (2), p. 392
$\mathrm{MOR}_S(X, Y)$, (X et Y des S-topos) VIII, 3.5, p. 409
$B_G(X)$, τ_G, E_G, ω_G VIII, 4.1, p. 411
G^{int} VIII, 4.2, p. 412
$B_{\mathsf{G}}(X)$, τ_{G}, (G une gerbe) VIII, 5.1.1, p. 417
$A(B/X)$, $L(B/X)$ VIII, 6.2.1, p. 432
$A(m/X)$, $L(m/X)$ VIII, 6.2.4, p. 433
Ext(H, F), (F un lien sur B_H) VIII, 7.3.2, p. 446

Index terminologique

Action d'un lien sur un champ IV, 2.1.4, p. 209
Adjoint d'un E-foncteur I, 1.11.2, p. 30
Algèbre d'Azumaya V, 4.1, p. 341

Banalisation d'une algèbre d'Azumaya V, 4.1, p. 341
— d'un fibré de Severi-Brauer V, 4.8, p. 344
Bicouvrant (E-foncteur) II, 1.4.1, p. 72
Bicouvrante (flèche de $\hat{E}$) 0, 3.5, p. 12
Bitorseur III, 1.5.1, p. 121

Cartésien (foncteur) I, 1.1.1, p. 19
— (morphisme) I, 1.0.1, p. 18
Cartésienne (section) I, 1.1.5, p. 20
Catégorie fibrée I, 1.0.2, p. 18
— scindée I, 1.0.3, p. 18
— scindée libre I, 2.4.3, p. 39
Centralisateur d'un morphisme de liens IV, 1.5.1, p. 199
Centre d'un lien IV, 1.5.3, p. 201
Champ II, 1.2.1, p. 67
— associé à une catégorie fibrée II, 2.1.1, p. 76
— de groupoïdes II, 1.2.1.3, p. 67
— de topos VIII, 2.1, p. 400
— des faisceaux d'ensembles II, 3.4.7, p. 99
— des faisceaux de groupes II, 3.4.12, p. 102
— scindé associé à une catégorie fibrée II, 2.2.3, p. 79
— — des faisceaux II, 3.4.1, p. 94
Classe neutre dans $H^2(L)$ IV, 3.1.1.2, p. 247
— — — $O(v)$ IV, 4.2.3, p. 280
— unité dans $H^1(A)$ III, 2.4.2, p. 148
— unité dans $H^2(A)$ IV, 3.1.3, p. 247
— unité dans $O(b)$ IV, 4.2.4, p. 280
Cobord (premier) III, 3.1.3, p. 158
— (seconds) IV, 4.2.7.2, p. 282
Cobord itéré IV, 3.4.5, p. 263
Cocycle attaché à un torseur III, 3.6.3, 3.7.1, 3.7.5, pp. 172, 178, 181
— — à une gerbe IV, 3.5.1, p. 264
Complète (catégorie fibrée) II, 1.2.1, p. 67
Crible 0, 1.1, p. 4
— engendré par une famille 0, 1.1.2, p. 4
— de F-i-descente II, 1.1.1, p. 64
— — universelle II, 1.1.2, p. 65

2-adjoint d'un 2-foncteur I, 2.2.2, p. 34
2-cartésien (carré) VIII, 0.5, p. 396
2-catégorie I, 1.8.1, p. 26
2-foncteur I, 2.2.1, p. 33
2-produit fibré VIII, 0.5, p. 396

Disjointe (somme directe) 0, 2.6.2, p. 8

Ensemble marqué VIII, 7.3.7.2, p. 451
— pointé III, 2.4.1, p. 148
Epimorphisme effectif universel 0, 2.6.2, p. 8
Equivalence de catégories fibrées I, 1.5.2.1, p. 23
— de S-topos VIII, 0.6, p. 397
Extension à $\hat{E}$ d'une E-catégorie fibrée I, 3.2.2, p. 54
— d'un groupe d'un topos par un lien VIII, 7.3.1, p. 445
— d'un topos VIII, 5.3.2, p. 426

Factorisation canonique d'un champ III, 2.1.5, p. 131
Faisceau 0, 2.1, p. 6
— de catégories I, 1.9.3.1, p. 27
— des S-automorphismes dans un champ II, 3.5.2, p. 104
— sur un objet de $\hat{E}$ II, 3.4.7, p. 99
Famille couvrante 0, 1.4, p. 5
— quarrable II, 1.1.1.2, p. 64
Fibre d'un champ en un point d'un topos III, 2.1.5.8, p. 134

Fibre d'un foncteur, d'une catégorie fibrée I, 1.0.1, p. 18
Fibré de Severi-Brauer V, 4.8, p. 344
Fine (topologie plus ou moins) 0, 1.3, p. 5
Foncteur conservatif 0, 3.8.1, p. 14
E-foncteur couvrant II, 1.4.1, p. 72
Foncteur discret I, 1.1.4 (c), p. 20
— fibre d'un topos 0, 3.13, p. 17
— *i*-fidèle, ($i=0, 1, 2$) I, 1.5.1.1, p. 23

Générateurs topologiques d'un topos 0, 1.6.1, p. 6
Gerbe III, 2.1.1, p. 129
— abélienne IV, 2.2.3.4, p. 214
— des morphismes liés IV, 2.3.2, p. 218
— des relèvements d'une section IV, 2.5.4.1, p. 239
— des représentants d'un lien IV, 3.2.1, p. 252
— engendrée III, 2.1.3.2, p. 130
Groupe adjoint d'un torseur III, 1.4.8, p. 120
— de Brauer d'un topos annelé V, 4.4, p. 342
— de Mac-Lane d'un lien VI, 2.7, p. 365

Image directe de champs II, 3.1.5, p. 83
— — de faisceaux 0, 3.3, p. 11
— — de gerbes II, 3.1.5, p. 83
— inverse de champs II, 3.2.1, p. 84
— — de faisceaux 0, 3.3, p. 11
— — de gerbes V, 1.4.2, p. 314
— — de liens V, 1.2.2, p. 305
— — de morphismes de champs II, 3.2.1.2, p. 85

Lien IV, 1.1.6, p. 186
— abélien IV, 1.2.3, p. 192
— d'un espace homogène IV, 5.1.3, p. 294
— d'une extension de topos VIII, 6.2.1, p. 432
— d'une gerbe IV, 2.2.2, p. 212
— unité IV, 1.2.4, p. 192
Limite inductive universelle 0, 2.6.2, p. 8

Morphisme de catégories scindées I, 1.1.2, p. 19
— de champs II, 1.2.1, p. 67
— — de topos VIII, 3.1, p. 407
— de gerbes III, 2.1.1.4, p. 129
— — liées IV, 2.2.3.1, p. 213
Morphisme de liens (central, injectif, normal, surjectif) IV, 1.2.6, p. 193
— de sites 0, 3.3, p. 10
— de topos 0, 3.4.2, VIII, 0.1, pp. 12, 393
— de morphisme de champs II, 1.2.1, p. 67
— — de topos VIII, 0.1, p. 393

Objet à opérateurs III, 1.1.2, p. 106
— tordu III, 2.3.3, p. 142
Opérations adjointes (sur un objet tordu) III, 2.3.2, p. 142
Opposé d'un bitorseur III, 1.5.5, p. 122
— d'un lien IV, 1.2.5, p. 192
Ouvert d'un topos 0, 3.10, p. 16

Point d'un topos 0, 3.13, p. 17
Préchamp, catégorie fibrée précomplète II, 1.2.1, p. 67
Préfaisceau 0, 2.1, p. 6
— des *S*-morphismes I, 2.6.3.1, p. 50
Prétopologie 0, 1.5, p. 5
Produit contracté de gerbes IV, 2.4.1.1, p. 230
— — de liens IV, 1.6.1, p. 204
— — d'objets à opérateurs III, 1.3.1, p. 114
Pseudo-torseur III, 1.1.5, p. 107

Quasi-inverse d'un *E*-foncteur I, 1.5.2.1, p. 23

Raffinement 0, 1.2, p. 4
Réalisable (lien) IV, 3.1.1, p. 247
Représentable (lien) IV, 1.2.1, p. 191
Représentant d'un lien IV, 1.2.1, p. 191
Restriction d'un topos à un objet du dit VIII, 1.7, p. 400

Scindage I, 1.0.3, p. 18
Site 0, 2.1, p. 6
— standard 0, 2.5.2, p. 7
— à objets constants III, 3.7.2, p. 179
Sous-gerbe maximale III, 2.1.3, p. 130
Sous-topos 0, 2.11.1, p. 9
Strict (objet initial) 0, 2.6.2, p. 8
Strictement pleine (sous-catégorie) 0, 2.10.1, p. 9
Suite exacte de liens IV, 4.1.1, p. 273

Topologie 0, 1.2, p. 4
— canonique, discrète, grossière 0, 2.3.1, p. 6

Topologie engendrée par une prétopologie
0, 1.5, p. 5
— de la F-descente, (F un champ)
II, 1.1.3, p. 65
— induite 0, 3.1.2, p. 10
— — sur $\hat{E}$ 0, 3.5, p. 12
Topos classifiant d'un faisceau de groupes
VIII, 4.1, p. 411
— — d'une gerbe VIII, 5.1.1, p. 417
— résiduel 0, 3.11.1, p. 16
Torseur III, 1.4.1, 1.4.2, pp. 117, 118
Torseur d'un topos III, 1.4.1, p. 117
— sur un site III, 1.7.1, p. 126
— sur un objet de $\hat{E}$ III, 1.7.3.1, p. 128
— trivial III, 1.4.2, p. 118
Transgression V, 3.2.1, p. 330

U-catégorie I, 1.7.1, p. 25
U-faisceau 0, 2.1, p. 6
U-petite (catégorie) I, 1.7.1, p. 25
U-site 0, 1.6, p. 5
U-topos 0, 2.6.1, p. 8

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete

Eine Auswahl

32. Reidemeister: Vorlesungen über Grundlagen der Geometrie. DM 18,—
38. Neumann: Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. DM 28,—
40. Hilbert/Bernays: Grundlagen der Mathematik I. DM 68,—
43. Neugebauer: Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften. 1. Band: Vorgriechische Mathematik. DM 48,—
50. Hilbert/Bernays: Grundlagen der Mathematik II. DM 84,—
52. Magnus/Oberhettinger/Soni: Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics. DM 66,—
57. Hamel: Theoretische Mechanik. DM 84,—
59. Hasse: Vorlesungen über Zahlentheorie. DM 69, –
60. Collatz: The Numerical Treatment of Differential Equations. DM 78,—
61. Maak: Fastperiodische Funktionen. DM 38,—
64. Nevanlinna: Uniformisierung. DM 49,50
66. Bieberbach: Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. DM 58,50
67. Byrd/Friedmann: Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists. DM 64,—
68. Aumann: Reelle Funktionen. DM 68,
73. Hermes: Einführung in die Verbandstheorie. DM 46, –
74. Boerner: Darstellung von Gruppen. DM 58,—
76. Tricomi: Vorlesungen über Orthogonalreihen. DM 68,–
77. Behnke/Sommer: Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. DM 79,—
78. Lorenzen: Einführung in die operative Logik und Mathematik. DM 54,—
86. Richter: Wahrscheinlichkeitstheorie. DM 68,—
87. van der Waerden: Mathematische Statistik. DM 68,—
94. Funk: Variationsrechnung und ihre Anwendung in Physik und Technik. DM 120,—
97. Greub: Linear Algebra. DM 39,20
99. Cassels: An Introduction to the Geometry of Numbers. DM 78,—
104. Chung: Markov Chains with Stationary Transition Probabilities. DM 56,—
107. Köthe: Topologische lineare Räume I. DM 78,—
114. MacLane: Homology. DM 62,—
116. Hörmander: Linear Partial Differential Operators. DM 42,—
117. O'Meara: Introduction to Quadratic Forms. DM 68,—
120. Collatz: Funktionalanalysis und numerische Mathematik. DM 58,—
121./122. Dynkin: Markov Processes. DM 96,—
123. Yosida: Functional Analysis. DM 66,—
124. Morgenstern: Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. DM 38,—
125. Itô/McKean: Diffusion Processes and Their Sample Paths. DM 58,—
126. Lehto/Virtanen: Quasikonforme Abbildungen. DM 38,
127. Hermes: Enumerability, Decidability, Computability. DM 39,—
128. Braun/Koecher: Jordan-Algebren. DM 48,—
129. Nikodým: The Mathematical Apparatus for Quantum-Theories. DM 144,—
130. Morrey: Multiple Integrals in the Calculus of Variations. DM 78,
131. Hirzebruch: Topological Methods in Algebraic Geometry. DM 38,
132. Kato: Perturbation Theory for Linear Operators. DM 79,20
133. Haupt/Künneth: Geometrische Ordnungen. DM 68,—
134. Huppert: Endliche Gruppen I. DM 156, –
135. Handbook for Automatic Computation, Vol. 1/Part a: Rutishauser: Description of ALGOL 60. DM 58,—
136. Greub: Multilinear Algebra. DM 32,—

137. Handbook for Automatic Computation. Vol. 1/Part b: Grau/Hill/Langmaack; Translation of ALGOL 60. DM 64,—
138. Hahn: Stability of Motion. DM 72,—
139. Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs. 1. Teil. DM 88,—
140. Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs. 2. Teil. DM 136,—
141. Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs. 3. Teil. DM 98,—
142. Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs. 4. Teil. DM 124,—
143. Schur/Grunsky: Vorlesungen über Invariantentheorie. DM 32,—
144. Weil: Basic Number Theory. DM 48,—
145. Butzer/Berens: Semi-Groups of Operators and Approximation. DM 56,—
146. Treves: Locally Convex Spaces and Linear Partial Differential Equations. DM 36,—
147. Lamotke: Semisimpliziale algebraische Topologie. DM 48,—
148. Chandrasekharan: Introduction to Analytic Number Theory. DM 28,—
149. Sario/Oikawa: Capacity Functions. DM 96,—
150. Iosifescu/Theodorescu: Random Processes and Learning. DM 68,—
151. Mandl: Analytical Treatment of One-dimensional Markov Processes. DM 36,—
152. Hewitt/Ross: Abstract Harmonic Analysis. Vol. II. DM 140,—
153. Federer: Geometric Measure Theory. DM 118,—
154. Singer: Bases in Banach Spaces I. DM 112,—
155. Müller: Foundations of the Mathematical Theory of Electromagnetic Waves. DM 58,—
156. van der Waerden: Mathematical Statistics. DM 68,—
157. Prohorov/Rozanov: Probability Theory. DM 68,—
159. Köthe: Topological Vector Spaces I. DM 78,—
160. Agrest/Maksimov: Theory of Incomplete Cylindrical Functions and their Applications.
161. Bhatia/Szegö: Stability Theory of Dynamical Systems. DM 58,—
162. Nevanlinna: Analytic Functions. DM 76,—
163. Stoer/Witzgall: Convexity and Optimization in Finite Dimensions I. DM 54,—
164. Sario/Nakai: Classification Theory of Riemann Surfaces. DM 98,—
165. Mitrinovic: Analytic Inequalities. DM 88,—
166. Grothendieck/Dieudonné: Eléments de Géometrie Algébrique I. DM 84,—
167. Chandrasekharan: Arithmetical Functions. DM 58,—
168. Palamodov: Linear Differential Operators with Constant Coefficients. DM 98,—
170. Lions: Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations. DM 78,—
171. Singer: Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces. DM 60,—
172. Bühlmann: Mathematical Methods in Risk Theory. DM 52,—
173. Maeda/Maeda: Theory of Symmetric Lattices. DM 48,—
174. Stiefel/Scheifele: Linear and Regular Celestial Mechanics. DM 68,—
175. Larsen: An Introduction to the Theory of Multipliers. DM 84,—
176. Grauert/Remmert: Analytische Stellenalgebren. DM 64,—
177. Flügge: Practical Quantum Mechanics I. DM 70,—
178. Flügge: Practical Quantum Mechanics II. DM 60,—
179. Giraud: Cohomologie non abélienne. DM 109,—
180. Landkoff: Foundations of Modern Potential Theory. In preparation.
181. Lions/Magenes: Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications I. In preparation.
182. Lions/Magenes: Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications II. In preparation.
183. Lions/Magenes; Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications III. In preparation.
184. Rosenblatt: Markov Processes. In preparation.
185. Rubinowicz; Sommerfeldsche Polynommethode.
186. Handbook for Automatic Computation. Vol. 2. Wilkinson/Reinsch: Linear Algebra. DM 72,—
187. Siegel/Moser; Lectures on Celestial Mechanics. DM 78,—