Lecture Notes in Mathematics

A collection of informal reports and seminars
Edited by A. Dold, Heidelberg and B. Eckmann, Zürich

239

Luc Illusie

Centre National de la Recherche Scientifique
Paris/France

Complexe Cotangent et Déformations I



Springer-Verlag
Berlin · Heidelberg · New York 1971

AMS Subject Classifications (1970): 13D10, 14F10, 14F20, 18G10, 18G30, 18H20, 57D20

ISBN 3-540-05686-6 Springer-Verlag Berlin · Heidelberg · New York
ISBN 0-387-05686-6 Springer-Verlag New York · Heidelberg · Berlin

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically those of translation, reprinting, re-use of illustrations, broadcasting, reproduction by photocopying machine or similar means, and storage in data banks.

Under § 54 of the German Copyright Law where copies are made for other than private use, a fee is payable to the publisher, the amount of the fee to be determined by agreement with the publisher.

© by Springer-Verlag Berlin · Heidelberg 1971. Library of Congress Catalog Card Number 79-182233. Printed in Germany.

Offsetdruck: Julius Beltz, Hemsbach/Bergstr.

A MES PARENTS

TABLE DES MATIERES

Introduction IX
Prerequisites. Leitfaden XV
Conventions standard XV

CHAPITRE I : ALGEBRE HOMOTOPIQUE RELATIVE 1

1. Rappels 1

1.1. Objets simpliciaux, homotopies 1

1.2. Le théorème d'Eilenberg-Zilber 6

1.3. Le théorème de Dold-Puppe 8

1.4. Catégories localisées, calculs de fractions 11

1.5. Résolutions simpliciales standard 17

2. Faisceaux d'homotopie d'un faisceau simplicial 20

2.1. Définition des faisceaux d'homotopie, propriétés d'exactitude 20

2.2. Le théorème de Whitehead 25

2.3. Catégorie dérivée des faisceaux simpliciaux 38

3. Anneaux et Modules simpliciaux 55

3.1. Généralités 56

3.2. Triangles distingués et Ext^i dans $D.(A)$ 63

3.3. Produits tensoriels dérivés 82

4. Dérivés des puissances symétriques et extérieures 93

4.1. Préliminaires sur D^- 94

4.2. Dérivé gauche d'un foncteur compatible aux limites inductives locales 99

4.3. Suites exactes de Koszul et formules de décalage 107

CHAPITRE II : COMPLEXE COTANGENT : DEFINITION ET PREMIERES PROPRIETES 114

1. Définition du complexe cotangent 114

1.1. Sorites sur les dérivations et les différentielles 114

1.2. Définition du complexe cotangent 120

2. Premières propriétés 133

2.1. Triangle de transitivité 133

2.2. Changement de base 138

2.3. Localisation 141

CHAPITRE III : COMPLEXE COTANGENT ET EXTENSIONS INFINITESIMALES . . . 151

1. Calcul du tronqué à l'ordre un du complexe cotangent 151

1.1. Sorites sur les extensions d'Algèbres 151

1.2. Le théorème fondamental 162

1.3. Une deuxième démonstration du théorème fondamental 178

2. Déformations de topos annelés et de morphismes de topos annelés . . 184

2.1. Déformations de topos annelés 184

2.2. Déformations de morphismes de topos annelés 195

2.3. Compléments sur les déformations de morphismes 199

3. Calcul du complexe cotangent de quelques types de morphismes . . . 203

3.1. Morphismes lisses, étales 203

3.2. Immersions régulières, morphismes localement d'intersection complète 205

3.3. Morphismes faiblement d'intersection complète 210

4. Appendice : cohomologie relative 214

CHAPITRE IV : DEFORMATIONS DE MODULES 225

Introduction 225

1. Catégories dérivées de Modules gradués 226

1.1. Anneaux et Modules gradués 226

1.2. Catégories dérivées. 230

1.3. Résolutions standard 233

2. Complexe cotangent d'une Algèbre graduée 235

2.1. Modules de différentielles gradués 235

2.2. Définition du complexe cotangent gradué 236

2.3. Triangle de transitivité gradué et classe d'Atiyah 238

2.4. Complexe cotangent et extensions graduées 244

3. Déformations de Modules et de morphismes de Modules 246

3.1. Déformations de Modules 246

3.2. Déformations de morphismes de Modules 256

CHAPITRE V : CLASSES DE CHERN DES COMPLEXES PARFAITS 263

0. Introduction 263

1. Extensions filtrées (resp. graduées) 268

2. Les foncteurs $\overset{\mathbf{L}}{\otimes}$ et $\underline{\mathrm{RHom}}$ filtrés (resp. gradués) 285

2.1. Le foncteur $\overset{\mathbf{L}}{\otimes}$ filtré (resp. gradué) 285

2.2. Le foncteur $\underline{\mathrm{RHom}}$ filtré (resp. gradué) 289

2.3. Formules d'adjonction "chères à Cartan" et composition des homomorphismes 294

3. Complexes filtrés (resp. gradués) parfaits : traces et cup-produits 304

4. Les foncteurs S^n, Λ^n, Γ^n filtrés (resp. gradués) 316

5. Construction de classes de Chern 326

6. Construction de classes de cohomologie locale 338

Bibliographie 343

Index des notations 346

Index terminologique 351

Introduction

Le présent travail est consacré à la théorie du complexe cotangent sur les topos annelés (globalisation du formalisme d'André ([1], [2]) et Quillen ([24], [25])), et à des applications de celle-ci à quelques problèmes de déformation infinitésimale globale. Les plus intéressantes concernent des calculs d'obstructions à la déformation de schémas en groupes plats commutatifs, calculs qui jouent un rôle-clef dans les travaux récents de Grothendieck ([1]) et Messing ([2]) sur les groupes de Barsotti-Tate.

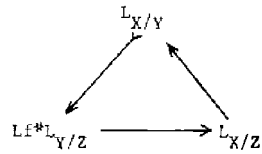
Voici, brièvement, le contenu des divers chapitres.

Le chapitre I rassemble le matériel d'algèbre homologique nécessaire à la construction et l'étude des propriétés du complexe cotangent. Nous introduisons la notion de faisceau d'homotopie d'un faisceau simplicial et prouvons une variante globale d'un théorème de Whitehead [9], à savoir que si un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ de faisceaux simpliciaux induit des isomorphismes sur les faisceaux d'homotopie en tout degré, il en est de même du morphisme $\mathbb{Z}(f) : \mathbb{Z}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}(Y)$ induit sur les $\mathbb{Z}$-Modules simpliciaux libres engendrés. En "inversant" les flèches qui induisent des isomorphismes sur les faisceaux d'homotopie, on définit diverses catégories "dérivées", généralisations communes des catégories dérivées de Verdier [27] et des catégories homotopiques de Quillen [23]. En raison de son importance pour la théorie du complexe cotangent, nous étudions plus spécialement la catégorie dérivée des Modules sur un Anneau simplicial : triangles distingués, Ext^i, produit tensoriel dérivé. Le dernier paragraphe contient la définition des foncteurs dérivés de certains foncteurs non additifs sur la catégorie dérivée D^- d'un topos annelé, et les analogues globaux des isomorphismes de décalage de Quillen ([24] 7.21).

([1]) A. Grothendieck, Cristaux et modules de Dieudonné, exposé au Congrès International des Mathématiciens, Nice (1970), et Cours au Collège de France, 70-71 et 71-72.

([2]) W. Messing, The Crystals associated to Barsotti-Tate Groups, with Applications to Abelian Schemes, Thesis, Princeton (1971), à paraître.

Au chapitre II, en utilisant la théorie des résolutions standard et la variante du théorème de Whitehead indiquée plus haut, nous définissons le complexe cotangent $L_{X/Y}$ d'un morphisme de topos annelés $X \longrightarrow Y$, et étudions ses propriétés générales de fonctorialité et compatibilité au changement de base. Le résultat principal qui généralise ([25] 5.1), est qu'un composé $X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z$ de morphismes de topos annelés donne naissance à un triangle distingué (canonique et fonctoriel) dans la catégorie dérivée $D(X)$, dit "triangle de transitivité" :



Dans le chapitre III, nous établissons, pour un morphisme de topos annelés $X \longrightarrow Y$ et un $\underline{O}_X$-Module I, un isomorphisme fonctoriel canonique entre le groupe des classes à isomorphisme près de Y-extensions de X par I et le hyperext $\mathrm{Ext}^1(L_{X/Y}, I)$. Ce résultat nous permet de comparer $L_{X/Y}$ au complexe construit par Grothendieck dans [17] : ce dernier est isomorphe dans $D(X)$ au tronqué de $L_{X/Y}$ obtenu en tuant la cohomologie en degré ≤ -2. Combinant ces résultats avec ceux du chapitre II, nous obtenons des applications de la théorie à des questions de déformations de topos annelés et de morphismes de topos annelés. Nous exprimons l'obstruction à la déformation plate au premier ordre d'un topos annelé comme cup-produit avec une certaine classe fondamentale définie en termes du triangle de transitivité décrit plus haut, classe qui apparaît comme une généralisation naturelle du classique invariant de Kodaira-Spencer (cf. [16]). Ce résultat résout affirmativement une conjecture de Grothendieck, qui est à l'origine du présent travail. Le reste du chapitre est consacré au calcul du complexe cotangent de quelques types de morphismes de schémas (morphismes lisses, intersections complètes).

Utilisant une variante de la théorie du complexe cotangent pour les faisceaux d'algèbres graduées, nous traitons, au chapitre IV, des questions de déformations de Modules. L'obstruction à la déformation plate au premier ordre d'un Module est exprimée comme cup-produit avec une certaine classe fondamentale, qui généralise

l'extension habituelle définie par les jets à l'ordre un d'un Module. Cet invariant donne naissance à une théorie des classes de Chern pour les complexes parfaits, qui est exposée au chapitre V , après quelques préliminaires sur les catégories dérivées de complexes filtrés. La théorie contient en particulier celle du polynôme caractéristique d'un endomorphisme d'un complexe parfait, ce qui résout une question soulevée dans (SGA 6 XIV).

Le chapitre VI (*) prépare le terrain pour les calculs d'obstruction relatifs aux déformations de schémas en groupes. Il se compose, pour l'essentiel, de calculs généraux sur la cohomologie de topos associés à certains diagrammes. Ces calculs complètent ceux de Deligne-Saint-Donat dans (SGA 4 VI), dont notre exposé est d'ailleurs logiquement indépendant. Le résultat le plus frappant est l'expression des Ext de Modules sur un Anneau comme groupes de cohomologie "spatiaux" d'un topos défini à partir de spectres d'Eilenberg-Mac-Lane. Comme sous-produit, nous obtenons une formule explicite remarquable pour la résolution désirée par Grothendieck dans (SGA 7 VII 3.5.4). L'idée de la construction, qui remonte à Mac-Lane ([3]), nous a été suggérée par L. Breen, qui fait un usage essentiel de cette résolution dans ses travaux récents sur les $\mathrm{Ext}^i(G_a,G_a)$ ([4]).

Le chapitre VII contient des calculs d'obstruction pour les déformations au premier ordre de torseurs sous un schéma en groupes plat, de schémas en groupes plats non commutatifs, et de schémas en groupes commutatifs plats avec schéma en anneaux d'opérateurs. Les obstructions sont encore décrites comme cup-produits avec certaines classes fondamentales, parmi lesquelles on trouve (dans le cas des torseurs) une généralisation de la classe construite par Atiyah dans ([5]). Les résultats de ce

---

(*) Les chapitres VI à VIII seront publiés dans un second volume, qui paraîtra prochainement.

([3]) S. Mac-Lane, Homologie des anneaux et des modules, Colloque de Topologie algébrique, Louvain, 1956, p. 55-80.

([4]) L. Breen, travail en préparation.

([5]) M. F. Atiyah, Analytic connexions on fibre bundles, Mexico Symposium, 1958.

chapitre, qui, dans le cas des torseurs et des schémas en groupes non commutatifs, complètent et précisent ceux de Demazure (SGA 3 III) et Giraud [13], avaient été conjecturés par Grothendieck ([6]). La méthode que nous utilisons consiste à ramener le problème initial à celui de déformer un diagramme convenable (par exemple un schéma en groupes sera vu comme un schéma simplicial particulier), ou plus exactement le topos annelé de ce diagramme, problème qui est justiciable des résultats généraux du chapitre III. Les formules du chapitre VI permettent d'écrire les obstructions ainsi obtenues sous une forme plus simple, faisant intervenir des invariants familiers, tels que l'Algèbre de Lie d'un schéma en groupes lisse , ou, plus généralement, le complexe de Lie d'un schéma en groupes plat, complexe introduit, dans le cas fini, par Mazur-Roberts dans ([7]).

Le chapitre VIII est indépendant des résultats des chapitres IV à VII. Il est consacré à l'exposé d'une théorie non publiée de Quillen sur la cohomologie des groupoïdes formels. Moyennant quelques raffinements, cette théorie nous permet d'établir, dans le cas des intersections complètes locales, certaines relations remarquables entre complexe cotangent, complexe de de Rham, et cohomologie cristalline ([8]).

Les principaux résultats des chapitres I à V ont été résumés dans quatre Notes aux Comptes-Rendus ([9]) (**).

([6]) A. Grothendieck, lettre à J. Giraud (13.6.69), lettres à L. Illusie (2.12.69).

([7]) B. Mazur and L. Roberts, Local Euler Characteristics, Inventiones math. 9, 201-234 (1970).

([8]) P. Berthelot, Cohomologie cristalline des schémas, Thèse, à paraître.

([9]) L. Illusie, Algèbre homotopique relative, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 268, p. 11-14 et 206-209,
Complexe cotangent relatif d'un faisceau d'algèbres, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 268, p. 278-281 et 323-326.

(**) Le lecteur pourra également consulter, pour l'ensemble de ce travail, un résumé multigraphié par les soins de la Faculté des Sciences d'Orsay.

Ma reconnaissance s'adresse d'abord à A. Grothendieck, dont les belles conjectures ont motivé mes recherches sur ce sujet, et qui n'a cessé, tout au long de mon travail, de me prodiguer conseils et encouragements. Ce travail n'aurait peut-être pas vu le jour sans l'aide de P. Deligne, qui, au cours de longs et multiples entretiens, m'a, par ses suggestions lumineuses, permis d'aplanir un grand nombre de difficultés ; je suis heureux de lui exprimer ici toute la reconnaissance que je lui dois. Des conversations avec L. Breen, D. Quillen, J.L. Verdier m'ont été très utiles ; je leur exprime mes vifs remerciements. Je remercie également les auditeurs d'un séminaire que j'ai donné sur ce sujet à M. I. T. au cours du premier semestre de l'année 70-71, et dont les questions, remarques et suggestions ont été un stimulant précieux pour la rédaction de ce travail.

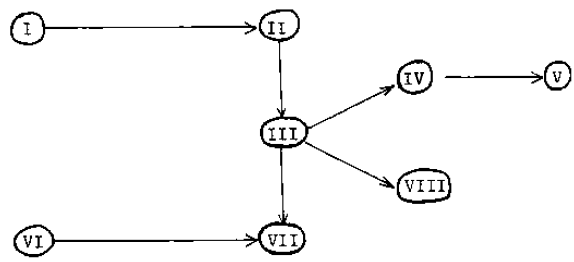
A Henri Cartan, qui, après avoir guidé mes premiers pas dans la recherche et suivi mes progrès au fil des ans, a bien voulu me faire l'honneur de présider le Jury auquel j'ai soumis cette thèse, j'exprime ma profonde gratitude. Ma reconnaissance va également à Jean-Pierre Serre, qui m'a proposé un second sujet, et à Michel Demazure, qui a accepté de faire partie de mon Jury.

Enfin, je remercie Madame Michon pour le soin qu'elle a apporté à la préparation du manuscrit.

Prerequisites

Nous supposons le lecteur familier avec le langage des topos, tel qu'il est exposé dans la première partie de (SGA 4) (notamment l'exposé IV), et le formalisme des catégories dérivées de Verdier ([27], (SGA 4 XVII)). Il est également conseillé au lecteur d'avoir quelque connaissance des techniques simpliciales ([10], [11], [23]), qui jouent un rôle fondamental dans nos constructions ; cette connaissance n'est toutefois pas indispensable, car nous rappelons avec assez de détails les résultats dont nous avons besoin. Signalons enfin qu'il n'est pas nécessaire, pour aborder cet ouvrage, d'avoir lu les articles d'André ([1], [2]), Grothendieck [17] et Quillen ([24], [25]), dont notre travail est, pour l'essentiel, logiquement indépendant.

Leitfaden



Conventions standard

Nous utiliserons parfois la convention de Deligne (SGA 4 XVII 0.1), consistant à désigner par le signe " ≔ " un isomorphisme fonctoriel canonique.

Quand nous parlerons de catégories, de topos, de "petitesse", etc., nous omettrons parfois de préciser l'univers ambiant : il sera sous-entendu qu'il s'agit d'un univers fixé dont $\mathbb{N}$ est élément.

Nous appellerons schéma (resp. schéma séparé) ce qui s'appelait naguère préschéma (resp. schéma).

CHAPITRE I

ALGEBRE HOMOTOPIQUE RELATIVE

1. Rappels.

1.1. Objets simpliciaux, homotopies ([10], [11], [23]).

On note Δ la catégorie dont les objets sont les ensembles finis totalement ordonnés non vides, les flèches les applications croissantes au sens large. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $i \in [0,n]$, on désigne par

$$d_n^i \text{ (ou } d^i) : [0,n-1] \longrightarrow [0,n]$$

l'injection croissante qui oublie i, et par

$$s_n^i \text{ (ou } s^i) : [0,n+1] \longrightarrow [0,n]$$

la surjection croissante qui repète i.

Soit C une catégorie. Un objet simplicial de C est un foncteur de Δ^o dans C, un morphisme d'objets simpliciaux de C est un morphisme des foncteurs correspondants. Si X est un objet simplicial de C, on écrira, pour $n \in \mathbb{N}$, X_n au lieu de $X([0,n])$, et, parfois, on notera simplement d_i^n (ou d_i) la i-ième flèche de face $X(d_n^i)$, et s_i^n (ou s_i) la i-ième flèche de dégénérescence $X(s_n^i)$. On notera

(1.1.1) $\qquad\qquad$ Simpl(C)

la catégorie des objets simpliciaux de C. De manière analogue, on définit, pour tout entier $p \geq 1$, la catégorie, notée p-Simpl(C), des objets p-simpliciaux de C, ou foncteurs de $(\Delta^p)^o$ (*) dans C. Dualement, on définit la catégorie Cosimpl(C) des objets cosimpliciaux de C, ou foncteurs de Δ dans C, et, pour $p \geq 1$, la catégorie p-Cosimpl(C) des objets p-cosimpliciaux de C, ou foncteurs de Δ^p (*) dans C. On définit encore, pour tout couple d'entiers p, $q \geq 1$, la catégorie, notée (p,q)-Simpl(C), des objets simpliciaux mixtes de

(*) $\Delta^p = \underbrace{\Delta \times \ldots \times \Delta}_{p \text{ fois}}$

type (p,q) de C , ou foncteurs de $(\Delta^p)^o \times \Delta^q$ dans C . On aura surtout à travailler avec les catégories du type Simpl(C) ou 2-Simpl(C). Si X est un objet p-simplicial (resp. p-cosimplicial) de C , on appellera sous-objet diagonal de X , et l'on notera ΔX , l'objet simplicial (resp. cosimplicial) défini par $E \longmapsto X(E,\dots,E)$.

Pour $X \in$ ob C , notons $K(X,O)$ le foncteur constant $\Delta^o \longrightarrow C$ de valeur X ; on dit encore que $K(X,O)$ est l'objet simplicial trivial (ou constant) défini par X. Le foncteur $X \longmapsto K(X,O)$ est adjoint à gauche du foncteur $Y \longmapsto Y_o$: pour $X \in$ ob C, $Y \in$ ob Simpl(C), la flèche canonique de restriction

$$\text{(1.1.2)} \qquad \mathrm{Hom}(K(X,O),\ Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, Y_o)$$

est un isomorphisme. Comme $K(X,O)_o = X$, le foncteur

$$K(-,O) : C \longrightarrow \mathrm{Simpl}(C)$$

est donc pleinement fidèle, et son image essentielle est formée des objets simpliciaux dont toutes les flèches de face et de dégénérescence sont des isomorphismes. Quand il n'en pourra résulter de confusion, nous écrirons simplement X au lieu de $K(X,O)$.

Remarquons que, si i_o , $i_1 : \{O\} \rightrightarrows E$ sont des flèches de Δ telles que $i_o \geq i_1$, il existe une unique flèche $i : [0,1] \longrightarrow E$ de Δ telle que $id^o = i_o$, $id^1 = i_1$. Par suite, pour $X \in$ ob C, $Z \in$ ob Simpl(C) , le diagramme d'ensembles ci-dessous, où la flèche de gauche est la flèche naturelle de restriction, est exact :

$$\text{(1.1.3)} \qquad \mathrm{Hom}_{\mathrm{Simpl}(C)}(Z,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(Z_o,X) \underset{\mathrm{Hom}(d_1,X)}{\overset{\mathrm{Hom}(d_o,X)}{\rightrightarrows}} \mathrm{Hom}_C(Z_1,\ X) \quad .$$

On appellera augmentation de Z dans X la donnée d'une flèche $f : Z \longrightarrow X$ de Simpl(C), i.e. (1.1.3) d'une flèche $f_o : Z_o \longrightarrow X$ telle que $f_o d_o = f_o d_1$. La donnée d'un objet simplicial de C augmenté dans X (i.e muni d'une augmentation dans X) équivaut à celle d'un objet simplicial de $C_{/X}$, ou encore à celle d'un préfaisceau sur la catégorie des ensembles finis totalement ordonnés à valeurs

dans C , prenant la valeur X sur l'ensemble vide.

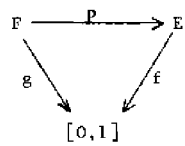
Pour $Z \in \text{ob Simpl}(C)$, on notera $\pi_o(Z) \in \text{ob } C$ le conoyau de $(d_o, d_1) : Z_1 \rightrightarrows Z_o$, quand ce dernier est représentable ; on peut alors écrire (1.1.3) comme un isomorphisme

$$\text{(1.1.4)} \qquad \text{Hom}_{\text{Simpl}(C)}(Z,X) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_C(\pi_o(Z), X) \quad .$$

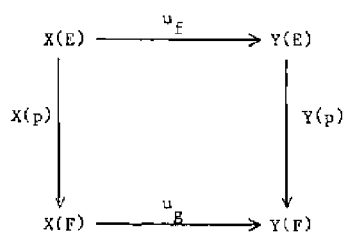
Ainsi, lorsque dans C les conoyaux de doubles flèches sont représentables, le foncteur $\pi_o(-)$ est adjoint à gauche du foncteur $K(-,0)$, de sorte qu'on a, entre les catégories C et Simpl(C) la suite de foncteurs adjoints $(\pi_o(-), K(-,0)(-)_o)$.

1.1.5. Soient u_o, $u_1 : X \rightrightarrows Y$ des flèches de Simpl(C). On appelle ([10]1.7) <u>homotopie entre</u> u_o <u>et</u> u_1 la donnée, pour chaque flèche $f : E \longrightarrow [0,1]$ de Δ , d'une flèche $u_f : X(E) \longrightarrow Y(E)$ telle que :

(i) pour tout triangle commutatif de Δ



le carré



soit commutatif,

(ii) $u_{(d^o\varepsilon)} = u_o$, $u_{(d^1\varepsilon)} = u_1$, où ε est la projection sur $\{0\}$.

Si u est une homotopie entre u_o et u_1, et $x : X' \longrightarrow X$ une flèche de C, alors les $u_f x(E) : X'(E) \longrightarrow Y(E)$, pour $f : E \longrightarrow [0,1]$, définissent une

homotopie entre $u_o x$ et $u_1 x$; de même, si $y : Y \longrightarrow Y'$ est une flèche de C, les $yu_f : X(E) \longrightarrow Y'(E)$ définissent une homotopie entre yu_o et yu_1 . De manière analogue, si $S : C \longrightarrow C'$ est un foncteur, les $S(u_f) : S(X)(E) \longrightarrow S(Y)(E)$ définissent une homotopie entre $S(u_o)$ et $S(u_1)$. On dira que u_o et u_1 sont homotopes si u_o et u_1 sont congrues modulo la relation d'équivalence engendrée par la relation "il existe une homotopie entre". D'après les remarques précédentes, la relation d'homotopie est compatible avec la composition des flèches, de sorte qu'on peut définir une catégorie

(1.1.5.1) $\qquad\qquad$ Hotsimpl(C) ,

ayant mêmes objets que Simpl(C) , et dont les flèches de X dans Y sont les classes d'homotopie de flèches (de Simpl(C)) de X dans Y. On dit que Hotsimpl(C) est la catégorie des objets simpliciaux de C à homotopie près. On a un foncteur naturel

$$\text{Simpl(C)} \longrightarrow \text{Hotsimpl(C)} \quad .$$

On dira qu'une flèche de Simpl(C) est une équivalence d'homotopie (ou un homotopisme) si son image dans Hotsimpl(C) est inversible. Si $S : C \longrightarrow C'$ est un foncteur, S se prolonge canoniquement en un foncteur, noté encore S, de Simpl(C) dans Simpl(C'), et, d'après la remarque faite plus haut, ce dernier se prolonge canoniquement en un foncteur de Hotsimpl(C) dans Hotsimpl(C').

On définit de manière analogue la notion d'homotopie entre flèches de Cosimpl(C) et la catégorie Hotcosimpl(C).

1.1.6. Soit $p : E \longrightarrow B$ un foncteur, notons Simp(p), ou p, son extension naturelle à Simpl(E). Soient $u_o, u_1 : X \rightrightarrows Y$ des flèches de Simpl(E). On a vu que toute homotopie u entre u_o et u_1 définit une homotopie p(u) entre $p(u_o)$ et $p(u_1)$. Supposons que $p(u_o) = p(u_1) = f : S \longrightarrow T$. On dira que u est une homotopie relativement à f, ou f-homotopie, si p(u) est l'homotopie "constante de valeur f", i.e. $p(u)_s = f_a$ pour toute flèche $s : [a] \longrightarrow [0,1]$ de Δ . Si $S = T$ et $f = Id_S$, on dira "S-homotopie" au lieu de "Id_S-homotopie". On dira que u_o et u_1 sont homotopes relativement à f (ou f-homotopes) si u_o et u_1 sont congrues modulo la relation d'équivalence

engendrée par la relation "il existe une f-homotopie entre". Soit $v : X' \longrightarrow X$ une flèche de projection $g : S' \longrightarrow S$, on a vu qu'une homotopie u entre u_o et u_1 définit une homotopie uv entre $u_o v$ et $u_1 v$; si u est une f-homotopie, alors uv est une fg-homotopie ; de même, si $w = Y \longrightarrow Y'$ est une flèche de projection $h : T \longrightarrow T'$, et si u est une f-homotopie entre u_o et u_1, alors wu est une hg-homotopie entre wu_o et wu_1. Il en résulte qu'on peut définir, pour $S \in$ ob Simpl(B), une catégorie

(1.1.6.1) $$\mathrm{Hotsimpl}(E)_S \ ,$$

ayant mêmes objets que $\mathrm{Simpl}(E)_S$, et dont les flèches de X à Y sont les classes de S-homotopie de S-flèches de X à Y. Supposons que le foncteur p soit fibrant (resp. cofibrant). Alors il en est de même de Simpl(p) (Giraud [12] 1.16) . La donnée d'une f-homotopie entre deux flèches u_o et u_1 au-dessus de f équivaut dans ce cas à celle d'une S-homotopie (resp. T-homotopie) entre les flèches correspondantes $X \longrightarrow u_o{}^*(Y)$ et $X \longrightarrow u_1{}^*(Y)$ (resp. $u_{o*}X \longrightarrow Y$ et $u_{1*}X \longrightarrow Y$). Si $f = \mathrm{Id}_S$ et si u est une S-homotopie entre u_o et u_1, alors, pour toute flèche $g : S' \longrightarrow S$ (resp. $h : S \longrightarrow S''$) on a une S'-homotopie g^*u entre g^*u_o et g^*u_1 (resp. une S''-homotopie h_*u entre h_*u_o et h_*u_1), définie par $(g^*u)_s = g^*(u_s)$ (resp. $h_*u)_s = h_*(u_s)$) pour $s : [a] \longrightarrow [0,1] \in \mathrm{Fl}\,\Delta$. Par suite, le foncteur $g^* : \mathrm{Simpl}(E)_S \longrightarrow \mathrm{Simpl}(E)_{S'}$ (resp. $h_* : \mathrm{Simpl}(E)_S \longrightarrow \mathrm{Simpl}(E)_{S''}$) se prolonge en un foncteur

(1.1.6.2) $$g^* : \mathrm{Hotsimpl}(E)_S \longrightarrow \mathrm{Hotsimpl}(E)_{S'},$$

$$(\text{resp. } h_* : \mathrm{Hotsimpl}(E)_S \longrightarrow \mathrm{Hotsimpl}(E)_{S''}) \ ,$$

ce qui permet de définir une catégorie $\mathrm{Hotsimpl}(E_{/B})$ fibrée (resp. cofibrée) sur Simpl(B) dont les fibres sont les catégories $\mathrm{Hotsimpl}(E)_S$.

Le foncteur $p : E \longrightarrow B$ étant à nouveau quelconque, soient $q : F \longrightarrow B$ un foncteur et $m : E \longrightarrow F$ un B-foncteur, notons encore q (resp. m) l'extension de q (resp. m) à Simpl(F) (resp. Simpl(E)). Alors m transforme f-homotopie en f-homotopie, donc, pour $S \in$ ob Simpl(B), induit un foncteur

(1.1.6.3) $$m : \mathrm{Hotsimpl}(E)_S \longrightarrow \mathrm{Hotsimpl}(F)_S \ .$$

Par suite, quand E et F sont fibrées (resp. cofibrées) sur B, m induit un $\mathrm{Simpl}(B)$-foncteur

$$m : \mathrm{Hotsimpl}(E_{/B}) \longrightarrow \mathrm{Hotsimpl}(F_{/B}) \ .$$

On laisse au lecteur le soin de formuler les variantes cosimpliciales des énoncés précédents.

1.2. Le théorème d'Eilenberg-Zilber.

1.2.1. Soit A une catégorie additive. On notera $C(A)$ la catégorie des complexes de A ([1]). On dira que $L \in \mathrm{ob}\, C(A)$ est un complexe de chaînes (resp. de cochaînes) si $L^i = 0$ pour $i > 0$ (resp. $i < 0$). On notera $C^{o]}(A)$, ou $C.(A)$, (resp. $C^{[o}(A)$, ou $C^{\cdot}(A)$) la sous-catégorie pleine de $C(A)$ formée des complexes de chaînes (resp. cochaînes). Soit n un entier ≥ 1 ; par complexe n-uple de A on entend la donnée d'un objet $\mathbb{Z}^n$-gradué de A, muni, pour $1 \leq i \leq n$, d'une différentielle d_i de multidegré $(0,\ldots,1,\ldots,0)$ (1 à la i-ième place), telle que $d_i d_i = 0$ et $d_i d_j = d_j d_i$ pour $1 \leq i < j \leq n$ (2) ; un morphisme de complexes n-uples est un morphisme d'objets gradués compatible avec les d_i . On notera $n\text{-}C(A)$ la catégorie des complexes n-uples de A, $n\text{-}C^{o]}(A)$ ou $n\text{-}C.(A)$ (resp. $n\text{-}C^{[o}(A)$ ou $n\text{-}C^{\cdot}(A)$) la sous-catégorie pleine formée des complexes de chaînes (resp. cochaînes) i.e. nuls en multidegré > 0 (resp. < 0). On a un foncteur "complexe simple associé" ([27], (SGA 4 XVII))

$$\int : n\text{-}C(A) \longrightarrow C(A) \ ,$$

dont nous rappelons la définition : $(\int L)^p = \bigoplus_{\Sigma p_i = p} L^{p_1,\ldots,p_n}$, la différen-

---

([1]) à différentielle de degré $+1$, le degré étant écrit en exposant; on se permettra parfois de regarder un objet de $C(A)$ comme un complexe à différentielle de degré -1 grâce à la convention d'écriture $X^n = X_{-n}$.

([2]) cf. ([27], (SGA 4 XVII)) ; on s'écarte ici de la convention de Cartan-Eilenberg [7].

tielle d de L étant donnée, en restriction à $L^{p_1,\dots,p_n}$, par $\Sigma_j(-1)^{i\sum_j p_i} d_j$. Le foncteur complexe simple associé induit un foncteur $\int : n\text{-}C.(A) \longrightarrow C.(A)$ (resp. $n\text{-}C'(A) \longrightarrow C'(A)$).

1.2.2. Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, et X un objet n-simplicial de A (1.1), on appelle <u>complexe de chaînes de</u> X le complexe de chaînes n-uple $\widetilde{X}$ défini par $\widetilde{X}_{p_1,\dots,p_n} = X_{p_1,\dots,p_n}$ pour $(p_1,\dots,p_n) \geq 0$, la différentielle d_i de X étant donné par $d_i = \sum_j (-1)^j X(\mathrm{Id},\dots,d_j,\dots,\mathrm{Id})$ (d_j à la i-ième place). On a ainsi un foncteur additif

$$n\text{-}\mathrm{Simpl}(A) \longrightarrow n\text{-}C.(A) \quad , \quad X \longmapsto \widetilde{X} \quad ,$$

exact quand A est abélienne. (Dualement, on a un foncteur additif complexe de cochaînes associé

$$n\text{-}\mathrm{Cosimpl}(A) \longrightarrow n\text{-}C'(A), \quad X \longmapsto \widetilde{X} \ ) \quad .$$

A chaque objet X de n-Simpl(A) on peut attacher deux objets de C.(A), $\int \widetilde{X}$ et $(\Delta X)^{\sim}$, qui dépendent fonctoriellement de X. En vertu du <u>théorème d'Eilenberg-Zilber-Cartier</u> ([10] 2.9 et 2.16), il existe des homomorphismes fonctoriels

$$\int \widetilde{X} \longrightarrow (\Delta X)^{\sim} \quad , \qquad (\Delta X)^{\sim} \longrightarrow \int \widetilde{X} \quad ,$$

induisant l'identité en degré 0, et inverse l'un de l'autre à homotopie fonctorielle près. Pour n = 2, un tel couple d'homomorphismes est fourni par la flèche dite "shuffle-map"

$$\int \widetilde{X} \longrightarrow (\Delta X)^{\sim} \quad , \tag{1.2.2.1}$$

et la flèche dite "d'Alexander-Whitney"

$$(\Delta X)^{\sim} \longrightarrow \int \widetilde{X} \quad , \tag{1.2.2.2}$$

qui dont définies comme suit ([10]2.15) : (1.2.2.1) envoie $X_{p,q}$ dans $X_{p+q,p+q}$ par $\Sigma (-1)^{\varepsilon(\mu,\nu)} X(s^{\nu_q}\dots s^{\nu_1}, s^{\mu_p}\dots s^{\mu_1})$, la somme étant prise sur les (p,q)-"shuffles"

de $(1,\dots,p+q)$, (μ,ν) désignant la signature de shuffle (μ,ν) ; (1.2.2.2) envoie $X_{p+q,p+q}$ dans $X_{p,q}$ par $X(d^{p+q}\dots d^{p+1}, d^{o}\dots d^{o})$. On montre([21], [23]) que la flèche (1.2.2.1) (resp. (1.2.2.2)) est "associative" (resp. "coassociative") dans le sens suivant : Soit X un objet simplicial triple de A, notons $\Delta_{(1,2)}X$ le sous-objet diagonal partiel correspondant aux deux premiers arguments, i.e. $(E,F) \longmapsto X(E,E,F)$, et de même $\Delta_{(2,3)}$ le sous-objet diagonal partiel correspondant aux deux derniers, alors on a un carré commutatif

$$(1.2.2.3)\qquad \begin{array}{ccc} \int \widetilde{X} & \xrightarrow{a} & \int (\Delta_{(1,2)}X)^{\sim} \\ {\scriptstyle b}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d} \\ \int (\Delta_{(2,3)}X)^{\sim} & \xrightarrow{c} & (\Delta X)^{\sim} \end{array} \qquad \text{(resp.} \qquad \begin{array}{ccc} (\Delta X)^{\sim} & \xrightarrow{a'} & \int (\Delta_{(1,2)}X)^{\sim} \\ {\scriptstyle b'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d'} \\ \int (\Delta_{(2,3)}X)^{\sim} & \xrightarrow{c'} & \int \widetilde{X} \end{array} \text{),}$$

où c et d (resp. c' et d') sont définies par (1.2.2.1) (resp. (1.2.2.2)), a (resp. a') est définie par (1.2.2.1) (resp. (1.2.2.2)) en restriction aux deux premiers arguments et par l'identité sur le dernier, b (resp. b') est définie par (1.2.2.1) (resp. (1.2.2.2)) en restriction aux deux derniers arguments et par l'identité sur le premier.

1.3. Le théorème de Dold-Puppe.

Dans ce numéro, A désigne une catégorie abélienne.

1.3.1. Soit X un objet simplicial de A, on appelle complexe normal de X le sous-complexe NX de $\widetilde{X}$ (1.2.2) défini comme suit ([10] 3.1) :

$$(NX)_n = \bigcap_{i>0} \operatorname{Ker}\,(d_i : X_n \longrightarrow X_{n-1}) \quad ,$$

(la différentielle étant induite par d_o). Il dépend fonctoriellement de X.

Soit Y un objet de $C.(A)$ (1.2.1), on appelle transformé de Dold-Puppe de Y l'objet simplicial KY de A défini comme suit ([10] 3.2) :

$$(KY)_n = \bigoplus_{0\le p\le n} \bigoplus_{f\,:\,[0,n]\longrightarrow[0,p]} Y_{p,f} \quad .$$

où f parcourt toutes les flèches surjectives $[0,n] \longrightarrow [0,p]$ de Δ et $Y_{p,f} = Y_p$; pour $u \in \mathrm{Hom}_\Delta([0,m],[0,n])$, $(KY(u) : (KY)_n \longrightarrow (KY)_m$ est définie de la manière suivante sur chaque composant $Y_{p,f}$: il existe un unique carré commutatif de Δ

$$\begin{array}{ccc} [0,m] & \xrightarrow{u} & [0,n] \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ [0,q] & \xrightarrow{j} & [0,p] \end{array}$$

où g est surjective et j injective ; si $q = p$, $(KY)(u)$ envoie $Y_{p,f}$ dans $Y_{p,g}$ par l'identité ; si $q = p-1$ et $j = d^0$, $(KY)(u)$ envoie $Y_{p,f} = Y_p$ dans $Y_{p-1,g} = Y_{p-1}$ par la différentielle de Y ; dans les autres cas, $(KY)(u)$ envoie $Y_{p,f}$ dans $Y_{q,g}$ par la flèche nulle . L'objet simplicial KY dépend fonctoriellement de Y .

Théorème 1.3.2. (Dold-Puppe[10] 3.6). Les foncteurs $N : \mathrm{Simpl}(A) \longrightarrow C.(A)$ et $K : C.(A) \longrightarrow \mathrm{Simpl}(A)$ sont quasi-inverses l'un de l'autre.

1.3.3. Le théorème (1.3.2) a les corollaires suivants.

(i) Les foncteurs N et K sont exacts : pour qu'une suite $S = (0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0)$ de $\mathrm{Simpl}(A)$ (resp. $C.(A)$) soit exacte il faut et il suffit que la suite NS (resp. KS) le soit.

(ii) On a un isomorphisme fonctoriel canonique

$$\tilde{X} \simeq NX \oplus DX ,$$

où DX est le sous-complexe dégénéré de X, défini par

$$(DX)_n = \Sigma\, \mathrm{Im}(s_i : X_{n-1} \longrightarrow X_n) .$$

Le complexe DX est homotopiquement trivial (Eilenberg-Mac-Lane ([10] 3.22)),

donc l'inclusion $NX \longrightarrow \widetilde{X}$ est un homotopisme ([1]).

1.3.4. De plus ([10]3.31) les foncteurs N et K sont compatibles aux homotopies pour qu'il existe une homotopie entre des flèches u_o, $u_1 : X \rightrightarrows X'$ de Simpl(A) (1.1.5) il faut et il suffit que Nu_o et Nu_1 soient homotopes (en particulier la relation "il existe une homotopie entre" sur les flèches de X dans X' est une relation d'équivalence) ; pour que des flèches v_o, $v_1 : Y \rightrightarrows Y'$ de C.(A) soient homotopes il faut et il suffit que les flèches Kv_o, Kv_1 le soient. Par suite, si l'on note Hot(A) la catégorie des complexes de A à homotopie près [27] et Hot.(A) la sous-catégorie pleine formée des complexes de chaînes, les foncteurs N et K induisent des foncteurs quasi-inverses l'un de l'autre

$$N : \text{Hotsimpl}(A) \longrightarrow \text{Hot.}(A) \ , \ K : \text{Hot.}(A) \longrightarrow \text{Hotsimpl}(A) \ .$$

1.3.5. Plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, on peut définir des foncteurs "complexe normal"

$$N : n\text{-Simpl}(A) \longrightarrow n\text{-C.}(A) \ ,$$

et "transformé de Dold-Puppe"

$$K : n\text{-C.}(A) \longrightarrow n\text{-Simpl}(A) \ ,$$

quasi-inverses l'un de l'autre. Donnons par exemple la définition de N : pour $X \in \text{ob } n\text{-Simpl}(A)$, NX est le sous-complexe de $\widetilde{X}$ (1.2.2) défini par

$$(NX)_{p_1,\ldots,p_n} = \bigcap_{\substack{1 \leq j \leq n \\ i > 0}} \text{Ker } X(\text{Id},\ldots,d^i_{p_j},\ldots,\text{Id}) \ ,$$

(les différentielles partielles étant induites par les $X(\text{Id},\ldots,d^o,\ldots,\text{Id})$. On a

---

([1]) On dit qu'une flèche de C(A) est un homotopisme si elle est inversible dans la catégorie Hot(A) des complexes à homotopie près [27].

des corollaires analogues à (1.3.3) (i) et (ii)), le sous-complexe dégénéré DX de X étant défini par

$$(DX)_{p_1,\dots,p_n} = \sum_{\substack{1\le j\le n \\ i>0}} \operatorname{Im} X(\mathrm{Id},\dots,s^i_{p_j-1},\dots,\mathrm{Id}) \quad .$$

On peut montrer ([21] VIII 8) que, pour $n = 2$, les flèches (1.2.2.1) et (1.2.2.2) respectent les sous-complexes normaux (resp. dégénérés), i.e. on a des carrés commutatifs

$$\begin{array}{ccccc}
\int NX & \longrightarrow & N\Delta X & \longrightarrow & \int NX \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\int \widetilde{X} & \xrightarrow{(1.2.2.1)} & (\Delta X)^{\sim} & \xrightarrow{(1.2.2.2)} & \int \widetilde{X} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\int DX & \longrightarrow & D\Delta X & \longrightarrow & \int DX
\end{array} \quad .$$

1.4. Catégories localisées, calculs de fractions.

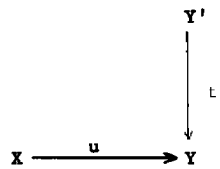
1.4.1. Soient A une catégorie et S une partie de Fl(A). On définit ([11] I 1.1) une catégorie $A(S^{-1})$, dite localisée de A par rapport à S, et un foncteur $p : A \longrightarrow A(S^{-1})$, dit foncteur canonique ou de localisation, caractérisés par la propriété que tout foncteur de A dans une catégorie C transformant les éléments de S en flèches inversibles se factorise de manière unique à travers p.

1.4.2. On dit ([11] I 2.2) que $S \subset Fl(A)$ permet un calcul de fractions à droite si les conditions suivantes sont satisfaites :

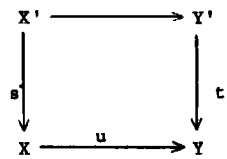
(Fr 1) Les flèches identiques de A appartiennent à S .

(Fr 2) Si $u : X \longrightarrow Y$ et $v : Y \longrightarrow Z$ appartiennent à S, vu appartient à S.

(Fr 3) Tout diagramme

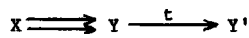


où $t \in S$ se complète en un carré commutatif

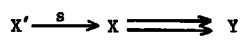


où $s \in S$.

(Fr 4) Pour tout diagramme commutatif



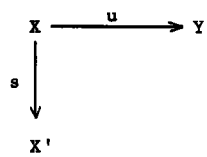
où $t \in S$, il existe un diagramme commutatif



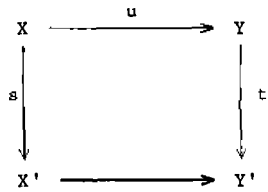
où $s \in S$.

Dualement, on dit que S <u>permet un calcul de fraction à gauche</u> si (Fr 1), (Fr 2), et les conditions ci-dessous sont satisfaites :

(Fr'3) Tout diagramme



où $s \in S$ se complète en un carré commutatif



où $t \in S$.

(Fr'4) Pour tout diagramme commutatif

$$X' \xrightarrow{s} X \rightrightarrows Y$$

où $s \in S$, il existe un diagramme commutatif

$$X \rightrightarrows Y \xrightarrow{t} Y'$$

où $t \in S$.

Enfin, on dit que S <u>permet un calcul de fractions bilatère</u> si S permet à la fois un calcul de fractions à gauche et un calcul de fractions à droite.

1.4.3. Si S permet un calcul de fractions à droite (resp. à gauche), alors l'ensemble des flèches de S de but (resp. source) un objet donné de A forme une catégorie cofiltrante (resp. filtrante), (SGA 4 I 2.7), et pour X, $Y \in \mathrm{ob}\, A(= \mathrm{ob}\, A(S^{-1}))$, on a

$$\mathrm{Hom}_{A(S^{-1})}(X,Y) = \varinjlim_{\substack{X' \to X \\ \in S}} \mathrm{Hom}_A(X',Y)$$

(resp. $\mathrm{Hom}_{A(S^{-1})}(X,Y) = \varinjlim_{\substack{Y \to Y' \\ \in S}} \mathrm{Hom}_A(X,Y')$), la limite étant prise suivant les flèches de S de but X (resp. source Y) ; de plus le foncteur de localisation commute aux limites projectives finies (resp. inductives finies). Si S permet un calcul de fractions bilatère, on a une formule symétrique

$$\mathrm{Hom}_{A(S^{-1})}(X,Y) = \varinjlim_{\substack{X' \to X \in S \\ Y' \to Y' \in S}} \mathrm{Hom}_A(X',Y') \quad ,$$

et le foncteur de localisation commute aux limites inductives et projectives finies.

1.4.4. Supposons que $S \subset Fl(A)$ permette un calcul de fractions à droite. Soient $F : A \longrightarrow B$ un foncteur, et X un objet de A. On dit (cf. SGA 4 XVII 1.2)) que F est <u>dérivable à gauche en</u> X par rapport à S si le pro-objet de B

$$LF(X) = \text{"}\varprojlim\text{"}_{X' \longrightarrow X,\ \in S} F(X')$$

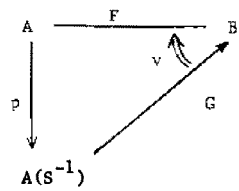
est essentiellement constant. On dit que F est <u>dérivable à gauche</u> (par rapport à S) si F est dérivable à gauche en chaque objet X de A. On peut alors regarder $X \longmapsto LF(X)$ comme un foncteur

$$LF : A(S^{-1}) \longrightarrow B \quad ,$$

qu'on appelle <u>dérivé gauche de</u> F par rapport à S. Si $p : A \longrightarrow A(S^{-1})$ est le foncteur de localisation, on a un morphisme naturel de foncteurs

$$u_F : (LF)p \longrightarrow F \quad ,$$

et il est immédiat que le couple (LF, u_F) est aussi le dérivé gauche de F suivant p au sens de ([23]I 4), i.e. que toute 2-flèche



se factorise de manière unique à travers u_F.

On laisse au lecteur le soin de formuler la notion duale de dérivabilité à droite, quand on suppose que S permet un calcul de fractions à gauche.

1.4.5. Soit A une catégorie abélienne. On dira qu'une flèche f de $Simpl(A)$ est un quasi-isomorphisme si la flèche $\tilde{f}$ induite sur les complexes de chaînes (1.2.2) est un quasi-isomorphisme, ou, ce qui revient au même (cf. (1.3.3)), s'il en est ainsi de la flèche Nf induite sur les sous-complexes normaux. On notera $Dsimpl(A)$ (resp. $D.(A)$) la catégorie localisée de $Simpl(A)$ (resp. $C.(A)$) par

rapport aux quasi-isomorphismes. Les foncteurs N et K (1.3.2) se prolongent de manière unique en des foncteurs $N : Dsimpl(A) \longrightarrow D.(A)$ et $K : D.(A) \longrightarrow Dsimpl(A)$ quasi-inverses l'un de l'autre. Comme tout homotopisme est un quasi-isomorphisme et que, d'après [27], le foncteur canonique $C.(A) \longrightarrow Hot.(A)$ (1.3.4) est un foncteur de localisation (1.4.1), le foncteur canonique $Simpl(A) \longrightarrow Dsimpl(A)$ (resp. $C.(A) \longrightarrow D.(A)$) se factorise de manière unique à travers $Hotsimpl(A)$ (resp. $Hot.(A)$), et l'on a un carré commutatif où les flèches horizontales sont des équivalences de catégories et les flèches verticales des flèches de localisation

$$\begin{array}{ccccc}
Simpl(A) & \xrightarrow{N} & C.(A) & \xrightarrow{K} & Simpl(A) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
Hotsimpl(A) & \xrightarrow{N} & Hot.(A) & \xrightarrow{K} & Hotsimpl(A) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
Dsimpl(A) & \xrightarrow{N} & D.(A) & \xrightarrow{K} & Dsimpl(A)
\end{array} .$$

On dira qu'une flèche de $Hot.(A)$ (resp. $Hotsimpl(A)$) est un quasi-isomorphisme si son image dans $D.(A)$ (resp. $Dsimpl(A)$) est inversible.

Proposition 1.4.6 a) L'ensemble des quasi-isomorphismes de $Hot(A)$ permet un calcul de fractions bilatère (1.4.2).

b) Le foncteur canonique

$$D.(A) \longrightarrow D(A)$$

est pleinement fidèle et a pour image essentielle la sous-catégorie pleine de $D(A)$ formée des complexes à cohomologie nulle en degré > 0.

1.4.7. La preuve de (1.4.6) sera donnée dans un instant. Auparavant, introduisons quelques notations : Pour $X \in \mathrm{ob}\, C(A)$ et $n \in \mathbb{Z}$, on définit les complexes tronqués

$$t_{[n}(X) = (0 \longrightarrow X^n/\mathrm{Im}\, d^{n-1} \longrightarrow X^{n+1} \longrightarrow X^{n+2} \longrightarrow \ldots) ,$$

$$t_{n]}(X) = (\ldots \longrightarrow X^{n-2} \longrightarrow X^{n-1} \longrightarrow \mathrm{Ker}\, d^n \longrightarrow 0) ,$$

où la différentielle est induite par celle de X de la manière évidente. On a un épimorphisme

$$X \longrightarrow t_{[n}(X) \tag{1.4.7.1}$$

et un monomorphisme

$$t_{n]}(X) \longrightarrow X , \tag{1.4.7.2}$$

fonctoriels en X, donnant des isomorphismes fonctoriels

$$\mathrm{Hom}(t_{[n}X,Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(X,Y) , \ \mathrm{Hom}(Z,X) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}(Z,t_{n]}X) \tag{1.4.7.3}$$

pour $Y \in \mathrm{ob}\, C^{[n}(A)$, $Z \in \mathrm{ob}\, C^{n]}(A)$, où $C^{[n}(A)$ (resp. $C^{n]}(A)$) désigne la sous-catégorie pleine de $C(A)$ formée des complexes nuls en degré $< n$ (resp. $> n$). La flèche (1.4.7.1) (resp. (1.4.7.2) induit des isomorphismes sur la cohomologie en degré $\geq n$ (resp. $\leq n$). Par suite, si $L' \longrightarrow L$ est un quasi-isomorphisme de $C(A)$ avec $L \in \mathrm{ob}\, C^{n]}(A)$, le composé $t_{n]}(L') \longrightarrow L' \longrightarrow L$ est un quasi-isomorphisme de $C^{n]}(A)$; de même, si $M \longrightarrow M'$ est un quasi-isomorphisme avec $M \in \mathrm{ob}\, C^{[n}(A)$, le composé $M \longrightarrow M' \longrightarrow t_{[n}(M')$ est un quasi-isomorphisme de $C^{[n}(A)$.

Preuve de (1.4.6). C'est purement formel (cf. SGA 4 XVII 5.5.4.1) : utiliser $t_{0]} : \mathrm{Hot}(A) \longrightarrow \mathrm{Hot}.(A)$ et le fait (Verdier [27]) que dans $\mathrm{Hot}(A)$ les quasi-isomorphismes permettent un calcul de fractions bilatère.

1.5. Résolutions simpliciales standard.

1.5.1. Notons $\bar{\Delta}$ la catégorie des ensembles finis totalement ordonnés. Soient $E \in \mathrm{ob}\ \bar{\Delta}$ et $(S_i)_{i\in E}$ une famille de foncteurs d'une catégorie C dans elle-même, on sait définir [5] le composé $o_{i\in E} S_i$ (si $E = [0,n]$, $o_{i\in E} S_i = S_o \dots S_n$, et si $E = \emptyset$, $o_{i\in E} S_i = Id_C$). Si les S_i sont égaux à un même foncteur S, on écrira S^E au lieu de $o_{i\in I} S_i$.

On dira qu'un objet simplicial (resp. cosimplicial augmenté X de C (i.e. (1.1) un contrafoncteur (resp. foncteur) de $\bar{\Delta}$ dans C) est homotopiquement trivial si l'augmentation $X_+ \longrightarrow X(\emptyset)$ (resp. $X(\emptyset) \longrightarrow X^+$) (1) est un homotopisme (1.1.5).

1.5.2. Soit (T,U) un couple de foncteurs adjoints, $T : A \longrightarrow B$, $U : B \longrightarrow A$. On note $a : Id_A \longrightarrow UT$, $b : TU \longrightarrow Id_B$ les flèches d'adjonction. On définit (8 , [14], [19]) un objet simplicial augmenté de la catégorie End(B) des foncteurs de B dans B, noté (T,U)., qu'on appelle résolution simpliciale standard définie par (T,U). Explicitement, on a

$$(T,U)_n = (TU)^{[0,n]}\ ,\quad (T,U)_{-1} = (T,U)(\emptyset) = Id_B\ ;$$

$$d_i^n = (TU)^{[0,i-1]} * b * (TU)^{[i+1,n]} \quad (2)\ ,$$

$$s_i^n = (TU)^{[0,i-1]}\, T * a * U(TU)^{[i+1,n]}\ ,$$

l'augmentation étant donnée par $b : TU \longrightarrow Id_B$. Dualement, on définit (loc. cit.) un objet cosimplicial augmenté de End(A), noté (U,T)', qu'on appelle résolution cosimpliciale standard définie par (T,U). Explicitement on a

$$(U,T)^n = (UT)^{[0,n]}\ ,\quad (U,T)^{-1} = (U,T)(\emptyset) = Id_A\ ;$$

$$d_n^i = (UT)^{[0,i-1]} * a * (UT)^{[i,n]}\ ,$$

$$s_n^i = (UT)^{[0,i-1]}\, U * b * T(UT)^{[i+2,n]}\ ,$$

l'augmentation étant donnée par $a : Id_A \longrightarrow UT$.

Par composition avec un foncteur $F : A \longrightarrow C$ (resp. $C \longrightarrow A$) on définit un objet cosimplicial augmenté F(U,T)' (resp. (U,T)'F) de Hom(A,C) (resp. Hom(C,A)). De même, par composition avec un foncteur $G : B \longrightarrow C$,

(1) On note X_+ (resp. X^+) l'objet simplicial (resp. cosimplicial) non augmenté sous-jacent.

(2) Avec les notations standard ([14] App. 1).

(resp. $C \longrightarrow B$), on définit un objet simplicial augmenté $G(T,U).$ (resp. $(T,U).G$) de $\underline{Hom}(B,C)$ (resp. $\underline{Hom}(C,B)$) .

Théorème 1.5.3.(loc. cit.) (i) Les objets simpliciaux augmentés $U(T,U).$ et $(T,U)_+T$ sont homotopiquement triviaux.

(ii) Les objets cosimpliciaux augmentés $T(U,T)^{\cdot}$ et $(U,T)^{\cdot}U$ sont homotopiquement triviaux.

1.5.4. L'énoncé (ii) se déduit de (i) par passage aux catégories opposées. Sans entrer dans le détail de la démonstration (loc. cit.) de (1.5.3), nous rappellerons, pour être complets, comment on construit un homotopisme inverse de l'augmentation $U(T,U)_+ \longrightarrow U$ (resp. $(T,U)_+ T \longrightarrow T$). On remarque que, pour $E \in \mathrm{ob}\,\overline{\Delta}$, on a $U(T,U).(E) = (U,T)^{\cdot}U(E)$, donc, pour $f : E \longrightarrow F \in \mathrm{Fl}\,\overline{\Delta}$, on a une flèche $f. = U(T,U).(f) : U(T,U).(F) \longrightarrow U(T,U).(E)$ et une flèche $f^{\cdot} = (U,T)^{\cdot}U(f) : U(T,U).(E) \longrightarrow U(T,U).(F)$. Notons ϕ les flèches de $\overline{\Delta}$ d'origine $\emptyset$. Les $\phi.$ définissent l'augmentation $U(T,U)_+ \longrightarrow U$, et l'on vérifie (loc. cit.) que les $\phi^{\cdot}$ définissent un morphisme $U \longrightarrow U(T,U)_+$ inverse à droite du précédent. On définit alors une homotopie (1.1.5) u entre Id et $\phi^{\cdot}\phi.$: $U(T,U)_+ \rightrightarrows U(T,U)_+$ de la manière suivante : pour $f : E \longrightarrow [0,1] \in \mathrm{Fl}\,\Delta$, on pose $u(f) = f_1^{\cdot} f_{1.} : U(T,U).(E) \longrightarrow U(T,U).(E)$, où f_1 est l'inclusion $f^{-1}(1) \hookrightarrow E$. De manière analogue, pour $E \in \mathrm{ob}\,\overline{\Delta}$, on a $(T,U).T(E) = T(U,T)^{\cdot}(E)$, d'où, pour $f : E \longrightarrow F \in \mathrm{Fl}\,\overline{\Delta}$, une flèche $f. : (T,U).T(F) \longrightarrow (T,U).T(E)$ et une flèche $f^{\cdot} : (T,U).T(E) \longrightarrow (T,U).T(F)$. Les $\phi.$ définissent l'augmentation $(T,U)_+T \longrightarrow T$ et les $\phi^{\cdot}$ définissent un morphisme $T \longrightarrow (T,U)_+T$ inverse à droite du précédent. On définit une homotopie v entre $\phi^{\cdot}\phi.$ et Id : $(T,U)_+T \rightrightarrows (T,U)_+T$ comme suit : pour $f : E \longrightarrow [0,1] \in \mathrm{Fl}\,\Delta$, on pose $v(f) = f_0^{\cdot} f_{0.} : (T,U).T(E) \longrightarrow (T,U).T(E)$, où f_0 est l'inclusion $f^{-1}(0) \hookrightarrow E$.

Exemples 1.5.5. Soient T un topos et A un Anneau de T .

a) Pour $X \in \mathrm{ob}\,T$, on note $A^{(X)}$ (ou A_X) le A-Module libre engendré par X (SGA 4 III). C'est le faisceau associé au préfaisceau $U \longmapsto A(U)^{(X(U))}$. C'est un A-Module plat. Notons A-Mod la catégorie des A-Modules. Le foncteur

$A^{(-)}$ est adjoint à gauche du foncteur d'oubli A-Mod $\longrightarrow$ T, i.e. on a un isomorphisme fonctoriel canonique

$$\text{(1.5.5.1)} \qquad \mathrm{Hom}_{A\text{-Mod}}(A^{(X)},M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{T}(X,M) \quad ,$$

pour $M \in$ ob A-Mod. La résolution simpliciale standard, fonctorielle en $M \in$ ob A-Mod, définie par le couple de foncteurs adjoints ($A^{(-)}$, oubli), sera notée

$$\text{(1.5.5.2)} \qquad F_A(M) \longrightarrow M$$

(ou $F(M) \longrightarrow M$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur A) et appelée <u>résolution libre standard de</u> M. D'après (1.5.3), la flèche (1.5.5.2) induit une équivalence d'homotopie sur les objets simpliciaux de T sous-jacents : c'est donc un quasi-isomorphisme selon la terminologie qui sera introduite plus bas ((2.2.1) et (3.1.7)), (ce qui signifie d'ailleurs simplements que (1.5.5.2) induit des isomorphismes sur les Modules d'Homologie des complexes de chaînes correspondants).

b) Pour $M \in$ ob A-Mod, on note

$$S_A(M) = \bigoplus_{i\in N} S_A^i(M)$$

l'Algèbre symétrique de M (SGA 4). Désignons par A-Alg la catégorie des A-Algèbres. Le foncteur $M \longmapsto S_A(M)$ est adjoint à gauche du foncteur d'oubli A-Alg $\longrightarrow$ A-Mod, i.e. on a un isomorphisme fonctoriel

$$\text{(1.5.5.3)} \qquad \mathrm{Hom}_{A\text{-Alg}}(S_A(M),B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A\text{-Mod}}(M,B) \quad ,$$

pour $B \in$ ob A-Alg.

Pour $X \in$ ob T, on note $A[X]$ la A-Algèbre libre engendrée par X, définie par la formule

$$\text{(1.5.5.4)} \qquad A[X] = S_A(A^{(X)}) \quad .$$

Le foncteur $X \longmapsto A[X]$ est, d'après (1.5.5.1) et (1.5.5.3), adjoint à gauche du foncteur d'oubli A-Alg $\longrightarrow$ T, i.e. on a un isomorphisme fonctoriel

$$\text{(1.5.5.5)} \qquad \mathrm{Hom}_{A\text{-Alg}}(A[X]\ B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{T}(X,B)$$

pour $B \in$ ob A-Alg. La résolution simpliciale standard, fonctorielle en $B \in$ ob A-Alg, définie par le couple de foncteurs adjoints $(A[-],$ oubli), sera notée

$$P_A(B) \longrightarrow B \tag{1.5.5.6}$$

(ou $P(B) \longrightarrow B$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur A) et appelée <u>résolution libre standard</u> de B . D'après (1.5.3), la flèche (1.5.5.6) induit une équivalence d'homotopie sur les objets simpliciaux de T sous-jacents, donc ((2.2.1) et (3.1.7)) est un quasi-isomorphisme, i.e. induit des isomorphismes sur l'homologie des complexes de chaînes de A-Modules correspondants.

2. Faisceaux d'homotopie d'un faisceau simplicial.

2.1. Définition des faisceaux d'homotopie, propriétés d'exactitude.

2.1.1. Rappels sur les π_n d'un ensemble simplicial pointé.

Rappelons ([11] VI 3) qu'à tout ensemble simplicial pointé (X,x) on associe un ensemble $\pi_o(X,x)$ appelé <u>ensemble des composantes connexes de</u> (X,x) (1), et, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, un groupe $\pi_n(X,x)$, commutatif pour $n \geq 2$, appelé <u>n-ième groupe d'homotopie de</u> (X,x). Les $\pi_n(X,x)$ dépendent fonctoriellement de (X,x) dans la "catégorie homotopique pointée" ([11]IV 4.3), qui est une catégorie localisée de la catégorie des ensembles simpliciaux pointés à homotopie près (i.e. Hotsimpl(Enspoint) (1.1.5), où Enspoint est la catégorie des ensembles pointés) ; en particulier, deux flèches homotopes $(X,x) \rightrightarrows (Y,y)$ induisent le même morphisme $\pi_n(X,x) \longrightarrow \pi_n(Y,y)$ pour $n \in \mathbb{N}$, tout homotopisme d'ensembles simpliciaux pointés induit des isomorphismes sur leurs π_n . On montre ([11] VII 2) que $\pi_o(X)$ (resp. $\pi_n(X,x)$, $n \geq 1$) s'identifie à l'ensemble des composantes connexes (resp. au n-ième groupe d'homotopie) de la réalisation géométrique de (X,x), ce qui explique la terminologie.

---

(1) $\pi_o(X,x)$ coïncide avec l'ensemble $\pi_o(X) = \mathrm{Coker}\, d_o, d_1 : X_1 \rightrightarrows X_o$ défini en (1.1.4).

On peut calculer les $\pi_n(X,x)$ par le procédé suivant. Tout d'abord, si X est de Kan ([11]IV 3), alors, d'après ([11] I 4.1.2, IV 2.3 et 3.1.4), $\pi_n(X,x)$ s'identifie à l'ensemble des classes d'homotopie de morphismes de $\Delta(n)/\dot{\Delta}(n)$ dans (X,x), où $\Delta(n)/\dot{\Delta}(n)$ est l'ensemble simplicial pointé obtenu en contractant le bord $\dot{\Delta}(n)$ du simplexe-type $\Delta(n)$ en un point ("sphère simplicial pointée"). Explicitant cette définition, on en déduit ([22] I 5.5) qu'on a

$$\pi_n(X,x) = Z_n/R_n \cap Z_n \quad , \tag{2.1.1.1}$$

avec les notations suivantes :

$$Z_n = \bigcap_{i\geq 0} \mathrm{Ker}\,(d_i, x_{n-1}p_n : X_n \rightrightarrows X_{n-1}) \quad ,$$

où p_n est la projection de X_n sur un point et x_{n-1} l'inclusion du point-base dans X_{n-1} ;

R_n est la relation d'équivalence sur X_n identifiant des simplexes u et v si et seulement si $d_i u = d_i v$ pour $0 \leq i \leq n$ et s'il existe un simplexe z de X_{n+1} tel que $d_n z = u$, $d_{n+1} z = v$, et $d_i z = s_{n-1} d_i u$ pour $0 \leq i \leq n$. Cette description montre que $\pi_n(X,x)$ se calcule par limites inductives finies et projectives finies à partir de X_{n+1}, X_n, X_{n-1}, des opérateurs de face d_i^{n+1}, d_j^n, et du point-base de X_n (resp. X_{n-1}). Si maintenant X est un ensemble simplicial quelconque, on utilise le plongement fonctoriel de X dans un ensemble simplicial de Kan ([20] 4) :

$$e_X^\infty : X \hookrightarrow \mathrm{Ex}^\infty(X) \quad . \tag{2.1.1.2}$$

Il est prouvé dans (loc. cit. 6.5) que e_X^∞ est inversible dans la "catégorie homotopique" ([11] IV 2.3.1), de sorte que, si x est un point-base de X et si l'on note encore x son image dans $\mathrm{Ex}^\infty(X)$, (e_X^∞, x) induit un isomorphisme

$$\pi_n(X,x) \longrightarrow \pi_n(\mathrm{Ex}^\infty(X),x) \tag{2.1.1.3}$$

pour $n \in \mathbf{N}$. On a par définition ([20] 4) :

$$\mathrm{Ex}^\infty(X) = \varinjlim \mathrm{Ex}^n(X) \quad , \quad e_X^\infty = \varinjlim e_X^n \quad , \tag{2.1.1.4}$$

$$Ex^{n+1}(X) = Ex(Ex^n(X)) \quad , \quad e_X^{n+1} = e_{Ex^n(X)}\, e_X^n$$

où, pour $Y \in$ ob Simpl(Ens), $e_Y : Y \hookrightarrow Ex(Y) = Ex^1(Y)$ est défini comme suit :

$$Ex(Y)_m = \mathrm{Hom}(Sd\,\Delta(m), Y) \quad , \tag{2.1.1.5}$$

$$Ex(Y)(f) = \mathrm{Hom}(Sd\,\Delta(f), Y) \quad \text{pour} \quad f : [0,m] \longrightarrow [0,n] \in Fl\ \Delta \ ,$$

$$(e_Y)_m = \mathrm{Hom}(Sd\,\Delta(m) \xrightarrow{\delta} \Delta(m), Y) \quad .$$

Sd désignant le foncteur subdivision barycentrique et δ la projection canonique. La subdivision de $\Delta(m)$ s'obtient en recollant suivant certaines faces un nombre fini d'exemplaires du simplexe-type $\Delta(m)$, donc $Ex(Y)_m$ est limite projective d'un diagramme fini en faisant intervenir que les opérateurs de face de Y_m dans Y_{m-1}. Par récurrence on en déduit que $Ex^n(X)$ se calcule terme à terme par limite projective finie. Ainsi, dans le cas général, les opérations à effectuer pour calculer $\pi_n(X,x)$ comprennent : (i) des limites projectives finies, pour passer de X aux $Ex^k(X)$, (ii) une limite inductive dénombrable pour passer des $Ex^k(X)$ à $Ex^\infty(X)$ (2.1.1.4), (iii) des limites projectives finies et des limites inductives finies pour calculer $\pi_n(Ex^\infty(X),x)$ par la formule (2.1.1.1).

Si X est un groupe simplicial, $\pi_o(X)$ est un groupe, et les $\pi_n(X,x)$, $n \geq 1$, sont abéliens et indépendants du point-base x, (plus précisément si y est un point-base, la translation à droite par $x^{-1}y$ donne un isomorphisme $\pi_n(X,x) \xrightarrow{\sim} \pi_n(X,y)$). On pose

$$\pi_n(X) = \pi_n(X,1) \tag{2.1.1.6}$$

où 1 est le point-base unité. On montre (cf. par exemple ([22] § 17) que tout groupe simplicial vérifie la condition de Kan, et l'on déduit (loc. cit.) de (2.1.1.1) que les groupes d'homotopie sont donnés par

$$\pi_n(X) = H_n(NX) \quad . \tag{2.1.1.7}$$

où NX est le sous-groupe simplicial normal, défini (comparer (1.3.1)) par

$$(NX)_n = \bigcap_{i>0} \mathrm{Ker}\,(d_i : X_n \longrightarrow X_{n-1}) \quad , \tag{2.1.1.8}$$

la différentielle étant induite par d_o (noter que l'image de $d_o : (NX)_{n+1} \longrightarrow (NX)_n$ est un sous-groupe distingué à Ker $d_o : (NX)_n \longrightarrow (NX)_{n-1}$, ce qui donne un sens à (2.1.1.7)).

2.1.2. Faisceautisation.

A partir de maintenant, on se fixe un topos T, dont on note e l'objet final. Quand on parlera de faisceaux (d'ensembles, de groupes, de modules, etc.) sans préciser, il sera sous-entendu qu'il s'agit de faisceaux (d'ensembles, de groupes, de modules, etc.) sur T. Soit X un faisceau simplicial, i.e. un objet simplicial de T. Un point-base de X est une flèche $e \longrightarrow X$, i.e. un élément de $X_o(e)$; si U est un objet de T, un point-base de X au-dessus de U est une section de X_o au-dessus de U. Un faisceau simplicial pointé est un couple (X,x), où X est un faisceau simplicial et x un point-base de X.

Soit (X,x) un faisceau simplicial pointé. Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle n-ième faisceau d'homotopie de (X,x), et l'on note $\pi_n(X,x)$, le faisceau associé au préfaisceau $U \longmapsto \pi_n(X(U), x|U)$ (2.1.1). Le faisceau $\pi_o(X,x)$ est indépendant de x, il coïncide avec le faisceau $\pi_o(X) = \text{Coker } d_o, d_1 : X_1 \rightrightarrows X_o$ (1.1.4). On dit que X est connexe si l'on a $\pi_o(X) \xrightarrow{\sim} e$. Pour $n \geq 1$, $\pi_n(X,x)$ est un faisceau de groupes, abéliens pour $n \geq 2$. Les $\pi_n(X,x)$ sont des foncteurs de (X,x) dans la catégorie Simpl(T,) des faisceaux simpliciaux pointés, et même, comme il résulte du cas ensembliste (2.1.1), dans la catégorie à homotopie près correspondante Hotsimpl(T.).

Comme le foncteur "faisceau associé" commute aux limites inductives (resp. projectives finies) (SGA 4 II 3), il découle de la description explicite donnée en (2.1.1) que $\pi_n(X,x)$ se calcule par limites inductives et limites projectives finies à partir de (X,x). Compte tenu des propriétés d'exactitude des limites inductives filtrantes et des foncteurs "image inverse par morphisme de topos"(SGA 4 IV), on en déduit :

Proposition 2.1.2.1. Pour $n \in \mathbb{N}$, la formation de $\pi_n(X,x)$ commute aux limites inductives filtrantes et à l'image inverse par un morphisme de topos, i.e. :

(i) *si* $(X_i, x_i)_{i \in I}$ *est un système inductif filtrant de* Simpl(T.), *la flèche canonique*

$$\varinjlim \pi_n(X_i, x_i) \longrightarrow \pi_n \varinjlim (X_i, x_i)$$

est un isomorphisme ;

(ii) *si* $f : T' \longrightarrow T$ *est un morphisme de topos, la flèche canonique* [1]

$$f^* \pi_n(X,x) \longrightarrow \pi_n(f^*X, f^*x)$$

est un isomorphisme.

En particulier, la formation de $\pi_n(X,x)$ commute au passage aux fibres : si t est un point de T (SGA 4 IV), on a

$$\pi_n(X,x)_t \xrightarrow{\sim} \pi_n(X_t, x_t) \quad .$$

Les propriétés rappelées plus haut des groupes d'homotopie d'un groupe simplicial se faisceautisent trivialement. Si X est un Groupe simplicial (i.e. un objet simplicial de la catégorie des Groupes de T), $\pi_0(X)$ est un Groupe, et, pour $n \geq 1$, $\pi_n(X,x)$ est un Groupe abélien, indépendant du point-base x (comme plus haut, si y est un point-base, la translation à droite par $x^{-1}y$ donne un isomorphisme $\pi_n(X,x) \xrightarrow{\sim} \pi_n(X,y)$). On pose comme plus haut

$$\pi_n(X) = \pi_n(X,1) \quad ,$$

où 1 est le point-base défini par la section unité. D'après (2.1.1.7) on a

(2.1.2.2) $$\pi_n(X) = H_n(NX) \quad ,$$

où le second membre désigne le n-ième faisceau d'homologie du sous-Groupe simplicial normal NX, défini par la formule analogue à (2.1.1.8). Si X est abélien (i.e. les X_n le sont) alors (1.3.3) (ii)) l'inclusion $NX \hookrightarrow \widetilde{X}$ est un homotopisme, donc on a

(2.1.2.3) $$\pi_n(X) \xrightarrow{\sim} H_n(\widetilde{X}) \quad .$$

---

[1] provenant de la flèche canonique $(X(U), x(U)) \longrightarrow ((f^*X)(f^*U), (f^*x)(f^*U))$.

2.2. Le théorème de Whitehead.

2.2.1. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de faisceaux simpliciaux de T, et soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f est un n-quasi-isomorphisme si $\pi_o(f) : \pi_o(X) \longrightarrow \pi_o(Y)$ est un épimorphisme et si de plus, pour tout $U \in$ ob T et tout point-base x de X au-dessus de U (2.1.2)

$$\pi_i(f|U,x) \ : \ \pi_i(X|U,x) \longrightarrow \pi_i(Y|U, fx)$$

est un isomorphisme pour $i<n$ et un épimorphisme pour $i = n$. On dit que f est un quasi-isomorphisme si f est un n-quasi-isomorphisme pour tout n. Quand T a assez de points (SGA 4 IV), dire que f est un n-quasi-isomorphisme (resp. un quasi-isomorphisme (équivaut, d'après (2.1.2.1 (ii)), à dire que $f_t : X_t \longrightarrow Y_t$ est un n-quasi-isomorphisme (resp. un quasi-isomorphisme) pour tout point t de T Lorsque T est le topos ponctuel, f est un quasi-isomorphisme si et seulement si f a une image inversible dans la catégorie "homotopique" ([11] IV 2.3.1), voir ([23] II § 3 Prop. 4) pour une démonstration et une liste de conditions équivalentes. Si f est un morphisme de Groupes simpliciaux, dire que f est un n-quasi-isomorphisme signifie, d'après les remarques faites plus haut, que $\pi_i(f) : \pi_i(X) \longrightarrow \pi_i(Y)$ est un isomorphisme pour $i < n$ et un épimorphisme pour $i = n$; lorsque X et Y sont abéliens, cela revient à dire, d'après (2.1.2.2) et (2.1.2.3), que Nf (resp. $\widetilde{f}$) est un $(-n)$-quasi-isomorphisme au sens de (SGA 6 I 1.4.2), i.e. que le cône de Nf (resp. $\widetilde{f}$) (regardé comme un morphisme de complexes à différentielles de degré + 1) est acyclique en degré $\geq -n$.

Le théorème ci-dessous, dans le cas où T est le topos ponctuel, est dû à J. H. C. Whitehead, voir par exemple [9] th. 5).

Théorème 2.2.2. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de faisceaux simpliciaux de T, et soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On fait l'une des hypothèses suivantes :

(i) T a assez de points ;

(ii) f est sous-jacent à un morphisme de faisceaux abéliens simpliciaux.

Alors, si f est un n-quasi-isomorphisme, il en est de même de $\mathbb{Z}^{(f)} : \mathbb{Z}^{(X)} \longrightarrow \mathbb{Z}^{(Y)}$ ([1]).

Corollaire 2.2.3. Sous les hypothèses de (2.2.2), si f est un quasi-isomorphisme, il en est de même de $\mathbb{Z}^{(f)}$.

Remarque 2.2.4. Je conjecture que les hypothèses (i), (ii) de (2.2.2) sont superflues.

2.2.5. Rappels sur les limites inductives locales.

La démonstration de (2.2.2) consiste à se ramener au cas du topos ponctuel. Cette réduction est triviale dans l'hypothèses (i), d'après (2.1.2.1 (ii)). Dans l'hypothèse (ii), on doit travailler un peu. Le principe de la réduction m'a été suggéré par P. Deligne, il repose sur sa technique de "passage à la limite inductive locale", exposé dans (SGA 4 V 8), et que nous allons d'abord rappeler brièvement.

Une catégorie localement filtrante sur T est une catégorie L cofibrée sur T^{o} ("le" foncteur image directe $L(U) \longrightarrow L(V)$ correspondant à une flèche $V \longrightarrow U$ de T étant noté comme une restriction $i \longmapsto i|V$), qui "vérifie localement les axiomes des catégories filtrantes", i.e., de manière précise, qui vérifie les axiomes :

(LF 0) Il existe une famille couvrante $(U_\alpha \longrightarrow e)$ telle que $L(U_\alpha)$ soit non vide.

(LF 1) Quels que soient $U \in \mathrm{ob}\, T$ et $i, j \in \mathrm{ob}\, L(U)$, il existe une famille couvrante $(U_\alpha \longrightarrow U)$ et des objets k_α de $L(U_\alpha)$ tels que $\mathrm{Hom}(i|U_\alpha, k_\alpha)$ et $\mathrm{Hom}(j|U_\alpha, k_\alpha)$ soient non vides.

(LF 2) Quels que soient l'objet U de T et le couple de flèches $f, g : i \rightrightarrows j$ de $L(U)$, il existe une famille couvrante $(U_\alpha \longrightarrow U)$ et des flèches s_α de $L(U_\alpha)$ de source $j|U_\alpha$ telles que $s_\alpha(f|U_\alpha) = s_\alpha(g|U_\alpha)$.

([1]) On note $\mathbb{Z}^{(-)}$ le foncteur $\mathbb{Z}$-Module libre engendré (SGA 4 VII 6.8).

Exemples. (i) T^o est de mnaière évidente une catégorie localement filtrante sur T.

(ii) Quand T est le topos ponctuel, la notion de catégorie localement filtrante sur T coïncide avec la notion usuelle de catégorie filtrante.

Soit C une catégorie. Un système inductif local d'objets de C indexé par L est un foncteur de L dans C . Quand on parlera de systèmes inductifs locaux indexés par L sans préciser, il sera sous-entendu qu'il s'agit de systèmes inductifs locaux d'ensembles. Dans le cas de l'exemple (i) ci-dessous ($L = T^o$), un système inductif local d'objets de C indexé par L n'est autre qu'un préfaisceau sur T à valeurs dans C ; d'autre part, quand T est le topos ponctuel, la notion de système inductif local d'objets de C indexé par L coïncide avec la notion habituelle de système inductif d'objets de C indexé par L . On a un foncteur évident

$$T \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(L,\mathrm{Ens}) \quad , \tag{2.2.5.1}$$

qui associe à un faisceau E sur T le système inductif local $i \in L(U) \longmapsto E(U)$, dit système inductif local trivial (ou constant) défini par E , et noté encore E. On montre dans (SGA 4 V 8) que le foncteur (2.2.5.1) admet un adjoint à gauche, noté

$$\varinjlim_L \; : \; \underline{\mathrm{Hom}}(L,\mathrm{Ens}) \longrightarrow T \quad ,$$

qu'on appelle limite inductive locale suivant L : on a donc un isomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{Hom}\left(\varinjlim_{i\in L} F_i, E\right) \simeq \mathrm{Hom}((F_i)_{i\in L}, E) \tag{2.2.5.2}$$

pour $E \in \mathrm{ob}\, T$ et $(F_i)_{i\in L} \in \mathrm{ob}\ \underline{\mathrm{Hom}}(L,\mathrm{Ens})$. On montre de plus (loc. cit.) que le foncteur $\varinjlim_L$ commute aux limites projectives finies, d'où il résulte que $\varinjlim_L$ préserve les structures algébriques "définissables en termes de limites projectives finies et limites inductives quelconques", telles que par exemple les structures de groupe, anneau, module, comodule, etc. Dans le cas où $L = T^o$ (Exemple (i)), le foncteur $\varinjlim_L$ n'est autre que le foncteur faisceau associé ; quand T est le topos ponctuel, la limite inductive locale coïncide avec la limite inductive habituelle. Dans le cas général, l'existence du foncteur $\varinjlim_L$ se prouve ainsi :

on dit qu'une famille $(i_\alpha \longrightarrow i)$ de flèches de L^o est couvrante si la famille correspondante $(U_\alpha \longrightarrow U)$ de flèches de T est couvrante ; on définit ainsi une topologie sur L^o, et l'on montre que L^o, muni de cette topologie est un site de définition de T ; le foncteur $\varinjlim_L$ est alors défini comme le foncteur faisceau associé (d'où le fait qu'il commute aux limites projectives finies).

Soit L' une sous-catégorie cofibrée pleine de L, on dit que L' est <u>cofinale</u> si, pour tout $U \in \text{ob } T$ et tout $i \in \text{ob } L(U)$, il existe une famille couvrante $(U_\alpha \longrightarrow U)$ et des $i'_\alpha \in \text{ob } L'(U_\alpha)$ tels que $\text{Hom}_{L(U_\alpha)}(i|U_\alpha, i'_\alpha)$ soit non vide. On vérifie alors trivialement que L' est localement filtrante, et que, pour tout système inductif local (E_i) indexé par L, la flèche canonique

$$\varinjlim_{i \in L'} E_i \longrightarrow \varinjlim_{i \in L} E_i$$

est un isomorphisme.

Ces rappels étant faits, la démonstration de (2.2.2) dans l'hypothèse (ii) sera donnée après quelques lemmes.

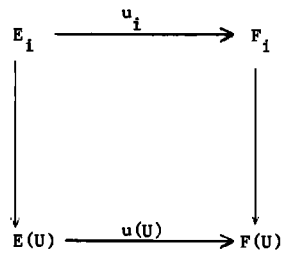
<u>Lemme</u> 2.2.6. <u>Soit</u> A <u>un anneau, et soit</u> $u : E \longrightarrow F$ <u>un morphisme de complexes de</u> A-<u>Modules</u> [1]. <u>Il existe alors une catégorie localement filtrante</u> L <u>sur</u> T <u>et un système inductif local</u> $(u_i : E_i \longrightarrow F_i)_{i \in L}$ <u>de morphismes de complexes de</u> A-<u>modules de présentation finie tels que</u> $u = \varinjlim_{i \in L} u_i$ [2].

<u>Preuve</u>. Pour $U \in \text{ob } T$, notons $L(U)$ la catégorie suivante : un objet i de $L(U)$ est une flèche de morphismes de complexes de A-modules, dont le but est $u(U)$ et l'origine, notée u_i, est un morphisme de complexes de A-modules de présentation finie, autrement dit, i est un carré commutatif de complexes de A-modules

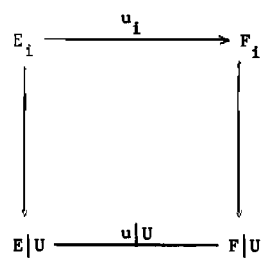
---

(1) On note encore, par abus, A l'anneau constant sur T de valeur A.

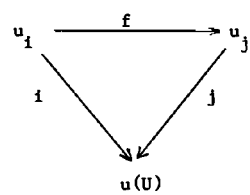
(2) $\varinjlim_{i \in L} u_i$ est défini en appliquant $\varinjlim_L$ composante à composante.



où E_i (resp. F_i) est composé de modules de présentation finie (cette donnée équivaut d'ailleurs à celle d'un carré commutatif de complexes de A-Modules au-dessus de U



où u_i est constant et les composantes de E_i (resp. F_i) ont pour valeurs des A-modules de présentation finie) ; une flèche $f : i \longrightarrow j$ de L(U) est un triangle commutatif



Pour $V \longrightarrow U \in Fl\ T$, on définit de manière évidente un foncteur "restriction" $L(U) \longrightarrow L(V)$. On obtient ainsi une catégorie L cofibrée sur T^o, dont on vérifie immédiatement qu'elle est localement filtrante (déjà chaque catégorie fibre L(U) est filtrante). Par construction, on a un système inductif local $(u_i)_{i\in L}$ de morphismes de complexes de A-modules de présentation finie, et un morphisme de systèmes inductifs locaux $(u_i)_{i\in L} \longrightarrow u$, d'où une flèche de morphismes

de complexes de A-Modules

(*) $$\varinjlim_{i \in L} u_i \longrightarrow u \quad .$$

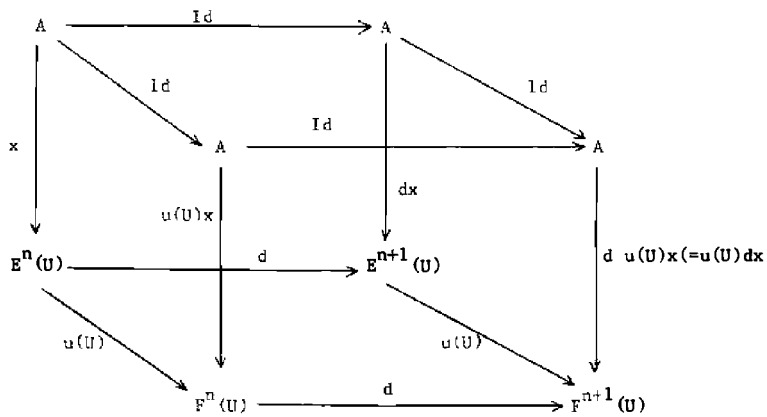
Montrons que (*) est un isomorphisme, i.e. que, pour $n \in \mathbb{Z}$, la flèche

$$\varinjlim_{i \in L} E_i^n \longrightarrow E^n \qquad (\text{resp. } \varinjlim_{i \in L} F_i^n \longrightarrow F^n)$$

induite par (*) est un isomorphisme. On se bornera à le faire pour la flèche non respée, le cas de la flèche respée étant analogue. Compte tenu de la description du foncteur $\varinjlim_L$ comme foncteur faisceau associé à un préfaisceau, on doit montrer deux choses :

(a) si x est une section de E^n au-dessus d'un objet U de T , alors, quitte à se localiser sur U , il existe $i \in \mathrm{ob}\ L(U)$ et $u \in E_i^n$ tels que $i(y) = x$;

(b) si $i \in \mathrm{ob}\ L(U)$ et $z \in E_i^n$ sont tels que $i(z) = 0$, alors, quitte à se localiser sur U , il existe une flèche $i \xrightarrow{f} j$ telle que $f(z) = 0$. Pour (a), on note que x définit une flèche $x : A \longrightarrow E^n(U)$ telle que $x(1) = x$, et cette flèche s'insère dans une flèche $i : u_i \longrightarrow u(U)$, où E_i (resp. F_i) est nul en dehors de l'intervalle $n, n+1$, et i est donné sur cet intervalle par le cube



La vérification de (b) est analogue et laissée au lecteur (il n'y a pas besoin non plus de se localiser sur U). Ceci achève la preuve de (2.2.6).

Remarque 2.2.6.1. Si dans (2.2.6) on suppose que E et F sont nuls en dehors d'un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$, les $u_i : E_i \longrightarrow F_i$ tels que E_i et F_i soient nuls en dehors de $[a,b]$ forment un système cofinal.

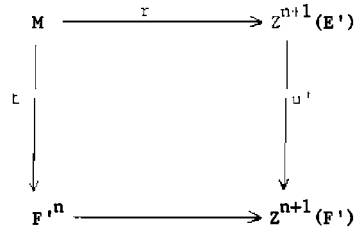
Lemme 2.2.7. Soient $n \in \mathbb{Z}$, A un anneau, $u : E \longrightarrow F$ un morphisme de complexes de A-Modules tel que $H^{n+1}(u)$ soit injectif. Soit $U \in \mathrm{ob}\ T$, et soit $f : u' \longrightarrow u(U)$ un morphisme de morphismes de complexes de A-modules (1) tel que, si G' désigne le cône de u', $H^n(G')$ soit de type fini. Alors il existe une famille couvrante $(U_\alpha \longrightarrow U)$, et, pour chaque α, un diagramme commutatif de morphismes de complexes de A-modules

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & u' & \longrightarrow & u''_\alpha & \longrightarrow & v_\alpha & \longrightarrow & 0 \\ & & & f|U_\alpha \searrow & \downarrow & & & & \\ & & & & u(U_\alpha) & & & & \end{array}$$

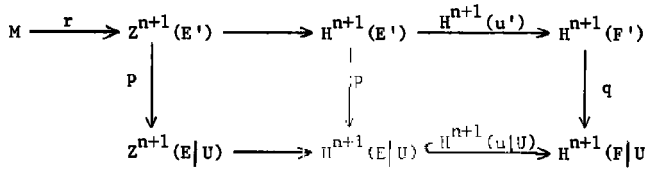
où la ligne est exacte, v_α est le morphisme identique d'un complexe concentré en degré n et de valeur un A-module libre de type fini, et $H^{n+1}(u''_\alpha)$ est injectif et a même image que $H^{n+1}(u')$.

Preuve. Elle est analogue à celle de la première partie du lemme standard "de prolongement" (SGA 6 I 1.4.1). Notons E' (resp. F') la source (resp. le but) de u', $p : E' \longrightarrow E(U)$ (resp. $q : F' \longrightarrow F(U)$) la flèche définie par f. Comme $H^n(G')$ est de type fini, il en est de même de $\mathrm{Ker}\ H^{n+1}(u')$ par la suite exacte de cohomologie, donc il existe une flèche $M \longrightarrow H^{n+1}(E')$, avec M libre de type fini, telle que la suite $M \longrightarrow H^{n+1}(E') \longrightarrow H^{n+1}(F')$ soit exacte. La flèche $M \longrightarrow H^{n+1}(E')$ se factorise à travers $Z^{n+1}(E')$ en $r : M \longrightarrow Z^{n+1}(E')$. Le composé $M \longrightarrow Z^{n+1}(E') \longrightarrow Z^{n+1}(F')$ a une image contenue dans $B^{n+1}(F')$ donc se factorise à travers F'^n en $t : M \longrightarrow F'^n$. D'où un carré commutatif

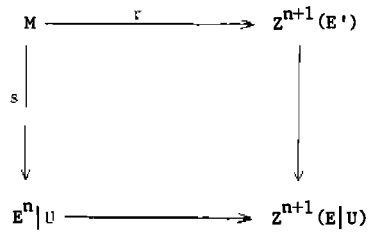
(1) qu'on peut regarder, de manière équivalente, comme un morphisme de morphismes de complexes de $A|U$-Modules $u' \longrightarrow u|U$, où u' est constant.



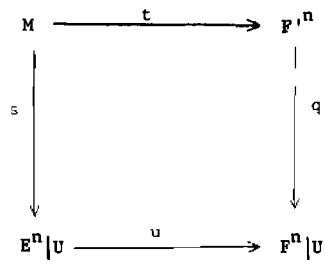
D'autre part, l'Image du composé $M \xrightarrow{r} Z^{n+1}(E') \xrightarrow{p} Z^{n+1}(E|U)$ est contenue dans $B^{n+1}(E|U)$, car on a un diagramme commutatif



où le composé supérieur est nul par construction et $H^{n+1}(u|U)$ est injectif par hypothèse. Donc, quitte à se localiser sur U , on peut supposer que le composé $M \xrightarrow{r} Z^{n+1}(E') \xrightarrow{p} Z^{n+1}(E|U)$ se factorise à travers $E^n|U$ en $s : M \longrightarrow E^n|U$ d'où un carré commutatif



Le carré



ne sera pas en général commutatif, posons

$$\delta = us - qt : M \longrightarrow F^n|U \quad .$$

Par construction, le composé $M \longrightarrow F^n|U \xrightarrow{d} F^{n+1}|U$ est nul, i.e. l'Image de δ est contenu dans $Z^n(F|U)$. On définit alors un morphisme de complexes $u'' : E'' \longrightarrow F''$ par

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots & \longrightarrow & E'^{n-1} & \xrightarrow{\binom{0}{d}} & M \oplus E'^{n} & \xrightarrow{(r,d)} & E'^{n+1} & \longrightarrow & \ldots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle u'} & & \downarrow{\scriptstyle \begin{pmatrix} Id & 0 \\ t & u' \end{pmatrix}} & & \downarrow{\scriptstyle u'} & & \\
\ldots & \longrightarrow & F'^{n-1} & \xrightarrow{\binom{0}{d}} & M \oplus F'^{n} & \xrightarrow{(0,d)} & F'^{n+1} & \longrightarrow & \ldots
\end{array}$$

un morphisme de complexe $p' : E'' \longrightarrow E|U$ par

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots & \longrightarrow & E'^{n-1} & \xrightarrow{\binom{0}{d}} & M \oplus E'^{n} & \xrightarrow{(r,d)} & E'^{n+1} & \longrightarrow & \ldots \quad , \\
 & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle (s,p)} & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \\
\ldots & \longrightarrow & E^{n-1}|U & \xrightarrow{d} & E^n|U & \xrightarrow{d} & E^{n+1}|U & \longrightarrow & \ldots \quad ,
\end{array}$$

et un morphisme de complexes $q' : F'' \longrightarrow F|U$ par

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots & \longrightarrow & F'^{n-1} & \xrightarrow{\binom{0}{d}} & M \oplus F'^{n} & \xrightarrow{(0,d)} & F'^{n+1} & \longrightarrow & \ldots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle (\delta,\, q)} & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \\
\ldots & \longrightarrow & F^{n-1}|U & \xrightarrow{d} & F^n|U & \xrightarrow{d} & F^{n+1}|U & \longrightarrow & \ldots \quad .
\end{array}$$

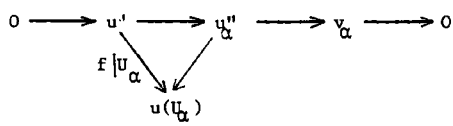
Le carré

$$\begin{array}{ccc}
E'' & \xrightarrow{u''} & F'' \\
\downarrow{\scriptstyle p'} & & \downarrow{\scriptstyle q'} \\
E|U & \xrightarrow{u|U} & F|U
\end{array}$$

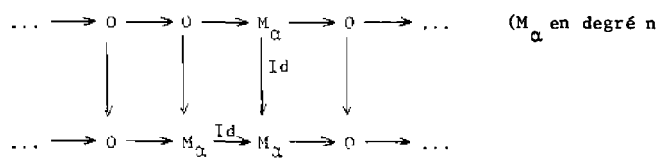
est commutatif par définition de δ , en d'autres termes on a un morphisme

$f' = (p', q') : u'' \longrightarrow u|U$. Par construction, $H^{n+1}(u'')$ est injectif et a même image que $H^{n+1}(u')$. D'autre part, on a une injection naturelle $u' \longrightarrow u''$, compatible avec $f : u' \longrightarrow u|U$ et $f' : u'' \longrightarrow u|U$, et donnant une suite exacte $0 \longrightarrow u' \longrightarrow u'' \longrightarrow v \longrightarrow 0$, où v est le morphisme identique du complexe réduit à M placé en degré n , ce qui achève la preuve.

Lemme 2.2.8. *Soient $n \in \mathbb{Z}$, A un anneau, $u : E \longrightarrow F$ un morphisme de complexes de A-Modules tel que $H^n(u)$ soit surjectif. Soit $U \in \mathrm{ob}\, T$, et soit $f : u' \longrightarrow u(U)$ un morphisme de morphismes de complexes de A-modules. On suppose que $H^{n+1}(u')$ est injectif et que $H^n(G')$ est de type fini, G' désignant le cône de u' . Alors il existe une famille couvrante $(U_\alpha \longrightarrow U)$, et, pour chaque α , un diagramme commutatif de morphismes de complexes de A-modules*



où le ligne est exacte, v_α est de la forme

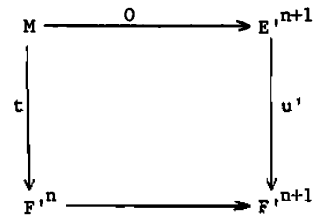


avec M_α un A-module libre de type fini, $H^{n+1}(u''_\alpha) = H^{n+1}(u')$, et $H^n(u''_\alpha)$ est surjectif.

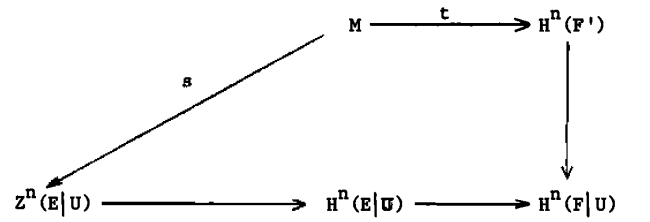
Preuve. Elle est analogue à celle de la deuxième partie du lemme de prolongement déjà cité (SGA 6 I 1.4.1). Comme $H^{n+1}(u')$ est injectif, la suite exacte de cohomologie implique que $H^n(F') \longrightarrow H^n(G')$ est surjectif ([1]). Donc, comme $H^n(G')$ est de type fini, il existe un A-module libre de type fini M et une flèche $t : M \longrightarrow Z^n(F')$ telle que le composé $M \xrightarrow{t} Z^n(F') \longrightarrow H^n(F') \longrightarrow H^n(G')$

([1]) on note comme précédemment E' (resp. F') la source (resp. le but) de u' , et $p : E' \longrightarrow E|U$ (resp. $q : F' \longrightarrow F|U$) la flèche définie par f .

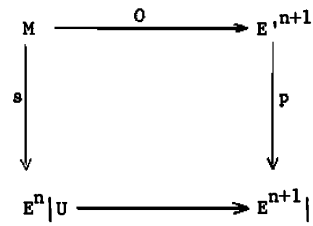
soit surjectif, et l'on a un carré commutatif



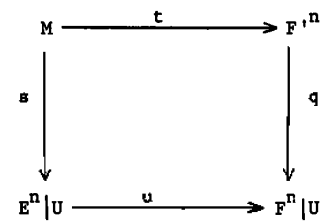
D'autre part, comme $H^n(u)$ est surjectif, quitte à se localiser sur U on peut trouver une flèche $s : M \longrightarrow Z^n(E|U)$ rendant commutatif le diagramme



et l'on a un carré commutatif



En général le carré



ne sera pas commutatif, posons

$$\delta = us - qt : M \longrightarrow F^n|U$$

L'Image de δ est contenu dans $Z^n(F|U)$ (il en est déjà ainsi de l'Image de us (resp. qt)), et même dans $B^n(F|U)$ car le composé $M \longrightarrow Z^n(F|U) \longrightarrow H^n(F|U)$ est nul par construction. Donc, quitte à se localiser sur U, on peut supposer que δ se factorise à travers $F^{n-1}|U$ en $\varepsilon : M \longrightarrow F^{n-1}|U$. On définit alors un morphisme de complexes $u'' : E'' \longrightarrow F''$ par

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & E'^{n-2} & \xrightarrow{d} & E'^{n-1} & \xrightarrow{\binom{0}{d}} & M \oplus E'^{n} & \xrightarrow{(0,d)} & E'^{n+1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle u'} & & \downarrow{\scriptstyle \binom{0}{u'}} & & \downarrow{\scriptstyle \begin{pmatrix} Id & 0 \\ t & u' \end{pmatrix}} & & \downarrow{\scriptstyle u'} & & \\
\cdots & \longrightarrow & F'^{n-2} & \xrightarrow{\binom{0}{d}} & M \oplus F'^{n-1} & \xrightarrow{Id \oplus d} & M \oplus F'^{n} & \xrightarrow{(0,d)} & F'^{n+1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array} ,$$

un morphisme de complexes $p' : E'' \longrightarrow E|U$ par

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & E'^{n-1} & \xrightarrow{\binom{0}{d}} & M \oplus E'^{n} & \xrightarrow{(0,d)} & E'^{n+1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle (s,p)} & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \\
\cdots & \longrightarrow & E^{n-1}|U & \xrightarrow{d} & E^{n}|U & \xrightarrow{d} & E^{n+1}|U & \longrightarrow & \cdots
\end{array} ,$$

et un morphisme de complexes $q' : F'' \longrightarrow F|U$ par

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & F'^{n-2} & \xrightarrow{\binom{0}{d}} & M \oplus F'^{n-1} & \xrightarrow{Id \oplus d} & M \oplus F'^{n} & \xrightarrow{(0,d)} & F'^{n+1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle (\varepsilon,q)} & & \downarrow{\scriptstyle (\delta,q)} & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \\
\cdots & \longrightarrow & F^{n-2}|U & \xrightarrow{d} & F^{n-1}|U & \xrightarrow{d} & F^{n}|U & \xrightarrow{d} & F^{n+1}|U & \longrightarrow & \cdots
\end{array} .$$

Le carré

$$\begin{array}{ccc}
E'' & \xrightarrow{u''} & F'' \\
\downarrow{\scriptstyle p'} & & \downarrow{\scriptstyle q'} \\
E|U & \xrightarrow{u|U} & F|U
\end{array}$$

est commutatif par définition de δ , i.e. on a un morphisme $f' = (p', q') : u'' \longrightarrow u|U$. Il est clair que $H^{n+1}(u'') = H^{n+1}(u')$ et que $H^n(u'') = (M \oplus H^n(E') \longrightarrow H^n(F'))$ est surjectif. D'autre part, on a une injection naturelle $u' \longrightarrow u''$, compatible avec $f : u' \longrightarrow u|U$ et $f' : u'' \longrightarrow u|U$, et donnant une suite exacte $0 \longrightarrow u' \longrightarrow u'' \longrightarrow v \longrightarrow 0$, où v est le morphisme de complexes

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \ldots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}} & & \downarrow & & \\ \ldots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \ldots \end{array} \qquad \text{(M placé en degré n)} ,$$

ce qui achève la preuve.

Lemme 2.2.9. *Soient $[n,a]$ un intervalle de $\mathbf{Z}$, A un anneau noethérien, $u : E \longrightarrow F$ un n-quasi-isomorphisme (SGA 6 I 1.4.2) de complexes de A-Modules nuls en degré $> a$. Il existe alors une catégorie localement filtrante L sur T et un système inductif local $(u_i : E_i \longrightarrow F_i)_{i \in L}$ de n-quasi-isomorphismes de complexes de A-modules de type fini tels que $u = \varinjlim_{i \in L} u_i$, E_i et F_i étant nuls en degré $> a$.*

Preuve. D'après (2.2.6) et (2.2.6.1) il existe une catégorie localement filtrante L et un système inductif local $(u_i : E_i \longrightarrow F_i)_{i \in L}$ de morphismes de complexes de A-modules de type fini, E_i et F_i étant nuls en degré $> a$, tels que $u = \varinjlim_{i \in L} u_i$. Tout revient donc à montrer que ceux des u_i qui sont des n-quasi-isomorphismes forment un système cofinal. Mais cela résulte d'une application repétée de (2.2.7) et (2.2.8) (l'hypothèse de finitude de loc. cit. est vérifiée car le cône de u_i est un complexe de modules de type fini, donc ses modules de cohomologie sont de type fini, A étant noethérien).

Lemme 2.2.10. *Soient L une catégorie localement filtrante sur T , $(X_i)_{i \in L}$ (resp. $(A_i)_{i \in L}$) un système inductif local d'ensembles (resp. anneaux). Posons $X = \varinjlim_{i \in L} X_i$, $A = \varinjlim_{i \in L} A_i$. La flèche canonique*

$$\varinjlim_{i\in L} A_i^{(X_i)} \longrightarrow A^{(X)}$$

est un isomorphisme.

Preuve. Laissée au lecteur.

Fin de la démonstration de (2.2.2). On se place dans l'hypothèses (ii), i.e. on suppose qu'on a un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ de $\mathbb{Z}$-Modules simpliciaux tel que Nf soit un $(-n)$-quasi-isomorphisme. En vertu de (2.2.9), il existe une catégorie localement filtrante L sur T et un sytème inductif local $(g_i : L_i \longrightarrow M_i)_{i\in L}$ de $(-n)$-quasi-isomorphismes de complexes de chaînes de $\mathbb{Z}$-modules de type fini tels que $Nf = \varinjlim_{i\in L} g_i$. Utilisant le théorème de Dold-Puppe (1.3.2), on déduit un système inductif local $(h_i)_{i\in L} = (Kg_i)_{i\in L}$ de n-quasi-isomorphismes de $\mathbb{Z}$-modules simpliciaux tel que $f = \varinjlim_{i\in L} h_i$ (il est immédiat que les foncteurs K et N commutent aux limites inductives locales). D'après (2.2.10) on a $\mathbb{Z}^{(f)} = \varinjlim_{i\in L} \mathbb{Z}^{(h_i)}$. En vertu du théorème de Whitehead cité plus haut (i.e. (2.2.2) dans le cas du topos ponctuel), les $\mathbb{Z}^{(h_i)}$ sont des n-quasi-isomorphismes. Compte tenu de (2.1.2.2) et des propriétés d'exactitude des limites inductives locales, il en résulte que $\mathbb{Z}^{(f)}$ est un n-quasi-isomorphisme, ce qui achève la démonstration de (2.2.2).

2.3. Catégorie dérivée des faisceaux simpliciaux. [1]

On garde le topos T et les conventions de (2.1.2).

2.3.1. Le topos Simpl(T) , sorites sur les Hom .

Il résulte du critère de Giraud (SGA 4 IV 1.2) que la catégorie Simpl(T) des faisceaux simpliciaux sur T est un topos : plus présicément, si T est un $\underline{U}$-topos, où $\underline{U}$ est un univers contenant $\mathbb{N}$, Simpl(T) est un $\underline{U}$-topos, car on peut prendre comme famille de générateurs les $\Delta(n)_U$, $n \in \mathbb{N}$, $U \in$ ob T , comme il découle de la relation

[1] Ce numéro peut-être sauté en première lecture.

(2.3.1.1) $$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Simpl}(T)}(\Delta(n)_U, X) = X_n(U)$$

(si E est un ensemble simplicial, on note E_T , ou simplement E , le faisceau simplicial déduit de E par application du foncteur "faisceau constant associé"). Pour X, $Y \in$ ob $\mathrm{Simpl}(T)$, on notera

(2.3.1.2) $$\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)$$

le faisceau des homomorphismes de X dans Y dans le topos $\mathrm{Simpl}(T)$, caractérisé par l'isomorphisme fonctoriel

(2.3.1.3) $$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Simpl}(T)}(Z, \underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Simpl}(T)}(Z \times X, Y)$$

pour $Z \in$ ob $\mathrm{Simpl}(T)$. Compte tenu de (2.3.1.1), $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)_n$ est le faisceau $U \longmapsto \mathrm{Hom}(\Delta(n)_U \times X, Y)$, et, pour $f : [0,n] \longrightarrow [0,m] \in \mathrm{Fl}\ \Delta$, la flèche $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)_f : \underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)_m \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)_n$ est définie par les flèches $\mathrm{Hom}(\Delta(f)_U \times X, Y)$. Quant T est le topos ponctuel, $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)$ coïncide avec l'ensemble simplicial considéré habituellement par les topologues (cf. par exemple ([11] II 2.5.3)). On posera

(2.3.1.4) $$\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)_0 = \underline{\mathrm{Hom}}(X,Y) \quad ,$$

autrement dit, $\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)$ est le faisceau $U \longmapsto \mathrm{Hom}(X_U, Y)$. Avec cette notation, (2.3.1.1) s'écrit sous la forme

(2.3.1.5) $$\underline{\mathrm{Hom}}(\Delta(n), X) = X_n \quad ,$$

et l'on peut dire que $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)$ est le faisceau simplicial $[0,n] \longmapsto \underline{\mathrm{Hom}}(\Delta(n) \times X, Y)$. D'autre part, (2.3.1.3) admet la variante faisceautique habituelle

(2.3.1.6) $$\underline{\mathrm{Hom}}_S(Z, \underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_S(Z \times X, Y) \quad .$$

Le foncteur $\Gamma(T,-) : T \longrightarrow \mathrm{Ens}$ induit un foncteur $\Gamma(T,-) : \mathrm{Simpl}(T) \longrightarrow \mathrm{Simpl}(\mathrm{Ens})$, adjoint à droite du foncteur "faisceau simplicial constant associé". On posera

(2.3.1.7) $$\mathrm{Hom}_S(X,Y) = \Gamma(T, \underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)) \quad .$$

En d'autres termes, $\underline{\mathrm{Hom}}s(X,Y)$ est l'ensemble simplicial $[0,n] \longmapsto \mathrm{Hom}(\Delta(n) \times X, Y)$. De (2.3.1.6) on déduit un isomorphisme fonctoriel (2.3.1.8)

$\mathrm{Hom}(Z, \underline{\mathrm{Hom}}s(X,Y)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}s(Z \times X, Y)$.

Soient $f : X' \longrightarrow X$, $g : Y' \longrightarrow Y$ des flèches de Simpl(T). On notera

(2.3.1.9) $\qquad \underline{\mathrm{Hom}}s(X'/X, Y'/Y)$,

ou $\underline{\mathrm{Hom}}s(X'/_f X, Y'/_g Y)$ quand on voudra éviter toute ambiguïté, le faisceau sur Simpl(T) des homomorphismes de f dans g (i.e. des couples $u : X \longrightarrow Y$, $u' : X' \longrightarrow Y'$ tels que $uf = gu'$), ou, si l'on préfère, le sous-faisceau de $\underline{\mathrm{Hom}}s(X,Y) \times \underline{\mathrm{Hom}}s(X',Y')$ défini par le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Hom}}s(X'/X, Y'/Y) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}s(X',Y') \\ \downarrow & & \downarrow \\ & & \underline{\mathrm{Hom}}s(X',g) \\ \underline{\mathrm{Hom}}s(X,Y) & \xrightarrow{\underline{\mathrm{Hom}}s(f,Y)} & \underline{\mathrm{Hom}}s(X',Y) \end{array} \quad .$$

Si X est l'ensemble simplicial final, on écrira simplement $\underline{\mathrm{Hom}}s(X',Y'/Y)$ au lieu de $\underline{\mathrm{Hom}}s(X'/X, Y'/Y)$.

On posera comme précédemment

(2.3.1.10) $\qquad \mathrm{Hom}s(X'/X, Y'/Y) = \Gamma(T, \underline{\mathrm{Hom}}s(X'/X, Y'/Y))$.

Enfin, soient $p : X \longrightarrow Z$, $q : Y \longrightarrow Z$ des flèches de Simpl(T), on notera

(2.3.1.11) $\qquad \underline{\mathrm{Hom}}s_Z(X,Y)$,

(ou $\underline{\mathrm{Hom}}s_Z(p,q)$ si l'on veut éviter toute ambiguité) le faisceau sur Simpl(T) des Z-morphismes de X dans Y, et l'on posera

(2.3.1.12) $\qquad \mathrm{Hom}s_Z(X,Y) = \Gamma(T, \underline{\mathrm{Hom}}s_Z(X,Y))$.

Entre les foncteurs (2.3.1.9) et (2.3.1.11) on a diverses relations analogues à (2.3.1.6), et dont nous ne dresserons pas la liste, attendu qu'il s'agit de relations triviales qui ne sont pas particulières à Simpl(T) mais sont valables

dans n'importe quel topos. Nous consignerons cependant pour la suite l'isomorphisme canonique fonctoriel

$$\underline{\mathrm{Hom}}_Z(X,\underline{\mathrm{Hom}}(K,Y/Z)) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_Z(K \times X,Y) \quad . \tag{2.3.1.13}$$

pour K, $Z \in \mathrm{ob}\ \mathrm{Simpl}(T)$ et X, $Y \in \mathrm{ob}\ \mathrm{Simpl}(T)_{/Z}$ ($K \times X$ et $\underline{\mathrm{Hom}}(K,Y/Z)$ étant regardés comme objets au-dessus de Z de la façon naturelle). On tire de (2.3.1.13) des formules analogues avec Hom_Z (resp. Hom_Z, resp. $\underline{\mathrm{Hom}}_Z$) qu'on laisse au lecteur le soin d'écrire.

Les foncteurs $\underline{\mathrm{Hom}}$, Hom qu'on vient d'introduire commutent aux limites projectives en leur second argument (ce sont des adjoints à droite) donc "préservent les structures algébriques (sur le second argument) définissables en termes de limites projectives". Par exemples, si Y est un Groupe simplicial, il en est de même de $\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)$ pour $X \in \mathrm{ob}\ \mathrm{Simpl}(T)$; si $Y \longrightarrow Z$ est un morphisme de Groupes simpliciaux, $\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y/Z)$ est un Groupe simplicial muni d'un morphisme de Groupes dans Z, etc.

Soit $f : T' \longrightarrow T$ un morphisme de topos. L'extension naturelle de f^* à $\mathrm{Simpl}(T)$ commute aux limites inductives et aux limites projectives finies, donc est le foncteur image inverse par un morphisme de topos noté encore $f : \mathrm{Simpl}(T') \longrightarrow \mathrm{Simpl}(T)$; le foncteur image directe correspondant $f_* : \mathrm{Simpl}(T') \longrightarrow \mathrm{Simpl}(T)$ n'est autre que l'extension naturelle de $f_* : T' \longrightarrow T$ [1]. Pour X, $Y \in \mathrm{ob}\ \mathrm{Simpl}(T)$ on a un homomorphisme canonique fonctoriel

$$f^*\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(f^*X, f^*Y) \quad . \tag{2.3.1.13}$$

Celui-ci est un isomorphisme si X est, localement sur T, isomorphe au faisceau simplicial constant défini par un ensemble simplicial de présentation finie (on dit qu'un ensemble simplicial E est de <u>présentation finie</u> s'il existe une suite

---

[1] Quand T est le topos ponctuel, le foncteur f^* (resp. f_*) n'est autre que le foncteur "faisceau simplicial constant" (resp. $\Gamma(T',-)$) envisagé plus haut.

exacte $L_1 \rightrightarrows L_0 \longrightarrow E$ où L_0 et L_1 sont des sommes finies d'ensembles simpliciaux du type $\Delta(n)$) : on est en effet ramené au cas où $X = \Delta(n)$, on a $\underline{\mathrm{Homs}}(\Delta(n), Y)_p = \underline{\mathrm{Hom}}(\Delta(n) \times \Delta(p), Y)$, et l'on gagne grâce à (2.3.1.5) car $\Delta(n) \times \Delta(p)$ est de présentation finie ([11] II 5.5).

2.3.2. Cylindres, objets de chemins, interprétation des homotopies.

Rappelons ([11] IV 1.2) que la projection $\Delta(1) \longrightarrow \Delta(0)$ est un homotopisme, et même, plus précisément, que les flèches Id et $d^1 s^0$ de $\Delta(1)$ dans $\Delta(1)$ (resp. Id et $d^0 s^0$) sont homotopes par une homotopie respectant le point-base $\{0\} = d^1(0)$ (resp. $\{1\} = d^0(0)$). Pour $X \in \mathrm{ob}\ \mathrm{Simpl}(T)$, le faisceau simplicial $\Delta(1) \times X$ (resp. $\underline{\mathrm{Homs}}(\Delta(1), X)$) sera appelé cylindre (resp. objet des chemins) de X . D'après (2.3.1.3), le foncteur cylindre est adjoint à gauche du foncteur objet des chemins. Les deux points-base de $\Delta(1)$ et la projection de $\Delta(1)$ sur un point définissent des flèches $d^0, d^1 : X \rightrightarrows \Delta(1) \times X$, $s^0 : \Delta(1) \times X \longrightarrow X$ (resp. $d_0, d_1 : \underline{\mathrm{Homs}}(\Delta(1), X) \rightrightarrows X$, $s_0 : X \longrightarrow \underline{\mathrm{Homs}}(\Delta(1), X)$) telles que $s^0 d^0 = s^0 d^1 = \mathrm{Id}$, (resp. $d_0 s_0 = d_1 s_1 = \mathrm{Id}$), et il résulte de ce qu'on vient de rappeler que s^0 est un homotopisme au-dessous de X quand on regarde $\Delta(1) \times X$ comme au-dessous de X via d^0 ou d^1 au choix (resp. s_0 est un homotopisme au-dessus de X quand on regarde $\underline{\mathrm{Homs}}(\Delta(1), X)$ comme au-dessus de X via d_0 ou d_1 au choix) (cf. (1.1.6) pour la notion d'homotopie relative envisagée ici). Soient $u_0, u_1 : X \rightrightarrows Y$ des flèches de $\mathrm{Simpl}(T)$, la donnée d'une homotopie u entre u_0 et u_1 équivaut à celle d'une flèche $u : \Delta(1) \times X \longrightarrow Y$ telle que $ud^0 = u_0$, $ud^1 = u_1$ (resp. d'une flèche $u : X \longrightarrow \underline{\mathrm{Homs}}(\Delta(1), Y)$ telle que $d_0 u = u_0$, $d_1 u = u_1$). Pour que u_0 et u_1 soient homotopes, il faut et il suffit qu'il existe, pour un entier n , une "homotopie composée de longueur n " entre u_0 et u_1 , i.e. par définition une flèche de $I_n \times X$ dans Y (où I_n est l'ensemble simplicial défini dans ([11] IV 1.1)) coïncidant avec u_0 (resp. u_1) sur $\{0\} \times X$ (resp. $\{n\} \times X$) (ou ce qui revient au même une flèche de X dans $\underline{\mathrm{Homs}}(I_n, Y)$ telle que ...). Il en résulte qu'on a

(2.3.2.1) $\mathrm{Hot}(X,Y) = \pi_o \ \mathrm{Homs}(X,Y)$,

où $\mathrm{Homs}(X,Y)$ est défini en (2.3.1.7) et Hot est une notation abrégée pour $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Hotsimpl}(T)}$. La notion d'homotopie relative s'interprète de manière analogue. Soient $Z \in \mathrm{ob}\ \mathrm{Simpl}(T)$, X, Y des objets de $\mathrm{Simpl}(T)$ au-dessus de Z , u_o , $u_1 : X \rightrightarrows Y$ deux Z-flèches. La donnée d'une Z-homotopie u entre u_o et u_1 (1.1.6) équivaut à celle d'une Z-flèche $u : \Delta(1) \times X \longrightarrow Y$ telle que $ud^o = u_o$, $ud^1 = u_1$ (resp. d'une Z-flèche $u : X \longrightarrow \underline{\mathrm{Homs}}(\Delta(1), Y/Z)$ telle que $ud_o = u_o$, $ud_1 = u_1$) (cf. (2.3.1.9) et (2.3.1.13)). Par suite on a

(2.3.2.2) $\mathrm{Hot}_Z(X,Y) = \pi_o \ \mathrm{Hom}_Z(X,Y)$,

où $\mathrm{Hom}_Z(X,Y)$ est défini en (2.3.1.12) et $\mathrm{Hot}_Z(X,Y)$ désigne l'ensemble des classes de Z-homotopie de Z-morphismes de X dans Y .

Proposition 2.3.3. Le foncteur canonique

$$\mathrm{Simpl}(T) \longrightarrow \mathrm{Hotsimpl}(T)$$

identifie $\mathrm{Hotsimpl}(T)$ à la catégorie localisée (1.4.1) de $\mathrm{Simpl}(T)$ par rapport aux homotopismes.

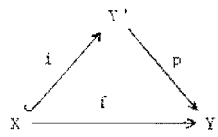
Preuve. C'est une conséquence formelle de l'existence d'un cylindre (resp. d'un objet des chemins). Posons pour abréger $\mathrm{Simpl}(T) = A$, $\mathrm{Hotsimpl}(T) = B$, notons H l'ensemble des homotopismes. Le foncteur canonique $A \longrightarrow B$ induit un foncteur

(*) $$A(H^{-1}) \longrightarrow B \quad ,$$

qui est un isomorphisme sur les objets et un épimorphisme sur les flèches. Il reste à voir que (*) est injectif sur les flèches. Pour cela, il suffit de montrer que s'il existe une homotopie u entre deux flèches u_o, $u_1 : X \rightrightarrows Y$, alors u_o et u_1 coïncident dans $A(H^{-1})$. Or u est définie par une flèche $u : X \times \Delta(1) \longrightarrow Y$ telle que $ud^o = u_o$, $ud^1 = u_1$, donc on est ramené à voir que d^o, $d^1 : X \rightrightarrows X \times \Delta(1)$ coïncident dans $A(H^{-1})$, mais cela résulte de l'existence de l'homotopisme $s^o : X \times \Delta(1) \longrightarrow X$ tel que $s^o d^o = s^o d^1 = \mathrm{Id}$. (On peut faire un

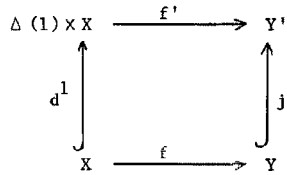
raisonnement analogue en utilisant l'objet des chemins $\underline{Hom}(\Delta(1), Y))$.

Proposition 2.3.4. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une flèche de $Simpl(T)$. Il existe un triangle commutatif



où i est un monomorphisme et p un homotopisme.

Preuve. Définissons le "mapping-cylinder" Y' par le carré cocartésien



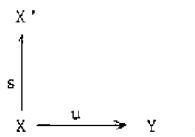
i.e. Y' est le quotient de $(\Delta(1) \times X) \amalg Y$ par la relation d'équivalence qui identifie $(0,x)$ à $f(x)$. La projection $s^0 : \Delta(1) \times X \longrightarrow X$ est un homotopisme au-dessous de X rétractant d^1 , donc par cochangement de base (cf. (1.1.6.2)) définit un homotopisme $p : Y' \longrightarrow Y$ rétractant j . D'autre part, la flèche $i : f'd^0 : X \longrightarrow Y'$, envoyant x sur la classe de $(1,x)$, est un monomorphisme, et l'on a $f : pi$, ce qui achève la preuve.

Définition 2.3.5. On appelle catégorie dérivée des faisceaux simpliciaux sur T , ou catégorie dérivée simpliciale de T , et l'on note $D.(T)$, la catégorie localisée (1.4.1) de $Simpl(T)$ par rapport aux quasi-isomorphismes (2.2.1).

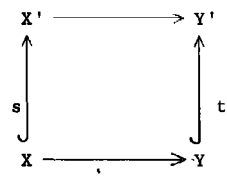
Remarque 2.3.5.1. On dira qu'une flèche u de $Hotsimpl(T)$ (on écrira aussi $Hot.(T)$ en abrégé) est un quasi-isomorphisme si u est l'image d'un quasi-isomorphisme par le foncteur canonique $Simpl(T) \longrightarrow Hot.(T)$. Il résulte de (2.3.3) que $D.(T)$ s'identifie à la catégorie localisée de $Hot.(T)$ par rapport aux quasi-isomorphismes.

Théorème 2.3.6. Supposons que T ait assez de points (SGA 4 IV 6.4.1), Alors, dans Hot.(T), l'ensemble des quasi-isomorphismes permet un calcul de fractions à gauche (1.4.2). ([1])

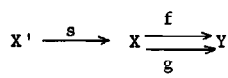
Preuve. Les axiomes (Fr 1) et (Fr 2) sont trivialement vérifiées. Montrons qu'on a (Fr'3). Soit un diagramme de Simpl(T)



où s est un quasi-isomorphisme. Quitte à remplacer s par une flèche isomorphe dans Hot.(T), on peut, d'après (2.3.4), supposer que s est un monomorphisme. Définissons Y' par le carré cocartésien



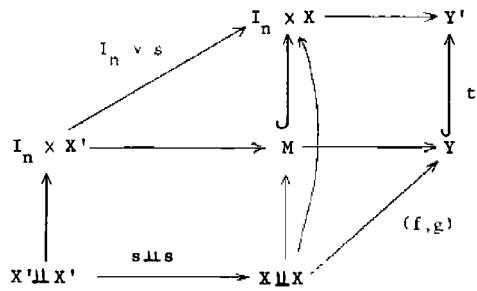
Je dis que t est un quasi-isomorphisme. Il suffit (2.2.1) de le vérifier en chaque point de T , autrement dit on peut supposer que T est le topos ponctuel. D'après ([23] Cor. p. 3.19) s est une extension anodine ([11] IV 2), donc ([11] IV 2.1 (ii)) il en est de même de t . Reste à vérifier (Fr'4). On procède comme dans le cas du topos ponctuel ([11] IV 2.3). Soit un diagramme de Simpl(T)



tel que fs et gs soient homotopes, s étant un quasi-isomorphisme. Quitte à remplacer s par une flèche isomorphe dans Hot.(T), on peut supposer (2.3.4) que s est un monomorphisme. La donnée d'une homotopie composée de longueur n entre

([1]) L'hypothèse que T a assez de points est sans doute superflue.

fs et gs définit comme dans (loc. cit.) un diagramme commutatif à carrés cocartésiens



;

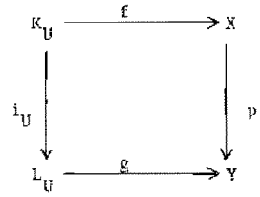
la flèche verticale $X \amalg X \longrightarrow I_n \times X$ (resp. $X' \amalg X' \longrightarrow I_n \times X'$) est l'injection canonique définie par les points-base 0 et n ; on a donc une homotopie composée de longueur n entre tf et tg , mais t est un quasi-isomorphisme, car dans le cas ponctuel (loc. cit.) t est une extension anodine, donc (Fr'4) est bien vérifié, ce qui achève la preuve.

2.3.7. On sait ([11] IV 3.2.1) que, dans le cas où T est le topos ponctuel, la catégorie D.(T) est naturellement équivalente à la catégorie à homotopie près des ensembles simpliciaux de Kan. On veut voir maintenant ce qui subsiste de cette propriété dans le cas général.

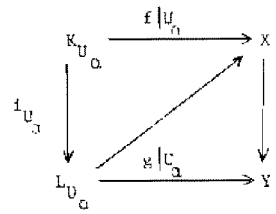
2.3.7.1. Soit M un ensemble de monomorphismes d'ensembles simpliciaux. Nous dirons que M est <u>faiblement saturé</u> si M vérifie les conditions (i), (ii), (iii) de ([11] IV 2.1) et, de plus, est stable par somme disjointe <u>finie</u> et composition <u>finie</u>. Si N est un ensemble de monomorphismes d'ensembles simpliciaux, l'intersection des M faiblement saturés contenant N est un ensemble faiblement saturé qu'on appelle ensemble faiblement saturé engendré par N . Nous dirons qu'un monomorphisme i d'ensembles simpliciaux est une <u>extension anodine stricte</u> si i appartient à l'ensemble faiblement saturé engendré par les inclusions du type $V(n,k) \longrightarrow \Delta(n)$, où $V(n,k)$ est le "cornet" de sommet k défini par $\Delta(n)$

(noté $\Lambda^k[n]$ dans (loc. cit.)). Les arguments de (loc. cit.) montrent que si $Y \hookrightarrow X$ est une inclusion avec X de type fini, i.e. quotient d'un nombre fini de simplexes standard, alors l'inclusion $(\Delta(1) \times Y) \cup (e \times X) \longrightarrow \Delta(1) \times X$ (où $e = \{0\}$ ou $\{1\}$) est une extension anodine stricte, et, comme en ([11] IV 2.2), on en déduit que, si $K \hookrightarrow L$ est une extension anodine stricte, alors il en est de même de l'inclusion $(L \times Y) \cup (K \times X) \longrightarrow L \times X$.

Définition 2.3.7.2. Soient $i : K \longrightarrow L$ un morphisme d'ensembles simpliciaux, $p : X \longrightarrow Y$ un morphisme de faisceaux simpliciaux de T . Nous dirons que p possède la propriété de relèvement local (en abrégé PRL) relativement à i si, pour tout $U \in \mathrm{ob}\, T$, et tout diagramme commutatif



il existe une famille couvrante $(U_\alpha \longrightarrow U)$ et, pour chaque α , une flèche $L_{U_\alpha} \longrightarrow X$ telle que le diagramme



soit commutatif. Soit M un ensemble de morphismes d'ensembles simpliciaux, nous dirons que p possède la PRL rel. à M si p possède la PRL rel. à chaque élément de M .

Lemme 2.3.7.3. Soient p un morphisme de faisceaux simpliciaux, N un ensemble de monomorphismes d'ensembles simpliciaux, $\overline{N}$ l'ensemble faiblement saturé engendré (2.3.7.1). Les assertions " p possède la PRL rel. à N " et " p possède la PRL rel. à $\overline{N}$ " sont équivalentes.

C'est une conséquence triviale des définitions.

2.3.8. Nous dirons qu'une flèche p de $Simpl(T)$ est une fibration (ou un morphisme fibrant) si p possède la PRL rel. à toute inclusion du type $V(n,k) \longrightarrow \Delta(n)$, ou, ce qui revient au même d'après (2.3.7.3), rel. à l'ensemble des extensions anodines strictes (2.3.7.1). Nous dirons qu'un faisceau simplicial X est de Kan si la projection de X sur le faisceau simplicial final est une fibration. Dans le cas où T est le topos ponctuel, on retrouve la notion habituelle ([11] IV 3.1). Il découle trivialement des définitions que la notion de morphisme fibrant est stable par changement de base dans $Simpl(T)$, rétraction, composition finie, produit fini, et image inverse par un morphisme de topos $T' \longrightarrow T$ (pour cette dernière assertion, utiliser que la flèche (2.3.1.13) est un isomorphisme pour X constant de présentation finie). En particulier la notion de fibration est stable par passage aux fibres ; quand T a assez de points, dire que p est une fibration équivaut à dire que p_x est une fibration pour tout point x de T.

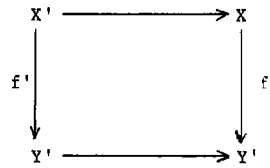
Soit X un faisceau simplicial. Pour tout entier $n \geq 1$, le préfaisceau simplicial $U \longmapsto Ex^n(X(U))$ (2.1.1.4) est un faisceau simplicial, qu'on notera $\underline{Ex}^n(X)$. Le faisceau $\varinjlim_n \underline{Ex}^n(X)$ est composante à composante, le faisceau associé au préfaisceau $U \longmapsto Ex^\infty(X(U))$ (loc. cit.), on le notera $\underline{Ex}^\infty(X)$. Il est immédiat que c'est un faisceau simplicial de Kan. Par faisceautisation (2.1.1.2) définit un monomorphisme

$$\underline{e}_X^\infty \ : \ X \hookrightarrow \underline{Ex}^\infty(X) \quad , \tag{2.3.8.1}$$

qui est un quasi-isomorphisme.

2.3.9. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de Groupes simpliciaux. Les arguments de ([23] II § 3 Prop. 1 p. 3.8), mutatis mutandis, montrent que f est une fibration (au sens (2.3.8)) si et seulement si Nf (2.1.2.2) est un épimorphisme en degré > 0, ou encore si et seulement si la flèche $X \longrightarrow Y \times_{K(\pi_0(Y),0)} K(\pi_0(X),0)$ est un épimorphisme en tout degré. Compte tenu de (2.1.2.2) et (2.1.2.3), f est donc un quasi-isomorphisme fibrant si et seulement si f est un épimorphisme en tout

degré et $\pi_* \mathrm{Ker}(f) = 0$. Il en résulte en particulier que si



est un carré cartésien de Groupes simpliciaux, et si f est un quasi-isomorphisme fibrant, il en est de même de f' (puisque $\mathrm{Ker}(f') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}(f)$). (J'ignore si l'analogue de cette dernière assertion pour les faisceaux simpliciaux est vrai en général, il l'est en tout cas dès que T a assez de point par réduction au cas ensembliste).

Proposition 2.3.10. (cf. ([11] VI Prop. 4.3)). Soit $Y \longrightarrow X$ une inclusion d'ensembles simpliciaux avec X de type fini, et soit $E \longrightarrow F$ un morphisme fibrant de faisceaux simpliciaux. Alors la flèche canonique

$$\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,E) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_S(Y/X, E/F)$$

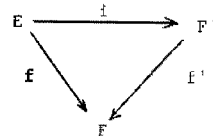
(cf. (2.3.1.9)) est un morphisme fibrant.

La preuve est la même que dans (loc. cit.) : on utilise le fait (2.3.7.1) que, si $K \hookrightarrow L$ est une extension anodine stricte, l'inclusion $(L \times Y) \cup (K \times X) \hookrightarrow L \times X$ est une extension anodine stricte.

Corollaire 2.3.10.1. Si X est un ensemble simplicial de type fini et $E \longrightarrow F$ un morphisme fibrant de faisceaux simpliciaux, la flèche $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,E) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_S(X,F)$ est un morphisme fibrant.

Corollaire 2.3.10.2. Si $Y \longrightarrow X$ est une inclusion d'ensembles simpliciaux avec X de type fini, et E un faisceau simplicial de Kan, la flèche $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,E) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_S(Y,E)$ est une fibration.

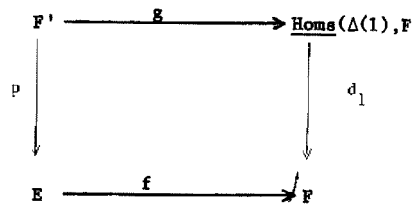
Proposition 2.3.11. Soit $F : E \longrightarrow F$ un morphisme de faisceaux simpliciaux de Kan. Il existe un triangle commutatif



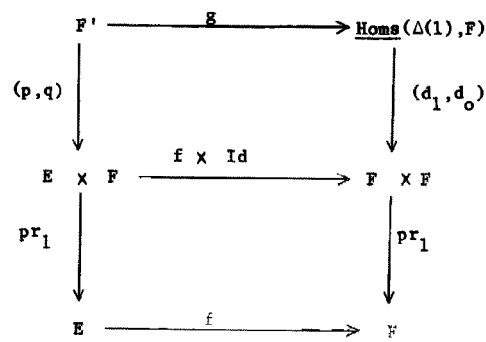
où f' est une fibration et i un homotopisme .

Preuve. Elle est "duale" de celle de (2.3.4). Notons F' le faisceau simplicial défini par le carré cartésien

(*)



Le section s_o de d_1 définit une section i de p, et comme s_o est un homotopisme au-dessus de F (2.3.2), i est un homotopisme par changement de base (1.1.6). Posons $f' = d_o g$. On a $f = f'i$. Donc on aura gagné si l'on montre que f' est une fibration. Or le carré (*) se décompose en carrés cartésiens



et l'on a $f' = d_o g = pr_2(d_1,d_o)g = pr_2 (f \times Id)(p,q) = pr_2(p,q)$. Comme E est de Kan, $pr_2 : E \times F \longrightarrow F$ est une fibration ; d'autre part, comme F est de

Kan, (d_1, d_o) est une fibration d'après (2.3.10.2) appliqué à l'inclusion $(\{0\} \cup \{1\}) \longrightarrow \Delta(1)$, donc, par changement de base, (p,q) est une fibration, donc f' est une fibration, ce qui achève la preuve.

Théorème 2.3.12. Notons $\mathrm{Hot.}(T)_{kan}$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Hot.}(T)$ formée des faisceaux de Kan, $D.(T)_{kan}$ la catégorie localisée de $\mathrm{Hot.}(T)_{kan}$ par rapport aux quasi-isomorphismes. Si T possède assez de points, alors, dans $\mathrm{Hot.}(T)_{kan}$, les quasi-isomorphismes permettent un calcul de fractions à droite, et le foncteur naturel

$$D.(T)_{kan} \longrightarrow D.(T)$$

est une équivalence de catégories.

Preuve. Les axiomes (Fr 1) et (Fr 2) (1.4.2) sont trivialement vérifiés. Soit maintenant

$$\begin{array}{ccc} & & Y' \\ & & \downarrow t \\ X & \xrightarrow{u} & Y \end{array}$$

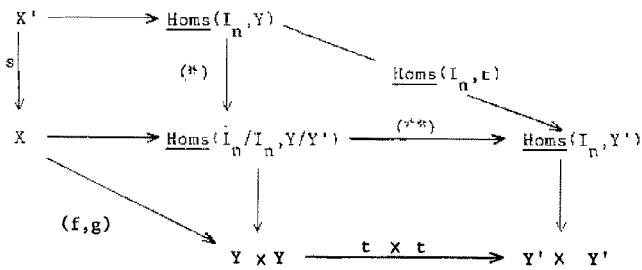
un diagramme de $\mathrm{Simpl}(T)$ dont les sommets sont de Kan et où t est un quasi-isomorphisme. D'après (2.3.11), on peut supposer que t est fibrant. Définissons X' par le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & Y' \\ \downarrow s & & \downarrow t \\ X & \xrightarrow{u} & Y \end{array} \quad .$$

Comme T est fibrant, il en est de même de s, et par suite X' est de Kan. D'autre part, par réduction au cas ensembliste, on voit que s est un quasi-isomorphisme, donc (Fr 3) est bien vérifié. Reste (Fr 4). Soit

$$X \rightrightarrows Y \xrightarrow{t} Y'$$

un diagramme de $\mathrm{Simpl}(T)$, dont les sommets sont de Kan, et où T est un quasi-isomorphisme tel que tf et tg soient homotopes. Comme précédemment, on peut supposer, d'après (2.3.11), que T est fibrant. La donnée d'une homotopie composée de longueur n entre tf et tg définit alors un diagramme commutatif à carrés cartésiens



où $\dot{I}_n = \{0\} \cup \{n\}$, la flèche verticale $\underline{\mathrm{Homs}}(I_n,Y) \longrightarrow Y \times Y$ (resp. $\underline{\mathrm{Homs}}(I_n,Y') \longrightarrow Y' \times Y'$) est définie par l'inclusion $\dot{I}_n \hookrightarrow I_n$, et (*) est la flèche canonique. D'après (2.3.10) et (2.3.10.2) les flèches verticales du diagramme sont des fibrations (et par suite tous les sommets du diagramme sont des faisceaux de Kan). Comme l'injection naturelle $Y \longrightarrow \underline{\mathrm{Homs}}(I_n,Y)$ (resp. $Y' \longrightarrow \underline{\mathrm{Homs}}(I_n,Y')$) est un homotopisme et que t est un quasi-isomorphisme, $\underline{\mathrm{Homs}}(I_n,t)$ est un quasi-isomorphisme. D'autre part, vu la stabilité des quasi-isomorphismes fibrants par changement de base dans le cas ensembliste, $t \times t$ et (**) sont des quasi-isomorphismes. Donc (*) est un quasi-isomorphisme fibrant, donc aussi s (toujours par réduction au cas ensembliste). Comme le diagramme donne une homotopie de longueur n entre fs et gs, l'axiome (Fr 4) est donc bien vérifié, ce qui prouve la première assertion. Pour la seconde, on utilise le foncteur $\underline{\mathrm{Ex}}^\infty$ (2.3.8.1). Celui-ci commute aux produits finis, donc (cf. ([20] II 9)) se prolonge en un foncteur $\underline{\mathrm{Ex}}^\infty : \mathrm{Hot.}(T) \longrightarrow \mathrm{Hot.}(T)_{kan}$. D'après (2.3.8.1), ce dernier transforme quasi-isomorphismes en quasi-isomorphismes, donc se prolonge en un foncteur $\underline{\mathrm{Ex}}^\infty : \mathrm{D.}(T) \longrightarrow \mathrm{D.}(T)_{kan}$, qui, toujours d'après (2.3.8.1), est

quasi-inverse du foncteur naturel $D.(T)_{kan} \longrightarrow D.(T)$, ce qui achève la démonstration.

Remarques 2.3.12.1. (i) Comme dans (2.3.6), l'hypothèse que T possède assez de points est sans doute inutile.

(ii) A la différence de ce qui se passe dans le cas du topos ponctuel, (cf. ([11] IV 3.2.1)), le foncteur de localisation $Hot.(T)_{kan} \longrightarrow D.(T)$ n'est pas en général une équivalence de catégories : pour un exemple, voir plus bas (3.2.1.16) et (3.2.1.20).

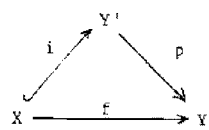
2.3.13. Variantes relatives.

On se fixe $B \in ob\ Simpl(T)$.

2.3.13.1. Nous dirons qu'une flèche de $Simpl(T)_{/B}$ est un quasi-isomorphisme si la flèche sous-jacente de $Simpl(T)$ en est un. Nous appellerons catégorie dérivée de T rel. à B, et nous noterons $D.(T,B)$ la catégorie localisée de $Simpl(T)_{/B}$ par rapport aux quasi-isomorphismes. Notons d'autre part $Hot.(T,B)$ la catégorie ayant mêmes objets que $Simpl(T)_{/B}$ et dont les flèches sont les classes de B-homotopie de flèches de $Simpl(T)_{/B}$ (1.1.6). L'interprétation des B-homotopies à l'aide d'un cylindre (2.3.2) montre, comme dans (2.3.3), que $Hot.(T,B)$ est localisée de $Simpl(T)_{/B}$ par rapport aux B-homotopismes, et par suite que $D.(T,B)$ est localisée de $Hot.(T,B)$ par rapport aux quasi-isomorphismes (avec l'extension évidente de la terminologie).

Notant que les limites inductives dans $Simpl(T)_{/B}$ "se calculent déjà dans $Simpl(T)$", on a la généralisation suivante de (2.3.4) :

Proposition 2.3.13.2. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une flèche de $Simpl(T)_{/B}$. Il existe un triangle commutatif de $Simpl(T)_{/B}$



,

où i est un monomorphisme et p un B-homotopisme.

On obtient de même la généralisation suivante de (2.3.6) :

Théorème 2.3.13.3. Supposons que T ait assez de points (SGA IV 6.4.1) ([1]) . Alors, dans Hot.(T,B) , les quasi-isomorphismes permettent un calcul de fractions à gauche (1.4.2).

2.3.13.4. Soient $E \longrightarrow F$ une flèche de $Simpl(T)_{/B}$ et $Y \longrightarrow X \longrightarrow Z$ des flèches d'ensembles simpliciaux. On notera $\underline{Hom}s(Y/X/Z,E/F/B)$ le faisceau (sur Simpl(T)) des homomorphismes du diagramme $Y \longrightarrow X \longrightarrow Z$ dans le diagramme $E \longrightarrow F \longrightarrow B$. Quand Z est l'ensemble simplicial final, on réduira la notation à $\underline{Hom}s(Y/X,E/F/B)$ (observons que pour B = l'objet final de Simpl(T) on retrouve l'objet $\underline{Hom}s(Y/X,E/F)$ introduit en (2.3.1.9)).

Nous dirons qu'un morphisme de $Simpl(T)_{/B}$ est fibrant s'il en est ainsi du morphisme de Simpl(T) sous-jacent.

Procédant comme dans ([11] VI Prop. 4.3), on obtient l'énoncé suivant, qui généralise (2.3.10) :

Proposition 2.3.13.5. Soit $Y \longrightarrow X$ une inclusion d'ensembles simpliciaux avec X de type fini, et soit $E \longrightarrow F$ un morphisme fibrant de $Simpl(T)_{/B}$. Alors la flèche canonique de $Simpl(T)_{/B}$

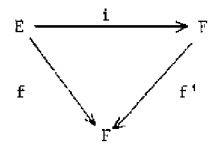
$$\underline{Hom}s(X,E/B) \longrightarrow \underline{Hom}s(Y/X,E/F/B)$$

est un morphisme fibrant.

A l'aide de (2.3.13.5), on obtient facilement la variante relative de (2.3.11) :

Proposition 2.3.13.6. Soit $f : E \longrightarrow F$ un morphisme de $Simpl(T)_{/B}$, avec $E \longrightarrow B$ et $F \longrightarrow B$ fibrants. Il existe un triangle commutatif de $Simpl(T)_{/B}$

([1]) hypothèse sans doute inutile, comme dans (2.3.6).



où f' est fibrant et i est un B-homotopisme.

On a enfin l'énoncé suivant, qui généralise (2.3.12) :

Théorème 2.3.13.7. Notons Hotfib.(T,B) la sous-catégorie pleine de Hot.(T,B) formée des $E \longrightarrow B$ fibrants, D'.(T,B) la catégorie localisée de Hotfib.(T,B) par rapport aux quasi-isomorphismes. Si T possède assez de points (1), alors, dans Hotfib.(T,B), les quasi-isomorphismes permettent un calcul de fractions à droite, et le foncteur naturel

$$D'.(T,B) \longrightarrow D.(T,B)$$

est une équivalence de catégories.

Preuve. Grâce à (2.3.13.5) et (2.3.13.6), la première partie se prouve essentiellement comme l'énoncé analogue de (2.3.12). Pour la seconde partie, on peut utiliser la construction de ([11] VI 5.5.1), qui est fonctorielle, et fournit, par faisceautisation, pour chaque $X \in \text{ob } \text{Simpl}(T)_{/B}$ un quasi-isomorphisme $X \longrightarrow X'$ de $\text{Simpl}(T)_{/B}$, fonctoriel en X, avec $X' \longrightarrow B$ fibrant.

3. Anneaux et Modules simpliciaux.

3.0. Sauf mention du contraire, les Anneaux considérés dans la suite sont supposés associatifs, commutatifs et unitaires, les Modules et Algèbres sont supposés unitaires. On conserve dans tout le n° 3 le topos T et les conventions de (2.1.2).

(1) hypothèse sans doute inutile, comme dans (2.3.12).

3.1. Généralités.

3.1.1. On appelle Anneau simplicial (de T) tout Anneau du topos Simpl(T) (2.3.1). On notera Ans(T) la catégorie des Anneaux simpliciaux de T .

Soit Λ un Anneau de T . On appelle Λ-Module simplicial (resp. Λ-Algèbre simpliciale) un Module (resp. une Algèbre) sur Λ vu comme Anneau simplicial trivial (1.1). On notera Λ-Mods (resp. Λ-Algs) la catégorie des Λ-Modules simpliciaux (resp. Λ-Algèbres simpliciales).

Soit $A \in \mathrm{Ans}(T)$. Conformément aux notations générales, on notera A-Mod (resp. A-Alg) la catégorie des A-Modules (resp. A-Algèbres). Pour $E, F \in$ ob A-Mod, on notera

$$\underline{\mathrm{Hom}}_A(E,F)$$

(ou simplement $\underline{\mathrm{Hom}}(E,F)$) le A-Module des homomorphismes A-linéaires de E dans F dans le topos Simpl(T) (SGA 4 IV). On a donc (cf. (2.3.1))

$$\underline{\mathrm{Hom}}(E,F)_n = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}^{(\Delta(n))} \otimes_{\mathbb{Z}} E, F) \quad , \tag{3.1.1.0}$$

où le second membre désigne le faisceau sur T des homomorphismes A-linéaires de $\mathbb{Z}^{(\Delta(n))} \otimes_{\mathbb{Z}} E$ dans F . Rappelons l'isomorphisme cher à Cartan

$$\underline{\mathrm{Hom}}(L \otimes_A M, N) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}(L, \underline{\mathrm{Hom}}(M,N)) \tag{3.1.1.1}$$

pour L, M, $N \in$ ob A-Mod , d'où l'on déduit des isomorphismes

$$\mathrm{Hom}(L \otimes_A M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(L, \underline{\mathrm{Hom}}(M,N)) \quad , \tag{3.1.1.2}$$

$$\mathrm{Hom}(L \otimes_A M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(L, \underline{\mathrm{Hom}}(M,N)) \quad , \tag{3.1.1.3}$$

où Hom = $\Gamma(T, \underline{\mathrm{Hom}}(\ ))$. Rappelons d'autre part (2.3.1) que, pour $X \in$ ob Simpl(T) et $E \in$ ob A-Mod, $\underline{\mathrm{Hom}}(X,E)$ est muni naturellement d'une structure de A-Module ; on a un isomorphisme fonctoriel

$$\underline{\mathrm{Hom}}_A(A^{(X)}, E) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}(X,E) \quad , \tag{3.1.1.4}$$

où $A^{(-)}$ désigne le foncteur A-Module libre engendré (SGA 4 III), d'où l'on

déduit des isomorphismes

(3.1.1.5) $$\mathrm{Homs}_A(A^{(X)},E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Homs}(X,E) \quad ,$$

(3.1.1.6) $$\mathrm{Hom}_A(A^{(X)},E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(X,E) \quad .$$

De (3.1.1.3) et (3.1.1.6) on tire en particulier

(3.1.1.7) $$\mathrm{Hom}_A(A^{(X)} \otimes_A M,N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(M,\underline{\mathrm{Homs}}(X,N))$$

pour M, $N \in$ ob A-Mod, $X \in$ ob Simpl(T). Rappelons également que si B est une A-Algèbre (resp. une A-Algèbre (resp. une A-Algèbre au-dessus d'une A-Algèbre C), $\underline{\mathrm{Homs}}(X,B)$ (resp. $\underline{\mathrm{Homs}}(X,B/C)$ (2.3.1.9)) est muni naturellement d'une structure de A-Algèbre (resp. A-Algèbre au-dessus de C).

3.1.2. Notons An(T) la catégorie des Anneaux de T , et Anmod(T) la catégorie des Modules sur un Anneau variable de T , qui est, comme on sait, une catégorie fibrée et cofibrée (scindée) sur An(T) : un objet de Anmod(T) est un couple (A,E), où A est un Anneau et E un A-Module, une flèche $(A,E) \longrightarrow (B,F)$ est un couple (f,u), où $f : A \longrightarrow B$ est un morphisme d'Anneaux et $u : E \longrightarrow F$ une flèche A-linéaire, (ou, ce qui revient au même, une flèche B-linéaire $E \otimes_A B \longrightarrow F$) , le foncteur projection $\mathrm{Anmod}(T) \longrightarrow \mathrm{An}(T)$ est $(A,E) \longmapsto A$. Par suite, la catégorie des objets simpliciaux de Anmod(T) est de manière naturelle une catégorie fibrée et cofibrée sur la catégorie des objets simpliciaux de An(T) (1.1.6), et cette catégorie fibrée et cofibrée n'est autre que la catégorie des Modules sur un Anneau simplicial variable de T . Soit A un Anneau simplicial, on sait définir (1.1.6) la notion d'homotopie entre deux flèches u_o , $u_1 : E \longrightarrow F$ de la catégorie-fibre A-Mod. Comme on a vu en (2.3.2), une homotopie u entre u_o et u_1 s'interprète comme une flèche de faisceaux simpliciaux $E \longrightarrow \underline{\mathrm{Homs}}(\Delta(1),F)$; dire que u est "au-dessus de A" équivaut à dire que la flèche précédente est A-linéaire (pour la structure naturelle de A-Module sur le second membre), donc correspond (3.1.1.7) à une flèche A-linéaire $E \otimes_A A^{(\Delta(1))} \longrightarrow F$. Si l'on note Hot.(A) la catégorie des A-Modules à A-homotopie près (cf. (1.1.6.1)), on a donc

(3.1.2.1) $$\mathrm{Hot}_A(E,F) = \pi_o \mathrm{Homs}_A(E,F) \quad ,$$

pour E , $F \in \mathrm{ob}\ A\text{-Mod}$, avec la notation abrégée habituelle $\mathrm{Hot}_A = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hot.}(A)}$ (noter que $\mathrm{Homs}_A(E,F)$ est un groupe abélien simplicial, donc, la relation "il existe une A-homotopie entre u_o et u_1" est une relation d'équivalence, (il n'y a donc pas lieu de considérer de A-homotopies "composées"), et $\mathrm{Hot}_A(E,F)$ est un groupe abélien). Des interprétations précédentes découle aussi, comme en (2.3.3), que $\mathrm{Hot.}(A)$ est la localisée de A-Mod par rapport aux A-homotopismes.

De manière analogue, interprétant la catégorie Algs(T) des Algèbres sur un Anneau simplicial variable de T comme la catégorie des objets simpliciaux de la catégorie (fibrée et cofibrée) des Algèbres sur un Anneau variable de T , on définit, pour $A \in \mathrm{ob}\ \mathrm{Ans}(T)$, la notion de A-homotopie entre des flèches u_o et $u_1 : P \longrightarrow Q$ de A-Alg . Comme précédemment, cette notion s'exprime agréablement à l'aide de l'objet des chemins : une A-homotopie u entre u_o et u_1 est une flèche de A-Algèbres $u : P \longrightarrow \underline{\mathrm{Homs}}(\Delta(1),Q)$ (où le second membre est muni de sa structure naturelle de A-Algèbre), telle que $d_o u = u_o$, $d_1 u = u_1$. On notera $\mathrm{Hot}(A\text{-Alg})$ la catégorie des A-Algèbres à A-homotopie près, c'est (encore par les mêmes arguments) la localisée de A-Alg par rapport aux A-homotopismes.

On aura également à travailler avec la catégorie A-Alg/B des A-Algèbres au-dessus d'une A-Algèbre donnée B . Considérant Alg(T) comme catégorie (fibrée) au-dessus de $\mathrm{An}(T) \times \mathrm{An}(T)$ par le foncteur (source, but), A-Alg/B s'interprète comme la fibre au-dessus de (A,B) de la catégorie des objets simpliciaux de Alg(T) (i.e. Algs(T)), d'où la notion de A-homotopie au-dessus de B entre flèches u_o , $u_1 : P \longrightarrow Q$ qui s'exprime encore comme la donnée d'une flèche $u : P \longrightarrow \underline{\mathrm{Homs}}(\Delta(1),Q/B)$ de A-Algèbres au-dessus de B telle que $d_o u = u_o$, $d_1 u = u_1$. On notera $\mathrm{Hot}(A\text{-Alg/B})$ la catégorie des A-Algèbres au-dessus de B à A-homotopie au-dessus de B près ; c'est la localisée de A-Alg/B par rapport aux A-homotopismes au-dessus de B .

Dans la suite, on se permettra de dire "homotopisme" au lieu de "A-homotopisme", quand il n'en pourra résulter de confusion.

3.1.3. Soit A un Anneau simplicial. On a un morphisme canonique de complexes de chaînes de $\mathbb{Z}$-Modules

$$A^{\sim} \otimes_{\mathbb{Z}} A^{\sim} \longrightarrow A^{\sim} \quad , \tag{3.1.3.1}$$

(où le $\sim$ est pris pour la structure de $\mathbb{Z}$-Module simplicial sous-jacent (1.2.2)), défini comme composé de la flèche canonique (1.2.2.1) $A^{\sim} \otimes A^{\sim} \longrightarrow (A \otimes A)^{\sim}$ et de la flèche $(A \otimes A)^{\sim} \longrightarrow A^{\sim}$ induite par la structure d'Anneau de A. Compte tenu de l'associativité (1.2.2.3) de la flèche canonique (1.2.2.1), le morphisme (3.1.3.1) fait de $A^{\sim}$ une $\mathbb{Z}$-Algèbre différentielle graduée. Il est bien connu d'ailleurs (et facile à montrer sur la forme explicite de (1.2.2.1)) que $A^{\sim}$ est strictement anti-commutative (i.e. $xy = (-1)^{pq}yx$ pour x de degré p et y de degré q, et $x^2 = 0$ pour x de degré impair), et munie canoniquement d'un système de puissance divisées au sens de [6] (mais nous ne nous servirons pas de ce dernier fait). Il en résulte que $H.(A) = \oplus H_n(A^{\sim}) = \oplus \pi_n(A)$ est de façon naturelle une $\mathbb{Z}$-Algèbre graduée (strictement anti-commutative...). Si $f : A \longrightarrow B$ est un morphisme d'Anneaux simpliciaux, $f^{\sim} : A^{\sim} \longrightarrow B^{\sim}$ est un morphisme d'Algèbres différentielles graduées, et $H.(f) : H.(A) \longrightarrow H.(B)$ un morphisme d'Anneaux gradués.

De la même manière, si M est un A-Module, on définit à l'aide de (1.2.2.1) un morphisme de complexes de chaînes

$$A^{\sim} \otimes_{\mathbb{Z}} M^{\sim} \longrightarrow M^{\sim} \quad , \tag{3.1.3.2}$$

qui définit sur $M^{\sim}$ une structure de $A^{\sim}$-Module différentiel gradué. Et $H.(M)$ est un $H.(A)$-Module gradué.

Parfois il est plus commode de travailler avec le sous-complexe normal NA de $A^{\sim}$, qui, d'après (1.3.5), est une sous-Algèbre différentielle graduée de $A^{\sim}$, et avec le sous-complexe normal NM qui est un NA-Module différentiel gradué.

3.1.4. Soient A un Anneau de T, E, F des A-Modules simpliciaux. L'homomorphisme composé

$$E^{\sim} \otimes \underline{\mathrm{Hom}}_A(E,F)^{\sim} \longrightarrow (E \otimes_A \underline{\mathrm{Hom}}_A(E,F))^{\sim} \longrightarrow F^{\sim} ,$$

où la première flèche est donnée par (1.2.2.1) et la seconde vient de l'accouplement naturel $E \otimes_A \underline{\mathrm{Hom}}_A(E,F) \longrightarrow F$, définit ([1]) un homomorphisme de complexes de A-Modules

$$\underline{\mathrm{Hom}}_A(E,F)^{\sim} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_A^{\cdot}(E^{\sim}, F^{\sim}) \quad , \tag{3.1.4.1}$$

où le second membre est le complexe habituel des homomorphismes de $E^{\sim}$ dans $F^{\sim}$. Je dis que l'homomorphisme

$$\underline{\mathrm{Hom}}_A(E,F)^{\sim} \longrightarrow t_{o]}\underline{\mathrm{Hom}}_A^{\cdot}(E^{\sim}, F^{\sim}) \tag{3.1.4.2}$$

induit par (3.1.4.2) (avec les notations de (1.4.7)) est un homotopisme, ce qui signifie que, pour tout complexe de chaînes L , la flèche

$$\mathrm{Hot}(L,\underline{\mathrm{Hom}}(E,F)^{\sim}) \longrightarrow \mathrm{Hot}(L,\underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}(E^{\sim}, F)) \tag{*}$$

induite par (3.1.4.1) est un isomorphisme. D'après Dold-Puppe (1.3.3 et 1.3.4) et l'isomorphisme cher à Cartan, on est ramené à montrer que, pour tout A-Module simplicial M , la flèche

$$\mathrm{Hot}((L \otimes E)^{\sim}) \longrightarrow \mathrm{Hot}(L^{\sim} \otimes E^{\sim}, F^{\sim}) \tag{**}$$

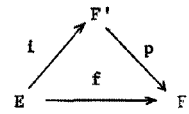
induite par la flèche canonique (1.2.2.1) $L^{\sim} \otimes E^{\sim} \longrightarrow (L \otimes E)^{\sim}$ est un isomorphisme, mais cela résulte de ce que (1.2.2.1) est un homotopisme, d'où notre assertion.

Par application du foncteur $\Gamma(T,-)$, (3.1.4.2) fournit un homotopisme

$$\underline{\mathrm{Hom}}_A(E,F) \longrightarrow t_{o]}\underline{\mathrm{Hom}}_A^{\cdot}(E^{\sim}, F^{\sim}) \quad . \tag{3.1.4.3}$$

Proposition 3.1.5; Soit A un Anneau simplicial, et soit $f : E \longrightarrow F$ un morphisme de A-Modules. Il existe un triangle commutatif de A-Mod

([1]) via l'isomorphisme cher à Cartan.

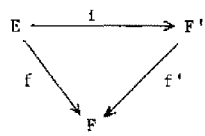


où i est un monomorphisme et p un homotopisme.

La preuve est analogue à celle de (2.3.4) : utiliser le "cylindre" $A^{(\Delta(1))} \otimes_A E$.

3.1.6. Soient A un Anneau simplicial, B une A-Algèbre. Nous dirons qu'une flèche $f : X \longrightarrow Y$ de A-Modules (resp. A-Algèbres, resp. A-Algèbres au-dessus de B) est une fibration si la flèche de faisceaux simpliciaux d'ensembles sous-jacente est une fibration (2.3.8). Comme on a vu plus haut (2.3.9), cette condition signifie que la flèche induite par f sur les sous-complexes normaux (pour la structure de $\mathbb{Z}$-Modules simpliciaux sous-jacente) est un épimorphisme en degré > 0 , ou encore que la suite $X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow \mathrm{Coker}\ \pi_o(f) \longrightarrow 0$ est exacte (comme suite de A-Modules, $\pi_o(f)$ étant regardé comme morphisme de A-Modules via l'homomorphisme d'Anneaux $A \longrightarrow \pi_o(A)$ cf. (3.1.3)).

Proposition 3.1.6.1. Soit $f : E \longrightarrow F$ une flèche de A-Modules (resp. A-Algèbres, resp. A-Algèbres, resp. A-Algèbres fibrées au-dessus de B). Il existe un triangle commutatif de A-Mod (resp. A-Alg, resp. A-Alg/B)



où i est un homotopisme et f' une fibration.

Cela découle en effet de la preuve de (2.3.11) (et de son analogue (2.3.13.6)), la formation de l'objet des chemins $\underline{\mathrm{Hom}}_S(\Delta(1),F)$ ($\underline{\mathrm{Hom}}_S(\Delta(1), F/B)$ dans le deuxième cas respé) préservant les structures de A-Modules (resp. A-Algèbres, resp. A-Algèbres au-dessus de B).

3.1.7. A désignant toujours un Anneau simplicial, nous dirons qu'une flèche de A-Mod (resp. A-Alg, resp. A-Alg/B) est un quasi-isomorphisme si la flèche de faisceaux simpliciaux d'ensembles sous-jacente est un quasi-isomorphisme. Nous noterons D.(A) (resp. D(A-Alg), resp. D(A-Alg/B)) la catégorie localisée correspondante, qui est aussi la catégorie localisée de Hot.(A) (resp. Hot(A-Alg), resp. Hot(A-Alg/B)) (3.1.2) par rapport aux quasi-isomorphismes (avec l'extension évidente de la terminologie). Quand A est l'Anneau simplicial trivial défini par un Anneau Λ de T , la catégorie A-Mod (resp. Hot.(A), resp. D.(A)) s'identifie par le foncteur N à la catégorie C.(Λ-Mod) (resp. Hot.(Λ-Mod), resp. D.(Λ -Mod)) (cf. 1.4.5 et 1.4.6).

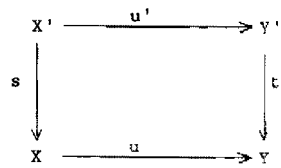
Théorème 3.1.8. Soit A un Anneau simplicial.

(i) Dans Hot.(A) (3.1.2) l'ensemble des quasi-isomorphismes permet un calcul de fractions bilatère (1.4.2).

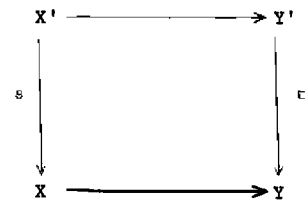
(ii) Dans Hot(A-Alg) (3.1.2) l'ensemble des quasi-isomorphismes permet un calcul de fractions à droite (1.4.2).

(ii)' Soit B une A-Algèbre. Notons Hotfib(A-Alg/B) la sous-catégorie pleine de Hot(A-Alg/B) formée des A-Algèbres fibrées sur B . Dans Hotfib(A-Alg/B), l'ensemble des quasi-isomorphismes permet un calcul de fractions à droite (1.4.2), et la catégorie localisée de Hotfib(A-Alg/B) par rapport aux quasi-isomorphismes s'identifie canoniquement à D(A-Alg/B).

Preuve. Compte tenu de (3.1.5) et (3.1.6.1), la preuve est essentiellement la même que celle (2.3.6) et (2.3.12) (et de la variante relative de (2.3.13.7)). Le fait qu'on dispose de structures de $\mathbb{Z}$-Modules simpliciaux sous-jacentes permet de se passer de l'hypothèse d'existence d'assez de points : si



est un carré cocartésien de A-Mod avec s un quasi-isomorphisme injectif, alors t est un quasi-isomorphisme, car X'/X est acyclique et u' induit un isomorphisme de X'/X sur Y'/Y ; de même (cf. (2.3.9)) si



est un carré cartésien de A-Mod (resp. A-Alg, resp. A-Alg/B) avec t un quasi-isomorphisme fibrant, alors s est un quasi-isomorphisme fibrant. Compte tenu de cette remarque, et grâce au fait que les homotopies dans A-Mod (resp. A-Alg, resp. A-Alg/B) s'interprètent à l'aide de cylindres et d'objets de chemins convenables (3.1.2), l'adaptation des arguments de la preuve de (2.3.6) et (2.3.12) à la situation présente est immédiate et laissée au lecteur.

Remarque 3.1.8.1. Dans le cas où l'Anneau simplicial A est trivial de valeur Λ, l'énoncé (i) redonne (1.4.6 a)) pour la catégorie Λ-Mod (compte tenu des équivalences de Dold-Puppe rappelées supra).

3.2. Triangles distingués et Ext^1 dans D.(A).

3.2.1. Foncteurs γ , σ , φ , ω , Ext^i .

Posons

$$(3.2.1.1) \qquad \gamma = \mathbb{Z}^{(\Delta(1))}/\mathrm{Im}\ \mathbb{Z}^{(d^0)} \quad , \quad \sigma = \mathbb{Z}^{(\Delta(1))}/\mathrm{Im}\ \mathbb{Z}^{(d^0)} + \mathrm{Im}\ \mathbb{Z}^{(d^1)} \quad ,$$

de sorte qu'on a une suite exacte

$$(3.2.1.2) \qquad 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathbb{Z}^{(d^1)}} \gamma \longrightarrow \sigma \longrightarrow 0 \quad ,$$

scindée en chaque degré. Autrement dit, γ(resp. σ) est le $\mathbb{Z}$-module simplicial de chaînes "réduites" (à coefficients entiers) de $\Delta(1)$ pointé par d^0 (resp. de la

sphère simpliciale $S^1 = \mathrm{Coker}\,(d^0,d^1 : \Delta(0) \rightrightarrows \Delta(1))$ munie de son point-base naturel). Le $\mathbb{Z}$-module simplicial γ est homotopiquement trivial. Les complexes normalisés de γ et σ sont

$$N\gamma = (0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{Id} \mathbb{Z} \longrightarrow 0) \quad , \tag{3.2.1.3}$$

$$N\sigma = (0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0) \quad ,$$

où la composante $\mathbb{Z}$ à gauche est placée en degré homologique 1 (cf. ([10]5.28)), et la suite exacte N(3.2.1.2) est la suite exacte évidente $0 \to \mathbb{Z} \to N\gamma \to N\sigma \to 0$.

Soit maintenant A un Anneau simplicial. Pour $E \in \mathrm{ob}\ A\text{-Mod}$, on posera

$$\gamma E = \gamma \otimes_{\mathbb{Z}} E \quad , \quad \sigma E = \sigma \otimes_{\mathbb{Z}} E \quad , \tag{3.2.1.4}$$

où γ (resp. σ) est regardé comme $\mathbb{Z}$-Module simplicial constant. Par tensorisation avec E , on déduit de (3.2.1.2) une suite exacte de A-Mod fonctorielle en E

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{i_E} \gamma E \longrightarrow \sigma E \longrightarrow 0 \quad . \tag{3.2.1.5}$$

Le foncteur γ (resp. σ) de A-Mod dans A-Mod est appelé foncteur <u>cône</u> (resp. <u>suspension</u>). Noter que, comme γ est homotopiquement trivial il en est de même de γE pour tout $E \in \mathrm{ob}\ A\text{-Mod}$.

Pour $F \in \mathrm{ob}\ A\text{-Mod}$, on notera φF (resp. ωF) le sous-objet de $\underline{\mathrm{Hom}}s(\Delta(1),F)$ formé des "chemins d'extrémité 0" (resp. des "lacets issus de 0"), i.e. le A-Module défini par le carré cartésien

(3.2.1.6)
$$\begin{array}{ccc} \varphi F & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}s(\Delta(1),F) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_0} \\ 0 & \longrightarrow & F \end{array} \qquad \left(\text{resp. } \begin{array}{ccc} \omega F & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}s(\Delta(1),F) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (d_0,d_1)} \\ 0 & \longrightarrow & F \times F \end{array}\right).$$

Le A-Module φF est homotopiquement trivial (cf. 2.3.2)), et l'on a une suite exacte fonctorielle en F :

(3.2.1.7) $$0 \longrightarrow \omega F \longrightarrow \varphi F \xrightarrow{p_F} F \longrightarrow \pi_o(F) \longrightarrow 0 \quad ,$$

où p_F est induite par $d_1 : \underline{\mathrm{Hom}}s(\Delta(1),F) \longrightarrow F$ (la preuve de (2.3.11), avec les rôles de d_o et d_1 échangés, montre que p_F est une fibration, donc son conoyau est $\pi_o(F)$ d'après (3.1.6)). Le début de (3.2.1.7) se déduit de (3.2.1.2) par application du foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}s(-,F)$. Des formules chères à Cartan découlent des isomorphismes d'adjonction

(3.2.1.8) $$\mathrm{Hom}(\gamma E, F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(E, \varphi F) \quad ,$$

$$\mathrm{Hom}(\sigma E, F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(E, \omega F) \quad ,$$

(et des isomorphismes analogues avec $\underline{\mathrm{Hom}}s$ (resp. Hom) au lieu de Hom), pour E, $F \in \mathrm{ob}\ A\text{-Mod}$.

Lemme 3.2.1.9. (cf. ([23]6.3, proof of prop. 1)). Pour E, $F \in \mathrm{ob}\ A\text{-Mod}$, il existe des morphismes de suites exactes

(i)
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & \gamma E & \longrightarrow & \sigma E & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle adj} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Id} & & \\ 0 & \longrightarrow & \omega\sigma E & \longrightarrow & \varphi\sigma E & \longrightarrow & \sigma E & \longrightarrow & 0 \end{array}$$
(3.2.1.5) ; (3.2.1.7) , ([1])

(ii)
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \omega F & \longrightarrow & \gamma\omega F & \longrightarrow & \sigma\omega F & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle Id} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle adj} & & \\ 0 & \longrightarrow & \omega F & \longrightarrow & \varphi F & \longrightarrow & F & \longrightarrow & \pi_o(F) \longrightarrow 0 \end{array}$$
(3.2.1.5) ; (3.2.1.7) ,

où adj est la flèche d'adjonction définie par (3.2.1.8).

Preuve. Il suffit de transcrire les arguments de (loc. cit), ce que nous allons faire rapidement pour être complets. Soit

$$h : \Delta(1) \times \Delta(1) \longrightarrow \Delta(1)$$

([1]) On a $(\sigma E)_o = 0$, donc a fortiori $\pi_o(\sigma E) = 0$.

l'homotopie standard entre $d^o s^o$ et Id : $\Delta(1) \rightrightarrows \Delta(1)$ ($d^o s^o$ est la projection sur le point-base $\{1\}$ ([11]IV 1.2), donc $hd^o = d^o s^o$, $hd^1 = Id$. On en déduit une homotopie $\underline{Hom}s(h,F)$ entre $s_o d_o$ et Id, i.e. une flèche

$$h_1 : \mathbb{Z}^{(\Delta(1))} \otimes_{\mathbb{Z}} \underline{Hom}s(\Delta(1),F) \longrightarrow \underline{Hom}s(\Delta(1),F)$$

telle que $h_1 d_o^o = s_o d_o$, $h_1 d^1 = Id$. D'où une flèche

$$h_2 : \gamma\varphi F \longrightarrow \varphi F$$

telle que $h_2 d^1 = Id$, d'où, grâce au carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \omega F & \xrightarrow{d^1} & \gamma \omega F \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varphi F & \xrightarrow{d^1} & \gamma \varphi F \end{array} ,$$

un diagramme (ii), où il reste à vérifier que $\sigma \omega F \longrightarrow F$ (définie par passage au quotient) est bien la flèche d'adjonction. Ce dernier point résulte des deux suivants : a) Le carré

$$\begin{array}{ccc} \gamma \omega F & \longrightarrow & \sigma \omega F \\ \downarrow & & \downarrow \text{adj} \\ \gamma \varphi F & \xrightarrow{\text{adj}} & F \end{array}$$

est commutatif (les deux composés étant adjoints de l'inclusion $\omega F \hookrightarrow \varphi F$) ; b) le composé $\gamma \varphi F \xrightarrow{h_2} \varphi F \xrightarrow{p_F} F$ est la flèche d adjonction, ce qui découle du fait que le composé $d_1 h_1$: $\mathbb{Z}^{(\Delta(1))} \otimes_{\mathbb{Z}} \underline{Hom}s(\Delta(1),F) \longrightarrow F$ est la flèche d'adjonction (relative aux foncteurs $\mathbb{Z}^{(\Delta(1))} \otimes_{\mathbb{Z}}$ - et $\underline{Hom}s(\Delta(1),-1)$), lui-même conséquence de ce que $d_1 \underline{Hom}s(h,F)$ est l'identité de $\underline{Hom}s(\Delta(1), F)$. Pour construire (i), on procède de manière analogue, en utilisant cette fois les flèches

$$h_3 : \mathbb{Z}^{(\Delta(1))} \otimes E \longrightarrow \underline{Hom}s(\Delta(1), \Delta(1) \otimes E)$$

et

$$h_4 \ : \ \gamma E \longrightarrow \varphi \gamma E$$

déduites de h .

Corollaire 3.2.1.10. La flèche d'adjonction $E \longrightarrow \omega \sigma E$ est un quasi-isomorphisme. La flèche d'adjonction $\sigma \omega F \longrightarrow F$ est un quasi-isomorphisme si et seulement si F est connexe, i.e. $\pi_o(F) = 0$.

En effet, comme γM et φM sont homotopiquement triviaux pour $M \in$ ob A-Mod, la première (resp. seconde) assertion découle de (3.2.1.9 (i)) (resp. (3.2.1.9) (ii))) et du lemme des cinq.

3.2.1.11. Les foncteurs σ et ω transforment flèches homotopes en flèches homotopes, et aussi quasi-isomorphismes en quasi-isomorphismes (comme il résulte des suites exactes (3.2.1.5) et (3.2.1.7)), donc se prolongent en un couple de foncteurs adjoints noté encore (σ , ω) de Hot.(A) dans Hot.(A) (resp. D.(A) dans D.(A)). D'après (3.2.1.10) le foncteur σ : D.(A) $\longrightarrow$ D.(A) est pleinement fidèle. Pour E, $F \in$ ob D.(A) et $p \in \mathbb{Z}$, on posera

$$\text{(3.2.1.12)} \qquad \mathbb{E}\mathrm{xt}^p_A(E,F) = \varinjlim_{n \geqslant -p} \mathrm{Hom}_{D.(A)}(\sigma^n E, \sigma^{n+p} F) \quad ,$$

la limite inductive étant prise suivant les isomorphismes de suspension. (On écrira parfois $\mathbb{E}\mathrm{xt}^p(E,F)$ au lieu de $\mathbb{E}\mathrm{xt}^p_A(E,F)$ quand il n'y aura pas d'ambiguïté sur A). Il découle trivialement de la définition qu'on a, pour $i \in \mathbb{N}$, des isomorphismes fonctoriels canoniques

$$\text{(3.2.1.13)} \qquad \mathbb{E}\mathrm{xt}^p(\sigma^i E,F) \xrightarrow{\sim} \mathbb{E}\mathrm{xt}^{p-i}(E,F) \xrightarrow{\sim} \mathbb{E}\mathrm{xt}^p(E, \omega^i F) \quad ,$$

$$\text{(3.2.1.14)} \qquad \mathbb{E}\mathrm{xt}^p(E,\sigma^i F) \xrightarrow{\sim} \mathbb{E}\mathrm{xt}^{p+i}(E,F) \quad .$$

Quand A est un Anneau simplicial trivial de valeur Λ et qu'on identifie Hot.(A) (resp. D.(A)) à une sous-catégorie pleine de Hot(Λ) (resp. D(Λ)) (3.1.7), le foncteur suspension s'identifie au foncteur translation $X \longmapsto X[1]$, et les $\mathbb{E}\mathrm{xt}^p$

définis en (3.2.1.12) s'identifient aux hyperext habituels, i.e. on a des isomorphismes fonctoriels canoniques

$$\mathbb{E}\mathrm{xt}^p(E,F) \xrightarrow{\sim} \mathbb{E}\mathrm{xt}^p(NE,NF) \xrightarrow{\sim} \mathbb{E}\mathrm{xt}^p(E^\sim, F^\sim) \quad . \tag{3.2.1.15}$$

Supposant toujours A trivial, faisons l'hypothèse que le topos T possède assez de points. D'après le théorème de Whitehead (2.2.2) et la formule de Künneth, le foncteur $X \longmapsto A^{(X)} = A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^{(X)}$ de $\mathrm{Simpl}(T)$ dans A-Mod transforme quasi-isomorphismes en quasi-isomorphismes. Il fournit donc par prolongement un adjoint à gauche au foncteur d'oubli $D.(A) \longrightarrow D.(T)$, i.e. pour $X \in \mathrm{ob}\, D.(T)$, $F \in \mathrm{ob}\, D.(A)$, on a

$$\mathrm{Hom}_{D.(A)}(A^{(X)},F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{D.(T)}(X,F) \quad ,$$

d'où, en remplaçant F par $\sigma^p F$, pour $p \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\mathrm{xt}^p(A^{(X)},F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{D.(T)}(X,\sigma^p F) \quad , \tag{3.2.1.16}$$

ce qui montre en particulier que les $\mathbb{E}\mathrm{xt}^p(A^{(X)},F)$ ne dépendent que de la structure de $\mathbb{Z}$-Module simplicial sous-jacente de F. Si X est de Kan (2.3.8), on a d'après (2.3.12)

$$\mathrm{Hom}_{D.(T)}(X,\sigma^p F) = \varinjlim_{X' \longrightarrow X} \mathrm{Hot}(X', \sigma^p F) \quad ,$$

la limite inductive étant prise suivant les classes d'homotopie de quasi-isomorphismes $X' \xrightarrow{s} X$ avec X' de Kan (les s qui sont fibrants formant d'ailleurs un système cofinal (2.3.11)). Maintenant, les groupes $\mathrm{Hot}(X', \sigma^p F)$ s'interprètent agréablement comme p-ième groupes de cohomologie de certains bicomplexes. D'une manière générale, pour $Y \in \mathrm{ob}\, \mathrm{Simpl}(T)$ et $M \in \mathrm{ob}\, A\text{-Mod}$, on définit un groupe abélien simplicial mixte de type (1,1) (cf. (1.1))

$$\mathrm{Hom}'(Y,M) \quad , \tag{3.2.1.17}$$

tel que $\mathrm{Hom}'(Y,M)_i^j = \mathrm{Hom}(Y_j, M_i)$, dont le complexe simple associé (1.2.2) n'est autre que $\mathrm{Hom}'((A^{(Y)})^\sim, M^\sim)$. Pour $p \in \mathbb{N}$, on a

$$H^p\mathrm{Hom}^\cdot(Y,M) \xrightarrow{\sim} H^o\mathrm{Hom}^\cdot((A^{(Y)})^\sim , M^\sim [p])$$

$$\xrightarrow{\sim} H^o\mathrm{Hom}^\cdot((A^{(Y)})^\sim, (\sigma^p M)^\sim) \qquad (3.2.1.11)$$

$$\xrightarrow{\sim} \pi_o \mathrm{Hom}_S(A^{(Y)}, \sigma^p M) \qquad (3.1.4.3)$$

$$\xrightarrow{\sim} \pi_o \mathrm{Hom}_S(Y, \sigma^p M) \quad ,$$

d'où finalement, grâce à (2.3.2.1),

(3.2.1.18) $$H^p\mathrm{Hom}^\cdot(Y,M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hot}(Y, \sigma^p M) \quad .$$

Conjuguant (3.2.1.16) et (3.2.1.18) on obtient donc en résumé :

Thèorème 3.2.1.19. Le topos T étant supposé posséder assez de points, soient Λ un Anneau de T, X un faisceau simplicial de Kan et F un Λ-Module simplicial. On a, pour $p \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\mathrm{xt}^p(\Lambda^{(X)},F) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{X' \longrightarrow X} H^p\mathrm{Hom}^\cdot(X',F) \quad ,$$

limite prise suivant les classes d'homotopie de quasi-isomorphismes fibrants $X' \longrightarrow X$, $H^p\mathrm{Hom}^\cdot(X',F)$ désignant le p-ième groupe de cohomologie du complexe simple associé à l'objet simplicial mixte défini en (3.2.1.17).

Scholie 3.2.1.20. Pour X trivial défini par l'objet final de T, la notion de quasi-isomorphisme fibrant $X' \longrightarrow X$ coïncide avec celle d'hyperrecouvrement de T envisagée par Verdier dans (SGA 4 V App.), à cela près que dans (loc. cit.) on impose aux hyperrecouvrements d'être "semi-représentables" par rapport à un site générateur de T. D'autre part, pour F trivial, $H^p\mathrm{Hom}^\cdot(X',F)$ est le p-ième groupe de cohomologie de Čech habituel $\check{H}^p(X',F)$. Le théorème (3.2.1.19) apparaît ainsi comme une généralisation naturelle de celui de Verdier (loc. cit.).

3.2.2. Cônes, triangles distingués.

L'Anneau simplicial A étant à nouveau quelconque, soit $u : E \longrightarrow F$ une flèche de A-Modules. On appelle cône de u le A-Module défini par le carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & F \\ {\scriptstyle i_E}\downarrow & & \downarrow \\ \gamma E & \longrightarrow & C(u) \end{array} ,$$

ou, si l'on préfère, par la suite exacte

$$(3.2.2.0) \qquad 0 \longrightarrow E \xrightarrow{\binom{-i_E}{u}} \gamma E \oplus F \longrightarrow C(u) \longrightarrow 0 \quad .$$

Il dépend fonctoriellement de u . Pour F = 0 (resp. F = E et u = Id), on a, à un isomorphisme canonique près, $C(u) = \sigma E$ (resp. γE). On a une suite de flèches de A-Mod

$$(3.2.2.1) \qquad E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{j} C(u) \xrightarrow{p} \sigma E \quad ,$$

où j est l'injection canonique et p l'épimorphisme déduit de la projection $F \longrightarrow 0$.

Dualement, on appelle fibre de u le A-Module défini par le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} F(u) & \longrightarrow & \varphi F \\ \downarrow & & {\scriptstyle p_F}\downarrow \\ E & \xrightarrow{u} & F \end{array} ,$$

ou, si l'on préfère, par la suite exacte

$$(3.2.2.2) \qquad 0 \longrightarrow F(u) \longrightarrow E \oplus \varphi F \xrightarrow{(u,-p_F)} F \longrightarrow \operatorname{Coker} \pi_0(u) \longrightarrow 0$$

(l'exactitude aux deux termes de droite vient de ce que p_F est une fibration donc

aussi $(u, -p_F)$, et $\pi_o(u,-p_F) = \pi_o(u)$, cf. (3.1.6)). Le A-Module $F(u)$ dépend fonctoriellement de u. Pour $E = 0$ (resp. $E = F$ et $u = Id$), on a, à un isomorphisme canonique près, $F(u) = \omega F$ (resp. φF). On a une suite de flèches de A-Mod

(3.2.2.3) $$\omega F \xrightarrow{i} F(u) \xrightarrow{q} E \xrightarrow{u} F \quad ,$$

où q est la flèche canonique et i l'injection déduite de l'injection $0 \longrightarrow F$.

3.2.2.4. On appelle <u>triangle</u> de $D.(A)$ toute suite de morphismes

$$L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow \sigma L$$

de $D.(A)$. Un morphisme d'un triangle $(L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow \sigma L)$ dans un triangle $(L' \longrightarrow M' \longrightarrow N' \longrightarrow \sigma L')$ est une suite de morphismes $f : L \longrightarrow L'$, $g : M \longrightarrow M'$, $h : N \longrightarrow N'$ de $D.(A)$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & \sigma L \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma f} \\ L' & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & \sigma L' \end{array}$$

soit commutatif. On dit qu'un triangle est <u>distingué</u> s'il est isomorphe à un triangle du type (3.2.2.1). Cette notion correspond, dans le cas ponctuel, à celle de triangle cofibrant définie par Quillen dans [23]. On pourrait aussi, à partir de (3.2.2.3) comme modèle, définir une notion de "pseudo-triangle distingué" (ou "triangle fibrant" dans la terminologie de (loc. cit.)), mais celle-ci semble dépourvue d'intérêt ([1]).

On a déjà observé que, lorsque A est un Anneau simplicial trivial de valeur Λ et qu'on identifie $D.(A)$ à une sous-catégorie pleine de $D(\Lambda)$ par le foncteur N (3.1.7), le foncteur suspension s'identifie au foncteur translation. Par suite, l'image par N d'un triangle de $D.(A)$ est un triangle de $D(\Lambda)$.

([1]) Pour A trivial de valeur Λ, elle ne coïnciderait pas avec la notion usuelle de triangle distingué dans $D(\Lambda)$.

Proposition 3.2.2.5. L'Anneau simplicial A étant supposé trivial, soit X un triangle de D.(A). Pour que X soit distingué, il faut et il suffit que NX le soit ([2]).

Preuve. Si $v : L \longrightarrow M$ est une flèche de complexesde A-Modules (plus généralement de complexes d'une catégorie abélienne), on note $C(v)$ son cône défini de la manière usuelle par $C(v)^i = L^{i+1} \oplus M^i$, la différentielle étant donnée par la matrice $\begin{pmatrix} -d & 0 \\ v & d \end{pmatrix}$. Il est bien connu que $C(v)$ s'identifie à la somme amalgamée de $C(Id_L) = N_\gamma \otimes L$ (3.2.1.3) et de M au-dessous de L : on a une suite exacte

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow L \longrightarrow C(Id_L) \oplus M \longrightarrow C(v) \longrightarrow 0 \quad ,$$

où la première flèche est $x \longmapsto (0,-x,vx)$, la seconde $(a,b,c) \longmapsto (a,vb + c)$. Cela étant, supposons X distingué et prouvons que NX est distingué. On peut supposer X du type (3.2.2.1). Notons $\alpha : N_\gamma E \longrightarrow N_\gamma \otimes NE = C(Id_{NE})$ le morphisme d'Alexander-Whitney (1.2.2.2). Il est immédiat ([10] 5.32) que le carré

$$\begin{array}{ccc} NE & \hookrightarrow & N_\gamma E \\ {\scriptstyle Id}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ NE & \hookrightarrow & C(Id_{NE}) \end{array} \quad ,$$

où les flèches horizontales sont les injections canoniques, est commutatif. Utilisant l'exactitude de N , on en déduit un morphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & NE & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -Ni_E \\ Nu \end{pmatrix}} & N_\gamma E \oplus NF & \longrightarrow & NC(u) & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle Id}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha \oplus Id} & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & NE & \longrightarrow & C(Id_{NE}) \oplus NF & \longrightarrow & CN(u) & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad ,$$

où la ligne inférieure est la suite (*) correspondant à $v = Nu$. Comme $\alpha \oplus Id$

([1]) ou, ce qui revient au même (cf. (1.3.3)), que $X^\sim$ le soit.

est un homotopisme, la flèche $NC(u) \longrightarrow CN(u)$ est un quasi-isomorphisme. D'autre part, par fonctorialité du cône, on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} NC(u) & \longrightarrow & N\sigma E \\ \downarrow & & \downarrow \\ CN(u) & \longrightarrow & (NE)[1] \end{array} ,$$

où les flèches horizontales sont les flèches canoniques définies par la projection $F \longrightarrow 0$, (et les flèches verticales des quasi-isomorphismes comme on vient de voir, celle de droite n'étant d'ailleurs autre que l'homotopisme d'Alexander-Whitney $N\sigma E \longrightarrow N\sigma \otimes NE$). On a donc en définitive un quasi-isomorphisme de triangles

$$\begin{array}{ccccccc} NE & \xrightarrow{Nu} & NF & \longrightarrow & NC(u) & \longrightarrow & N\sigma E \\ \downarrow{\scriptstyle Id} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ NE & \xrightarrow{Nu} & NF & \longrightarrow & CN(u) & \longrightarrow & (NE)[1] \end{array} ,$$

ce qui prouve que NX est distingué. Inversement, si NX est distingué, alors, d'après la démonstration précédente, NX est isomorphe à NY pour un triangle distingué Y convenable, donc, par Dold-Puppe, X est distingué, ce qui achève la démonstration.

Remarque 3.2.2.6. Soit $B \longrightarrow A$ un morphisme d'Anneaux simpliciaux. Tout triangle distingué de $D.(A)$ définit par restriction des scalaires un triangle distingué de $D.(B)$, car la formation du cône d'un morphisme de A-Modules est compatible à la restriction des scalaires. En particulier, tout triangle distingué $E \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow \sigma E$ de $D.(A)$ définit un triangle distingué de $D.(\mathbb{Z})$, donc (3.2.2.5) un triangle distingué de $D(\mathbb{Z})$, et par conséquent la suite de $\pi_o(A)$-Modules

$$\ldots \longrightarrow \pi_n(E) \longrightarrow \pi_n(F) \longrightarrow \pi_n(G) \longrightarrow \pi_{n-1}(E) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \pi_o(G) \longrightarrow 0 ,$$

où l'opérateur bord est défini grâce à l'isomorphisme $\pi_n(\sigma E) \xrightarrow{\sim} \pi_{n-1}(E)$, est exacte.

Proposition 3.2.2.7. L'Anneau simplicial A étant à nouveau quelconque, soit $u : E \longrightarrow F$ une flèche de A-Mod, notons $j : F \longrightarrow C(u)$ l'injection canonique. Il existe un quasi-isomorphisme fonctoriel canonique $\lambda : C(j) \longrightarrow \sigma E$ tel que le carré

$$\begin{array}{ccc} C(u) & \xrightarrow{k} & C(j) \\ {\scriptstyle Id}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda} \\ C(u) & \xrightarrow{p} & \sigma E \end{array} \quad ,$$

soit commutatif, k (resp. p) désignant l'injection (resp. la projection) canonique, et que d'autre part le carré

$$\begin{array}{ccc} C(j) & \xrightarrow{q} & \sigma F \\ {\scriptstyle \lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Id} \\ \sigma E & \xrightarrow{\sigma u} & \sigma F \end{array}$$

soit commutatif à homotopie près, q désignant la projection canonique.

Preuve. On a un morphisme de suites exactes

$$(*) \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{\binom{i_F}{j}} & \gamma F \oplus C(u) & \longrightarrow & C(j) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (0,\ Id)} & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{j} & C(u) & \xrightarrow{p} & \sigma E & \longrightarrow & 0 \end{array} .$$

Donc $\lambda : C(j) \longrightarrow \sigma E$, défini comme la flèche verticale de droite, est un quasi-isomorphisme satisfaisant la première condition de l'énoncé. Vérifions la seconde. Par fonctorialité de (*) et q par rapport à u , on peut tout d'abord supposer que $E = F$ et $u = Id_F$. On a alors $j = i_F$, $C(i_F)$ est donné par la suite exacte

$$(**) \qquad 0 \longrightarrow F \xrightarrow{\begin{pmatrix} -i_F \\ i_F \end{pmatrix}} \gamma F \oplus \gamma F \longrightarrow C(i_F) \longrightarrow 0 \quad ,$$

et λ (resp. q) : $C(i_F) \longrightarrow \sigma F$ est induit par pr_2 (resp. pr_1) : $\gamma F \oplus \gamma F \longrightarrow \gamma F$. La suite (**) (resp. le morphisme λ, resp. le morphisme q) se déduisent, par tensorisation avec F, de la suite analogue (resp. des morphismes analogues) pour le topos ponctuel et $F = \mathbb{Z}$. Il suffit donc de montrer que les flèches de $C(i_{\mathbb{Z}})$ dans σ induites par les deux projections de $\gamma \oplus \gamma$ sur γ sont opposées à homotopie près, ou, ce qui revient au même, que leurs images par le foncteur N le sont. Or, appliquant N à (**) (pour $F = \mathbb{Z}$), on trouve que

$$NC(i_{\mathbb{Z}}) = (0 \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{(Id,Id)} \mathbb{Z} \longrightarrow 0) \quad ,$$

la composante $\mathbb{Z}$ à droite étant placée en degré zéro. Les deux flèches de $NC(i_{\mathbb{Z}})$ dans $N\sigma = (0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0)$ (3.2.1.3) sont définies par les deux projections de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}$, leurs restrictions à $H_1(NC(i_{\mathbb{Z}}))$ sont opposées, donc elles sont bien opposées à homotopies près, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 3.2.2.8. Sous les hypothèses de (3.2.2.6), si $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} \sigma E$ est un triangle distingué de D.(A), le triangle $F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} \sigma E \xrightarrow{-\sigma f} F$ est distingué.

Lemme 3.2.2.9. Soient $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ des flèches de A-Mod. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) gf est homotope à 0.

(ii) g se factorise à travers le cône de f.

(iii) f se factorise à travers la fibre de g.

Preuve. C'est trivial sur les définitions.

Proposition 3.2.2.10. Soit $X = (E \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow \sigma E)$ un triangle distingué de D.(A), et soit $M \in \text{ob } D.(A)$. Les suites

$$\ldots \longrightarrow \mathbf{Ext}^i(G,M) \longrightarrow \mathbf{Ext}^i(F,M) \longrightarrow \mathbf{Ext}^i(E,M) \longrightarrow \mathbf{Ext}^{i+1}(G,M) \longrightarrow \ldots$$

et

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{E}xt^{i}(M,E) \longrightarrow \mathbb{E}xt^{i}(M,F) \longrightarrow \mathbb{E}xt^{i}(M,G) \longrightarrow \mathbb{E}xt^{i+1}(M,E) \longrightarrow \cdots$$

obtenues, compte tenu de (3.2.1.13) et (3.2.1.14), par application des foncteurs $\mathbb{E}xt^*(-,M)$ et $\mathbb{E}xt^*(M,-)$ au triangle X sont exactes.

Preuve. D'après (3.2.2.8) et la définition (3.2.1.12), on est ramené à montrer que les suites

(i) $\mathrm{Hom}_{D.(A)}(G,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{D.(A)}(F,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{D.(A)}(E,M)$ et

(ii) $\mathrm{Hom}_{D.(A)}(M,E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{D.(A)}(M,F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{D.(A)}(M,G)$

sont exactes. Prouvons l'exactitude de (i). On peut supposer que X est le triangle standard (3.2.2.1) défini par une flèche $u : E \longrightarrow F$ de A-Mod. L'assertion résulte alors du calcul de D.(A) par fractions à gauche (3.1.8) et de (3.2.2.9). Prouvons l'exactitude de (ii). Quitte à remplacer la suite $E \xrightarrow{f} F \longrightarrow (G = C(u))$ par la suite $E \xrightarrow{\binom{-if}{f}} \gamma E \oplus F \longrightarrow G$, on peut supposer que la suite $0 \longrightarrow E \longrightarrow F \xrightarrow{g} G \longrightarrow 0$ est exacte. On a un morphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & F & \xrightarrow{g} & G & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \binom{Id}{0}} & & \downarrow{\scriptstyle Id} & & \\ 0 & \longrightarrow & F(g) & \longrightarrow & F \oplus \varphi G & \xrightarrow{(g,-p_G)} & G & \longrightarrow & 0 \end{array} \qquad (3.2.2.2)\ ,$$

où la flèche verticale médiane est un homotopisme, donc la flèche verticale de gauche est un quasi-isomorphisme. Donc on peut remplacer la suite $E \longrightarrow F \longrightarrow G$ par la suite $F(g) \longrightarrow F \oplus \varphi G \longrightarrow G$, et on peut remplacer à son tour cette dernière par la suite $F(g) \longrightarrow F \longrightarrow G$. L'assertion résulte alors du calcul de D.(A) par fractions à droite (3.1.8) et de (3.2.2.9), ce qui achève la démonstration.

3.2.3. Triangle distingué associé à une suite exacte, calcul de $\mathbb{E}\mathrm{xt}^1$.

Soit $X = (0 \longrightarrow E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G \longrightarrow 0)$ une suite exacte de A-Mod. On associe à X un triangle distingué $\underline{\chi}(X)$ de $D.(A)$ défini comme suit. On considère le diagramme commutatif suivant, où les lignes sont exactes

(3.2.3.1)

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{-i_E} & \gamma E & \longrightarrow & \sigma E & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{Id}} & & \uparrow{\scriptstyle \binom{-i_E}{u}} & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_1} & & \uparrow{\scriptstyle p} \\
0 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & \gamma E \oplus F & \longrightarrow & C(u) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_2} & & \downarrow{\scriptstyle s} & & \\
0 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & F & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

La flèche s est un quasi-isomorphisme. On pose

(3.2.3.2) $$\underline{\chi}(X) = (E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G \xrightarrow{ps^{-1}} \sigma E) \quad .$$

Il est clair que $\underline{\chi}(X)$ est distingué, dépend fonctoriellement de X, et que tout triangle distingué de $D.(A)$ est isomorphe à un triangle du type $\underline{\chi}(X)$. On notera $\chi(X)$ le morphisme $G \longrightarrow \sigma E$ de $\underline{\chi}(X)$. Si $f : E \longrightarrow E'$ (resp. $g : G' \longrightarrow G$) est une flèche de A-Modules, on notera f_*X (resp. X^*g) l'extension $0 \longrightarrow E' \longrightarrow E' \overset{E}{\oplus} F \longrightarrow G \longrightarrow 0$ (resp. $0 \longrightarrow E \longrightarrow F \times_G G' \longrightarrow G' \longrightarrow 0$) déduite de X par f (resp. g). Par fonctorialité de χ, on a

(3.2.3.3) $$\chi(f_*X) = (\sigma f)\,\chi(X) \quad , \quad \chi(X^*g) = \chi(X)g \quad .$$

Il s'ensuit que χ induit un homomorphisme fonctoriel

(3.2.3.4) $$\chi : \mathrm{Ext}^1(G,E) \longrightarrow \mathbb{E}\mathrm{xt}^1(G,E) \quad ,$$

où le Ext^1 à gauche est calculé dans la catégorie abélienne A-Mod. Nous allons utiliser χ pour obtenir une description des éléments de $\mathbb{E}\mathrm{xt}^1(G,E)$ en termes d'extensions de A-Modules.

3.2.3.5. Pour $M \in \text{ob } A\text{-Mod}$, nous noterons

$$c_M = (0 \longrightarrow M \xrightarrow{i_M} \gamma M \longrightarrow \sigma M \longrightarrow 0)$$

la suite exacte (3.2.1.5), et, si $\pi_o(M) = 0$,

$$f_M = (0 \longrightarrow \omega M \longrightarrow \varphi M \xrightarrow{p_M} M \longrightarrow 0)$$

la suite exacte (3.2.1.7). Nous noterons d'autre part

$$\alpha : \sigma\omega \longrightarrow Id \qquad \text{et} \qquad \beta : Id \longrightarrow \omega\sigma$$

les flèches d'adjonction définies par (3.2.1.8).

Lemme 3.2.3.6. On a

(i) $\chi(c_M) = -Id_{\sigma M}$,

et, si $\pi_o(M) = 0$,

(ii) $\chi(f_M) = -\alpha_M^{-1}$.

Preuve. La première relation résulte du fait, observé dans la preuve de (3.2.2.7), que les flèches de $C(i_M)$ dans σM induites par les deux projections de $\gamma M \oplus \gamma M$ sur γM sont opposées à homotopie près (donc opposées dans D.(A)). D'après (3.2.1.9) (ii)) on a

$$c_{\omega M} = f_M * \alpha_M ,$$

d'où (3.2.3.3)

$$\chi(c_{\omega M}) = \chi(f_M)\,\alpha_M ,$$

d'où (ii) (compte tenu de (i)).

Lemme 3.2.3.7. Soit

$$X = (0 \longrightarrow F \xrightarrow{i} M \longrightarrow E \longrightarrow 0)$$

une suite exacte de A-Modules. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\chi(X) = 0$;

(ii) il existe un quasi-isomorphisme $s : E' \longrightarrow E$ tel que $X*s$ splitte ;

(iii) il existe un quasi-isomorphisme $t : F \longrightarrow F'$ tel que $t*X$ splitte.

Preuve. Nous nous bornerons à prouver l'équivalence de (i) et (iii), celle de (i) et (ii) étant analogue. Si $t*X$ splitte pour un quasi-isomorphisme $t : F \longrightarrow F'$, on a $\chi(t*X) = \sigma t \chi(X)$, donc $\chi(X) = 0$ puisque σt est inversible. Inversement, supposons que l'on ait $\chi(X) = 0$. Alors,d'après la suite exacte (3.2.2.10)

$$\mathbf{Ext}^0(M,F) \longrightarrow \mathbf{Ext}^0(F,F) \longrightarrow \mathbf{Ext}^1(E,F) ,$$

il existe une flèche $r : M \longrightarrow F$ de D.(A) telle que $ri = Id_F$ (dans D.(A)). Cela implique (3.1.8 (i)) l'existence d'une flèche $q : M \longrightarrow F'$ de A-Modules telle que $t = qi$ soit un quasi-isomorphisme. On a alors $t*X = q*(i*X)$, et $i*X$ splitte, d'où la conclusion.

Proposition 3.2.3.8. Soient E, F des A-Modules.

a) $u \in \mathbf{Ext}^1(E,F)$, il existe un quasi-isomorphisme $t : F \longrightarrow F'$ (resp. $s : E' \longrightarrow E$) et une extension X (resp. Y) de E par F' (resp. de E' par F) telle que l'on ait

$$\sigma t^{-1} \chi(X) = u \quad (\text{resp. } \chi(Y)s^{-1} = u) \quad . \qquad (1)$$

b) Soient $t' : F \longrightarrow F'$ (resp. $t'' : F \longrightarrow F''$) un quasi-isomorphisme, et X' (resp. X") une extension de E par F' (resp. F"). Pour que l'on ait $\sigma t'^{-1} \chi(X') = \sigma t''^{-1} \chi(X'')$, il faut et il suffit qu'il existe des quasi-isomorphismes $r' : F' \longrightarrow G$ et $r'' : F'' \longrightarrow G$ tels que $r't'$ soit homotope à $r''t''$ et que $r'*X' = r''*X''$ dans $\mathrm{Ext}^1(E,G)$.

b') Soient $s' : E' \longrightarrow E$ (resp. $s'' : E'' \longrightarrow E$) un quasi-isomorphisme, et Y' (resp. Y") une extension de E' (resp. E") par F . Pour que l'on ait $\chi(Y')s'^{-1} = \chi(Y'')s''^{-1}$, il faut et il suffit qu'il existe des quasi-isomorphismes

(1) On a $\sigma(s^{-1}) = (\dot{\sigma}\, s)^{-1}$ dans D.(A).

$r' : D \longrightarrow E'$ et $r'' : D \longrightarrow E''$ tels que $s'r'$ soit homotope à $s''r''$ et que $Y' * r' = Y'' * r''$ dans $\mathrm{Ext}^1(D,F)$.

Preuve. Nous nous bornerons à prouver l'assertion a) non respée et l'assertion b), la preuve de a) respée et b') étant analogue.

a) D'après (3.1.8 (i)), il existe des flèches de A-Modules

$$E \xrightarrow{f} G \xleftarrow{s} \sigma F \quad ,$$

s étant un quasi-isomorphisme, telles que $u = s^{-1}f$. Comme $\pi_o(\sigma F) = \pi_o(G) = 0$, on dispose de la suite exacte f_G (resp. $f_{\sigma F}$) (3.2.3.5). Posons $X = - f_G * f$. On a des morphismes de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
X & & 0 & \longrightarrow & \omega G & \longrightarrow & * & \longrightarrow & E \longrightarrow 0 \\
\downarrow & & & & \| & & \downarrow & & \downarrow -f \\
f_G & & 0 & \longrightarrow & \omega G & \longrightarrow & \varphi G & \longrightarrow & G \longrightarrow 0 \\
\uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
s & & & & \omega\, s & & \varphi\, s & & s \\
\uparrow & & & & & & & & \\
f_{\sigma F} & & 0 & \longrightarrow & \omega\, \sigma F & \longrightarrow & \varphi\, \sigma F & \longrightarrow & \sigma F \longrightarrow 0
\end{array} \quad .$$

Posons $t = (\omega\, s)\, \beta_F : F \longrightarrow \omega G$, où $\beta_F : F \longrightarrow \omega\, \sigma F$ est la flèche d'adjonction (3.2.3.5) ; t est un quasi-isomorphisme (3.2.1.10). Du diagramme ci-dessous on tire, grâce à (3.2.3.3),

$$(\sigma\, t)^{-1}\, \chi(X) = - (\sigma\, \beta_F)^{-1}\, \chi\, (f_{\sigma F})\quad u \quad .$$

Mais, d'après (3.2.3.5), on a

$$(\sigma\, \beta_F)^{-1}\, \chi\, (f_{\sigma F}) = - (\sigma\, \beta_F)^{-1}\, \alpha_{\sigma F}^{-1} = - \mathrm{Id} \quad ,$$

d'où

$$(\sigma\, t)^{-1}\, \chi(X) = u \quad ,$$

ce qui prouve a).

b) Prouvons le "il suffit". On a

$$\chi(r'_* X') = \chi(r''_* X'') \quad ,$$

d'où (3.2.3.3)

$$\sigma r' \chi(X') = \sigma r'' \chi(X'') \quad .$$

Comme on a $r't' = r''t''$ dans $D.(A)$, il vient

$$\chi(X') = \sigma r'^{-1} \sigma r'' \chi(X'') = \sigma t' \sigma t''^{-1} \chi(X'') \quad ,$$

d'où l'assertion. Reste la partie "il faut". En vertu de (3.1.8 (i)) il existe des quasi-isomorphisme $r'_1 : F' \longrightarrow G_1$ et $r''_1 : F'' \longrightarrow G_1$ tels que $r'_1 t'$ soit homotope à $r''_1 t''$. Posons $X'_1 = r'_{1*} X'$, $X''_1 = r''_{1*} X''$. On a (3.2.3.3) $\chi(X'_1) = \sigma r'_1(X')$, $\chi(X''_1) = \sigma r''_1 \chi(X'')$, d'où l'on tire

$$\sigma t'^{-1} \sigma r'^{-1}_1 \chi(X'_1) = \sigma t''^{-1} \sigma r''^{-1}_1 \chi(X''_1) \quad ,$$

donc, puisque $r'_1 t' = r''_1 t''$ dans $D.(A)$, on en déduit

$$\chi(X'_1) = \chi(X''_1) \quad .$$

D'après (3.2.3.7) il existe alors un quasi-isomorphisme $q : G_1 \longrightarrow G$ tel que $q*X''_1 = q*X'_1$ dans $Ext^1(E,G)$, et par suite $r' = qr'_1$ et $r'' = qr''_1$ répondent à la question, ce qui achève la démonstration.

3.2.4. Nous dirons qu'un morphisme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & E & \longrightarrow & E'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f''} & & \\ 0 & \longrightarrow & F' & \longrightarrow & F & \longrightarrow & F'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

de suites exactes de A-Modules est un <u>quasi-isomorphisme</u> si f' et f'' sont des quasi-isomorphismes (auquel cas f est aussi un quasi-isomorphisme). Nous appellerons <u>catégorie des vrais triangles</u> de $D.(A)$, et noterons $VT.(A)$, la catégorie localisée

de celle des suites exactes courtes de A-Mod par rapport aux quasi-isomorphismes. On peut introduire la catégorie des suites exactes courtes "à homotopie près" (deux flèches u_o , u_1 : $X \rightrightarrows Y$ de suites exactes courtes sont dites homotopes s'il existe une flèche $u : \mathbb{Z}^{(\Delta(1))} \otimes X \longrightarrow Y$ telle que $ud^o = u_o$, $ud^1 = u_1$) et montrer par les sempiternels arguments (cf. preuve de (3.1.8 (i))) que $VT.(A)$ se calcule par fractions bilatéralement à partir de cette dernière. Cela étant, il est immédiat qu'un quasi-isomorphisme de suites exactes courtes de A-Mod induit un isomorphisme des triangles distingués qui leur sont associés par $\underline{\chi}$ (3.2.3.2), en d'autres termes $\underline{\chi}$ induit un foncteur

$$\underline{\chi} \quad : \quad VT.(A) \longrightarrow T.(A) \quad ,$$

où $T.(A)$ est la catégorie des triangles distingués de $D.(A)$. Celui-ci est, comme on a vu, essentiellement surjectif ; il est aussi conservatif, mais ce n'est pas en général une équivalence de catégories.

3.3. Produits tensoriels dérivés.

3.3.1. La catégorie $D._{hv}(A)$.

Soit A un Anneau simplicial de T . Un A-Module simplicial M , i.e. un objet de la catégorie A-Mods = Simpl(A-Mod), peut-être regardé comme un objet bisimplicial dont les lignes $M_{.q}$ sont des A-Modules et les colonnes $M_{p.}$ des A_p-Modules simpliciaux. On a des foncteurs évidents

$$\text{A-Mod} \longrightarrow \text{A-Mods} \xrightarrow{\Delta} \text{A-Mod}$$

dont le composé est le foncteur identique : le premier associe à un A-Module L le A-Module simplicial trivial verticalement de valeur L , le second associe à $M \in$ ob A-Mods le sous-objets diagonal ΔM (1.1).

La tensorisation par γ (3.2.1.1) regardé comme $\mathbb{Z}$-module bisimplicial

([1]) trivial horizontalement (resp. verticalement) définit un foncteur

(3.3.1.1) $$\gamma_h \ (\text{resp. } \gamma_v) : A\text{-Mods} \longrightarrow A\text{-Mods} \quad .$$

On définit de même par tensorisation avec σ un foncteur

(3.3.1.2) $$\sigma_h \ (\text{resp. } \sigma_v) : A\text{-Mods} \longrightarrow A\text{-Mods} \quad ,$$

et, plus généralement, pour $f : E \longrightarrow F \in Fl\ A\text{-Mods}$, on définit le cône horizontal (resp. vertical) de f comme la somme amalgamée

(3.3.1.3)
$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ \gamma_h E & \longrightarrow & C_h(f) \end{array} \qquad \left(\text{resp. } \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ \gamma_v E & \longrightarrow & C_v(f) \end{array}\right).$$

On vérifie tout de suite qu'on a

(3.3.1.4) $$\Delta C_h(f) = \Delta C_v(f) = C(\Delta f) \quad .$$

Notons $D._v(A)$ (resp. $D._{hv}(A)$) la catégorie localisée de A-Mods par rapport aux flèches qui induisent des isomorphismes (resp. quasi-isomorphismes) sur les A-Modules d'homologie. La suite spectrale des bicomplexes $H_p^h H_q^v \Longrightarrow H_*$, jointe au théorème d'Eilenberg-Zilber (1.2.2), montre que Δ : A-Mods $\longrightarrow$ A-Mod se factorise à travers $D._{hv}(A)$, i.e. on a un diagramme commutatif de foncteurs

(3.3.1.5)
$$\begin{array}{ccccc} A\text{-Mods} & \longrightarrow & D._v(A) & \longrightarrow & D._{hv}(A) \\ \Delta \downarrow & & & & \downarrow \Delta \\ A\text{-Mod} & & \longrightarrow & & D.(A) \end{array} \quad ,$$

où les flèches horizontales sont les foncteurs de localisation. En particulier, Δ

([1]) Si Λ est un anneau de T, on appelle Λ-Module n-simplicial un objet n-simplicial de Λ-Mod (1.1) (ou, si l'on préfère, un Module sur Λ regardé comme Anneau n-simplicial trivial).

induit, pour E, $F \in \mathrm{ob}\ A\text{-Mod}$, un homomorphisme fonctoriel

$$\chi : \mathrm{Ext}^n(E,F) \longrightarrow \mathbf{Ext}^n(E,F) \tag{3.3.1.6}$$

pour $n \in \mathbb{Z}$ (en effet $\Delta\sigma_v = \Delta$ d'après (3.3.1.4)). Pour $n = 1$, on retrouve l'homomorphisme (3.2.3.4), comme il résulte aussitôt de (3.3.1.4).

De manière analogue on définit la catégorie $D_v(A)$ (resp. $D_{hv}(A)$) localisée de $C(A\text{-Mod})$ par rapport aux flèches qui induisent des isomorphismes (resp. quasi-isomorphismes) sur les A-Modules d'homologie. Par Dold-Puppe (1.4.6) $D._v(A)$ s'identifie à la sous-catégorie pleine de $D_v(A)$ formée des complexes dont la cohomologie est nulle en degré > 0. De même, $D._{hv}(A)$ s'identifie à la sous-catégorie pleine de $D_{hv}(A)$ formée des complexes dont la cohomologie est acyclique en degré > 0.

L'inclusion $A\text{-Mod} \longrightarrow A\text{-Mods}$ induit un foncteur

$$D.(A) \longrightarrow D._{hv}(A) \quad , \tag{3.3.1.7}$$

rétracté par Δ.

3.3.2. Produit tensoriel dérivé de Modules simpliciaux.

Notant comme d'habitude $D_v^-(A)$ la sous-catégorie pleine de $D_v(A)$ formée des complexes dont la cohomologie est nulle en degré assez grand, on sait définir (SGA 4) le dérivé du produit tensoriel

$$\overset{L}{\otimes} : D_v^-(A) \times D_v^-(A) \longrightarrow D_v^-(A) \quad .$$

Rappelons que, pour $E, F \in \mathrm{ob}\ D_v^-(A)$, on a

$$E \overset{L}{\otimes} F \xrightarrow{\sim} L \otimes F \quad ,$$

si $L \longrightarrow E$ est un quasi-isomorphisme de complexes de A-Modules, avec L à composantes plates. (Noter qu'un A-Module L est plat si et seulement si ses composantes L_n sont des A_n-Modules plats).

Lemme 3.3.2.1. Soient L un A-Module, $f : E \longrightarrow F$ un quasi-isomorphisme de A-Modules. Si L est plat, ou si E et F sont plats, alors $L \otimes f : L \otimes E \longrightarrow L \otimes F$ est un quasi-isomorphisme.

Preuve. Dans le cas particulier où A est trivial, l'assertion résulte aussitôt d'Eilenberg-Zilber et Künneth. Dans le cas général, tensorisons par f la résolution libre standard $F_A(L) \longrightarrow L$ (1.5.5.2). On obtient un carré commutatif de Modules simpliciaux

(*)
$$\begin{array}{ccc} F_A(L) \otimes E & \longrightarrow & F_A(L) \otimes F \\ \downarrow & & \downarrow \\ L \otimes E & \longrightarrow & L \otimes F \end{array} ,$$

où $L \otimes E$ et $L \otimes F$ sont regardés comme A-Modules simpliciaux triviaux. D'après le cas particulier, la flèche horizontale supérieure induit des quasi-isomorphismes sur chaque ligne (utiliser le fait que pour $X \in \mathrm{ob}\ \mathrm{Simpl}(T)$, $M \in \mathrm{ob}$ A-Mod , on a $A^{(X)} \otimes_A M \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^{(X)} \otimes_{\mathbb{Z}} M$). D'autre part, toujours d'après le cas particulier, si L est plat, ou si E et F sont plats, les flèches verticales induisent des quasi-isomorphismes sur chaque colonne. Par les suites spectrales des bicomplexes, il en résulte, sous ces mêmes hypothèses, que la flèche horizontale inférieure de (*) est un quasi-isomorphisme, cqfd.

3.3.2.2. Par dévissage, on déduit aussitôt de (3.3.2.1) que, si f , g sont des flèches de $D_v^-(A)$ inversibles dans $D_{hv}^-(A)$, alors $f \overset{L}{\otimes} g \in \mathrm{Fl}\ D_v^-(A)$ est également inversible dans $D_{hv}^-(A)$. En d'autres termes, le foncteur $\overset{L}{\otimes} : D_v^-(A) \times D_v^-(A) \longrightarrow D_v^-(A)$ induit un foncteur

(3.3.2.3) $$\overset{L}{\otimes} : D_{hv}^-(A) \times D_{hv}^-(A) \longrightarrow D_{hv}^-(A) .$$

Celui-ci définit à son tour par restriction un foncteur

(3.3.2.4) $$\overset{L}{\otimes} : D._{hv}(A) \times D._{hv}(A) \longrightarrow D._{hv}(A) .$$

En fait, on s'intéressera surtout au foncteur composé

$$(3.3.2.5) \qquad \overset{\iota}{\otimes} : D.(A) \times D.(A) \xrightarrow{\overset{L}{\otimes}} D._{hv}(A) \xrightarrow{\Delta} D.(A) \quad .$$

Proposition 3.3.2.6. Soient E, F des A-Modules. Le pro-objet de $D.(A)$

$$\text{"}\varprojlim\text{"} \; L \otimes M \quad ,$$

pris suivant la catégorie (filtrante (3.1.8 (i)) des quasi-isomorphismes $L \longrightarrow E$, $M \longrightarrow F$ de $Hot.(A)$ (3.1.2), est essentiellement constant de valeur $E \overset{\iota}{\otimes} F$. Par suite (1.4.4) le foncteur $\overset{\iota}{\otimes}$ est le dérivé gauche du foncteur $\otimes : Hot.(A) \times Hot.(A) \longrightarrow Hot.(A)$.

Preuve. Il suffit d'observer d'une part que les quasi-isomorphismes $L \longrightarrow E$ (resp. $M \longrightarrow F$) avec L (resp. M) plat forment un système cofinal (si P est un A-Module quelconque, $F_A(P) \longrightarrow P$ induit, par Eilenberg-Zilber et la suite spectrale des bicomplexes, un quasi-isomorphisme $\Delta F_A(P) \longrightarrow P$, et $\Delta F_A(P)$ est un A-Module plat), d'autre part que pour L (resp. M) plat on a $L \otimes F$ (resp. $E \otimes M$) $\overset{\sim}{\longrightarrow} E \overset{\iota}{\otimes} F$.

3.3.2.7. Pour $E \in$ ob $D.(A)$ fixé, le foncteur $E \overset{\iota}{\otimes}$ - commute à la suspension et transforme triangles distingués en triangles distingués. Cela résulte aussitôt de ce que $E \overset{\iota}{\otimes} F \overset{\sim}{\longrightarrow} L \otimes F$, où $L \longrightarrow E$ est un quasi-isomorphisme avec L plat.

Remarque 3.3.2.8. Pour A trivial de valeur A, on a $(E \overset{\iota}{\otimes}_A F) \overset{\sim}{\longrightarrow} E \overset{L}{\otimes}_A F$, comme il résulte de Eilenberg-Zilber.

3.3.3. Suites spectrales.

Proposition 3.3.3.1. (cf. ([23] 6.8 th.6)). L'Anneau simplicial A étant à nouveau quelconque, soient E, F des A-Modules. Il existe une suite spectrale du premier quadrant, à valeur dans la catégorie des $H_o(A)$-Modules, fonctorielle en chacun de ses arguments :

$$E^2_{p,q} = H_p(\mathrm{Tor}^A_q(E,F)) \Longrightarrow H_*(E \overset{\ell}{\otimes}_A F) \quad .$$

Preuve. On a (3.3.2.5) $E \overset{\ell}{\otimes} F = \Delta(E \overset{L}{\otimes} F)$, d'où, par Eilenberg-Zilber, $H_*(E \overset{\ell}{\otimes} F) \xrightarrow{\sim} H_*\int E \overset{L}{\otimes} F$. Il suffit donc d'écrire la suite spectrale $H_\mu H_\nu \Longrightarrow H_*$ relative au bicomplexe $E \overset{L}{\otimes} F$. Pour la fonctorialité, on peut utiliser le calcul de $E \overset{L}{\otimes} F$ à l'aide de la résolution libre standard.

Proposition 3.3.3.2. (cf. (loc. cit)). Sous les hypothèses de (3.3.3.1), il existe une suite spectrale du premier quadrant, à valeurs dans la catégorie des $H(A)$-Modules, fonctorielle en chacun de ses arguments

$$E^2_{pq} = k_q \, \mathrm{Tor}_p^{H_0(A)}(H_*(E), H_*(F)) \Longrightarrow H_*(E \overset{\ell}{\otimes} F) \quad ,$$

où k_q désigne la partie homogène de degré q du $H_*(A)$-Module gradué $\mathrm{Tor}_p^{H_*(A)}(H_*(E), H_*(F))$ (rappelons (3.1.3) que $H_*(A)$ est un Anneau gradué anti-commutatif et $H_*(E)$ (resp. $H_*(F)$) un $H_*(A)$-Module gradué ([1])).

La preuve de (3.3.3.2) sera donnée après quelques préliminaires. Pour $L, M \in \mathrm{ob}\ A\text{-Mod}$, on définit, à l'aide des "shuffles" (3.1.3), un homomorphisme canonique fonctoriel

$$(3.3.3.3) \qquad L^\sim \otimes_A M^\sim \longrightarrow (L \otimes_A M)^\sim \quad ,$$

où le premier membre désigne le produit tensoriel habituel des Modules différentiels gradués L et M sur l'Anneau différentiel gradué A . On en déduit un homomorphisme canonique fonctoriel

$$(3.3.3.4) \qquad H_*(L) \otimes_{H_*(A)} H_*(M) \longrightarrow H_*(L \otimes_A M) \quad .$$

Définition 3.3.3.5. Nous dirons qu'un A-Module M est spécial s'il existe un $\mathbb{Z}$-Module simplicial plat P , dont l'homologie est plate sur $\mathbb{Z}$, tel que $M \simeq A \otimes_{\mathbb{Z}} P$.

([1]) On renvoie à (IV 1.2.3) pour la définition du produit tensoriel dérivé de Modules gradués sur un Anneau gradué.

Lemme 3.3.3.6. Si M est spécial, (3.3.3.4) est un isomorphisme.

Preuve. Prenant P comme dans (3.3.3.5), on a

$$L \otimes_A M \xrightarrow{\sim} L \otimes_{\mathbb{Z}} P \quad .$$

Par associativité des shuffes, on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_*(L) \otimes_{H_*(A)} H_*(A \otimes_{\mathbb{Z}} P) & \xrightarrow{(3.3.3.4)} & H_*(L \otimes_{\mathbb{Z}} P) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H_*(L) \otimes_{H_*(A)} H_*(A) \otimes_{\mathbb{Z}} H_*(P) & \xrightarrow{\sim} & H_*(L) \otimes_{\mathbb{Z}} H_*(P) \end{array} \quad ,$$

où les flèches verticales sont données par (3.3.3.4) et la flèche horizontale inférieure est l'isomorphisme canonique. Comme P et $H_*(P)$ sont plats, les flèches verticales sont des isomorphismes par Künneth et Eilenberg-Zilber. Par suite la flèche horizontale supérieure est un isomorphisme, cqfd.

Remarque 3.3.3.7. Il découle de (3.3.3.6) que si P est un $\mathbb{Z}$-Module simplicial spécial, la flèche canonique

$$H_*(A) \otimes_{\mathbb{Z}} H_*(P) \longrightarrow H_*(A \otimes_{\mathbb{Z}} P)$$

est un isomorphisme. Si M est un A-Module spécial, $H_*(M)$ est donc un $H_*(A)$-Module gradué plat.

Lemme 3.3.3.8. Pour $M \in$ ob A-Mod, il existe une résolution fonctorielle de M par un complexe (de chaînes) de A-Modules spéciaux $L.(M)$, satisfaisant de plus à la condition que $H_*(L.(M))$ soit une résolution de $H_*(M)$.

Preuve. Tout revient à construire un épimorphisme fonctoriel $L_o(M) \xrightarrow{p} M$, tel que $L_o(M)$ soit spécial et $H_*(p)$ un épimorphisme. Par la théorie des résolutions de Cartan-Eilenberg plates [27], plus Dold-Puppe, on dispose d'une telle cons-

truction pour $A = \mathbb{Z}$, notons-la $L_o^{\mathbb{Z}}(-)$. Dans le cas général, on prend $L_o(M) = A \otimes_{\mathbb{Z}} L_o^{\mathbb{Z}}(M)$: la flèche composée $A \otimes_{\mathbb{Z}} L_o^{\mathbb{Z}}(M) \longrightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}} M \longrightarrow M$ est un épimorphisme et induit un épimorphisme sur l'homologie, on a gagné.

Preuve de 3.3.3.2. D'après (3.3.2.5), on a $E \overset{L}{\otimes} F \xrightarrow{\sim} \Delta(E \otimes L.(F))$, où $L.(F)$ (3.3.3.8) est vu comme un A-Module simplicial grâce à Dold-Puppe. Observons que la propriété que les lignes de $L.(F)$ soient des A-Modules spéciaux se conserve par l'application du foncteur K de Dold-Puppe, ainsi que le fait que $H_*(L.(F)) \longrightarrow H_*(F)$ soit un quasi-isomorphisme. Ecrivons la suite spectrale

$$E^2_{pq} = H_p^{vert} H_q^{hor} \Longrightarrow H_*$$

relative au bicomplexe $E \otimes L.(F)$, dont l'homologie totale est $H_*(E \overset{L}{\otimes} F)$ d'après la remarque du début et Eilenberg-Zilber. On a d'après (3.3.3.4)

$$H_q^{hor}(E \otimes L_p(F)) \xrightarrow{\sim} k_q(H_*(E) \otimes_{H_*(A)} H_*(L_p(F))) \quad .$$

Comme $H_*(L.(F))$ est une résolution graduée de $H_*(F)$ par des $H_*(A)$-Modules gradués plats (3.3.3.7), on a donc

$$E^2_{pq} = k_q Tor_p^{H_*(A)}(H_*(E), H_*(F)) \quad ,$$

et l'on obtient bien la suite spectrale annoncée dans (3.3.3.2).

Remarques 3.3.3.9. a) Un quasi-isomorphisme de A-Modules $E \longrightarrow E'$ induit un isomorphisme sur les suites spectrales correspondantes (3.3.3.1) (resp. (3.3.3.2)).

b) Pour A trivial, on retrouve les suites spectrales habituelles (cf. (3.3.2.8) et [27] .

c) On peut également montrer, en paraphrasant les arguments de Quillen ([23] 6.8 th. 6), qu'il existe une suite spectrale fonctorielle

$$E^2_{pq} = H_p(H_q(E) \overset{L}{\otimes}_A F) \Longrightarrow H_*(E \overset{L}{\otimes}_A F) \quad ,$$

à valeurs dans la catégorie des $H_o(A)$-Modules.

3.3.4. Extension des scalaires.

Soit $A \longrightarrow B$ un morphisme d'Anneaux simpliciaux de T. Il découle de (3.3.2.1) que le foncteur (cf. [27])

$$B \overset{L}{\otimes}_A - : D_v^-(A) \longrightarrow D_v^-(B)$$

induit un foncteur, encore noté

$$B \overset{L}{\otimes}_A - : D_{hv}^-(A) \longrightarrow D_{hv}^-(B) \quad .$$

Celui-ci définit par restriction un foncteur

$$B \overset{L}{\otimes}_A - : D._{hv}(A) \longrightarrow D._{hv}(B) \quad .$$

Comme plus haut, on s'intéressera surtout au foncteur composé

$$(3.3.4.1) \qquad B \overset{\ell}{\otimes}_A - : D.(A) \xrightarrow{B \overset{L}{\otimes}_A -} D._{hv}(B) \xrightarrow{\Delta} D.(B) \quad .$$

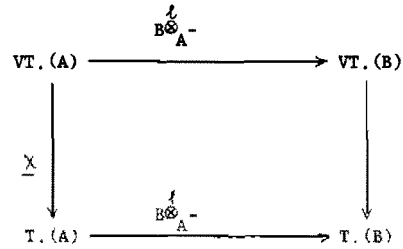
Proposition 3.3.4.2. Soit F un A-Module. Le pro-objet de $D.(B)$

$$\text{"lim"}_{\longleftarrow} \; B \otimes_A M \quad .$$

pris suivant la catégorie (filtrante) des quasi-isomorphismes $M \longrightarrow F$ de $Hot.(A)$, est essentiellement constant de valeur $B \overset{\ell}{\otimes}_A F$. Par suite (1.4.4) le foncteur $B \overset{\ell}{\otimes}_A -$ est le dérivé gauche du foncteur $B \otimes_A - : Hot.(A) \longrightarrow Hot.(B)$.

Preuve. Elle est analogue à celle de (3.3.2.6). Nous l'omettons.

3.3.4.3. Le foncteur $B \overset{L}{\otimes}_A -$ commute à la translation des degrés et transforme triangles distingués en triangles distingués. Utilisant (3.3.1.4), on en déduit que $B \overset{\ell}{\otimes}_A -$ commute à la suspension et transforme triangles distingués en triangles distingués. En fait, il y a mieux : on sait (V 2) qu'on peut définir $B \overset{L}{\otimes}_A - : VT^-(A) \longrightarrow VT^-(B)$, où $VT^-(-)$ désigne la catégorie des vrais triangles de $(-)$, et, toujours par les mêmes arguments, on montre que ce foncteur induit un foncteur $VT.(A) \xrightarrow{B \overset{\ell}{\otimes}_A -} VT.(B)$ (3.2.4). On a un carré commutatif



où $\underline{\chi}$ est le foncteur défini en (3.2.4).

Proposition 3.3.4.4. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Pour $E \in$ ob D.(A), $F \in$ ob D.(B), il existe un isomorphisme canonique fonctoriel

$$\mathrm{Ext}^n_B(B \overset{l}{\otimes}_A E, F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^n_A(E,F)$$

(cf. (3.2.1.12) pour la définition des Ext).

Preuve. Compte tenu de (3.3.4.3), on peut se borner à $n = 0$. On peut d'autre part supposer E plat. On a alors $B \overset{l}{\otimes}_A E \longrightarrow B \otimes_A E$. L'isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hot}_B(B \otimes_A E, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hot}_A(E,M)$$

fournit, par passage à la limite suivant les quasi-isomorphismes $F \longrightarrow M$, l'isomorphisme annoncé (cf. (3.1.8 (i))).

Remarque 3.3.4.5. Soit $F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow \sigma F'$ un triangle distingué de D.(A). Alors les isomorphismes (3.3.4.4) définissent un isomorphisme des suites exactes (3.2.2.10) :

$$\begin{array}{ccccccc}
\ldots \longrightarrow & \mathrm{Ext}^n_B(B \overset{l}{\otimes}_A E, F') & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^n_B(B \overset{l}{\otimes}_A E, F) & \longrightarrow & \ldots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \\
\ldots \longrightarrow & \mathrm{Ext}^n_A(E,F') & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^n_A(E,F) & \longrightarrow & \ldots
\end{array}$$

Enoncé analogue dans le cas d'un triangle distingué $E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow \sigma E$.

Corollaire 3.3.4.6. Si $A \longrightarrow B$ est un quasi-isomorphisme, les foncteurs $B \overset{\ell}{\otimes}_A - : D.(A) \longrightarrow D.(B)$ et "oubli" : $D.(B) \longrightarrow D.(A)$ sont quasi-inverses l'un de l'autre.

Preuve. Il s'agit de montrer que les flèches d'adjonction définies par (3.3.4.4) sont des isomorphismes. Pour $E \in$ ob $D.(A)$, la flèche d'adjonction

$$E \longrightarrow B \overset{\ell}{\otimes}_A E$$

est un isomorphisme, car on peut supposer E plat et qu'alors elle est donnée par la flèche d'adjonction ordinaire $E \longrightarrow B \otimes_A E$, i.e. $E \otimes_A (A \longrightarrow B)$, qui est un quasi-isomorphisme d'après (3.3.2.1). Soit maintenant $F \in$ ob $D.(B)$. Montrons que la flèche d'adjonction

$$(*) \qquad B \overset{\ell}{\otimes}_A F \longrightarrow F$$

est un isomorphisme. Le foncteur "oubli" : $D.(B) \longrightarrow D.(A)$ étant conservatif, il suffit de montrer que (*) donne un isomorphisme dans $D.(A)$. Mais le composé

$$F \longrightarrow B \overset{\ell}{\otimes}_A F \xrightarrow{(*)_{[A]}} F \quad ,$$

où la première flèche est l'autre flèche d'adjonction, est l'identité de F (considéré comme objet de $D.(A)$). D'après la première partie de la preuve la première flèche est un isomorphisme, donc il en est de même de la seconde flèche, et l'on gagne.

3.3.4.7. Soient $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ des morphismes d'Anneaux simpliciaux. Pour $F \in$ ob $D.(A)$, on a un isomorphisme canonique fonctoriel

$$C \overset{\ell}{\otimes}_B (B \overset{\ell}{\otimes}_A F) \xrightarrow{\sim} C \overset{\ell}{\otimes}_A F \quad .$$

La preuve est immédiate.

3.3.5. Produit tensoriel dérivé d'Algèbres simpliciales.

3.3.5.1. Soient A un Anneau simplicial, B une A-Algèbre. La résolution libre standard $P_A(B) \longrightarrow B$ (1.5.5.6) induit, par passage aux sous-objets diagonaux (et d'après Eilenberg-Zilber et la suite spectrale des bicomplexes), un quasi-isomorphismes

$$\Delta P_A(B) \longrightarrow B$$

de A-Algèbres. L'Algèbre $\Delta P_A(B)$ est libre terme à terme, donc en particulier plate comme A-Module (loc. cit.).

Proposition 3.3.5.2. Soient B, C des A-Algèbres. Le pro-objet de D(A-Alg)

$$B \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A C \overset{\text{dfn}}{=} \text{"lim"}_{\longleftarrow} P \otimes_A Q \quad ,$$

où la limite est prise suivant les quasi-isomorphismes $P \longrightarrow B$, $Q \longrightarrow C$ de Hot(A-Alg)([1]) , est essentiellement constant de valeur $P \otimes_A C$ (resp. $B \otimes_A Q$) pour P (resp. Q) plat sur A . Par suite (1.4.4) le foncteur

$-\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A -$: D(A-Alg) × D(A-Alg) $\longrightarrow$ D(A-Alg) est le dérivé gauche du foncteur

$-\otimes_A -$: Hot(A-Alg) × Hot(A-Alg) $\longrightarrow$ Hot(A-Alg).

Preuve. D'après (3.3.5.1) les quasi-isomorphismes $P \longrightarrow B$ (resp. $Q \longrightarrow C$) avec P (resp. Q) plat forment un système cofinal. La proposition se déduit donc trivialement de (3.3.2.6).

4. Dérivés des puissances symétriques et extérieures.

La théorie des foncteurs dérivés des puissances symétriques et extérieures est due, dans le cas ponctuel, à Dold-Puppe [10] ; sa globalisation sur les topos annelés, à P. Deligne, qui traite séparément le cas des dérivés dans

([1]) Ceux-ci forment une catégorie filtrante d'après (3.1.8 (ii)).

$D^{o]}$ (non publié) et dans $D^{b[o}$ ([2]) (SGA 4 XVII). La technique bisimpliciale employée ici permet d'unifier ces deux théories.

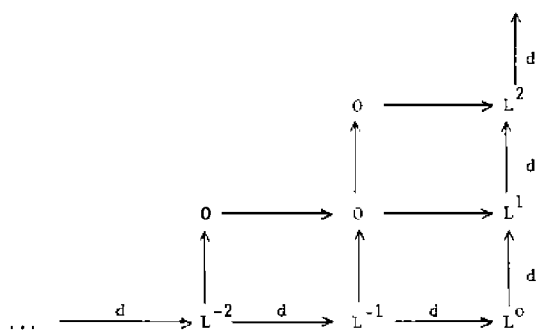
4.1. Préliminaires sur D^- .

Soit A une catégorie abélienne. On se propose de montrer que $D^-(A)$ est rétracte d'une catégorie dérivée convenable d'objets bisimpliciaux mixtes.

4.1.1. Rappelons (1.2.1) qu'on note C(A) la catégorie des complexes de A (à différentielle de degré +1), et $C.(A)$ (resp. $C^*(A)$) la sous-catégorie pleine formée des complexes nuls en degré > 0 (resp. < 0). On désignera par $C^{\cdot}_{\cdot}(A)$ la sous-catégorie pleine de la catégorie 2-C(A) des bicomplexes de A (loc. cit.) formée des bicomplexes L "contenus dans le deuxième quadrant", i.e. tels que $L^{pq} = 0$ si $p > 0$ ou $q < 0$. La catégorie $C.(A)$ (resp. $C^*(A)$) s'identifie de manière naturelle à une sous-catégorie pleine de $C^{\cdot}_{\cdot}(A)$. Plus généralement, on définit un foncteur pleinement fidèle

$$i : C(A) \longrightarrow C^{\cdot}_{\cdot}(A) \quad , \tag{4.1.1.1}$$

en associant à $L \in \text{ob } C(A)$ l'unique bicomplexe iL nul en dehors du bord du second quadrant et ayant E pour complexe simple associé, i.e.



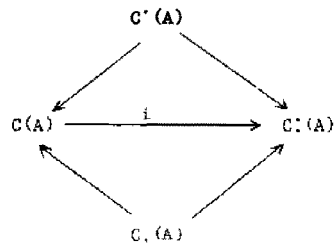
([1]) Si A est une catégorie abélienne, $D^{o]}(A)$ (resp. $D^{b[o}(A)$) désigne la sous-catégorie pleine de $D^-(A)$ formée des complexes à cohomologie nulle en degré > 0 (resp. < 0) .

On a donc

(4.1.1.2) $$\int i = Id_{C(A)} \quad , \qquad (^1)$$

et un diagramme commutatif de foncteurs pleinement fidèles

(4.1.1.3)



Si M est un bicomplexe, on notera $H^p_{hor}(M)$ (resp. $H^p_{vert}(M)$) le p-ième complexe de cohomologie horizontale (resp. verticlae). Avec cette notation, on a, pour $L \in$ ob C(A),

(4.1.1.4)

$$H^p_{hor}(iL) = \begin{cases} H^p(L) & \text{si} \quad p < 0 \\ t_{[o}L & \text{si} \quad p = 0 \\ 0 & \text{si} \quad p > 0 \end{cases}$$

$$H^q_{vert}(iL) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad q < 0 \\ t_{o]}L & \text{si} \quad q = 0 \\ H^q(L) & \text{si} \quad q > 0 \end{cases}$$

4.1.1.5. Désignons par $D^{\cdot}_{\cdot}(A)$ la catégorie localisée de $C^{\cdot}_{\cdot}(A)$ par rapport aux flèches qui induisent des quasi-isomorphismes sur les complexes de cohomologie verticale, notons $D^b_{\cdot}(A)$ la sous-catégorie pleine de $D^{\cdot}_{\cdot}(A)$ formée des complexes dont la cohomologie verticale est acyclique en degré assez grand. D'après (4.1.1.4), i induit un foncteur

(1) On rappelle que $\int$ désigne le foncteur complexe simple associé (1.2.1).

$$i : D(A) \longrightarrow D^{\cdot}_{\cdot}(A) \quad .$$

D'autre part, si $f : X \longrightarrow Y$ est une flèche de $C^{\cdot}_{\cdot}(A)$ telle que $H^q_{vert}(f)$ soit un quasi-isomorphisme pour tout q, alors $\int f : \int X \longrightarrow \int Y$ est un quasi-isomorphisme : en effet, notant $t^{vert}_{q]}$ le foncteur qui tue la cohomologie verticale en degré $> q$, on a $f = \varinjlim t^{vert}_{q]} f$, donc $\int f = \varinjlim \int t^{vert}_{q]} f$, donc il suffit de montrer que $\int t^{vert}_{q]} f$ est un quasi-isomorphisme, ce qui résulte aussitôt de la suite spectrale $H_{hor} H_{vert} \Longrightarrow H^*$ appliquée aux complexes $t^{vert}_{q]} X$, $t^{vert}_{q]} Y$ (ceux-ci sont concentrés dans la bande horizontale $[0,q]$, donc la suite spectrale converge). Par suite, <u>le foncteur $\int$ induit un foncteur</u>

$$\int : D^{\cdot}_{\cdot}(A) \longrightarrow D(A) \quad ,$$

<u>et le composé</u>

$$D(A) \xrightarrow{i} D^{\cdot}_{\cdot}(A) \xrightarrow{\int} D(A)$$

<u>est l'identité</u>. Observons que i envoie $D^-(A)$ dans $D^b_{\cdot}(A)$ et que $\int$ envoie $D^b_{\cdot}(A)$ dans $D^-(A)$.

4.1.2. Désignons par $Simplmixt(A)$ la catégorie des objets simpliciaux mixtes de type $(1,1)$ de A (cf. (1.1)), i.e.

$$Simplmixt(A) = \underline{Hom}(\Delta \times \Delta^o, A) = Simpl(Cosimpl(A)) = Cosimpl(Simpl(A)) \quad .$$

Par la théorie de Dold-Puppe (1.3), on dispose d'un foncteur complexe normal associé "vertical" $N_{vert} : Simplmixt(A) \longrightarrow C^{\cdot}(Simpl(A))$ (resp. "horizontal" $N_{hor} : Simplmixt(A) \longrightarrow Cosimpl(C.(A))$), et l'on a un carré essentiellement commutatif de foncteurs

(4.1.2.1)
$$\begin{array}{ccc} Simplmixt(A) & \xrightarrow{N_{vert}} & C^{\cdot}(Simpl(A)) \\ \downarrow{\scriptstyle N_{hor}} & & \downarrow{\scriptstyle C^{\cdot}(N)} \\ Cosimpl(C.(A)) & \xrightarrow{N} & C^{\cdot}_{\cdot}(A) = C.C^{\cdot}(A) = C^{\cdot}C.(A) \end{array} \quad .$$

On dispose d'autre part d'un foncteur transformé de Dold-Puppe "vertical" $K_{vert} : C_*^*(A) \longrightarrow Cosimpl(C.(A))$ (resp. "horizontal" $K_{hor} : C_*^*(A) \longrightarrow C^*(Simpl(A))$), et l'on a un carré essentiellement commutatif quasi-inverse du précédent

(4.1.2.2)
$$\begin{array}{ccc} Simplmixt(A) & \xleftarrow{K} & C^*(Simpl(A)) \\ \uparrow{\scriptstyle Cosimpl(K)} & & \uparrow{\scriptstyle K_{hor}} \\ Cosimpl(C.(A)) & \xleftarrow{K_{vert}} & C_*^*(A) \end{array} .$$

On notera

(4.1.2.3)
$$N : Simplmixt(A) \longrightarrow C_*^*(A) \quad ,$$
$$K : C_*^*(A) \longrightarrow Simplmixt(A)$$

les foncteurs composés définis respectivement par (4.1.2.1) et (4.1.2.2). Ils sont quasi-inverses l'un de l'autre.

Notons $Dmixt(A)$ la catégorie localisée de $Simplmixt(A)$ par rapport aux flèches f telles que $H^q_{vert}(f)$ soit un quasi-isomorphisme pour tout q . Observant qu'on a $H^q_{vert}N \simeq NH^q_{vert}$ (exactitude de N (1.3.3 (i))) on en déduit que les foncteurs N et K de (4.1.2.2) induisent des foncteurs quasi-inverses

(4.1.2.4)
$$Dmixt(A) \underset{K}{\overset{N}{\rightleftarrows}} D_*^*(A) \quad .$$

4.1.3. Soient B une catégorie abélienne et

(4.1.3.1)
$$F : A \longrightarrow B$$

un foncteur, non nécessairement additif. On notera encore F le foncteur composé

(4.1.3.2)
$$F = \int NFKi \ : \ C(A) \longrightarrow C(B) \quad .$$

Celui-ci coïncide, quand (4.1.3.1) est additif, avec l'extension naturelle habituelle de (4.1.3.1) à $C(A)$ (car les foncteurs N et K commutent à tout foncteur additif). Pour mesurer le défaut d'additivité d'un foncteur, on dispose de la notion de "degré" ([10] 4.18).

Lemme 4.1.3.3. Soient $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{Z} \cup -\{\infty\} \cup +\{\infty\}$ contenant 0 et X un complexe de A nul en dehors de $[a,b]$. Si F est de degré $\leqslant k$ (loc. cit.), FX est nul en dehors de $[ka,kb]$.

Preuve. En effet, d'après ([10] 4.23) et l'énoncé dual, NFKiX est nul en dehors du rectangle $-ka \leqslant p \leqslant 0$, $0 \leqslant q \leqslant kb$.

Remarque 4.1.3.4. Sans hypothèse sur F , il est trivial que si X est nul en degré $> a$ (resp. $< b$) il en est de même de FX .

Lemme 4.1.3.5. Soient $u, v : X \rightrightarrows Y$ des flèches de C(A). Si u et v sont homotopes, F(u) et F(v) sont homotopes.

Preuve (Deligne). Soit h tel que $v - u = dh + hd$. On a

$$(*) \qquad h = h^+ + h^- \quad ,$$

où $(h^+)^i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leqslant 0 \\ h^i & \text{si } i > 0 \end{cases}$, $(h^-)^i = \begin{cases} h^i & \text{si } i \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } i > 0 \end{cases}$.

Soit $w : X \longrightarrow Y$ défini par $w - u = dh^+ + h^+d$. On a donc, d'après (*), $v - w = dh^- + h^-d$. Maintenant h^+ définit une homotopie entre iu et iw considérées comme flèches de $C'(C.(A))$, donc (1.3.4) une homotopie entre $K_{vert}iu$ et $K_{vert}iw$, soit finalement une homotopie "verticale" (i.e. cosimpliciale) entre Kiu et Kiw. De même, h^- définit une homotopie "horizontale" entre Kiw et Kiv. L'une et l'autre homotopie se conserve par application de F , d'où l'assertion.

Remarque 4.1.3.6. Soit $G : B \longrightarrow C$ un foncteur entre catégories abéliennes. Pour $X \in$ ob C.(A) (resp. $C'(A)$), on a un isomorphisme fonctoriel

$$(*) \qquad (GF)(X) \xrightarrow{\sim} G(F(X)) \quad .$$

Celui-ci vaut encore pour $X \in$ ob C(A) si l'un des foncteurs F , G est additif. Dans le cas général (*) n'est malheureusement pas valable, comme le montre l'exemple :

$A = B = C$ = catégorie des modules sur un anneau k, $F = G = \Lambda^2_k$, $X = L[1] \oplus M[-1]$ où L et M sont des k-modules. Cela tient au fait que, dans la définition (4.1.3.2) de l'extension d'un foncteur à $C(A)$, on ne peut en général remplacer i par un autre plongement de $C(A)$ dans $C'(A)$ sans changer le foncteur composé correspondant.

4.2. Dérivé gauche d'un foncteur compatible aux limites inductives locales.

4.2.1. Retour sur les limites inductives locales. Nous aurons besoin de la variante suivante de la notion explicitée dans (2.2.5) (nous renvoyons le lecteur à (SGA 4 V 8) pour plus de détails). Soient T un topos, I une catégorie localement filtrante sur T , et C une catégorie au-dessus de T^o . On appelle T-système inductif local d'objets de C indexé par I tout T^o-foncteur de I dans C . (Si C' est une catégorie, les foncteurs de I dans C' correspondent bijectivement aux T^o-foncteurs de I dans $T^o \times C'$ considérée comme catégorie sur T^o par pr_1 , de sorte que la notion définie dans (2.2.5) est un cas particulier de celle définie ici). Prenant pour C le champ [13] des faisceaux sur T , on montre (SGA 4 V 8) que le foncteur qui à un faisceau associe le T-système inductif local trivial correspondant admet un adjoint à gauche, noté $\varinjlim_I$, qu'on appelle limite inductive locale et qui commute aux limites projectives finies. On prouve dans (loc. cit.) le

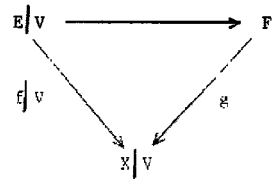
Théorème 4.2.1.1. (Deligne-Lazard). Soient A un Anneau de T et M un A-Module. Pour que M soit plat, il faut et il suffit que M soit la limite d'un T-système inductif local de Modules libres de type fini.

En fait, (4.2.1.1) est conséquence du lemme plus précis :

Lemme 4.2.1.2. (SGA 4 V 8). Soit $f : E \longrightarrow M$ un morphisme de A-Modules où M est plat et E de présentation finie. Alors f se factorise localement à travers un Module libre de type fini.

Proposition 4.2.1.3. Soit X un complexe de A-Modules, borné supérieurement, acyclique, et à composantes plates. Alors X est limite d'un T-système inductif local de complexes bornés, homotopiquement triviaux, de Modules libres de type fini.

Preuve. Considérons la catégorie I suivante. Les objets de I sont les couples $(U, f : E \longrightarrow X|U)$, où $U \in \mathrm{ob}\, T$, f est un morphisme de complexes de $A|U$-Modules, avec E borné et à composantes de présentation finie. Une flèche $(u, f : E \longrightarrow X|U) \longrightarrow (V, g : F \longrightarrow X|V)$ est un couple formé d'une flèche $V \longrightarrow U$ de T et d'un triangle commutatif



Il est immédiat que I est une catégorie localement filtrante sur T, et que la flèche naturelle

$$\varinjlim_{i \in I} E_i \longrightarrow X \quad ,$$

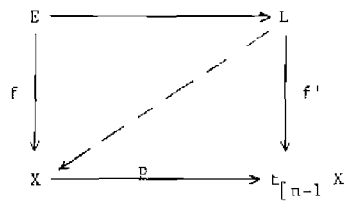
où, pour $i = (U, f : E \longrightarrow X|U) \in I$ on a posé $E = E_i$, est un isomorphisme (cf. preuve de (2.2.6)). Pour prouver la proposition, il suffit donc de montrer que la sous-catégorie pleine de I formée des i tels que E_i soit homotopiquement trivial et à composantes libres de type fini est une catégorie cofinale (2.2.5). En d'autres termes, on est ramené à montrer que toute flèche $E \xrightarrow{f} X$, où E est borné et à composantes de présentation finie, se factorise localement à travers un complexe borné, homotopiquement trivial, de Modules libres de type fini.

(a) Supposons d'abord X concentré dans l'intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{Z}$. On va montrer, par récurrence sur $d = b-a$, que f se factorise localement à travers un complexe homotopiquement trivial, à composantes libres de type fini, et concentré dans $[a,b]$. Pour $d = 0$, $X = 0$, et il n'y a rien à démontrer. Supposons donc $d > 0$. On peut supposer E nul en degré $> b$. D'après (4.2.1.2), $f^b : E^b \longrightarrow X^b$

se factorise localement à travers un Module libre de type fini, de sorte qu'on peut supposer X^b libre de type fini. Alors, quitte à se localiser, X se décompose en $X \xrightarrow{\sim} X' \oplus X''$, où X' (resp. X") est concentré dans l'intervalle [a,b-1] (resp. [b-1,b]), X" étant libre de type fini en chaque degré. Par l'hypothèse de récurrence, $pr_1 f : E \longrightarrow X'$ se factorise localement à travers un complexe homotopiquement trivial, à composantes libres de type fini, et concentré dans l'intervalle[a,b-1], et l'on gagne.

(b) Dans le cas général, soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que E soit nul en degré $< n$. Alors d'après (a), il existe localement un carré commutatif (en traits pleins)

(*)



où p est la projection canonique (1.4.7.1), et L est borné, homotopiquement trivial, à composantes libres de type fini, et nul en degré $< n-1$. Comme L^{n-1} est libre de type fini, localement f'^{n-1} se relève en $L^{n-1} \longrightarrow X^{n-1}$, de sorte qu'on peut supposer qu'il existe une flèche $L \longrightarrow X$ rendant commutatif le triangle inférieur de (*). Comme p est l'identité en degré $\geqslant n$ et que E est nul en degré $< n$, le triangle supérieur de (*) est également commutatif, ce qui fournit la factorisation désirée et achève la preuve de (4.2.1.3).

4.2.2. Construction de LF.

On se fixe un topos T , des Anneaux A et B de T , et un T-foncteur F du champ (Giraud, [13]) des A-Modules dans le champ des B-Modules. On suppose que F commute aux limites inductives locales, i.e. que, pour tout T-système inductif local $(L_i)_{i \in I}$ de A-Modules (4.2.1), la flèche canonique

$$\varinjlim_{i \in I} F(L_i) \longrightarrow F\left(\varinjlim_{i \in I} L_i\right)$$

est un isomorphisme.

Lemme 4.2.2.1. Soit $u : X \longrightarrow Y$ un quasi-isomorphisme de complexes bornés supérieurement de A-Modules plats. Alors $F(u)$ (4.1.3) est un quasi- isomorphisme.

Preuve. Quitte à remplacer u par $(i,u) : X \longrightarrow CX \oplus Y$, où CX est le cône de Id_X et i l'injection canonique, on peut, compte tenu de (4.1.3.5), supposer u injectif et la suite exacte

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow X \xrightarrow{u} Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

scindée terme à terme. Donc Z est borné supérieurement, à composantes plates, et acyclique. D'après (4.2.1.3), il existe un système inductif local $(Z_i)_{i\in I}$ de complexes homotopiquement triviaux, tel que $Z = \varinjlim_{i\in I} Z_i$. Si l'on note

$$0 \longrightarrow X|U \xrightarrow{u_i} Y_i \longrightarrow Z_i \longrightarrow 0$$

la suite exacte déduite de (*) par $Z_i \longrightarrow Z|U$ (où $U \in \mathrm{ob}\ T$ est la projection de i), on a

$$u = \varinjlim_{i\in I} u_i \quad ,$$

Mais comme les Z_i sont homotopiquement triviaux, les u_i sont des équivalences d'homotopie, donc, d'après (4.2.1.3), il en est de même des $F(u_i)$, et par conséquent, vu l'exactitude des T-limites locales, et le fait que F y commute, $F(u) = \varinjlim F(u_i)$ est un quasi-isomorphismes, cqfd.

4.2.2.2. Notons $\mathrm{Hot}(A)$ la catégorie des complexes de A-Modules à homotopie près [27]. D'après (4.1.3.5), l'extension (4.1.3.2) de F aux complexes de A-Modules induit un foncteur

$$F : \mathrm{Hot}(A) \longrightarrow \mathrm{Hot}(B) \quad .$$

Comme tout complexe de A-Modules à cohomologie bornée supérieurement est but d'un quasi-isomorphisme de source un complexe de A-Modules plats borné supérieurement,

[27], il découle de (4.2.2.1) que, pour $X \in \mathrm{ob}\, D^-(A)$, le pro-objet de $D(B)$

$$LF(X) = \text{"lim"}_{X' \to X} F(X') ,$$

où $X' \longrightarrow X$ parcourt les classes d'homotopie de quasi-isomorphismes de but X, est essentiellement constant (de "valeur" $F(X')$ pour X' à composantes plates et borné supérieurement). En d'autres termes (1.4.4), F admet un dérivé gauche

$$LF : D^-(A) \longrightarrow D(B) .$$

Il est clair que LF commute à la localisation au-dessus d'un objet de T. D'autre part, les H^nLF commutent aux limites inductives locales :

Proposition 4.2.2.3. *Soient $(X_i)_{i\in I}$ un système inductif local de complexes de A-Modules, et $X = \varinjlim X_i$. On suppose les X_i et X à cohomologie bornée supérieurement. Alors, pour $n \in \mathbb{Z}$, la flèche canonique*

$$\varinjlim H^nLF(X_i) \longrightarrow H^nLF(X)$$

est un isomorphisme.

Preuve. Les foncteurs "troncature" $t_{q]}$ (1.4.7) étant visiblement compatibles aux limites inductives locales, on peut supposer les X_i et X à degrés bornés supérieurement. Soit Y un complexe de A-Modules borné supérieurement ; appliquant à KiY ((4.1.1.1) et (4.1.2.3)) le foncteur "résolution libre standard" (1.5.5 a)), puis prenant le complexe simple associé, on obtient un quasi-isomorphisme

$$L(Y) \longrightarrow Y ,$$

fonctoriel en Y, où $L(Y)$ est à degrés bornés et à composantes plates ; de plus, $L(-)$ commute aux limites inductives locales, puisqu'il en est ainsi des foncteurs i, K, oubli, Module libre engendré, complexe simple associé. On a donc

$$\begin{aligned} LF(X) &= F(L(X)) \\ &= F(\varinjlim L(X_i)) \\ &= \varinjlim F(L(X_i)) \quad , \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} H^nLF(X) &= \varinjlim H^nF(L(X_i)) \\ &= \varinjlim H^nLF(X_i) \quad , \end{aligned}$$

cqfd.

4.2.2.4. Si X est un complexe de A-Modules tel que $H^kX = 0$ pour $k > p$, où p est un entier négatif, il résulte trivialement de (4.1.3.4) que l'on a $H^kLF(X) = 0$ pour $k > p$. On a d'autre part :

Proposition 4.2.2.5. *Soit n un entier ≥ 0. On suppose que*

$$F : A\text{-Mod} \longrightarrow B\text{-Mod}$$

est de degré $\leq n$ (cf. (4.1.3)). Soient $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{Z}$ contenant 0, et X un objet de $D^-(A)$. On a alors, avec les notations de (SGA 6 I §§ 4, 5),

$$\text{tor.amp}_A(X) \subset [a,b] \Longrightarrow H^kLF(X) = 0 \text{ pour } k \notin [na,nb] \ .$$

Si de plus F transforme A-Modules plats (resp. libres de type fini) en B-Modules plats (resp. libres de type fini), alors on a (avec les notations de (loc. cit.)) :

$$\text{tor.amp}_A(X) \subset [a,b] \Longrightarrow \text{tor.amp}_B(LF(X)) \subset [na,nb]$$

$$(\text{resp. } \text{parf.amp}_A(X) \subset [a,b] \Longrightarrow \text{parf.amp}_B(LF(X)) \subset [na,nb]) \ .$$

Preuve. C'est une conséquence immédiate des définitions et de (4.1.3.3).

4.2.2.6. Exemples. Pour un A-Module M , notons $\wedge_A(M)$ (resp. $\Gamma_A(M)$) l'Algèbre extérieure (resp. à puissances divisées) de M. C'est une A-Algèbre graduée strictement anticommutative ([1]) (resp. commutative et munie de puissances divisées), égale à M en degré un, et caractérisée par la propriété universelle habituelle, à savoir que l'injection $M \longrightarrow \wedge M$ (resp. ΓM) est universelle parmi les morphismes de M dans la partie homogène de degré un d'une Algèbre graduée strictement anti-commutative (resp. commutative et à puissances divisées ([2])). L'Algèbre $\wedge M$ (resp. ΓM) est le faisceau associé au préfaisceau $U \longmapsto \wedge_{A(U)}(M(U))$ (resp. $\Gamma_{A(U)}(M(U))$.

Les foncteurs $\wedge_A(M)$, $\Gamma_A(M)$, ainsi que le foncteur Algèbre symétrique $S_A(M)$ (1.5.5 b)), commutent à la localisation au-dessus d'un objet de T , et aux limites locales en M (cela résulte aussitôt des propriétés universelles). On peut donc prendre comme foncteur F de (4.2.2) (avec A = B) l'un des foncteurs S, $\wedge$, Γ, ou une composante homogène de S, $\wedge$, Γ, ou tout produit tensoriel de telles composantes.

Pour E , F $\in$ ob A-Mod, on a un isomorphisme fonctoriel canonique d'Algèbres graduées

$$S_A(E \oplus F) \xrightarrow{\sim} S_A(E) \otimes S_A(F) \quad ,$$

et des isomorphismes analogues avec $\wedge_A$ et Γ_A (dans le cas de $\wedge_A$ le produit dans le membre de droite est défini par la règle des signes habituelle $(x \otimes y)(x' \otimes y') = (-1)^{pq} xx' \otimes yy'$ pour y de degré p , x' de degré q). Il en résulte que les foncteurs S^n , $\wedge^n$, Γ^n sont de degré n, ([10] 4.18), et transforment Modules plats (resp. libres de type fini) en Modules plats (resp. libres de type fini).

([1]) i.e. $xy = (-1)^{pq} yx$ pour x de degré p et y de degré q , et $x^2 = 0$ pour x de degré impair.

([2]) La notion d'Algèbre graduée à puissances divisées se définit comme dans le cas ponctuel, cf. [6] .

4.2.3. Produits.

On conserve le topos T et l'Anneau A de T (4.2.2).

4.2.3.1. Pour P , Q des A-Modules simpliciaux mixtes (i.e. des objets de Simplmixt(A-Mod) (4.1.2)), on a un morphisme fonctoriel de bicomplexes

$$(4.2.3.2) \qquad NP \otimes NQ \longrightarrow N(P \otimes Q) \quad , \qquad (1)$$

obtenu en composant la flèche de shuffles(1.2.2.1) et la flèche d'Alexander-Whitney cosimpliciale duale de (1.2.2.2) (l'ordre dans lequel on effectue cette composition n'ayant d'ailleurs pas d'importance). En termes explicites, l'image par (4.2.3.2) de $x \otimes y$, où x (resp. y) est une section de NP_p^q (resp. $NQ_{p'}^{q'}$) , est

$$\Sigma \ \epsilon(\mu,\nu) \ d^{q+q'} \ldots d^{q+1} s_{\nu_{p'}} \ldots s_{\nu_1} x \otimes d^0 \ldots d^0 s_{\mu_p} \ldots s_{\mu_1} y \quad ,$$

la somme étant prise sur tous les (p,p')-shuffles (μ,ν) de $(1,p+p')$, $\epsilon(\mu,\nu)$ désignant la signature du shuffle (μ,ν). Par passage aux complexes simples associés, on déduit de (4.2.3.2) une flèche canonique fonctorielle de C(A)

$$(4.2.3.3) \qquad \int NP \otimes \int NQ \longrightarrow \int N(P \otimes Q) \quad .$$

Comme (1.2.2.1) et (1.2.2.2) sont des homotopismes, il en est de même de (4.2.3.3). D'autre part, les propriétés d'associativité (1.2.2.3) de (1.2.2.1) et (1.2.2.2) impliquent une propriété analogue pour (4.2.3.3), à savoir que, pour P, Q, R des A-Modules simpliciaux mixtes, le carré ci-dessous est commutatif

$$(4.2.3.4) \qquad \begin{array}{ccc} \int NP \otimes \int NQ \otimes \int NR & \xrightarrow{(4.2.3.3) \otimes NR} & \int N(P \otimes Q) \otimes \int NR \\ \downarrow{\scriptstyle NP \otimes (4.2.3.3)} & & \downarrow{\scriptstyle (4.2.3.3)} \\ \int NP \otimes \int N(Q \otimes R) & \xrightarrow{(4.2.3.3)} & \int N(P \otimes Q \otimes R) \end{array} \quad .$$

(1) Les produits tensoriels sont pris sur A .

4.2.3.5. Soit B une A-Algèbre simpliciale mixte, associative, mais non nécessairement commutative. La flèche composée

$$\int NB \otimes \int NB \xrightarrow{(4.2.3.3)} \int N(B \otimes B) \longrightarrow \int NB \quad ,$$

où le seconde flèche est définie par le produit $B \otimes B \longrightarrow B$, définit sur $\int NB$ une structure de A-Algèbre différentielle graduée. Si B est graduée, alors NB est bigraduée de manière naturelle. En particulier, désignons par $T = \oplus T^n$ l'un des foncteurs S_A , $\wedge_A$, Γ_A (4.2.2.6). Pour $E \in$ ob C(A), $TE(\overset{dfn}{=} NTKiE)$ est donc une A-Algèbre différentielle bigraduée, i.e. pour m , $n \in \mathbb{N}$, on a un morphisme de complexes

$$T^mE \otimes T^nE \longrightarrow T^{m+n}E \quad , \tag{4.2.3.5}$$

associatif dans le sens évident. Supposons maintenant $E \in$ ob $D^-(A)$, et remplaçant E par une résolution plate, on déduit de (4.2.3.5) une flèche de $D^-(A)$

$$LT^mE \overset{L}{\otimes} LT^nE \longrightarrow LT^{m+n}E \quad , \tag{4.2.3.6}$$

fonctorielle en E , et vérifiant la condition d'associativité que l'on pense. Il en résulte en particulier que H'LTE, où $LTE \overset{dfn}{=} \oplus LT^nE$, est une A-Algèbre bigraduée.

4.3. Suites exactes de Koszul et formules de décalage.

4.3.1. Suites exactes de Koszul.

On conserve les notations de (4.2).

4.3.1.1. Soit B une A-Algèbre bigraduée, anti-commutative pour le second degré, ce qui signifie que, pour x (resp. x') de bidegré (m,n) (resp. (m',n')), on a $x'x = (-1)^{nn'}xx'$. Soit (p,q) un couple d'entiers. Une A-dérivation de bidegré (p,q) de B est par définition un endomorphisme d de bidegré (p,q) du A-Module bigradué sous-jacent, tel que

$$d(xx') = (dx)x' + (-1)^{qn'}x(dx')$$

pour x et x' comme plus haut. (On a une notion analogue de A-Algèbre bigraduée anti-commutative pour le premier degré, et de dérivation de bidegré (p,q) de celle-ci).

Proposition 4.3.1.2. Soit $u : E \longrightarrow F$ un morphisme de A-Modules.

a) Il existe sur l'Algèbre bigraduée $\wedge E \otimes SF$ (anti-commutative pour le premier degré) une unique A-dérivation d de bidegré $(-1,1)$ telle que $d(x \otimes 1) = 1 \otimes ux$, $d(1 \otimes y) = 0$ pour x (resp. y) section de E (resp. F). Elle satisfait de plus à $dd = 0$.

b) Il existe sur l'Algèbre bigraduée $\Gamma E \otimes \wedge F$ (anti-commutative pour le second degré) une unique A-dérivation d de bidegré $(-1,1)$ telle que $d(\gamma_k(x) \otimes 1) = \gamma_{k-1}(x) \otimes ux$, $d(1 \otimes y) = 0$ pour x (resp. y) section de E (resp. F), $\gamma_k : E \longrightarrow \Gamma^k E$ désignant l'application canonique. Elle satisfait de plus à $dd = 0$.

La preuve se fait par l'âne qui trotte, nous l'omettrons.

4.3.1.3. L'Algèbre $\wedge E \otimes SF$ (resp. $\Gamma E \otimes \wedge F$), munie de la dérivation d définie en (4.3.1.2) s'appelle Algèbre (ou complexe) de Koszul de u. On la notera $Kos.(u)$ (resp. $Kos^{\cdot}(u)$) ([1]). Elle dépend fonctoriellement de u, chaque carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ E' & \xrightarrow{u'} & F' \end{array}$$

définissant canoniquement un morphisme d'Algèbres bigraduées $Kos.(u) \longrightarrow Kos.(u')$

([1]) On regardera $Kos.(u)$ (resp. $Kos^{\cdot}(u)$) comme un complexe de chaînes (resp. cochaînes), le degré extérieur n correspondant au degré homologique (resp. cohomologique) n.

(resp. $Kos^{\cdot}(u) \longrightarrow Kos^{\cdot}(u')$), compatible à la différentielle d. En particulier, la donnée de deux flèches

$$E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G$$

de composé nul définit des morphismes d'Algèbres différentielles bigraduées :

(i) $Kos.(u) \longrightarrow SG$,

(ii) $\Gamma E \longrightarrow Kos^{\cdot}(v)$.

4.3.1.4. Notons $^{\vee}$ le foncteur $\underline{Hom}(\ ,A)$. On a des accouplements canoniques ([26], (SGA 4 XVII))

$$\wedge E \otimes \wedge(E^{\vee}) \longrightarrow A \quad , \quad SF \otimes \Gamma(F^{\vee}) \longrightarrow A \quad .$$

On vérifie que ceux-ci définissent un accouplement

$$Kos.(u) \otimes Kos^{\cdot}(u^{\vee}) \longrightarrow A \quad ,$$

(où A est regardé comme complexe concentré en degré 0). Celui-ci est une dualité parfaite pour E et F localement libres de type fini, i.e. identifie $Kos.(u)$ à $Kos^{\cdot}(u^{\vee})^{\vee}$ (resp. $Kos^{\cdot}(u^{\vee})$ à $Kos.(u)^{\vee}$) .

Dans la situation de (4.3.1.3), la flèche (ii) $\Gamma(G^{\vee}) \longrightarrow Kos^{\cdot}(u^{\vee})$ relative à $G^{\vee} \xrightarrow{v^{\vee}} F^{\vee} \xrightarrow{u^{\vee}} E^{\vee}$ s'identifie à la duale de (i) $Kos.(u) \longrightarrow SG$ (quand E, F, G sont localement libres de type fini).

4.3.1.5. Soient $u : E \longrightarrow F$, $u' : E' \longrightarrow F'$ des morphismes de A-Modules. Les isomorphismes canoniques d'Algèbres bigraduées

$$\wedge(E \oplus E') \otimes S(F \oplus F') \xrightarrow{\sim} (\wedge E \otimes SF) \otimes (\wedge E' \otimes SF') \quad ,$$

$$\Gamma(E \otimes E') \otimes \wedge(F \oplus F') \xrightarrow{\sim} (\Gamma E \otimes \wedge F) \otimes (\Gamma E' \otimes \wedge F')$$

"sont compatibles à la différentielle de Koszul d de (4.3.1.2) (lorsqu'on munit

le membre de droite de la différentielle "produit tensoriel")", i.e. fournissent des isomorphismes d'Algèbres différentielles bigraduées

$$\mathrm{Kos.}(u \oplus u') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Kos.}(u) \otimes \mathrm{Kos.}(u') \quad ,$$

$$\mathrm{Kos}^{\cdot}(u \oplus u') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Kos}^{\cdot}(u) \otimes \mathrm{Kos}^{\cdot}(u') \quad .$$

Proposition 4.3.1.6. ([24] II 7.34). Soit

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G \longrightarrow 0$$

une suite exacte de A-Modules plats. Alors les morphismes (i), (ii) de (4.3.1.3) sont des quasi-isomorphismes.

Preuve. Par passage à la limite inductive locale et localisation, on peut, grâce à Lazard-Deligne, supposer E, F, G localement libres de type fini et (*) scindée. Par dualité (4.3.1.4), on peut se borner à prouver l'assertion pour (i). Le splittage de (*) définit grâce à (4.3.1.5) un isomorphisme

$$\mathrm{Kos.}(u) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Kos.}(\mathrm{Id}_E) \otimes SG \quad ,$$

de sorte que, par Künneth, on est ramené à prouver que, pour un A-Module libre de type fini M , $k^n\mathrm{Kos.}(\mathrm{Id}_M)$ est acyclique pour $n > 0$, k^n désignant la partie homogène de degré total n . Utilisant $\mathrm{Kos.}(\mathrm{Id}_M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Kos.}(\mathrm{Id}_{M'}) \otimes \mathrm{Kos.}(\mathrm{Id}_{M''})$ pour $M = M' \oplus M''$, on se réduit à $M = A$, auquel cas l'assertion est triviale.

4.3.1.7. Sous les hypothèses de (4.3.1.6), le morphisme induit par (i) (resp. (ii)) sur les parties homogènes de degré total n donne une suite exacte

$$0 \longrightarrow \wedge^n E \longrightarrow \wedge^{n-1} E \otimes F \longrightarrow \ldots \longrightarrow E \otimes S^{n-1} F \longrightarrow S^n F \longrightarrow S^n G \longrightarrow 0$$

$$(\text{resp. } 0 \longrightarrow \Gamma^n E \longrightarrow \Gamma^n F \longrightarrow \Gamma^{n-1} F \otimes G \longrightarrow \ldots \longrightarrow F \otimes \wedge^{n-1} G \longrightarrow \wedge^n G \longrightarrow 0) \quad ,$$

qu'on appelle suite exacte de Koszul définie par (*).

4.3.2. Formules de décalage. (cf. ([24] 7.21)).

Proposition 4.3.2.1. Soit $E \in \mathrm{ob}\, D^-(A)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des isomorphismes fonctoriels canoniques de $D(A)$

(i) $LS^n(E[1]) \xrightarrow{\sim} (L\wedge^n E)[n]$,

(ii) $L\wedge^n(E[1]) \xrightarrow{\sim} (L\Gamma^n E)[n]$.

En outre, ceux-ci sont compatibles aux accouplements (4.2.3.6), i.e. pour $m \in \mathbb{N}^*$, on a des carrés commutatifs ([1])

$$\begin{array}{ccc} LS^m(E[1]) \overset{L}{\otimes} LS^n(E[1]) & \xrightarrow{(4.2.3.6)} & LS^{m+n}(E[1]) \\ \downarrow (i)\otimes(i) & & \downarrow (i) \\ L\wedge^m(E)[m] \overset{L}{\otimes} L\wedge(E)[n]^{(-1)^{mn}} & \xrightarrow{(4.2.3.6)} & L\wedge^{m+n}(E)[m+n] \end{array},$$

$$\begin{array}{ccc} L\wedge^m(E[1]) \overset{L}{\otimes} L\wedge^n(E[1] & \xrightarrow{(4.2.3.6)} & L\wedge^{m+n}(E[1]) \\ \downarrow (ii)\otimes(ii) & & \downarrow (ii) \\ L\Gamma^m(E)[m] \overset{L}{\otimes} L\Gamma^m(E)[n]^{(-1)^{mn}} & \xrightarrow{(4.2.3.6)} & L\Gamma^{m+n}(E)[m+n] \end{array} .$$

Preuve. On peut supposer E à composantes plates et borné supérieurement. On a la suite exacte canonique

(*) $\qquad 0 \longrightarrow E \longrightarrow C(E) \longrightarrow E[1] \longrightarrow 0$,

où $C(E)$ désigne le cône du morphisme identique de E. D'où, par application du foncteur Ki, une suite exacte

(**) $\qquad 0 \longrightarrow KiE \longrightarrow KiC(E) \longrightarrow Ki(E[1]) \longrightarrow 0$.

([1]) Dans la définition des flèches horizontales inférieures on utilise l'isomorphisme canonique (attention aux signes) $X[m] \overset{L}{\otimes} Y[n] \xrightarrow{\sim} (X \overset{L}{\otimes} Y)[m+n]$ (cf. Verdier [27]).

Les composantes de E étant plates, (**) est une suite exacte de Modules plats sur A regardé comme Anneau bisimplicial mixte trivial. On peut donc appliquer (4.3.1.6), ce qui fournit, d'après (4.3.1.7), des suites exactes

$$(i)' \quad 0 \longrightarrow \Lambda^n KiE \longrightarrow \Lambda^{n-1} KiE \otimes KiC(E) \longrightarrow \dots \longrightarrow S^n KiC(E) \longrightarrow S^n Ki(E[1]) \longrightarrow 0 ,$$

$$(ii)' \quad 0 \longrightarrow \Gamma^n KiE \longrightarrow \Gamma^n KiC(E) \longrightarrow \Gamma^{n-1} KiC(E) \otimes Ki(E[1]) \longrightarrow \dots \longrightarrow$$

$$\longrightarrow KiC(E) \otimes \Lambda^{n-1}(Ki(E[1]) \longrightarrow \Lambda^n Ki(E[1]) \longrightarrow 0 .$$

Appliquant le foncteur $\int N$ on en déduit des suites exactes

$$(i)'' \quad 0 \longrightarrow \Lambda^n E \longrightarrow \dots \longrightarrow S^n(E[1]) \longrightarrow 0 ,$$

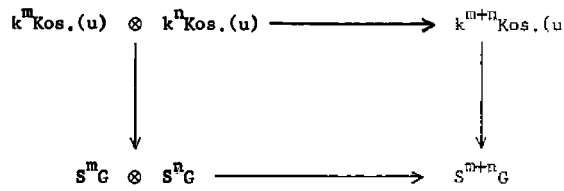
$$(ii)'' \quad 0 \longrightarrow \Gamma^n E \longrightarrow \dots \longrightarrow \Lambda^n(E[1]) \longrightarrow 0 .$$

Les termes intermédiaires de (i)" sont du type $\int N(\Lambda^{n-p} KiE \otimes S^p KiC(E))$ pour $p > 0$. Or, d'après (4.1.3.5), $S^p C(E)$ est homotopiquement trivial, donc il en est de même de $\int N(\Lambda^{n-p} KiE \otimes S^p KiC(E))$ qui, d'après (4.2.3.3), s'identifie à homotopie près à $\Lambda^{n-p} E \otimes S^p C(E)$. On voit de même que les termes intermédiaires de (ii)" sont homotopiquement triviaux. Par suite, la flèche de $D(A)$

$$S^n(E[1]) \longrightarrow \Lambda^n E[n]$$

(resp. $\Lambda^n(E[1] \longrightarrow \Gamma^n E[n]$)

définie par (i)" (resp. (ii)") est un isomorphisme, d'où l'isomorphisme (i) (resp. (ii)) annoncée (rappelons que la flèche $P \longrightarrow X^{-n}[n]$ définie par une résolution de longueur n, $f : X \longrightarrow P$, est égale au composé de $f^{-1} : P \longrightarrow X$ et de la projection canonique $X \longrightarrow X^{-n}[n]$). Pour la dernière partie de la proposition, on observe d'abord que les flèches (i) et (ii) de (4.3.1.3) sont des morphismes d'Algèbres bigraduées, donc qu'on a un carré commutatif



On conclut grâce au fait suivant, dont la vérification est laissée en exercice au lecteur : soient P (resp. Q) un complexe borné supérieurement de Modules plats , $f : X \longrightarrow P$ (resp. $g : Y \longrightarrow Q$) une résolution de longueur m (resp. n) par des complexes bornés supérieurement de Modules plats, notons $u : P \longrightarrow X^{-m}[m]$ (resp. $v : Q \longrightarrow Y^{-n}[n]$) la flèche de D(A) définie par f (resp. g), alors, si $w : P \otimes Q \longrightarrow (X^{-m} \otimes Y^{-n})[m+n]$ désigne la flèche de D(A) définie par la résolution $f \otimes g : X \otimes Y \longrightarrow P \otimes Q$, on a

$$w = (-1)^{mn} \; u \overset{L}{\otimes} v \quad ,$$

$X^{-m}[m] \overset{L}{\otimes} Y^{-n}[n]$ étant identifié à $X^{-m} \overset{L}{\otimes} Y^{-n}[m+n]$ par l'isomorphisme canonique.

CHAPITRE II

COMPLEXE COTANGENT : DEFINITION ET PREMIERES PROPRIETES

Sauf mention du contraire, les faisceaux d'anneaux considérés dans ce chapitre sont supposés commutatifs et unitaires.

1. Définition du complexe cotangent.

1.1. Sorites sur les dérivations et les différentielles.

Nous rappelons ici quelques définitions et propriétés bien connues, voir (EGA O_{IV} 18 et 20) dans le cas ponctuel, [17] dans le cas global.

1.1.1. Soient T un topos, A un Anneau de T , B une A-Algèbre, M un B-Module. Une A-dérivation de B dans M est un homomorphisme de A-Modules $d : B \longrightarrow M$ tel que

$$d(xy) = xdy + ydx \tag{1.1.1.1}$$

pour $U \in ob\ T$, $y \in B(U)$. Les A-dérivations de B dans M forment un groupe abélien qu'on note

$$Der_A(B,M) \tag{1.1.1.2}$$

et qui dépend fonctoriellement de (A,B,M) (cf. (EGA O_{IV} 20.2.1)). Soit

$$B \oplus M = S_B(M)/\bigoplus_{i\geq 2} S^i_B(M) \tag{1.1.1.3}$$ [1]

la B-Algèbre des nombres duaux sur M . Notons A-Alg/B la catégorie des A-Algèbres au-dessus de B . On a un isomorphisme canonique fonctoriel

---

[1] $S_B(M)$ désigne l'Algèbre symétrique de M sur B (I 1.5.5. b)).

(1.1.1.4) $$\mathrm{Der}_A(B,M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A\text{-Alg}/B}(B, B \oplus M) \quad ,$$

$$d \longmapsto (x \longmapsto x + dx) \quad .$$

1.1.2. On a une suite exacte

(1.1.2.1) $$0 \longrightarrow I \longrightarrow B \otimes_A B \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

$$x \otimes y \longmapsto xy \quad ,$$

splittée par les deux morphismes d'Anneaux

(1.1.2.2) $$j_1, j_2 : B \rightrightarrows B \otimes_A B$$

$$j_1(x) = x \otimes 1 \quad , \quad j_2(x) = 1 \otimes x \quad .$$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

(1.1.2.3) $$P^n_{B/A} = (B \otimes_A B)/I^{n+1} \quad ,$$

qu'on appelle Anneau des parties principales d'ordre n de B sur A . La structure de B-Algèbre sur $P^n_{B/A}$ définie par j_1 (resp. j_2) sera souvent nommée gauche (resp. droite), et quand on regardera $P^n_{B/A}$ comme une B-Algèbre sans préciser, il sera sous-entendu qu'il s'agit de la structure gauche. La suite (1.1.2.1) définit une suite exacte

(1.1.2.4) $$0 \longrightarrow \Omega^1_{B/A} \longrightarrow P^1_{B/A} \longrightarrow B \longrightarrow 0 \quad .$$

L'Idéal $\Omega^1_{B/A} = I/I^2$ est de carré nul, donc de manière naturelle est un B-Module, qu'on appelle Module des différentielles (de Kähler) de B sur A . On a une A-dérivation canonique

(1.1.2.5) $$d_{B/A} : B \longrightarrow \Omega^1_{B/A} \quad ,$$

$$d_{B/A}(x) = 1 \otimes x - x \otimes 1 \bmod I^2 \quad ,$$

définissant un isomorphisme fonctoriel en le B-Module M

(1.1.2.6) $$\mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A},M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_A(B,M) \quad ,$$

$$u \longmapsto ud_{B/A} \quad .$$

(La preuve que (1.1.2.6) est un isomorphisme est immédiate, soit qu'on recopie l'argument de (EGA 0_{IV} 20.4.8), soit qu'on ramène l'assertion à (loc. cit.) en remarquant que $\Omega^1_{B/A}$ est le faisceau associé au préfaisceau $U \longmapsto \Omega^1_{B(U)/A(U)}$.

Le Module $\Omega^1_{B/A}$ dépend fonctoriellement de $(A \longrightarrow B)$ (cf. (EGA 0_{IV} 20.5)) : à un carré commutatif

(1.1.2.7)
$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & B' \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \longrightarrow & A' \end{array}$$

correspond un homomorphisme $\Omega^1_{B/A} \longrightarrow \Omega^1_{B'/A'}$ au-dessus de $B \longrightarrow B'$, i.e. un homomorphisme de B'-Modules

(1.1.2.8) $$\Omega^1_{B/A} \otimes_B B' \longrightarrow \Omega^1_{B'/A'} \quad .$$

Si M est un B'-Module, l'homomorphisme

$$\mathrm{Hom}(\Omega^1_{B'/A'},M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\Omega^1_{B/A} \otimes B',M) = \mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A},M)$$

défini par (1.1.2.8) s'identifie via (1.1.2.6) à l'homomorphisme canonique

$$\mathrm{Der}_{A'}(B',M) \longrightarrow \mathrm{Der}_A(B,M) \quad .$$

1.1.2.9. Si (1.1.2.7) est cocartésien, i.e. $B \otimes_A A' \xrightarrow{\sim} B'$, (1.1.2.8) est un isomorphisme ; de plus, la flèche canonique

(1.1.2.10) $$(\Omega^1_{B/A} \otimes_B B') \oplus (B' \otimes_{A'} \Omega^1_{A'/A}) \longrightarrow \Omega^1_{B'/A}$$

est un isomorphisme.

Ces assertions sont triviales sur la définition (1.1.2.4) (cf. EGA O_{IV} 2.5.5)). L'isomorphisme (1.1.2.10) est d'ailleurs un cas particulier du fait que le foncteur $(A \longrightarrow B) \longmapsto \Omega^1_{B/A}$ commute aux limites inductives quelconques, comme il résulte aussitôt de la définition

1.1.2.11. Soient

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

des morphismes d'Anneaux de T. Par fonctorialité de Ω^1, ceux-ci définissent une suite de C-Modules

(1.1.2.12) $$\Omega^1_{B/A} \otimes_B C \longrightarrow \Omega^1_{C/A} \longrightarrow \Omega^1_{C/B} \longrightarrow 0 \quad .$$

Cette suite est exacte. Si de plus C est une B-Algèbre libre, i.e. $C \simeq B[X]$ pour un $X \in \mathrm{ob}\ T$ (I 1.5.5.4), alors la suite prolongée par un zéro à gauche

(1.1.2.13) $$0 \longrightarrow \Omega^1_{B/A} \otimes_B C \longrightarrow \Omega^1_{C/A} \longrightarrow \Omega^1_{C/A} \longrightarrow 0$$

est exacte [1].

En effet, pour $U \in \mathrm{ob}\ T$, la suite

$$\Omega^1_{B(U)/A(U)} \otimes_{B(U)} C(U) \longrightarrow \Omega^1_{C(U)/A(U)} \longrightarrow \Omega^1_{C(U)/B(U)} \longrightarrow 0$$

(resp. $0 \longrightarrow \Omega^1_{B(U)/A(U)} \otimes_{B(U)} B(U)[X(U)] \longrightarrow \Omega^1_{B(U)[X(U)]/A(U)} \longrightarrow \Omega^1_{B(U)[X(U)]/B(U)} \longrightarrow 0$)

est exacte d'après (EGA O_{IV} 20.5.7), d'où, par faisceautisation, l'exactitude de (1.1.2.12) (resp. (1.1.2.13)).

---

[1] La suite (1.1.2.13) est encore exacte si l'on suppose seulement qu'on a $C \simeq S_B(M)$, où M est un B-Module plat ; en effet, par passage à la limite inductive locale (I 4.2.1.3), on est aussitôt ramené au cas où C est libre de type fini sur B (comme Algèbre).

1.1.3. Soient M un A-Module, $B = S_A(M)$ l'Algèbre symétrique de M, I un B-Module. D'après (1.1.1.4) et (I 1.5.5.3), une A-dérivation de B dans I est uniquement déterminée par le morphisme A-linéaire de M dans I sous-jacent, en d'autres termes la flèche naturelle

$$\mathrm{Der}_A(S_A(M),I) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,I) \tag{1.1.3.1}$$

est un isomorphisme. Comme $\mathrm{Hom}_A(M,I)$ s'identifie (canoniquement et fonctoriellement) à $\mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, I)$, (1.1.3.1) fournit, compte tenu de (1.1.2.6), un isomorphisme fonctoriel

$$\Omega^1_{S_A(M)/A} \xrightarrow{\sim} S_A(M) \otimes_A M \quad . \tag{1.1.3.2}$$

La fonctorialité de (1.1.3.2) s'explicite ainsi : soient $f : A \longrightarrow A'$ un morphisme d'Anneaux, M (resp. M') un A (resp. A')-Module, $u : M \longrightarrow M'$ un morphisme A-linéaire ; on a alors un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} S_A(M) & \xrightarrow{S_f(u)} & S_{A'}(M') \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \xrightarrow{f} & A' \end{array} \quad ,$$

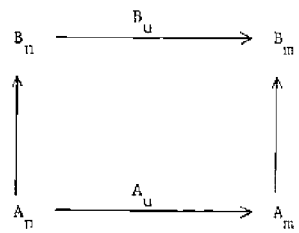
et la flèche $S_A(M)$-linéaire $\Omega^1_{S_A(M)/A} \longrightarrow \Omega^1_{S_{A'}(M')/A'}$ définie par ce carré s'identifie via (1.1.3.2) à

$$S_f(u) \otimes_A u \ : \ S_A(M) \otimes_A M \longrightarrow S_{A'}(M') \otimes_{A'} M' \quad .$$

1.1.4. Il est clair sur (1.1.2.4) que la formation de $\Omega^1_{-/-}$ commute à l'image inverse par un morphisme de topos : si $f : T' \longrightarrow T$ est un morphisme de topos, on a un isomorphisme canonique fonctoriel

$$f^{-1}\,\Omega^1_{B/A} \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{f^{-1}(B)/f^{-1}(A)} \quad . \tag{1.1.4.1}$$

En particulier, la formation de $\Omega^1_{-/-}$ commute au passage aux fibres. Autre exemple, qui nous sera utile plus bas : soit $A \longrightarrow B$ un morphisme d'Anneaux simpliciaux de T, i.e. d'Anneaux du topos simplicial Simpl(T) ; alors le B-Module (de Simpl(T)) $\Omega^1_{B/A}$ a pour composante de degré n $\Omega^1_{B_n/A_n}$ (via l'identification (1.1.4.1) appliquée au foncteur image inverse $\mathrm{Simpl}(T) \longrightarrow T$, $X \longmapsto X_n$) ; pour $u : [0,m] \longrightarrow [0,n] \in \mathrm{Fl}\,\Delta$, la flèche $(\Omega^1_{B/A})_n \longrightarrow (\Omega^1_{B/A})_m$ correspondante s'identifie à la flèche $\Omega^1_{B_n/A_n} \longrightarrow \Omega^1_{B_m/A_m}$ définie par le carré commutatif

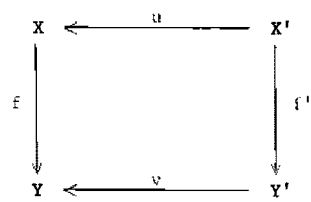


1.1.4. Soit $f : X \longrightarrow X$ un morphisme de topos annelés. On pose

(1.1.4.1) $$P^n_{X/Y} = P^n_{\underline{O}_X/f^{-1}(\underline{O}_Y)} \quad , \quad \Omega^1_{X/Y} = \Omega^1_{\underline{O}_X/f^{-1}(\underline{O}_Y)} .$$

On dit que $P^n_{X/Y}$ est l'Anneau des parties principales d'ordre n de X sur Y ; le topos X annelé par $P^n_{X/Y}$ s'appelle n-ième Y-voisinage infinitésimal de X dans la diagonale. On dit que $\Omega^1_{X/Y}$ est le Module des différentielles (de Kähler) de X sur Y. A un carré commutatif de topos annelés [1]

(1.1.4.2)



[1] "commutatif" signifie "u*f* = f'*v* à isomorphisme donné près" ; donc plus bas (1.1.4.4) n'est commutatif qu'à isomorphisme donné près.

correspond un morphisme $\Omega^1_{X/Y} \longrightarrow \Omega^1_{X'/Y'}$ de Modules au-dessus de u, i.e. un morphisme

(1.1.4.3) $$u^* \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow \Omega^1_{X'/Y'}$$

défini comme suit : posons $A = u^{-1}f^{-1}\underline{O}_Y \xrightarrow{\sim} f'^{-1}v^{-1}\underline{O}_Y$, $B = u^{-1}\underline{O}_X$, $A' = f'^{-1}\underline{O}_{X'}$, $B' = \underline{O}_{X'}$, d'où un carré commutatif d'Anneaux de X'

(1.1.4.4)
$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & B' \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \longrightarrow & A' \end{array} ,$$

la flèche (1.1.4.3) est alors la flèche

$$\Omega^1_{B/A} \otimes_B B' \longrightarrow \Omega^1_{B'/A'}$$

définie par (1.1.4.4), compte tenu de l'identification de $\Omega^1_{B/A}$ à $u^{-1}\Omega^1_{X/Y}$ par (1.1.4.1). Si (1.1.4.4) est cocartésien, (1.1.4.3) est donc un isomorphisme d'après (1.1.2.9). De même, les flèches de fonctorialité définies par des morphismes de topos annelés

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

s'inscrivent, d'après (1.1.2.11), dans une suite exacte

(1.1.4.5) $$f^*\Omega^1_{Y/Z} \longrightarrow \Omega^1_{X/Z} \longrightarrow \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow 0 \quad .$$

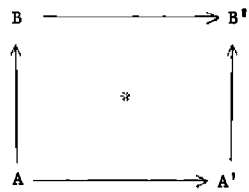
1.2. Définition du complexe cotangent.

1.2.1. Soient T un topos, $A \longrightarrow B$ un morphisme d'Anneaux de T. On a défini en (I 1.5.5.6) la résolution libre standard de B sur A : c'est une A-Algèbre simpliciale $P_A(B)$ augmentéevers B par un quasi-isomorphisme ; ses composantes sont des A-Algèbres libres, définies par récurrence par

(1.2.1.1) $\qquad P_A(B)_o = A[B]$;

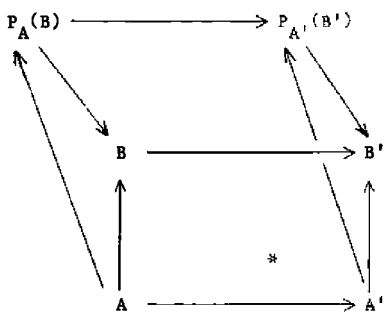
$$P_A(B)_n = A[P_A(B)_{n-1}] \quad \text{pour} \quad n > 0 \ .$$

Par construction, $P_A(B)$ dépend fonctoriellement de B sur A : à un carré commutatif d'Anneaux



correspond un diagramme commutatif

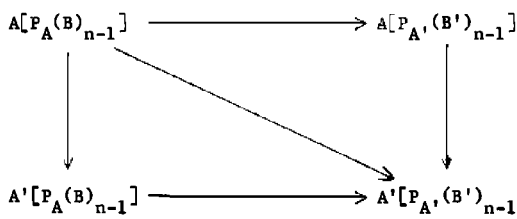
(1.2.1.2)



;

la flèche $P_A(B_n) \longrightarrow P_{A'}(B')_n$ est donnée par récurrence par la flèche oblique du carré commuatif

(1.2.1.2.1)



.

Comme le foncteur "Algèbre libre engendrée par "commute aux limites inductives quelconques et le foncteur "oubli" (de la catégorie des Algèbres dans celle

des faisceaux d'ensembles) commute aux limites inductives filtrantes, le foncteur $P_{\_}(-)$ commute aux limites inductives filtrantes : si $(A_\lambda \longrightarrow B_\lambda)_{\lambda\in L}$ est un système inductif filtrant de morphismes d'Anneaux, on a un isomorphisme canonique

$$(1.2.1.3) \qquad P_{\varinjlim A_\lambda}(\varinjlim B_\lambda) \xrightarrow{\sim} \varinjlim P_{A_\lambda}(B_\lambda) \quad .$$

Plus généralement, on a encore un tel isomorphisme si $(A_\lambda \longrightarrow B_\lambda)_{\lambda\in L}$ est un T-système inductif local au sens de (I 4.2.1.3) (en effet les foncteurs "Algèbre libre engendrée par" et "oubli" commutent aussi aux T-limites inductives locales, comme il résulte aussitôt des définitions).

Soit $f : T' \longrightarrow T$ un morphisme de topos. Il est immédiat sur les définitions qu'on a un isomorphisme canonique fonctoriel

$$(1.2.1.4) \qquad f^{-1}P_A(B) \xrightarrow{\sim} P_{f^{-1}(A)}(f^{-1}(B)) \quad .$$

Enfin, soit $A \longrightarrow B$ un morphisme de <u>préfaisceaux</u> d'anneaux. Notons $\underline{a}$ le foncteur faisceau associé. Il est immédiat qu'on a un isomorphisme canonique fonctoriel

$$(1.2.1.5) \qquad \underline{a}P_A(B) \xrightarrow{\sim} P_{\underline{a}A}(\underline{a}B) \quad .$$

1.2.2. Soit $A \longrightarrow B$ un morphisme d'Anneaux du topos simplicial $\mathrm{Simpl}(T)$. Alors $P_A(B)$ est un Anneau bisimplicial (ses lignes sont les A-Algèbres $P_A(B)_m$, ses colonnes les A_n-Algèbres simpliciales $P_{A_n}(B_n)$), muni d'une structure de A-Algèbre augmentée vers B, A et B étant regardés comme Anneaux bisimpliciaux triviaux dans la direction verticale. Par passage aux sous-objets diagonaux (I 1.1) on a un triangle commutatif d'Anneaux simpliciaux :

$$(1.2.2.1) \qquad \begin{array}{ccc} P_A^{\Delta}(B) & \longrightarrow & B \\ & \nwarrow & \uparrow \\ & & A \end{array} \qquad (1)$$

(1) Pour alléger, on écrit $P_A^{\Delta}(B)$ au lieu de $\Delta P_A(B)$.

La A-Algèbre $P_A^{\Delta}(B)$ est libre composante à composante. D'autre part, il découle d'Eilenberg-Zilber (I 1.2.2) et d'une suite spectrale des bicomplexes que la flèche horizontale de (1.2.2.1) est un quasi-isomorphisme (cf. (I 3.3.5.1)).

1.2.3. Soit $A \longrightarrow B$ un morphisme d'Anneaux de T . On appelle <u>complexe cotangent de B sur A</u> , et l'on note $L_{B/A}$ le B-Module simplicial

(1.2.3.1) $$L_{B/A} = \Omega^1_{P/A} \otimes_P B \quad ,$$

où $P = P_A(B)$. Il dépend fonctoriellement de $A \longrightarrow B$: à un carré commutatif d'Anneaux

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & B' \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \longrightarrow & A' \end{array}$$

correspond un morphisme de B-Modules simpliciaux

(1.2.3.2) $$L_{B/A} \longrightarrow L_{B'/A'}$$

défini comme suit : le diagramme (1.2.1.2) fournit une flèche canonique P-linéaire

$$\Omega^1_{P/A} \longrightarrow \Omega^1_{P'/A'}$$

(avec en abrégé $P_A(B) = P$, $P_{A'}(B') = P'$), d'où (1.2.3.2) se déduit par produit tensoriel avec $B \longrightarrow B'$ au-dessus de $P \longrightarrow P'$. La flèche (1.2.3.2), ainsi que la flèche B'-linéaire

(1.2.3.2)' $$L_{B/A} \otimes_B B' \longrightarrow L_{B'/A'} \quad ,$$

qui lui correspond par adjonction, sera dite canonique.

D'après (1.1.3.2) et (1.2.1.1) on a, pour $n > 0$, un isomorphisme canonique

$$(L_{B/A})_n \xrightarrow{\sim} B \otimes_A A^{(P_A(B)_{n-1})} \tag{1.2.3.3}$$

(qui garde encore un sens pour $n = 0$ en convenant que $P_A(B)_{-1} = B$). Celui-ci est fonctoriel en B/A : la flèche induite par (1.2.3.2) en degré n s'identifie par (1.2.3.3) à la flèche produit tensoriel sur $A \longrightarrow A'$ de $B \longrightarrow B'$ et de la flèche $A^{(P_A(B)_{n-1})} \longrightarrow A'^{(P_{A'}(B')_{n-1})}$ déduite de $P_A(B)_{-1} \longrightarrow P_{A'}(B')_{n-1}$, ou encore, plus simplement, à la flèche

$$B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^{(P_A(B)_{n-1})} \longrightarrow B' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^{(P_{A'}(B')_{n-1})}, \tag{1.2.3.3.1}$$

produit tensoriel sur $\mathbb{Z}$ de $B \longrightarrow B'$ et de $\mathbb{Z}^{(P_A(B)_{n-1} \longrightarrow P_{A'}(B')_{n-1})}$.

Soit $(A_\lambda \longrightarrow B_\lambda)_{\lambda \in L}$ un système inductif filtrant (voir un T-système inductif local) de morphismes d'Anneaux de T. Alors on a un isomorphisme canonique fonctoriel

$$\varinjlim L_{B_\lambda/A_\lambda} \xrightarrow{\sim} L_{\varinjlim B_\lambda / \varinjlim A_\lambda} . \tag{1.2.3.4}$$

Cela résulte en effet de (1.2.1.3) et du fait que le foncteur $\Omega^1_{-/-}$ commute aux limites inductives (1.1.2.9).

Soit $f : T' \longrightarrow T$ un morphisme de topos. De (1.1.4.1) et (1.2.1.4) découle qu'on a un isomorphisme fonctoriel canonique

$$f^{-1}L_{B/A} \xrightarrow{\sim} L_{f^{-1}B/f^{-1}A} . \tag{1.2.3.5}$$

Enfin, soit $A \longrightarrow B$ un morphisme de <u>préfaisceaux</u> d'anneaux, notons $\underline{a}$ le foncteur faisceau associé. Il résulte de (1.2.1.5) et du fait que $\Omega^1_{-/-}$ commute à $\underline{a}$ que l'on a un isomorphisme canonique fonctoriel

$$\underline{a}L_{B/A} \xrightarrow{\sim} L_{\underline{a}B/\underline{a}A} \tag{1.2.3.6}$$

1.2.4. Soit $A \longrightarrow B$ comme en (1.2.3). L'augmentation $P_A(B) \longrightarrow B$ définit une augmentation

(1.2.4.1) $$L_{B/A} \longrightarrow \Omega^1_{B/A} \quad .$$

Proposition 1.2.4.2. La flèche

$$H_o(L_{B/A}) \longrightarrow \Omega^1_{B/A}$$

définie par (1.2.4.1) est un isomorphisme.

Preuve. Posons $P_A(B) = P$. Le fait que $P \longrightarrow B$ soit un quasi-isomorphisme implique en particulier que la A-Algèbre B est conoyau de la double flèche $P_1 \rightrightarrows P_o$. L'assertion résulte donc simplement du fait que le foncteur $\Omega^1_{-/-}$ commute aux limites inductives.

Corollaire 1.2.4.3. Soit M un B-Module. Il existe un isomorphisme canonique fonctoriel

$$\mathbb{E}xt^o_B(L_{B/A},M) \xrightarrow{\sim} Der_A(B,M) \quad .$$

Proposition 1.2.4.4. Supposons que $B \xrightarrow{\sim} S_A(E)$, où E est un A-Module plat. Alors (1.2.4.1) est un quasi-isomorphisme.

Preuve. D'après Lazard-Deligne (I 4.2.1.3), E est limite d'un T-système inductif local de Modules libres. Les limites inductives locales étant exactes (loc. cit.), on peut donc, compte tenu de (1.2.3.4), supposer que $E = A^{(X)}$ pour un $X \in$ ob T . On a donc $B \xrightarrow{\sim} A[X]$. D'après (I 1.5.3 (i)) appliqué aux foncteurs $T = A[-]$, U = "oubli", l'augmentation $P_A(A[X]) \longrightarrow A[X]$ est un homotopisme (de A-Algèbres simpliciales). Par suite $\Omega^1_{P/A} \longrightarrow \Omega^1_{B/A}$ (où $P = P_A(B)$) est un homotopisme de A-Modules simpliciaux, donc en particulier un quasi-isomorphisme. Or, les composantes de P étant libres, $\Omega^1_{P/A}$ est, d'après (1.1.3.2), un P-Module plat. Il en résulte (I 3.3.4.6) que $\Omega^1_{P/A} \otimes_P B \longrightarrow \Omega^1_{B/A}$ est un quasi-isomorphisme, cqfd.

1.2.5. Soit $A \longrightarrow B$ un morphisme d'Anneaux simpliciaux de T. Alors $L_{B/A}$ est un B-Module bisimplicial, B étant regardé comme Anneau bisimplicial trivial dans la direction verticale (cf. (1.2.2)). On pose

$$L^{\Delta}_{B/A} = \Delta L_{B/A} = \Omega^1_{P/A} \otimes_P B \quad , \tag{1.2.5.1}$$

où $P = P^{\Delta}_A(B)$ (1.2.2). C'est un B-Module plat, qui, lorsque $A \longrightarrow B$ est défini par un morphisme d'Anneaux $A_o \longrightarrow B_o$, de T, coïncide avec le complexe cotangent L_{B_o/A_o} introduit en (1.2.3.1). La flèche (1.2.4.1), regardée comme flèche de B-Modules bisimpliciaux, induit, par restriction à la diagonale, une flèche de B-Modules

$$L^{\Delta}_{B/A} \longrightarrow \Omega^1_{B/A} \quad . \tag{1.2.5.2}$$

Proposition 1.2.5.3. *Supposons que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe un A_n-Module plat E_n tel que $B_n \simeq S_{A_n}(E_n)$ (c'est le cas par exemple si B est libre sur A terme à terme). Alors* (1.2.5.2) *est un quasi-isomorphisme.*

Preuve. Posons $P = P_A(B)$. D'après (1.2.4.4), la flèche $\Omega^1_{P/A} \otimes_P B \longrightarrow \Omega^1_{B/A}$, regardée comme flèche de B-Modules bisimpliciaux, induit un quasi-isomorphisme sur chaque colonne. La proposition en découle, grâce à Eilenberg-Zilber et une suite spectrale des bicomplexes.

1.2.6. Soit

(1.2.6.1)

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & B' \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \longrightarrow & A' \end{array}$$

un carré commutatif d'Anneaux simpliciaux de T.

Proposition 1.2.6.2. On suppose que les flèches horizontales de (1.2.6.1) sont des quasi-isomorphismes (I 3.1.7). Alors :

a) Les flèches canoniques ci-dessous induisent des quasi-isomorphismes sur chaque ligne ([1]) :

$$\text{(i)}\quad P_A(B) \longrightarrow P_{A'}(B')\quad ,$$

$$\text{(ii)}\quad \Omega^1_{P_A(B)/A} \longrightarrow \Omega^1_{P_{A'}(B')/A'}\quad ,$$

$$\text{(iii)}\quad L_{B/A} \longrightarrow L_{B'/A'}\quad .$$

b) La flèche canonique

$$L^{\Delta}_{B/A} \longrightarrow L^{\Delta}_{B'/A'} \quad (\text{resp. } L^{\Delta}_{B/A} \otimes_B B' \longrightarrow L^{\Delta}_{B'/A'})$$

est un quasi-isomorphisme.

Preuve. a) Montrons, par récurrence sur $n \geq -1$, que

$$(i)_n : P_A(B)_n \longrightarrow P_{A'}(B')_n$$

est un quasi-isomorphisme. (on convient que $(i)_{-1}$ est la flèche donnée $B \longrightarrow B'$). Pour $n = -1$, c'est l'hypothèse. Supposons donc $n \geq 0$. Par l'hypothèses de récurrence, $P_A(B)_{n-1} \longrightarrow P_{A'}(B')_{n-1}$ est un quasi-isomorphisme. D'après Whitehead (I 2.2.3) il en résulte que

$$(*)\qquad {}_{\mathbb{Z}}(P_A(B)_{n-1}) \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}(P_{A'}(B')_{n-1})$$

est un quasi-isomorphisme. Appliquant (I 4.2.2.5), on en déduit que

$$S_{\mathbb{Z}}(*) : \mathbb{Z}[P_A(B)_{n-1}] \longrightarrow \mathbb{Z}[P_{A'}(B')_{n-1}]$$

([1]) suivant la terminologie de (1.2.2).

est un quasi-isomorphisme. Utilisant maintenant l'hypothèse que $A \longrightarrow A'$ est un quasi-isomorphisme, on en déduit, par Künneth (I 3.3.5.2), que les flèches horizontales et verticales de (1.2.1.2.1) sont des quasi-isomorphismes, donc aussi la flèche oblique, qui n'est autre que $(i)_n$. Montrons maintenant que $(ii)_n$ et $(iii)_n$ sont des quasi-isomorphismes pour tout n . Pour $(iii)_n$, qui, comme on a vu, s'identifie à (1.2.3.3.1), cela résulte de Whitehead (I 2.2.3) et de Künneth (I 3.3.2.6) ; pour $(ii)_n$ la preuve est analogue.

b) Compte tenu de l'assertion a) relative à (iii), le fait que $L^{\Delta}_{B/A} \longrightarrow L^{\Delta}_{B'/A'}$ soit un quasi-isomorphisme découle d'Eilenberg- Zilber et d'une suite spectrale des bicomplexes. $L^{\Delta}_{B/A}$ étant plat, l'assertion respée en résulte d'après (I 3.3.4.6). Ceci achève la preuve de (1.2.6.2).

Corollaire 1.2.6.3. Sous les hypothèses de (1.2.6.2), supposons de plus que B soit libre terme à terme sur A . Alors on a un isomorphisme canonique de $D.(B')$:

$$\Omega^1_{B/A} \otimes_B B' \xrightarrow{\sim} L_{B'/A'} \quad .$$

Preuve. D'après (1.2.5.3), la flèche canonique (1.2.5.2) est un quasi-isomorphisme. Les deux membres étant des B-Modules plats, on en déduit par Künneth (I 3.3.4.2) que

(1.2.5.2) $\qquad \otimes_B B' \ : \ L^{\Delta}_{B/A} \otimes_B B' \longrightarrow \Omega^1_{B/A} \otimes_B B'$

est un quasi-isomorphisme. Mais, d'après (1.2.6.2-b)), on a un quasi-isomorphisme canonique $L^{\Delta}_{B/A} \otimes_B B' \longrightarrow L^{\Delta}_{B'/A'}$, d'où la conclusion.

Remarque 1.2.6.4. La preuve précédente montre que la conclusion de (1.2.6.3) est encore valable si, au lieu de supposer B libre terme à terme sur A , on suppose seulement que $L^{\Delta}_{B/A} \longrightarrow \Omega^1_{B/A}$ est un quasi-isomorphisme et que $\Omega^1_{B/A}$ est plat.

Corollaire 1.2.6.5. Sous les hypothèses de (1.2.6.2), on suppose de plus que B et B' sont libres terme à terme sur A et A' respectivement. Alors la flèche canonique

$$\Omega^1_{B/A} \longrightarrow \Omega^1_{B'/A'} \quad (\text{resp. } \Omega^1_{B/A} \otimes_B B' \longrightarrow \Omega^1_{B'/A'})$$

est un quasi-isomorphisme.

Preuve. On a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} L^{\Delta}_{B/A} & \longrightarrow & L^{\Delta}_{B'/A'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega^1_{B/A} & \longrightarrow & \Omega^1_{B'/A'} \end{array} .$$

D'après (1.2.5.3) les flèches verticales sont des quasi-isomorphismes. D'après (1.2.6.2 b)) la flèche horizontale supérieure est un quasi-isomorphisme. Donc la flèche horizontale inférieure est un quasi-isomorphisme, cqfd.

Scholie 1.2.6.6. Soit $A \longrightarrow B$ un morphisme d'Anneaux simpliciaux de T. Notons, comme en (I 3.1.7), A-Alg/B la catégorie des A-Algèbres au-dessus de B, et D(A-Alg/B) la catégorie localisée de A-Alg/B par rapport aux quasi-isomorphismes. D'après (1.2.6.2 b)), plus Künneth, le foncteur

$$(*) \qquad L^{\Delta}_{-/A} \otimes_- B : \text{A-Alg/B} \longrightarrow \text{B-Mod} \quad , \quad C \longmapsto L^{\Delta}_{C/A} \otimes_C B$$

induit un foncteur

$$(**) \qquad L^{\Delta}_{-/A} \otimes_- B \ : \ D(\text{A-Alg/B}) \longrightarrow D.(B)$$

(B-Mod désigne (I 3.1.7) la catégorie des B-Modules, D.(B) la catégorie localisée par rapport aux quasi-isomorphismes). D'autre part, (1.2.5.2) définit un morphisme naturel

$$(***) \qquad L^{\Delta}_{-/A} \otimes_- B \longrightarrow \Omega^1_{-/A} \otimes_- B$$

entre foncteurs de A-Alg/B dans D.(B). Je dis que (**), muni de (***), est le dérivé gauche, au sens de ([23] I 4), du foncteur $\Omega^1_{\sim/A} \otimes_{\sim} B$. (rel. au foncteur de localisation A-Alg/B $\longrightarrow$ D(A-Alg/B)). En effet, utilisant la description (I 3.1.8 (ii)') de D(A-Alg/B) comme catégorie de fractions à droite de Hotfib(A-Alg/B), il suffit, d'après (I 1.4.4), de montrer que, pour chaque A-Algèbre C fibrée sur B , le pro-objet de D.(B)

$$\text{"lim"}_{\substack{\longleftarrow \\ C' \to C}} \Omega^1_{C'/A} \otimes_{C'} B \quad ,$$

où $C' \longrightarrow C$ parcout les quasi-isomorphismes de Hotfib(A-Alg/B) de but C , est essentiellement constant de valeur $L^{\Delta}_{C/A} \otimes_C B$. Or cela résulte de (1.2.5.3) et (1.2.6.5), compte tenu du fait que $P^{\Delta}_A(C) \longrightarrow C$ est fibrant, étant surjectif dégré à degré. Cela prouve donc notre assertion. Observons que celle-ci permet d'interpréter la notation $L^{\Delta}_{B/A}$ comme une notation abrégée pour $L\,\Omega^1_{B/A}$, valeur en B du dérivé gauche de $C \longmapsto \Omega^1_{C/A} \otimes_C B$.

Voici une autre caractérisation de $L^{\Delta}_{B/A}$ comme objet de D.(B). Avant de l'énoncer, remarquons que le foncteur de B-Mod dans A-Alg/B associant à M l'Algèbre des nombres duaux $B \oplus M$ (1.1.1.3) transforme quasi-isomorphisme en quasi-isomorphisme, donc induit un foncteur (encore noté $M \longmapsto B \oplus M$) de D.(B) dans D(A-Alg/B) .

Proposition 1.2.6.7. Soit $M \in$ ob D.(B) . Il existe un isomorphisme canonique, fonctoriel en M ,

$$\mathrm{Hom}_{D.(B)}(L^{\Delta}_{B/A}, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{D(A\text{-}Alg/B)}(B, B \oplus M) \quad .$$

Preuve. Observons d'abord que, d'après (1.1.1.4) et (1.1.2.6), on a, pour $C \in$ ob A-Alg/B et $F \in$ ob B-Mod , un isomorphisme canonique fonctoriel

$$(*) \qquad \mathrm{Hom}_{B\text{-}Mod}(\Omega^1_{C/A} \otimes_C B, F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A\text{-}Alg/B}(C, B \oplus F) \quad .$$

Interprétant les homotopies dans B-Mod (resp. A-Alg/B) à l'aide d'objets de chemins (I 3.1.2), on déduit de (*) un isomorphisme fonctoriel

$$(**) \qquad \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hot.}(B)}(\Omega^1_{C/A} \otimes_C B, F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hot}(A\text{-}\mathrm{Alg}/B)}(C, B \oplus F) \quad .$$

Cela étant, on a, d'après (1.2.6.6),

$$\mathrm{Hom}_{D.(B)}(L^{\Delta}_{B/A}, M) = \varinjlim_{C \to B} \mathrm{Hom}_{D.(B)}(\Omega^1_{C/A} \otimes_C B, M) \quad ,$$

limite prise suivant les quasi-isomorphismes fibrants $C \to B$. D'autre part, on a, d'après (I 3.1.8 (i)),

$$\mathrm{Hom}_{D.(B)}(\Omega^1_{C/A} \otimes_C B, M) = \varinjlim_{M \to F} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hot.}(B)}(\Omega^1_{C/A} \otimes_C B, F) \quad ,$$

limite prise suivant les classes d'homotopie de quasi-isomorphismes $M \to F$. On en déduit :

$$\mathrm{Hom}_{D.(B)}(L^{\Delta}_{B/A}, M) \simeq \varinjlim_{M \to F} \varinjlim_{C \to B} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hot.}(B)}(\Omega^1_{C/A} \otimes_C B, F)$$

$$\simeq \varinjlim_{M \to F} \varinjlim_{C \to B} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hot}(A\text{-}\mathrm{Alg}/B)}(C, B \oplus F) \quad (**)$$

$$\simeq \varinjlim_{M \to F} \mathrm{Hom}_{D(A\text{-}\mathrm{Alg}/B)}(B, B \oplus F) \quad (\text{I } 3.1.8 \text{ (ii')'})$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_{D(A\text{-}\mathrm{Alg}/B)}(B, B \oplus M) \quad ,$$

ce qui établit l'isomorphisme annoncé en (1.2.6.7).

1.2.7. Soit

$$f : X \longrightarrow Y$$

un morphisme de topos annelés. On appelle complexe cotangent de X sur Y le $\underline{O}_X$-Module simplicial $L_{X/Y}$ défini par

(1.2.7.1) $$L_{X/Y} = L_{\underline{O}_X/f^{-1}(\underline{O}_Y)} \quad .$$

Il dépend fonctoriellement de f : à un carré commutatif de topos annelés (1.1.4.2)

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{u} & X' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ Y & \longleftarrow & Y' \end{array}$$

correspond un morphisme

(1.2.7.2) $$u^*L_{X/Y} \longrightarrow L_{X'/Y'}$$

défini par (1.2.3.2)' relatif à (1.1.4.4), compte tenu de (1.2.3.5) ; on laisse au lecteur le soin d'expliciter l'isomorphisme de transitivité relatif au composé de deux carrés (et la condition de cocycle correspondante pour un composé de trois ...). Avec la notation (1.1.4.1) on a (1.2.4.1) une augmentation

(1.2.7.3) $$L_{X/Y} \longrightarrow \Omega^1_{X/Y} \quad ,$$

fonctorielle en f , dans le sens que pour un carré (1.1.4.2) le carré

(1.2.7.3)
$$\begin{array}{ccc} u^*L_{X/Y} & \xrightarrow{(1.2.7.2)} & L_{X'/Y'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ u^*\Omega^1_{X/Y} & \xrightarrow{(1.1.4.3)} & \Omega^1_{X'/Y'} \end{array} \qquad (1.2.7.3)$$

est commutatif. Rappelons (1.2.4.2) que (1.2.7.3) induit un isomorphisme

(1.2.7.4) $$H_o(L_{X/Y}) \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{X/Y} \quad .$$

2. Premières propriétés.

2.1. Triangle de transitivité.

2.1.1. Soient T un topos, et

(2.1.1.1) $$A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

des morphismes d'Anneaux simpliciaux de T. Ceux-ci s'insèrent dans un diagramme commutatif d'Anneaux simpliciaux

(2.1.1.2)
$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & P & \longrightarrow & Q \\ {\scriptstyle id}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \end{array} ,$$

où $P = P_A^{\Delta}(B)$ (1.2.2.1), $Q = P_P^{\Delta}(C)$. Comme Q est libre terme à terme sur P, la suite canonique

(2.1.1.3) $$0 \longrightarrow \Omega^1_{P/A} \otimes_P Q \longrightarrow \Omega^1_{Q/A} \longrightarrow \Omega^1_{Q/P} \longrightarrow 0$$

est exacte (1.1.2.13). Comme $\Omega^1_{Q/P}$ est plat sur Q, la suite déduite de (2.1.1.3) par extension des scalaires à C est encore exacte. On note

(2.1.1.4) $$L^{\Delta}_{C/B/A} = (2.1.1.3) \otimes_Q C$$

cette suite exacte ; on l'appelle <u>suite exacte</u> (ou <u>vrai triangle</u>, cf. (I 3.2.4)) <u>de transitivité relative à</u> (2.1.1.1). Elle dépend fonctoriellement de (2.1.1.1) : un diagramme commutatif

(2.1.1.5)
$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' \end{array}$$

définit un morphisme du diagramme (2.1.1.2) dans le diagramme analogue relatif à $A' \longrightarrow B' \longrightarrow C'$, d'où un morphisme de (2.1.1.3) dans la suite exacte analogue

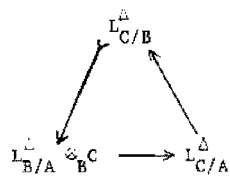
(relative à $A' \longrightarrow B' \longrightarrow C'$), d'où finalement un morphisme de suites exactes de C-Modules

$$(2.1.1.6) \qquad L^{\Delta}_{C/B/A} \longrightarrow L^{\Delta}_{C'/B'/A'} \quad ,$$

correspondant par adjonction à un morphisme de suites exactes de C'-Modules ([1])

$$(2.1.1.6)' \qquad L^{\Delta}_{C/B/A} \otimes_C C' \longrightarrow L^{\Delta}_{C'/B'/A'} \quad .$$

Proposition 2.1.2. Le triangle distingué de D.(C) associé à $L^{\Delta}_{C/B/A}$ par le foncteur χ de (I 3.2.4) s'écrit, à isomorphisme canonique fonctoriel près,



où les flèches de degré zéro sont les images dans D.(C) des flèches canoniques.

Preuve. Par fonctorialité de (1.2.5.2), on a un diagramme commutatif canonique fonctoriel

(*)

$$\begin{array}{ccccc} L^{\Delta}_{P/A} \otimes_P Q & \longrightarrow & L^{\Delta}_{Q/A} & \longrightarrow & L^{\Delta}_{Q/P} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Omega^1_{P/A} \otimes_P Q & \longrightarrow & \Omega^1_{Q/A} & \longrightarrow & \Omega^1_{Q/P} \end{array} \quad ,$$

où la ligne du bas est (2.1.1.3). Comme Q est libre terme à terme sur P, la flèche verticale de droite est un quasi-isomorphisme d'après (1.2.5.3). De même, comme P est libre terme à terme sur A, $L^{\Delta}_{P/A} \longrightarrow \Omega^1_{P/A}$ est un quasi-isomorphisme,

([1]) Ne pas oublier que (2.1.1.4) est une suite exacte de C-Modules plats.

donc par Künneth (I 3.3.4.2) la flèche verticale de gauche est un quasi-isomorphisme. Enfin, comme P est libre terme à terme sur A et Q libre terme à terme sur P, Q est libre terme à terme sur A, et la flèche verticale médiane est un quasi-isomorphisme. Les composantes de (*) étant plates sur Q, on déduit de (*), par extension des scalaires de Q à C, un diagramme commutatif

(**)

$$\begin{array}{ccccc} L^{\Delta}_{P/A}\otimes_P C & \longrightarrow & L^{\Delta}_{Q/A}\otimes_Q C & \longrightarrow & L^{\Delta}_{Q/P}\otimes_Q C \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Omega^1_{P/A}\otimes_P C & \longrightarrow & \Omega^1_{Q/A}\otimes_Q C & \longrightarrow & \Omega^1_{Q/P}\otimes_Q C \end{array} ,$$

où les flèches verticales sont encore des quasi-isomorphismes, la ligne du bas étant $L^{\Delta}_{C/B/A}$. On a d'autre part un diagramme commutatif canonique fonctoriel

(***)

$$\begin{array}{ccccc} L^{\Delta}_{P/A}\otimes_P C & \longrightarrow & L^{\Delta}_{Q/A}\otimes_Q C & \longrightarrow & L^{\Delta}_{Q/P}\otimes_Q C \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ L^{\Delta}_{B/A}\otimes_B C & \longrightarrow & L^{\Delta}_{C/A} & \longrightarrow & L^{\Delta}_{C/B} \end{array} ,$$

où les flèches verticales sont des quasi-isomorphismes d'après (1.2.6.2 b)). Mettant ensemble (**) et (***), on obtient la proposition.

2.1.2.1. Si, dans (2.1.1.1), A, B, C sont triviaux, on écrira $L_{C/B/A}$ au lieu de $L^{\Delta}_{C/B/A}$. Le triangle distingué de D.(C) associé à $L_{C/B/A}$ s'écrit alors

$$\begin{array}{ccc} & L_{C/B} & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ L_{B/A}\otimes_B C & \longrightarrow & L_{C/A} \end{array} .$$

où les flèches de degré zéro "sont" les flèches canoniques ; d'après (1.2.4.2), la suite exacte d'homologie correspondante se termine, à isomorphisme canonique fonctoriel près, par la suite (1.1.2.12).

Proposition 2.1.3. Si les flèches verticales de (2.1.1.5) sont des quasi-isomorphismes, la flèche canonique (2.1.1.6) (resp. (2.1.1.6)') est un quasi-isomorphisme (I 3.2.4).

Preuve. Il suffit de montrer que la flèche induite sur les triangles distingués sous-jacents est un isomorphisme. Compte tenu de (2.1.2), cela résulte de (1.2.6.2 b)).

2.1.4. Notons $\Omega^1_{C/B/A}$ la suite (1.1.2.12) relative à (2.1.1.1) :

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{B/A} \otimes_B C \longrightarrow \Omega^1_{C/A} \longrightarrow \Omega^1_{C/B} \longrightarrow 0 \quad ,$$

exacte sauf peut-être en $\Omega^1_{B/A} \otimes_B C$. Le diagramme (2.1.1.2) définit canoniquement un morphisme

(2.1.4.1) $$L^{\Delta}_{C/B/A} \longrightarrow \Omega^1_{C/B/A} \quad .$$

Supposons B libre terme à terme sur A , et C libre terme à terme sur B . Alors la suite $\Omega^1_{C/B/A}$ est exacte, et il découle de (1.2.5.3) que (2.1.4.1) est un quasi-isomorphisme (I 3.2.4). Joignant cette remarque à (2.1.3), on obtient :

Corollaire 2.1.4.2. On suppose que les flèches verticales de (2.1.1.5) sont des quasi-isomorphismes, et que B est libre terme à terme sur A et C libre terme à terme sur B . Il existe alors un isomorphisme canonique de VT.(C') (I 3.2.4)

$$L^{\Delta}_{C'/B'/A'} \xrightarrow{\sim} \Omega_{C/B/A} \otimes_C C' \quad .$$

2.1.5. Soient

(2.1.5.1) $$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

des morphismes de topos annelés. La suite exacte de $\underline{O}_X$-Modules simpliciaux

(2.1.5.2) $$L_{X/Y/Z} = L_{\underline{O}_X/f^{-1}(\underline{O}_Y)/(gf)^{-1}(\underline{O}_Z)}$$

est appelée suite exacte (ou vrai triangle) de transitivité relative à (2.1.5.1). Elle dépend fonctoriellement de (2.1.5.1) : un diagramme commutatif

(2.1.5.3)
$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ {\scriptstyle u}\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \end{array}$$

définit un diagramme commutatif d'Anneaux de X'

(2.1.5.4)
$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' \end{array} ,$$

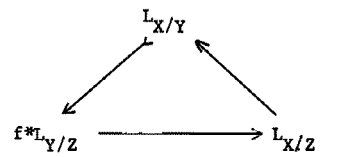
où $C' = \underline{O}_{X'}$, $B' = f^{-1}(\underline{O}_{Y'})$, $A' = (g'f')^{-1}(\underline{O}_{Z'})$, $C = u^{-1}(\underline{O}_Z)$, $B = u^{-1}f^{-1}(\underline{O}_Y)$, $A = u^{-1}(gf)^{-1}\underline{O}_Z$, d'où, par (2.1.1.6)', compte tenu de (1.2.3.5), un morphisme

(2.1.5.5) $$u^*L_{X/Y/Z} \longrightarrow L_{X'/Y'/Z'} .$$

Pour un "composé" de deux diagramme (2.1.5.3), on a une transitivité qu'on laisse au lecteur le soin d'expliciter.

D'après (2.1.2), le triangle distingué de $D(X)$ associé à $L_{X/Y/Z}$ s'écrit, à isomorphisme canonique fonctoriel près,

(2.1.5.6)



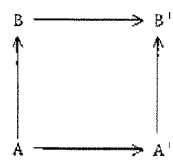
où les flèches de degré zéro sont les flèches canoniques (1.2.7.2) (plus exactement leurs images dans D(X)). La suite exacte d'homologie de (2.1.5.6) se termine, à isomorphisme canonique fonctoriel près, par la suite (1.1.4.5). On notera

(2.1.5.7) $\qquad K(f,g) \quad (\text{ou} \quad K(X/Y/Z)) \in \mathbb{E}\text{xt}^1(L_{X/Y}, f^*L_{Y/Z})$

la flèche de degré un de (2.1.5.6). On l'appelle classe de Kodaira-Spencer de (2.1.5.1). Celle-ci joue un rôle fondamental dans la théorie des déformations, comme on le verra plus loin.

2.2. Changement de base.

Proposition 2.2.1. Soit T un topos, et soit



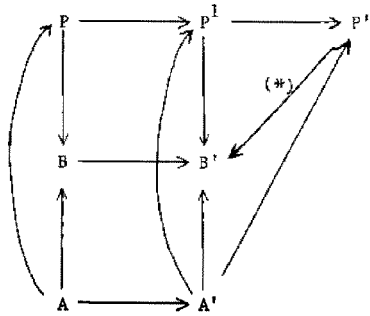
un carré cocartésien d'Anneaux simpliciaux de T . On suppose que la flèche canonique $B \overset{l}{\otimes}_A A' \longrightarrow B'$ de D(A-Alg) (I 3.3.5) est un isomorphisme. Alors les flèches canoniques :

(i) $\qquad L^{\Delta}_{B/A} \otimes_B B' \longrightarrow L^{\Delta}_{B'/A'}$,

(ii) $\qquad (L^{\Delta}_{B/A} \otimes_B B') \oplus (B' \otimes_{A'} L^{\Delta}_{A'/A}) \longrightarrow L^{\Delta}_{B'/A}$

sont des quasi-isomorphismes.

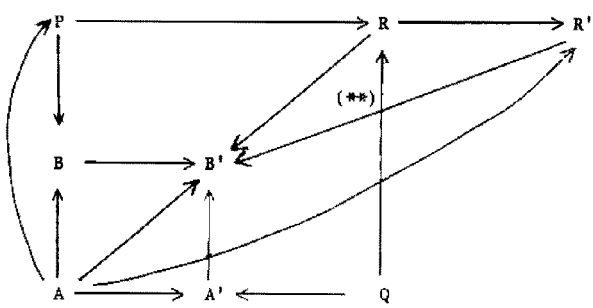
Preuve. Posons $P'^{\Delta}_{A}(B) = P$, $P'^{\Delta}_{A'}(B') = P'$, $P \otimes_A A' = P^1$. On a un diagramme commutatif



L'hypothèse $B \overset{\ell}{\otimes}_A A' \xrightarrow{\sim} B'$ implique que $P^1 \longrightarrow B'$ est un quasi-isomorphisme ; donc, par commutativité de (*) , $P^1 \longrightarrow P'$ est un quasi-isomorphisme. D'autre part, comme P est libre terme à terme sur A , P^1 est libre terme à terme sur A'. Des flèches canoniques

$$\Omega^1_{P/A} \otimes_P P^1 \longrightarrow \Omega^1_{P^1/A'} \longrightarrow \Omega^1_{P'/A'} \quad ,$$

la première est un isomorphisme d'après (1.1.2.9), et la seconde est un quasi-isomorphisme d'après (1.2.6.5). Par extension des scalaires à B' il en résulte aussitôt, d'après Künneth (I 3.3.2), que (i) est un quasi-isomorphisme. Prouvons maintenant que (ii) est un quasi-isomorphisme. Posons $P'^{\Delta}_{A}(A') = Q$, $R = P \otimes_A Q$, $R' = P_A(B')$. On a un diagramme commutatif



L'hypothèse $B \overset{\ell}{\otimes}_A A' \xrightarrow{\sim} B'$ implique que $R \longrightarrow B'$ est un quasi-isomorphisme ; donc, par commutativité de (**), $R \longrightarrow R'$ est un quasi-isomorphisme. D'autre part, comme P (resp. Q) est libre terme à terme sur A, il en est de même de R (le produit tensoriel de deux Algèbres libres est une Algèbre libre). Des flèches canoniques

$$(\Omega^1_{P/A} \otimes_P R) \oplus (R \otimes_Q \Omega^1_{Q/A}) \longrightarrow \Omega^1_{R/A} \longrightarrow \Omega^1_{R'/A} ,$$

la première est un isomorphisme (1.1.2.10), et la seconde est un quasi-isomorphisme d'après (1.2.6.5). Par extension des scalaires à B' il en résulte (d'après Künneth) que (ii) est un quasi-isomorphisme, ce qui achève la preuve de (2.2.1).

2.2.2. Compte tenu des suites spectrales (I 3.3.3), la condition "$B \overset{\ell}{\otimes}_A A' \xrightarrow{\sim} B'$ dans $D(A\text{-Alg})$" est vérifiée dans les cas suivants :

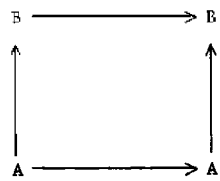
a) si $H_p(\mathrm{Tor}_q^A(B,A')) = 0$ pour $q > 0$ (donc a fortiori si $\mathrm{Tor}_q^A(B_p,A'_p) = 0$ pour $q > 0$) ;

b) si $\mathrm{Tor}_p^{H_*(A)}(H_*(B), H_*(A')) = 0$ pour $p > 0$ et la flèche (I 3.3.5.4) $H_*(B) \otimes_{H_*(A)} H_*(A') \longrightarrow H_*(B')$ est un isomorphisme.

Corollaire 2.2.3. Soit, comme en (1.1.4.2),

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{u} & X' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ Y & \longleftarrow & Y' \end{array}$$

un carré commutatif de topos annelés. D'où, comme en (1.1.4.4), un carré commutatif d'Anneaux de X'



On suppose qu'on a $\mathrm{Tor}_q^A(B,A') = 0$ pour $q > 0$, et $L_{B'/B} \otimes_A A' = 0$. Alors les flèches canoniques

(i) $u^*L_{X/Y} \longrightarrow L_{X'/Y'}$,

(ii) $u^*L_{X/Y} \oplus f'^*L_{Y'/Y} \longrightarrow L_{X'/Y}$

sont des quasi-isomorphismes.

Preuve. Posons $B \otimes_A A' = B_1$. Le triangle de transitivité relatif à $A' \to B_1 \to B'$ (resp. $A \to B_1 \to B'$) montre que la flèche canonique

$$L_{B_1/A'} \otimes_{B_1} B' \longrightarrow L_{B'/A'} \quad (\text{resp. } L_{B_1/A} \otimes_{B_1} B' \longrightarrow L_{B'/A})$$

est un quasi-isomorphisme. D'après (2.2.1), la flèche canonique

$$L_{B/A} \otimes_B B_1 \longrightarrow L_{B_1/A'} \quad (\text{resp. } (L_{B/A} \otimes_B B_1) \oplus (B_1 \otimes_{A'} L_{A'/A}) \longrightarrow L_{B_1/A})$$

est un quasi-isomorphisme. Par KUnneth (I 3.3.2), il en résulte que

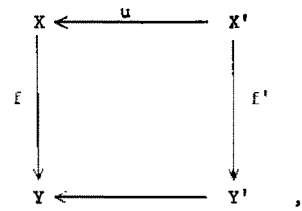
$L_{B/A} \otimes_B B' \longrightarrow L_{B_1/A'} \otimes_{B_1} B'$ (resp. $(L_{B/A} \otimes_B B') \oplus (B' \otimes_{A'} L_{A'/A}) \longrightarrow L_{B_1/A} \otimes_{B_1} B'$)

est un quasi-isomorphisme, donc finalement, grâce à l'assertion du début, que (i) (resp. (ii)) est un quasi-isomorphisme, cqfd.

2.3. Localisation.

Proposition 2.3.0. Soient $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de topos annelés, V un objet de Y, U un objet de X au-dessus de V, X' (resp. Y') le topos $X_{/U}$ (resp. $Y_{/V}$) muni de l'Anneau induit par $\underline{O}_X$ (resp. $\underline{O}_Y$), d'où un carré commutatif de topos

annelés

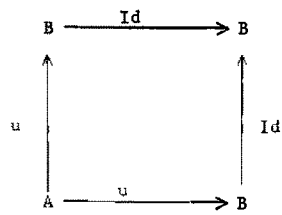


où les flèches horizontales sont les flèches de localisation, f' étant induit par F . Alors la flèche canonique $u^*L_{X/Y} \longrightarrow L_{X'/Y'}$ est un isomorphisme.

Preuve. La flèche $f'^{-1}(\underline{O}_{Y'}) \longrightarrow \underline{O}_{X'}$ s'identifie à l'image par u^{-1} de la flèche $f^{-1}(\underline{O}_Y) \longrightarrow \underline{O}_X$, donc l'assertion résulte de (1.2.3.5).

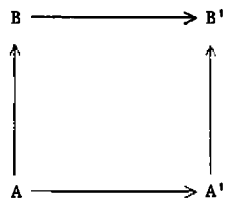
Proposition 2.3.1. Soient T un topos, $u : A \longrightarrow B$ un morphisme d'Anneaux de T . On suppose que u est un épimorphisme dans la catégorie des Anneaux de T (i.e. que la flèche produit $B \otimes_A B \longrightarrow B$ est un isomorphisme), et que B est plat sur A. Alors on a $L_{B/A} = 0$ dans D(B).

Preuve. Par hypothèse, le carré ci-dessous est cocartésien :



Comme B est plat sur A , il résulte de (2.2.1) que $L_{B/A} \longrightarrow L_{B/B}$ est un quasi-isomorphisme. Mais $L_{B/B} = 0$ dans D(B) d'après (1.2.4.4) (puisque $\Omega^1_{B/B} = 0$), d'où l'assertion.

Corollaire 2.3.1.1. Soit



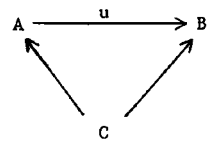
un carré commutatif d'Anneaux de T. On suppose que les flèches horizontales sont des épimorphismes dans la catégorie des Anneaux et que A' (resp. B') est plat sur A (resp. B). Alors la flèche canonique $L_{B/A} \otimes_B B' \longrightarrow L_{B'/A'}$ est un quasi-isomorphisme.

Preuve. D'après (2.3.1) on a $L_{A'/A}$ (resp. $L_{B'/B}$) = 0 dans $D(B')$ (resp. $D(A')$). L'assertion résulte donc des triangles de transitivité relatifs à $A \longrightarrow B \longrightarrow B'$ et $A \longrightarrow A' \longrightarrow B'$.

2.3.2. Les hypothèses de (2.3.1) sont vérifiées en particulier si u est un morphisme de localisation, par quoi nous entendons qu'il existe un sous-faisceau d'ensembles X de A tel que $u(X)$ soit contenu dans le sous-faisceau B^* des unités de B et que la flèche canonique $X^{-1}A \longrightarrow B$ induite par u soit un isomorphisme (cf. ([17] 9.4.4)). (Rappelons que l'Anneau de fractions $X^{-1}A$ et la flèche canonique $A \longrightarrow X^{-1}A$ sont caractérisés par la propriété universelle habituelle, à savoir que toute flèche de A dans un Anneau A' envoyant X dans A'^* se factorise de manière unique à travers $X^{-1}A$). Noter que si u est un morphisme de localisation, il existe un plus grand X possédant la propriété indiquée plus haut, à savoir $u^{-1}(B^*)$. Le fait qu'un morphisme de localisation soit un épimorphisme dans la catégorie des Anneaux est trivial sur la définition, quant au fait que $X^{-1}A$ soit plat sur A, il se vérifie facilement tout comme dans le cas des anneaux ordinaires.

Lemme 2.3.3. (i) Soit $u : A \longrightarrow B$ un morphisme de préfaisceaux d'anneaux de T. Si, pour tout $U \in \mathrm{ob}\, T$, $u(U) : A(U) \longrightarrow B(U)$ est un morphisme de localisation, alors le morphisme de faisceaux d'anneaux associé au : $aA \longrightarrow aB$ est un morphisme de localisation.

(ii) Soit



un diagramme commutatif d'Anneaux de T. Si u est de localisation, alors pour toute C-Algèbre C', $u \otimes_C C' : A \otimes_C C' \longrightarrow B \otimes_C C'$ est de localisation.

(iii) Soient

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$$

des morphismes d'Anneaux de T. Si u et v sont de localisation, il en est de même de vu. Inversement, si vu est de localisation et si u est un épimorphisme de la catégorie des Anneaux, alors v est de localisation.

(iv) Soit $f : T \longrightarrow T$ un morphisme de topos, et soit $u : A \longrightarrow B$ un morphisme d'Anneaux de T. Si u est de localisation, il en est de même de f^*u. Inversement, si f^*u est de localisation et si f^* est fidèle, u est de localisation.

Preuve. C'est à peu près trivial sur les définitions. Pour (i), notons X le sous-préfaisceau de A image inverse par u du préfaisceau des unités de B, de sorte que u induit un isomorphisme $X^{-1}A \xrightarrow{\sim} B$; il est immédiat que au induit un isomorphisme $(aX)^{-1}(aA) \xrightarrow{\sim} aB$. Pour (ii), soit $X \subset A$ tel que u induise un isomorphisme $X^{-1}A \xrightarrow{\sim} B$, et notons X' l'image de X par $A \longrightarrow A \otimes_C C'$, $a \longmapsto a \otimes 1$; il est immédiat que $u \otimes_C C'$ induit un isomorphisme $X'^{-1}(A \otimes_C C') \xrightarrow{\sim} B \otimes_C C'$. Prouvons (iii). Supposons u et v de localisation ; soit $Y = v^{-1}(C^*)$, $X = u^{-1}(Y)$; si $f : A \longrightarrow C'$ est tel que $f(X) \subset C'^*$, f se

factorise en $\bar{f} : B \longrightarrow C'$ car $X \supset u^{-1}(B^*)$, et $\bar{f}$ à son tour se factorise à travers C, car si $b \in B$, b s'écrit localement $x^{-1}a$ pour $x \in u^{-1}(B^*)$, $a \in A$, donc, si $v(b) \in C^*$, alors $a \in X$ et $\bar{f}(b) = f(x)^{-1}f(a) \in C'^*$, donc vu est de localisation. Inversement, supposons vu de localisation et u un épimorphisme d'Anneaux ; posons comme précédemment $Y = v^{-1}(C^*)$, $X = u^{-1}(Y)$; si $g : B \longrightarrow C'$ est tel que $g(Y) \subset C'^*$, alors on a $gu(X) \subset C'^*$, donc $gu : A \to C'$ se factorise à travers C en $\bar{g} : C \longrightarrow C'$, et, comme u est un épimorphisme, l'égalité $\bar{g}vu = gu$ implique $\bar{g}v = v$, donc v est de localisation. Reste à vérifier (iv). Supposons u de localisation, soit $X \subset A$ tel que u induise un isomorphisme $X^{-1}A \xrightarrow{\sim} B$, posons $X' = f^*X$; la donnée d'un morphisme $v : f^*A \longrightarrow B'$ tel que $v(X') \subset B'^*$ équivaut, par adjonction, à celle d'un morphisme $w : A \longrightarrow f_*(B')$ tel que $w(X) \subset f_*(B'^*) = (f_*(B'))^*$ donc à celle d'un morphisme $B \longrightarrow f_*(B')$, donc finalement, par adjonction, à celle d'un morphisme $f^*B \longrightarrow B'$, ce qui prouve que f^*u est de localisation. Inversement, supposons f^*u de localisation, posons $X = u^{-1}(B^*)$, de sorte que u se factorise à travers $X^{-1}A$ en $\bar{u} : X^{-1}A \longrightarrow B$; on a $f^*(X) = (f^*u)^{-1}(f^*B)^*$ (NB. $f^*(B^*) = (f^*B)^*$) donc $f^*(\bar{u})$ est un isomorphisme, donc comme f^* est fidèle, $\bar{u}$ est un isomorphisme, ce qui prouve que u est de localisation, et achève la preuve de (2.3.3).

Proposition 2.3.4. *Soient X un topos annelé, $X^\sim$ son spectre au sens de Mme Hakim* ([18]chap. III), *$p : X^\sim \longrightarrow X$ la projection canonique. Le morphisme $p^{-1}(\underline{O}_X) \longrightarrow \underline{O}_{X^\sim}$ est un morphisme de localisation.*

Preuve. D'après (loc. cit.), le morphisme $p^{-1}(\underline{O}_X) \longrightarrow \underline{O}_{X^\sim}$ est associé au morphisme de préfaisceaux

$$(U,s) \longmapsto (\underline{O}_X(U) \longrightarrow \underline{O}_X(U)[s^{-1}]) \quad , \quad U \in \mathrm{ob}\, X \ , \ s \in \underline{O}_X(U) \ .$$

L'assertion résulte donc de (2.3.3 (i)).

Corollaire 2.3.5. Soient Y un topos annelé, X un schéma relatif sur Y au sens de Mme Hakim ([18]Chap. IV), d'où (loc. cit.) des morphismes de topos annelés $X \longrightarrow Y^{\sim} \xrightarrow{p} Y$, où $Y^{\sim}$ est le spectre de Y et p la projection canonique. La flèche canonique $L_{X/Y} \longrightarrow L_{X/Y^{\sim}}$ est un quasi-isomorphisme.

Preuve. D'après (2.3.4) et (2.3.1) on a $L_{Y^{\sim}/Y} = 0$ dans $D(Y^{\sim})$. L'assertion résulte donc du triangle de transitivité (2.1.5.6) relatif à $X \longrightarrow Y^{\sim} \longrightarrow Y$.

Corollaire 2.3.6. Soit X un schéma affine d'anneau A , notons A_X le faisceau constant sur X de valeur A . Le morphisme canonique $A_X \longrightarrow \underline{O}_X$ (EGA Err I 1.8.4) est un morphisme de localisation.

Preuve. X est en effet le spectre du topos ponctuel annelé par A . On peut aussi remarquer que $A_X \longrightarrow \underline{O}_X$ est trivialement de localisation en chaque point, donc de localisation d'après (2.3.3 (iv)).

2.3.6. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas affines, correspondant à un morphisme d'anneaux $u : A \longrightarrow B$. On a alors un carré commutatif canonique

(2.3.6.1)

$$\begin{array}{ccc} B_X & \longrightarrow & \underline{O}_X \\ {\scriptstyle u_X}\uparrow & & \uparrow \\ A_X & \longrightarrow & f^{-1}(\underline{O}_Y) \end{array} \quad ,$$

où les morphismes horizontaux sont de localisation d'après (2.3.6) (NB. le morphisme du bas est l'image par f^{-1} du morphisme canonique $A_Y \longrightarrow \underline{O}_Y$, donc est de localisation d'après (2.3.3 (iv))). Rappelons (EGA Err I 1.8.5) que le foncteur qui à un B-module M associe le $\underline{O}_X$-Module quasi-cohérent correspondant $M^{\sim}$ s'identifie canoniquement au foncteur $M \longmapsto M_X \otimes_{B_X} \underline{O}_X$. En particulier, on a canoniquement

$$(L_{B/A})^{\sim} \xrightarrow{\sim} (L_{B/A})_X \otimes_{B_X} O_X$$

$$\xrightarrow{\sim} L_{B_X/A_X} \otimes_{B_X} O_X \qquad (1.2.1.4) \ ,$$

et par suite le carré (2.3.6.1) fournit une flèche canonique

(2.3.6.2) $$(L_{B/A})^{\sim} \longrightarrow L_{X/Y} \ .$$

Proposition 2.3.6.3. La flèche (2.3.6.2) est un quasi-isomorphisme.

Preuve. Les flèches horizontales étant de localisation, l'assertion résulte de (2.3.1.1).

Corollaire 2.3.7. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas. Les faisceaux d'homologie de $L_{X/Y}$ sont quasi-cohérents. Ils sont cohérents si Y est localement noethérien et f localement de type fini.

Preuve. La question étant locale d'après (2.3.0), on peut supposer X et Y affine. La première assertion résulte donc trivialement de (2.3.6.3). La seconde en résulte aussi, compte tenu de (1.2.6.3) et du fait que, d'après André ([1] 17.2 p.69), toute algèbre de type fini B sur un anneau noethérien A admet une résolution $P \longrightarrow B$ où P est une A-algèbre simpliciale libre de type fini en chaque degré.

Proposition 2.3.8. Soient $S' \longrightarrow S$ un morphisme de topos annelés, X un schéma relatif sur S ([18]chap. IV), X' le schéma relatif sur S' déduit par changement de base, d'où un carré commutatif [1] de topos annelés

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{u} & X' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ S & \xleftarrow{v} & S' \end{array} \ .$$

[1] et même 2-cartésien ([18] III 3.1).

La flèche canonique

$$(*) \qquad u^{-1}(\underline{O}_X) \otimes_{(fu)^{-1}(\underline{O}_S)} f'^{-1}(\underline{O}_{S'}) \longrightarrow \underline{O}_{X'}$$

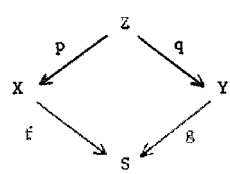
est un morphisme de localisation.

Preuve ([1]). La question étant locale, on peut supposer que X est le spectre d'une $\underline{O}_S$-Algèbre A. Alors X' est le spectre de $A' = v^*A = v^{-1}A \otimes_{v^{-1}\underline{O}_S} \underline{O}_{S'}$. La flèche (*) s'insère dans un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} h^{-1}A \otimes_{h^{-1}\underline{O}_S} f'^{-1}\underline{O}_{S'} & \xrightarrow{\sim} & f'^{-1}A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ u^{-1}\underline{O}_X \otimes_{h^{-1}\underline{O}_S} f'^{-1}\underline{O}_{S'} & \xrightarrow{(*)} & \underline{O}_{X'} \end{array} ,$$

où l'on a posé $h = fu = vf'$. La flèche horizontale supérieure est un isomorphisme par définition de A'. La flèche verticale de droite est de localisation d'après (2.3.4). D'autre part, toujours d'après (2.3.4), $f^{-1}A \longrightarrow \underline{O}_X$ est de localisation, donc (2.3.3 (iv) + (ii)) la flèche verticale de gauche est de localisation. Donc (2.3.3 (iii)) (*) est de localisation, cqfd.

Corollaire 2.3.9. Soient S un topos annelé, X (resp. Y) un schéma relatif sur S, $Z = X \times_S Y$ ([18] chap. IV), d'où un carré commutatif ([2]) de topos annelés



([1]) Je remercie Mme Hakim, qui m'a communiqué cette preuve.

([2]) en fait, 2-cartésien ([18] IV 3.1).

La flèche canonique (où $h = fp = qg$)

$$p^{-1}(\underline{O}_X) \otimes_{h^{-1}(\underline{O}_S)} q^{-1}(\underline{O}_Y) \longrightarrow \underline{O}_Z$$

est un morphisme de localisation.

Corollaire 2.3.10. Dans la situation de (2.3.8), supposons qu'on ait $\mathrm{Tor}_i^{(fu)^{-1}(\underline{O}_S)}(u^{-1}(\underline{O}_X),\ f'^{-1}(\underline{O}_{S'})) = 0$ pour $i > 0$. Alors les flèches canoniques

$$u^*L_{X/S} \longrightarrow L_{X'/S'}\ ,\quad f'^*L_{S'/S} \longrightarrow L_{X'/X}\ ,$$

$$u^*L_{X/S} \oplus f'^*L_{S'/S} \longrightarrow L_{X'/S}\ ,$$

sont des quasi-isomorphismes.

Preuve. Appliquer (2.2.3), l'hypothèse $L_{B'/B} \otimes_A A' = 0$ de (loc. cit.) étant satisfaite d'après (2.3.8) et (2.3.1).

Similairement, on a :

Corollaire 2.3.11. Dans la situation de (2.3.9), supposons qu'on ait $\mathrm{Tor}_i^{h^{-1}(\underline{O}_S)}(p^{-1}(\underline{O}_X),\ q^{-1}(\underline{O}_Y)) = 0$ pour $i > 0$. Alors les flèches canoniques

$$p^*L_{X/S} \longrightarrow L_{Z/Y}\ ,\quad p^*L_{X/S} \oplus q^*L_{Y/S} \longrightarrow L_{Z/S}\ ,$$

sont des quasi-isomorphismes.

Remarque 2.3.12. Si, dans (2.3.9), S est un schéma ordinaire, l'hypothèse de (2.3.11) signifie que les faisceaux quasi-cohérents sur Z $\underline{\mathrm{Tor}}_i^S(\underline{O}_X, \underline{O}_Y)$ définis dans (EGA III 7) sont nuls pour $i > 0$ (dans la terminologie de (SGA 6 III 1.5), on dit que X et Y sont tor-indépendants sur S). En effet, pour $z \in Z$, $x = p(z)$, $y = q(z)$, $s = h(z)$, on a

$$\mathrm{Tor}_i^{h^{-1}(\underline{O}_S)}(p^{-1}(\underline{O}_X),\ q^{-1}(\underline{O}_Y))_z \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tor}_i^{\underline{O}_{S,s}}(\underline{O}_{X,x},\underline{O}_{Y,y}) \quad ,$$

$$\underline{\mathrm{Tor}}_i^{S}(\underline{O}_X,\underline{O}_Y)_z \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tor}_i^{\underline{O}_{S,s}}(\underline{O}_{X,x},\underline{O}_{Y,y}) \otimes \underline{O}_{Z,z} \quad ;$$

$$\mathrm{Tor}_i^{\underline{O}_{S,s}}(\underline{O}_{X,x},\underline{O}_{Y,y}) \xrightarrow{\sim} \varinjlim \mathrm{Tor}_i^{\underline{O}_S(W)}(\underline{O}_X(U),\ \underline{O}_Y(V)) \quad ,$$

limite inductive suivant les ouverts affines $U \ni x$, $V \ni y$, $W \ni s$ tels que $f(U) \subset W$, $g(V) \subset W$.

CHAPITRE III

COMPLEXE COTANGENT ET EXTENSIONS INFINITESIMALES

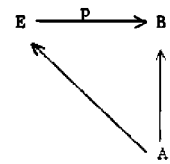
Sauf mention du contraire, les faisceaux d'anneaux considérés dans ce chapitre sont supposés commutatifs et unitaires.

1. Calcul du tronqué à l'ordre un du complexe cotangent.

1.1. Sorites sur les extensions d'Algèbres.

Nous passons en revue ici quelques notions bien connues, voir (EGA 0_{IV} 18) dans le cas ponctuel, [17] dans le cas global.

1.1.1. Soit T un topos. Par une extension d'Algèbres de T on entend un diagramme commutatif d'Anneaux de T

$X =$ 

,

où p est surjectif, le noyau de p étant un Idéal I de carré nul. Il existe alors sur I une unique structure de B-Module telle que

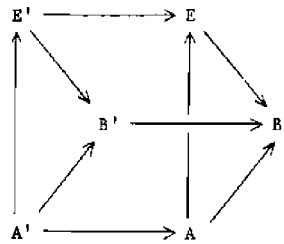
$$p(x)y = xy$$

pour x (resp. y) section de E (resp. I). On dit que X est une A-extension de B par le B-Module I . Les extensions d'Algèbres de T forment de manière naturelle une catégorie, notée

(1.1.1.1) Exal , [1]

[1] Vu le chapeau coiffant ce chapitre, cette notation ne prête pas à confusion.

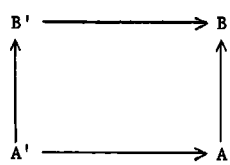
un morphisme d'extensions d'Algèbres étant défini comme un diagramme commutatif



En associant à chaque extension X comme plus haut le couple formé du morphisme $A \longrightarrow B$ sous-jacent et du B-Module $I = p^{-1}(0)$, on définit un foncteur

(1.1.1.2) $\qquad \pi : \underline{\text{Exal}} \longrightarrow \text{Algmod}$,

où Algmod désigne (cf. (I 3.1.2)) la catégorie des couples $(A \longrightarrow B, I)$, où $A \longrightarrow B$ est un morphisme d'Anneaux et I un B-Module, un morphisme $(A' \longrightarrow B', I') \longrightarrow (A \longrightarrow B, I)$ étant défini comme un couple formé d'un carré commutatif



et d'un morphisme $I' \longrightarrow I$ au-dessus de $B' \longrightarrow B$ (i.e. un morphisme B'-linéaire $I' \longrightarrow I$, ou, au choix, un morphisme B-linéaire $I' \otimes_{B'} B \longrightarrow I$).

1.1.2. Dans la suite, on s'intéressera plus spécialement à certaines sous-catégories (non pleines) de Exal. Pour un Anneau A fixé, on notera

(1.1.2.1) $\qquad \underline{\text{Exal}}_A$

la sous-catégorie de Exal formée des A-extensions, les flèches étant les flèches d'extensions induisant l'identité sur A . Pour un morphisme d'Anneaux $A \longrightarrow B$

fixé, on notera

(1.1.2.2) $\underline{\mathrm{Exal}}_A(B,-)$

la sous-catégorie formée des A-extensions de B par un B-Module variable, les flèches étant les flèches d'extensions induisant l'identité sur A et B . Enfin, pour un morphisme d'Anneaux $A \longrightarrow B$ fixé et un B-Module I fixé, on notera

(1.1.2.3) $\underline{\mathrm{Exal}}_A(B,I)$

la sous-catégorie formée des A-extensions de B par I , les flèches étant les flèches d'extensions induisant l'identité sur A , B et I .

1.1.3. Soient A un Anneau de T , et

$$X = (0 \longrightarrow I \longrightarrow E \longrightarrow B \longrightarrow 0)$$

une A-extension d'Algèbres. Soit

$$u : C \longrightarrow B$$

un morphisme de A-Algèbres. On définit, comme dans (EGA 0_{IV} 18.2.5), la A-extension "image de X par u " :

(1.1.3.1) $X*u = (0 \longrightarrow I \longrightarrow E \otimes_B C \longrightarrow C \longrightarrow 0)$.

C'est une A-extension de C par I considéré comme C-Module via u ; on a un morphisme canonique

(1.1.3.2) $X*u \longrightarrow X$

de $\underline{\mathrm{Exal}}_A$, dont l'image par π (1.1.1.2) est (u,id_I) . Si $u' : C' \longrightarrow C$ est un morphisme de A-Algèbres, on a un isomorphisme canonique

(1.1.3.3) $X*(uu') \xrightarrow{\sim} (X*u)*u'$

de $\underline{\mathrm{Exal}}_A(C',I)$, isomorphisme satisfaisant à la condition de cocycle habituelle.

Soit maintenant

$$v : I \longrightarrow J$$

un morphisme de B-Modules. On définit, comme dans (EGA O_{IV} 18.2.8), la A-extension "image de X par v" :

(1.1.3.4) $$v_*X = (0 \longrightarrow J \longrightarrow E \oplus^I J \longrightarrow B \longrightarrow 0) \quad .$$

C'est une A-extension de B par J ; on a un morphisme canonique

(1.1.3.5) $$X \longrightarrow v_*X$$

de $\underline{\mathrm{Exal}}_A(B,-)$, dont l'image par π est (id_B, v). Si $v' : J \longrightarrow J'$ est un morphisme de B-Modules, on a un isomorphisme canonique

(1.1.3.6) $$(v'v)_*X \xrightarrow{\sim} v'_*(v_*X)$$

de $\underline{\mathrm{Exal}}_A(B,J')$, isomorphisme satisfaisant à la condition de cocycle habituelle.

1.1.4. Soit

$$\begin{array}{ccc} X & & 0 \longrightarrow I \longrightarrow E \longrightarrow B \longrightarrow 0 \\ f \downarrow & = & \quad v \downarrow \quad\quad \downarrow \quad\quad \downarrow u \\ Y & & 0 \longrightarrow J \longrightarrow F \longrightarrow C \longrightarrow 0 \end{array}$$

un morphisme de $\underline{\mathrm{Exal}}_A$. On a alors un isomorphisme canonique de $\underline{\mathrm{Exal}}_A(B,J)$:

(1.1.4.1) $$v_*X \xrightarrow{\sim} Y_*u \quad ,$$

et la flèche $f : X \longrightarrow Y$ est la composée

$$X \xrightarrow{(1.1.3.5)} v_*X \xrightarrow{(1.1.4.1)} Y_*u \xrightarrow{(1.1.3.2)} Y \quad .$$

1.1.5. Fixons le morphisme d'Anneaux $A \longrightarrow B$. Le foncteur π (1.1.1.2) induit un foncteur

$$\pi \ : \ \underline{\mathrm{Exal}}_A(B,-) \longrightarrow B\text{-Mod}$$

(B-Mod = catégorie des B-Modules). Celui-ci, grâce à (1.1.3.4) et (1.1.3.6), fait de $\underline{\mathrm{Exal}}_A(B,-)$ une catégorie cofibrée sur B-Mod, et même une catégorie "cofibrée additive" au sens de Grothendieck [17] , ce qui signifie que $\underline{\mathrm{Exal}}_A(B,0)$ est équivalente à la catégorie ponctuelle et que, pour M , $N \in$ ob B-Mod, le foncteur

$$(pr_1*,pr_2*) \ : \ \underline{\mathrm{Exal}}_A(B,M \times N) \longrightarrow \underline{\mathrm{Exal}}_A(B,M) \times \underline{\mathrm{Exal}}_A(B,N)$$

est une équivalence de catégories ([1]). La vérification de ce fait est triviale. De là découle (loc. cit.)que, pour $M \in$ ob B-Mod, la catégorie-fibre $\underline{\mathrm{Exal}}_A(B,M)$ est une "catégorie de Picard", i.e. un groupoïde muni d'une "addition" associative et commutative à des isomorphismes donnés près satisfaisant à certains axiomes de compatibilité (voir (SGA 4 XVIII) pour une définition en forme). L'ensemble des classes d'isomorphie d'objets de $\underline{\mathrm{Exal}}_A(B,M)$ est, comme dans toute catégorie de Picard, un groupe abélien ; nous le noterons

(1.1.5.1) $\qquad\qquad \mathrm{Exal}_A(B,M)$;

l'élément neutre est la classe de l'extension triviale définie par l'Algèbre des nombres duaux $B \oplus M$ (II 1.1.1.3). Le groupe des automorphismes d'une extension donnée $X \in$ ob $\underline{\mathrm{Exal}}_A(B,M)$ s'identifie canoniquement au groupe des automorphismes de l'extension triviale, lui-même canoniquement isomorphe, d'aprés (II (1.1.1.4)), à $\mathrm{Der}_A(B,M)$. L'ensemble des splittages de X , ou isomorphismes de X avec l'extension triviale, est donc soit vide, soit un torseur sous $\mathrm{Der}_A(B,M)$. ([2]) Si $f : M \longrightarrow N$ est un morphisme de B-Modules, le foncteur image directe

$$f* \ : \ \underline{\mathrm{Exal}}_A(B,M) \longrightarrow \underline{\mathrm{Exal}}_A(B,N)$$

([1]) $\underline{\mathrm{Exal}}_A(B,-)$ est même "exacte à gauche" (loc. cit. 7.1.11), mais nous n'aurons pas besoin de cette propriété.

([2]) La vérification directe de ces propriétés est d'ailleurs triviale.

est un foncteur entre catégories de Picard, donc en particulier définit un homomorphisme de groupes

(1.1.5.2) $$f* : \mathrm{Exal}_A(B,M) \longrightarrow \mathrm{Exal}_A(B,N) \quad .$$

Soit $u : C \longrightarrow B$ un morphisme de A-Algèbres. Le foncteur

$$\underline{\mathrm{Exal}}_A(B,-) \longrightarrow \underline{\mathrm{Exal}}_A(C,-) \quad , \quad X \longmapsto X*u \quad ,$$

est un foncteur entre catégories cofibrées additives cocartésien au-dessus du foncteur "restriction des scalaires" B-Mod $\longrightarrow$ C-Mod, donc induit, pour chaque $M \in$ ob B-Mod, un foncteur entre catégories de Picard

$$\underline{\mathrm{Exal}}_A(B,M) \longrightarrow \underline{\mathrm{Exal}}_A(C,M) \quad ,$$

et par suite un morphisme de groupes

(1.1.5.3) $$\mathrm{Exal}_A(B,M) \longrightarrow \mathrm{Exal}_A(C,M) \quad .$$

Enfin, soit $A' \longrightarrow A$ un morphisme d'Anneaux. Le foncteur "oubli"

$$\underline{\mathrm{Exal}}_A(B,-) \longrightarrow \underline{\mathrm{Exal}}_{A'}(B,-)$$

est un foncteur entre catégories cofibrées additives cocartésien au-dessus du foncteur identique B-Mod $\longrightarrow$ B-Mod, donc, pour chaque $M \in$ ob B-Mod, induit un foncteur entre catégories de Picard

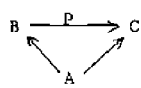
$$\underline{\mathrm{Exal}}_A(B,M) \longrightarrow \underline{\mathrm{Exal}}_{A'}(B,M) \quad ,$$

et par suite un morphisme de groupes

(1.1.5.4) $$\mathrm{Exal}_A(B,M) \longrightarrow \mathrm{Exal}_{A'}(B,M) \quad .$$

1.1.6. Soit un diagramme commutatif d'anneaux

(1.1.6.1)



,

où p est surjectif de noyau I . On vérifie trivialement, comme dans (EGA 0_{IV} 20.5.11), que la différentielle extérieure (I 1.1.2.5)

$$d_{B/A} : B \longrightarrow \Omega^1_{B/A}$$

induit, par passage au quotient, un homomorphisme C-linéaire

$$d_{B/A} : I/I^2 \longrightarrow \Omega^1_{B/A} \otimes_B C \quad .$$

La suite de C-Modules (cf. (EGA 0_{IV} 20.5.12))

$$(1.1.6.2) \qquad I/I^2 \xrightarrow{d_{B/A}} \Omega^1_{B/A} \otimes_B C \longrightarrow \Omega^1_{C/A} \longrightarrow 0 \quad ,$$

où la seconde flèche est la flèche canonique de fonctorialité, est exacte. En effet, il est immédiat que $P^1_{C/A}$ (I 1.1.2.3) est le quotient de $P^1_{B/A}$ par l'Idéal engendré par les images de $I \otimes B$ et $B \otimes I$, et l'exactitude de (1.1.6.2) en découle par passage aux Modules de différentielles ([1]). La suite (1.1.6.2) ne dépend en fait que de la A-extension

$$(1.1.6.3) \qquad 0 \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow B/I^2 \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

définie par (1.1.6.1) : la projection $B \longrightarrow B_1 = B/I^2$ définit un diagramme commutatif

$$(1.1.6.4) \qquad \begin{array}{ccccccc} I/I^2 & \xrightarrow{d_{B/A}} & \Omega^1_{B/A} \otimes_B C & \longrightarrow & \Omega^1_{C/A} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \\ I/I^2 & \xrightarrow{d_{B_1/A}} & \Omega^1_{B_1/A} \otimes_{B_1} C & \longrightarrow & \Omega^1_{C/A} & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad ,$$

où la flèche verticale médiane est un isomorphisme. Ce dernier point se voit comme dans (EGA loc. cit.), en appliquant la suite (1.1.6.2) à $B \longrightarrow B_1$. Si la A-extension (1.1.6.3) splitte, alors la suite (1.1.6.2) prolongée par un zéro à gauche est exacte

([1]) On pourrait aussi paraphraser les arguments de (EGA loc. cit.), mais le calcul direct esquissé ici est plus court.

et scindée, comme le montre un calcul direct immédiat ([1]).

1.1.7. Soit C une A-Algèbre. Nous dirons que C vérifie la condition (L) si, pour toute A-extension

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0 \quad ,$$

la suite (1.1.6.2) prolongée par un zéro à gauche,

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow \Omega^1_{B/A} \otimes_B C \longrightarrow \Omega^1_{C/A} \longrightarrow 0 \quad ,$$

est exacte.

Lemme 1.1.7.1. Supposons que $C = S_A(M)$, où M est un A-Module plat. Alors C vérifie la condition (L).

Preuve. Soit

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow I \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

une A-extension. Prouvons que la suite

$$(**) \qquad 0 \longrightarrow I \longrightarrow \Omega^1_{B/A} \otimes_B C \longrightarrow \Omega^1_{C/A} \longrightarrow 0$$

est exacte. Par passage à la limite inductive locale (I 4.2.1.3), on peut supposer M libre de type fini, donc $C \xrightarrow{\sim} A[t_1,\ldots,t_r]$. Quitte à se localiser à nouveau (pour relever $t_1, \ldots, t_r$), on est donc ramené au cas où (*) splitte, auquel cas (**) est exacte et scindée comme on l'a vu plus haut.

Supposons que C vérifie (L). Nous noterons

$$(1.1.7.2) \qquad \mathrm{diff}(X) = (0 \longrightarrow I \longrightarrow \Omega^1_{B/A} \otimes_B C \longrightarrow \Omega^1_{C/A} \longrightarrow 0)$$

la suite exacte associée à la A-extension

([1]) La réciproque est également vraie (cf. (EGA loc. cit.)), mais nous n'en aurons pas besoin.

$$X = (0 \longrightarrow I \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0) \quad .$$

On obtient ainsi un foncteur $X \longmapsto \mathrm{diff}(X)$ de $\underline{\mathrm{Exal}}_A(C,-)$ dans la catégorie des C-extensions de $\Omega^1_{C/A}$ pour un C-Module variable, foncteur compatible avec les projections naturelles sur C-Mod, d'où un morphisme de groupes

(1.1.7.3) $$\mathrm{diff} : \mathrm{Exal}_A(C,I) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_C(\Omega^1_{C/A},I) \quad ,$$

fonctoriel en $I \in \mathrm{ob}\ C\text{-Mod}$.

1.1.8. Soit C une A-Algèbre, et soit

$$Y = (0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} J \xrightarrow{f} \Omega^1_{C/A} \longrightarrow 0)$$

une suite exacte de C-Modules. On en déduit une A-extension de $P^1_{C/A} \xrightarrow{\sim} C \oplus \Omega^1_{C/A}$ par I ([1]) :

$$Y' = (0 \longrightarrow I \xrightarrow{\binom{0}{i}} C \oplus J \xrightarrow{\mathrm{id} \oplus f} C \oplus \Omega^1_{C/A} \longrightarrow 0) \quad ,$$

d'où une A-extension de C par I :

(1.1.8.1) $$\mathrm{alg}(Y) = Y' * j_2 \quad ,$$

où $j_2 : C \longrightarrow P^1_{C/A}$ est l'homomorphisme définissant la structure droite (II 1.1.2), i.e. $j_2(x) =$ classe de $1 \otimes x = x + d_{C/A}(x)$. On définit ainsi un foncteur $Y \longmapsto \mathrm{Alg}(Y)$ de la catégorie des C-extensions de $\Omega^1_{C/A}$ par un C-Module variable dans la catégorie $\underline{\mathrm{Exal}}_A(C,-)$, foncteur compatible avec les projections naturelles sur C-Mod, d'où un morphisme de groupes

(1.1.8.2) $$\mathrm{alg} : \mathrm{Ext}^1_C(\Omega^1_{C/A},I) \longrightarrow \mathrm{Exal}_A(C,I)$$

fonctoriel en $I \in \mathrm{ob}\ C\text{-Mod}$.

---

(1) I regardé comme $P^1_{C/A}$-Module annulé par $\Omega^1_{C/A}$.

Proposition 1.1.9. Soit C une A-Algèbre vérifiant la condition (L) (1.1.7). Alors les homomorphismes diff(1.1.7.3) et alg(1.1.8.2) sont inverses l'un de l'autre.

Preuve. Soit

$$X = (0 \longrightarrow I \longrightarrow B \xrightarrow{f} C \longrightarrow 0)$$

une A-extension de C par I . On a un diagramme commutatif de A-extensions

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & B & \xrightarrow{f} & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\| id & & \Big\downarrow \begin{pmatrix} f \\ d_{B/A}\zeta 1 \end{pmatrix} & & \Big\downarrow \begin{pmatrix} id \\ d_{C/A} \end{pmatrix} & & \\
0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & C \oplus (\Omega^1_{B/A} \otimes_B C) & \longrightarrow & C \oplus \Omega^1_{C/A} & \longrightarrow & 0
\end{array} ,$$

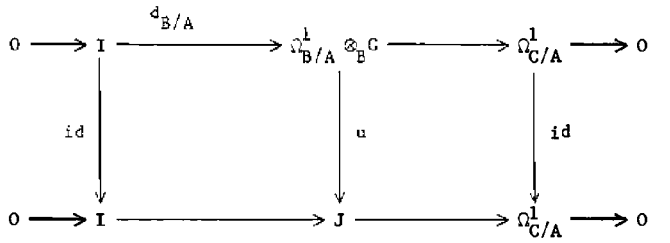
où la ligne du bas est la A-extension de $P^1_{C/A}$ par I déduite de diff(X) (1.1.8), et par suite on a $X \xrightarrow{\sim} \text{alg}(\text{diff}(X))$. Inversement, soit

$$Y = (0 \longrightarrow I \longrightarrow J \longrightarrow \Omega^1_{C/A} \longrightarrow 0)$$

une suite exacte de C-Modules. On a par définition de alg un morphisme de A-extensions (1.1.3.2)

$$\begin{array}{ccccccccc}
\text{alg}(Y) & 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\
\Big\downarrow & & & \Big\| id & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow \begin{pmatrix} id \\ d_{C/A} \end{pmatrix} & & \\
Y' & 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & C \oplus J & \longrightarrow & C \oplus \Omega^1_{C/A} & \longrightarrow & 0
\end{array} .$$

La flèche verticale médiane, en tant que flèche de A-Alg/C, définit d'après (II 1.1.1.4) une A-dérivation de B dans J , i.e. une flèche $u : \Omega^1_{B/A} \otimes_B C \longrightarrow J$, qui, comme on le constate aussitôt, rend commutatif le diagramme



où la ligne du bas est Y, et la ligne du haut $\mathrm{diff}(\mathrm{alg}(Y))$, donc on a $Y \xrightarrow{\sim} \mathrm{diff}(\mathrm{alg}(Y))$, ce qui achève la démonstration.

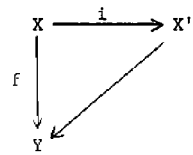
Remarque 1.1.9.1. On a montré en fait que, sous les hypothèses de (1.1.9), les foncteurs alg et diff (entre la catégorie $\underline{\mathrm{Exal}}_A(C,-)$ et la catégorie des A-extensions de C par un C-Module variable) sont quasi-inverses l'un de l'autre.

1.1.10. Soit

$$f : X \longrightarrow Y$$

un morphisme de topos annelés. Par un Y-voisinage infinitésimal d'ordre un (ou Y extension) de X on entend un diagramme commutatif [1] de topos annelés

(1.1.10.1)



où i est une équivalence sur les topos sous-jacents de $i^{-1}(\underline{O}_{X'}) \longrightarrow \underline{O}_X$ est surjectif à noyau de carré nul [2] ; un morphisme de Y-extensions de X se définit

---

[1] à isomorphisme donné près, comme en (II 1.1.4), isomorphisme le plus souvent négligé dans la pratique.

[2] dans la pratique, on fera souvent comme si les topos sous-jacents à X et à X' étaient les mêmes, i étant l'identité sur ceux-ci.

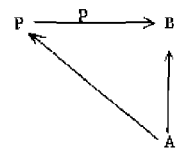
de la manière évidente. L'ensemble des classes d'isomorphie de Y-extensions de X par un $\underline{O}_X$-Module I (i.e. de diagrammes (1.1.10.1) tels que $\mathrm{Ker}(i^{-1}(\underline{O}_{X'}) \longrightarrow \underline{O}_X) \simeq I$) s'identifie naturellement à $\mathrm{Exal}_{f^{-1}(\underline{O}_Y)}(\underline{O}_X, I)$. Le groupe des automorphismes d'une Y-extension de X par I donnée s'identifie canoniquement à $\mathrm{Der}_{f^{-1}(\underline{O}_Y)}(\underline{O}_X, I) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\underline{O}_X}(\Omega^1_{X/Y}, I)$ (cf. (1.1.5) et (II 1.1.4)).

1.2. Le théorème fondamental.

1.2.0. Soient T un topos, $A \longrightarrow B$ un morphisme d'Anneaux de T, M un B-Module. Le but du numéro (1.2) est d'établir un isomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{Exal}_A(B,M) \xrightarrow{\sim} \mathbb{E}\mathrm{xt}^1_B(L_{B/A}, M) \quad . \qquad (1)$$

1.2.1. Soit



la résolution libre standard de B sur A (I 1.5.5.6). Rappelons qu'on a par définition (II 1.2.3)

$$L_{B/A} = \Omega^1_{P/A} \otimes_P B \quad ,$$

et que $\Omega^1_{P/A}$ est un P-Module plat. D'après (I 3.3.4.4), on a donc un isomorphisme canonique

(1.2.1.1) $$\mathbb{E}\mathrm{xt}^1_P(\Omega^1_{P/A}, M) \xrightarrow{\sim} \mathbb{E}\mathrm{xt}^1_B(L_{B/A}, M) \quad .$$

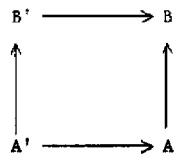
---

(1) Rappelons (I 3.2.1.15) que si L est un B-Module simplicial, et $L^\sim$ désigne le complexe de chaînes correspondant, on a des isomorphismes canoniques

$$\mathbb{E}\mathrm{xt}^n_B(L,M) \simeq \mathbb{E}\mathrm{xt}^n_B(L^\sim, M) \simeq H^n \mathrm{RHom}_B(L^\sim, M) \quad .$$

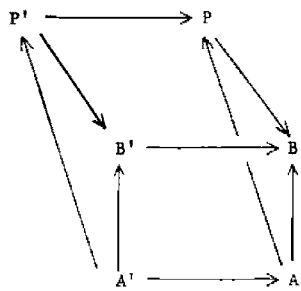
Celui-ci est fonctoriel en $M \in \text{ob } B\text{-Mod}$, et aussi en le morphisme $A \longrightarrow B$ dans le sens suivant : soit

(1.2.1.2)



un carré commutatif d'Anneaux, d'où (II 1.2.1.2) un diagramme commutatif

(1.2.1.3)



avec $P' = P_{A'}(B')$, alors le carré

(1.2.1.4)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}\mathrm{xt}^1_P(\Omega^1_{P/A},M) & \longrightarrow & \mathbb{E}\mathrm{xt}^1_B(L_{B/A},M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{E}\mathrm{xt}^1_{P'}(\Omega^1_{P'/A'},M) & \longrightarrow & \mathbb{E}\mathrm{xt}^1_{B'}(L_{B'/A'},M) \end{array} ,$$

où les flèches horizontales sont données par (1.2.1.1) et les flèches verticales sont les flèches canoniques (II 1.1.2.8) et 1.2.3.2), est commutatif ; la vérification est triviale.

1.2.2. Observons que P, en tant que A-Algèbre du topos simplicial $\mathrm{Simpl}(T)$, vérifie la condition (L) (1.1.7) : cela résulte en effet, d'après (1.1.7.1), du fait que P est libre terme à terme. Cela dit, soit X une A-extension de B par M. On en déduit une A-extension $X*_P$ de P par M (1.1.3.1), d'où une extension (de P-Modules) $\mathrm{diff}(X*_P)$ de $\Omega^1_{P/A}$ par M (1.1.7.2), d'où finalement un élément

$$\alpha(X) = \chi\, \mathrm{diff}\,(X*_P) \quad \in \quad \mathbb{E}\mathrm{xt}^1_P(\Omega^1_{P/A}, M) \quad , \tag{1.2.2.1}$$

où χ est l'homomorphisme défini en (I 3.2.3.4). Il est clair que $X \longmapsto \alpha(X)$ définit un homomorphisme de groupes

$$\alpha : \mathrm{Exal}_A(B,M) \longrightarrow \mathbb{E}\mathrm{xt}^1_P(\Omega^1_{P/A}, M) \quad , \tag{1.2.2.2}$$

fonctoriel en M. Celui-ci est également fonctoriel en $A \longrightarrow B$: étant donné un carré commutatif (1.2.1.2), le carré ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Exal}_A(B,M) & \xrightarrow{\ \alpha\ } & \mathbb{E}\mathrm{xt}^1_P(\Omega^1_{P/A}, M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Exal}_{A'}(B',M) & \xrightarrow{\ \alpha\ } & \mathbb{E}\mathrm{xt}^1_{P'}(\Omega^1_{P'/A'}, M) \end{array} \quad , \tag{1.2.2.3}$$

où la flèche verticale de droite est définie par la flèche canonique $\Omega^1_{P'/A'} \longrightarrow \Omega^1_{P/A}$ et la flèche verticale de gauche est composée des flèches canoniques $\mathrm{Exal}_A(B,M) \longrightarrow \mathrm{Exal}_{A'}(B,M)$ (1.1.5.4) et $\mathrm{Exal}_{A'}(B,M) \longrightarrow \mathrm{Exal}_{A'}(B',M)$ (1.1.5.3), est commutatif ; la vérification est laissée en exercice au lecteur.

Théorème 1.2.3. L'homomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{Exal}_A(B,M) \longrightarrow \mathbb{E}\mathrm{xt}^1_B(L_{B/A}, M) \quad ,$$

composé de α (1.2.2.2) et de l'isomorphisme (1.2.1.1), est un isomorphisme.

Preuve. On va construire un isomorphisme inverse de α. Soit

$$y \in \mathbb{E}\mathrm{xt}^1_P(\Omega^1_{P/A}, M) \quad .$$

D'après (I 3.2.3.7), il existe un quasi-isomorphisme de P-Modules $s : M \longrightarrow N$, et une extension Y de $\Omega^1_{P/A}$ par N tels que l'on ait

$$(*) \qquad y = \sigma\, s^{-1}\, \chi(Y) \quad .$$

On a ainsi une A-extension (1.1.8)

$$\mathrm{alg}(Y) = (0 \longrightarrow N \longrightarrow E \longrightarrow P \longrightarrow 0) \quad .$$

Comme P est acyclique en degré > 0, on en déduit, par application de H_0, une A-extension $H_0\mathrm{alg}(Y)$ de $H_0(P)$ par $H_0(N)$, d'où finalement une A-extension de B par M

$$(H_0 s)^{-1} * H_0\mathrm{alg}(Y) * (H_0 p)^{-1} = (0 \longrightarrow M \longrightarrow F \longrightarrow B \longrightarrow 0)$$

(où $F \xrightarrow{\sim} H_0 E$). Je dis que celle-ci est indépendante, à isomorphisme près, du choix du couple (s,Y) utilisé pour décrire y. En effet, supposons qu'on ait

$$y = \sigma\, s'^{-1}\, \chi(Y') = \sigma\, s''^{-1}\, \chi(Y'') \quad ,$$

où $s' : M \longrightarrow N'$ (resp. $s'' : M \longrightarrow N''$) est un quasi-isomorphisme de P-Modules et Y' (resp. Y'') une extension de $\Omega^1_{P/A}$ par N' (resp. N''). Alors, d'après (I 3.2.3.7), il existe des quasi-isomorphismes $t' : N' \longrightarrow L$ et $t'' : N'' \longrightarrow L$ tels que $t's'$ soit homotope à $t''s''$ et que les extensions $t'*Y'$ et $t''*Y''$ soient isomorphes (en tant qu'extensions de $\Omega^1_{P/A}$ par L). Soit Z une extension de $\Omega^1_{P/A}$ par L isomorphe à $t'* Y'$ et $t''* Y''$. Par fonctorialité de alg (1.1.8.2), on a

$$\mathrm{alg}(Z) \xrightarrow{\sim} t'* \mathrm{alg}(Y') \xrightarrow{\sim} t''* \mathrm{alg}(Y'') \quad .$$

On en déduit

$$H_0\mathrm{alg}(Z) \xrightarrow{\sim} H_0 t'* H_0\, \mathrm{alg}(Y') \xrightarrow{\sim} H_0 t''* H_0 \mathrm{alg}(Y'') \quad ,$$

d'où

$$H_o s'^{-1} * H_o alg(Y') \xrightarrow{\sim} H_o s'^{-1} H_o t'^{-1} * H_o alg(Z) \quad ,$$

$$H_o s''^{-1} * H_o alg(Y'') \xrightarrow{\sim} H_o s''^{-1} H_o t''^{-1} * H_o alg(Z) \quad .$$

Mais, comme $t's'$ est homotope à $t''s''$, on a

$$H_o t' H_o s' = H_o t'' H_o s'' \quad ,$$

d'où finalement

$$H_o s'^{-1} * H_o alg(Y') \xrightarrow{\sim} H_o s''^{-1} H_o alg(Y'') \quad ,$$

ce qui prouve notre assertion. On définit donc une application

$$\beta : \mathbb{E}xt^1_P(\Omega^1_{P/A}, M) \longrightarrow Exal_A(B,M) \tag{1.2.3.1}$$

en posant

$$\beta(y) = (H_o s)^{-1} * H_o alg(Y) * (H_o p)^{-1}$$

pour $y \in \mathbb{E}xt^1_P(\Omega^1_{P/A}, M)$ décrit par $(*)$. On va montrer que α et β sont inverses l'une de l'autre. Soit X une A-extension de B par M. On a, dans $Exal_A(B,M)$,

$$\begin{aligned} \beta\,\alpha(X) &= \beta(\chi\, diff(X*p)) \\ &= H_o(alg\ diff(X*p)) * H_o p^{-1} \\ &= H_o(X*p) * H_o p^{-1} \qquad (1.1.9) \\ &= X \quad , \end{aligned}$$

ce qui prouve $\beta\alpha = id$. Inversement, soit $y \in \mathbb{E}xt^1_P(\Omega^1_{P/A}, M)$ décrit par $(*)$. On a par définition

$$\begin{aligned} \alpha\beta(y) &= \chi\, diff(H_o s^{-1} * H_o alg(Y) * H_o p^{-1} * p) \\ &= \sigma\, H_o s^{-1}\ \chi\, diff(H_o alg(Y) * H_o p^{-1} * p) \quad (I\ 3.2.3.3) \quad . \end{aligned}$$

Le morphisme de A-extensions

$$\begin{array}{lccccccc} \mathrm{alg}(Y) & 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & E & \longrightarrow & P \longrightarrow 0 \\ & & & \downarrow{\scriptstyle v} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (H_o p)^{-1} p} \\ H_o\mathrm{alg}(Y) & 0 & \longrightarrow & H_o N & \longrightarrow & H_o E & \longrightarrow & H_o P \longrightarrow 0 \end{array}$$

défini par la projection sur H_o fournit (1.1.4.1) la relation

$$H_o\mathrm{alg}(Y) \underset{*}{\cdot} H_o p^{-1} * p = v * \mathrm{alg}(Y) \quad .$$

On en tire

$$\alpha\beta(y) = \sigma((H_o s^{-1})\, v)\chi(\mathrm{diff}\ \mathrm{alg}(Y))$$

$$= \sigma((H_o s^{-1})v)\chi(Y) \qquad (1.1.9) \quad .$$

Mais on a

$$vs = H_o s \quad ,$$

d'où

$$(H_o s^{-1})v = s^{-1} \quad \text{dans} \quad D.(P) \quad ,$$

d'où

$$\alpha\beta(y) = \sigma\, s^{-1}\chi(Y) = y \quad ,$$

ce qui prouve $\alpha\beta = \mathrm{id}$ et achève la démonstration de (1.2.3).

1.2.4. Soit

(1.2.4.1) $$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \xrightarrow{f} M'' \longrightarrow 0$$

une suite exacte de B-Modules. Compte tenu de (II 1.2.4.3) et (1.2.3), la suite

exacte des $\mathbb{E}xt^1_B(L_{B/A},-)$ définie par (1.2.4.1) s'écrit, à isomorphisme canonique fonctoriel près,

$$(1.2.4.2)\qquad 0 \longrightarrow Der_A(B,M') \xrightarrow{1} Der_A(B,M) \xrightarrow{2} Der_A(B,M'') \xrightarrow{3} Exal_A(B,M') \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{4} Exal_A(B,M) \xrightarrow{5} Exal_A(B,M'') \longrightarrow \mathbb{E}xt^2_B(L_{B/A},M') \longrightarrow \mathbb{E}xt^2_B(L_{B/A},M) \longrightarrow \ldots,$$

où les flèches 1, 2, 4, 5 sont les flèches canoniques de fonctorialité.

Proposition 1.2.4.3. La flèche 3 de (1.2.4.2) coïncide avec l'homomorphisme $\partial : Der_A(B,M'') \longrightarrow Exal_A(B,M')$ défini comme suit : soit u une A-dérivation de B dans M'', regardée comme une flèche $B \longrightarrow B \oplus M''$ de A-Alg/B (II 1.1.1.4), alors ∂u est la classe de X*u, où X est la A-extension

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow B \oplus M \xrightarrow{id \oplus f} B \oplus M'' \longrightarrow 0 \quad .$$

Preuve. Il s'agit de vérifier que le carré

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}xt^0_B(L_{B/A},M) & \longrightarrow & \mathbb{E}xt^1_B(L_{B/A},M') \\ \downarrow & & \downarrow \\ Der_A(B,M'') & \xrightarrow{\partial} & Exal_A(B,M') \end{array} \quad ,$$

où la flèche verticale de gauche (resp. droite) est l'isomorphisme (II 1.2.4.3) (resp. composé de l'inverse de (1.2.1.1) et de β (1.2.3.1)) et la flèche horizontale supérieure l'opérateur bord de la suite exacte des $\mathbb{E}xt$, est commutatif. Cela va résulter de la compatibilité plus précise suivante, à savoir que, avec les notations de (1.2.3), le carré

$$\begin{array}{ccc} Hom_P(\Omega^1_{P/A},M'') & \longrightarrow & Ext^1_P(\Omega^1_{P/A},M') \\ \downarrow & & \downarrow \text{alg} \\ Der_A(P,M'') & \xrightarrow{\partial} & Exal_A(P,M') \end{array} \quad ,$$

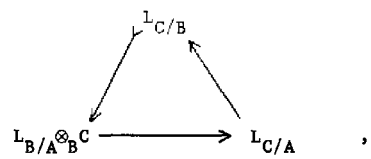
où la flèche horizontale du haut est l'opérateur bord de la suite exacte des Ext_P^i (ordinaires) relative à une suite exacte de P-Modules $(0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0)$, est commutatif. Pour vérifier ce dernier point, il suffit, par fonctorialité, de montrer que, si $M'' = \Omega^1_{P/A}$, les images de la flèche id : $\Omega^1_{P/A} \longrightarrow \Omega^1_{P/A}$ dans $\mathrm{Exal}_A(P,\Omega^1_{P/A})$ par les deux composés coïncident, mais cela résulte trivialement des définitions, d'où la proposition.

Remarque 1.2.4.4. Vu la compatibilité (1.2.4.3), il est facile de vérifier directement l'exactitude de (1.2.4.2) jusqu'au terme $\mathrm{Exal}_A(B,M)$ inclus.

1.2.5. Soient

(1.2.5.1) $$A \longrightarrow B \xrightarrow{f} C$$

des morphismes d'Anneaux de T, et soit M un C-Module. On a alors un triangle distingué de D(C) (II 2.1.2.1)

(1.2.5.2)


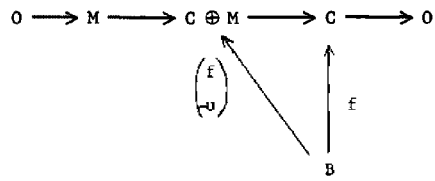
,

où les flèches de degré zéro sont les images des flèches canoniques. Compte tenu de (II 1.2.4.3) et (1.2.3), la suite exacte des $\mathbb{E}\mathrm{xt}^i_C(-,M)$ définie par (1.2.5.2) s'écrit, à isomorphisme canonique fonctoriel près,

(1.2.5.3) $$0 \longrightarrow \mathrm{Der}_B(C,M) \xrightarrow{1} \mathrm{Der}_A(C,M) \xrightarrow{2} \mathrm{Der}_A(B,M) \xrightarrow{3} \mathrm{Exal}_B(C,M) \longrightarrow$$
$$\xrightarrow{4} \mathrm{Exal}_A(C,M) \xrightarrow{5} \mathrm{Exal}_A(B,M) \longrightarrow \mathbb{E}\mathrm{xt}^2_C(L_{C/B},M) \longrightarrow \mathbb{E}\mathrm{xt}^2_C(L_{C/A},M) \longrightarrow \cdots ,$$

où les flèches 1, 2, 4, 5 sont les flèches canoniques de fonctorialité (cf. (II 1.1.2.8), (1.1.5.3), (1.1.5.4)).

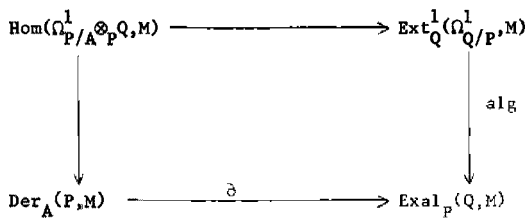
Proposition 1.2.5.4. La flèche 3 de (1.2.5.3) coïncide avec l'homomorphisme $\partial : \mathrm{Der}_A(B,M) \longrightarrow \mathrm{Exal}_B(C,M)$ défini comme suit : pour $u \in \mathrm{Der}_A(B,M)$, ∂u est la classe de la B-extension



Preuve. Posons, comme dans (II 2.1.1), $P_A(B) = P$, $P_P^{\Delta}(C) = Q$. On a donc une suite exacte (II 2.1.1.3)

(*) $$0 \longrightarrow \Omega^1_{P/A} \otimes_P Q \longrightarrow \Omega^1_{Q/A} \longrightarrow \Omega^1_{Q/P} \longrightarrow 0 \quad ,$$

qui, par extension des scalaires à C , fournit le triangle (1.2.5.2). Cela étant, la compatibilité à démontrer va résulter de celle-ci : M désignant maintenant un Q-Module, le carré ci-dessous



où les flèches verticales sont les isomorphismes canoniques et la flèche horizontale supérieure l'opérateur bord défini par la suite exacte (*), est commutatif. Par fonctorialité, on peut se borner à supposer $M = \Omega^1_{P/A} \otimes_P Q$ et à vérifier que les images de la flèche identique de $\Omega^1_{P/A} \otimes_P Q$ par les deux composés sont égales, ou, en d'autres termes, que l'on a la relation

(**) $$\partial(d_{P/A} \otimes 1) = \mathrm{alg}(*) \quad .$$

La preuve de (**) sera donnée après quelques préliminaires.

1.2.6. Soit $A \longrightarrow B$ un morphisme d'Anneaux. Rappelons (II 1.1.2) qu'on a une A-extension

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{B/A} \longrightarrow P^1_{B/A} \longrightarrow B \longrightarrow 0 \quad , \tag{1.2.6.1}$$

et deux morphismes de A-Algèbres

$$j_1, j_2 : B \rightrightarrows P^1_{B/A}$$

$j_1(x)$ = image de $x \otimes 1$, $j_2(x)$ = image de $1 \otimes x$,

qui splittent (1.2.6.1). Soit M un B-Module. Le produit tensoriel

$$P^1_{B/A}(M) = P^1_{B/A} \otimes_B M \tag{1.2.6.2}$$

calculé via la structure droite (i.e. définie par j_2) et regardé comme B-Module via la structure gauche (i.e. définie par j_1) s'appelle Module des parties principales d'ordre un de M . Tensorisant (1.2.6.1) à droite par M , on obtient une suite exacte de B-Modules

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{B/A} \otimes_B M \longrightarrow P^1_{B/A}(M) \longrightarrow M \longrightarrow 0 \quad , \tag{1.2.6.3}$$

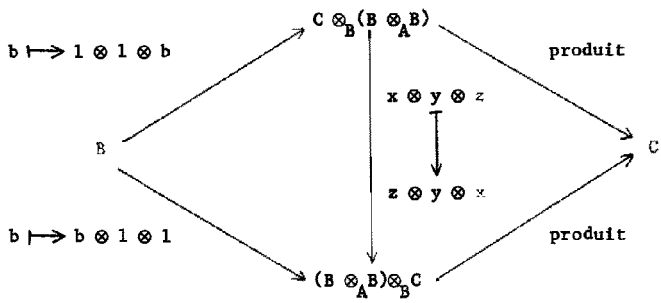
fonctorielle en $(A \longrightarrow B, M)$, dite suite exacte des parties principales . Soit maintenant C une B-Algèbre. Alors $P^1_{B/A}(C)$ est muni naturellement d'une structure de B-Algèbre (compatible avec sa structure de B-Module), et la suite exacte des parties principales

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{B/A} \otimes_B C \longrightarrow P^1_{B/A}(C) \longrightarrow C \longrightarrow 0 \tag{1.2.6.4}$$

est une B-extension de C par $\Omega^1_{B/A} \otimes_B C$.

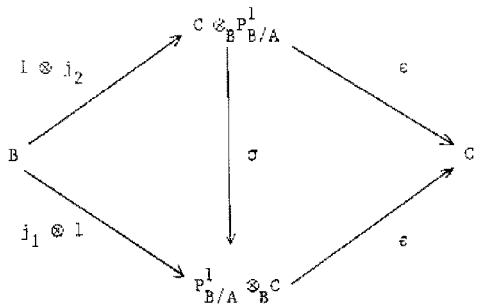
Lemme 1.2.6.5. Dans $\mathrm{Exal}_B(C, \Omega^1_{B/A} \otimes_B C)$, (1.2.6.4) s'identifie canoniquement à l'image, par l'homomorphisme ∂ défini en (1.2.5.4), de la A-dérivation $d_{B/A} \otimes 1 : B \longrightarrow \Omega^1_{B/A} \otimes_B C$.

Preuve. Le diagramme commutatif d'Anneaux



définit un diagramme commutatif

(*)

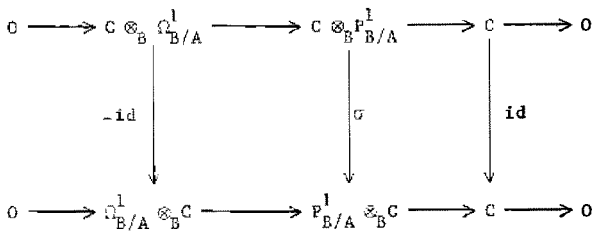


où ε est la projection évidente. On a

$$\sigma(x \otimes d_{B/A}y) = -d_{B/A}y \otimes x \quad ,$$

de sorte que (*) définit un morphisme de B-extensions

(**)

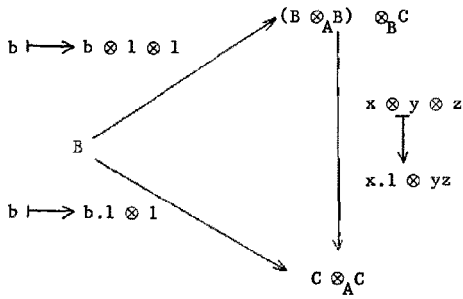


,

où $C \otimes_B P^1_{B/A}$ (resp. $P^1_{B/A} \otimes_B C$) est regardé comme B-Algèbre via $1 \otimes j_2$ (resp. $j_1 \otimes 1$).

Lorsqu'on identifie $P^1_{B/A}$ à $B \oplus \Omega^1_{B/A}$ via j_1, la flèche $1 \otimes j_2 : B \longrightarrow C \otimes_B P^1_{B/A}$ s'identifie à $b \longmapsto b.1 + 1 \otimes d_{B/A}b$, de sorte que la ligne du haut de (**) n'est autre que l'opposée de la A-extension $\partial(d_{B/A} \otimes 1)$. Comme la ligne du bas de (**) est l'extension des parties principales (1.2.6.4), on a bien la compatibilité qu'il fallait démontrer.

Observons maintenant que le diagramme commutatif d'Anneaux



définit un morphisme de B-Algèbres

$$P^1_{B/A}(C) \longrightarrow C \oplus \Omega^1_{C/A} \quad , \tag{1.2.6.6}$$

(où le second membre est regardé comme B-Algèbre par $b \longmapsto b.1$).

Lemme 1.2.6.7. On a un diagramme commutatif B-linéaire

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Omega^1_{B/A} \otimes_B C & \longrightarrow & P^1_{B/A}(C) & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle (1.2.6.6)} & & \downarrow{\scriptstyle \begin{pmatrix} id \\ d_{C/B} \end{pmatrix}} & & \\
 & & \Omega^1_{B/A} \otimes_B C & \longrightarrow & C \oplus \Omega^1_{C/A} & \xrightarrow{id \oplus j} & C \oplus \Omega^1_{C/B} & \longrightarrow & 0
\end{array} \quad ,$$

où les lignes sont exactes, la ligne du haut (resp. bas) étant définie par (1.2.6.4) (resp. par la suite exacte canonique (II 1.1.2.12)

$$\Omega^1_{B/A} \otimes_B C \longrightarrow \Omega^1_{C/A} \xrightarrow{j} \Omega^1_{C/B} \longrightarrow 0 \quad) \quad .$$

Preuve. Laissée en exercice au lecteur.

Corollaire 1.2.6.8. Quand la suite canonique

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{B/A} \otimes_B C \longrightarrow \Omega^1_{C/A} \longrightarrow \Omega^1_{C/B} \longrightarrow 0$$

est exacte, son image par

$$\text{alg} : \mathrm{Ext}^1_C(\Omega^1_{C/B}, \Omega^1_{B/A} \otimes_B C) \longrightarrow \mathrm{Exal}_B(C, \Omega^1_{B/A} \otimes_B C)$$

est l'extension des parties principales (1.2.6.4).

Fin de la preuve de (1.2.5.4). La relation (**) à démontrer découle de la conjonction de (1.2.6.5) et (1.2.6.8). Ceci achève la preuve de (1.2.5.4).

Remarque 1.2.6.9. Vu la compatibilité (1.2.5.4), il est facile de vérifier directement l'exactitude de (1.2.5.3) jusqu'au terme $\mathrm{Exal}_A(C,M)$ compris (cf. (EGA O_{IV} 20.2.2)).

Corollaire 1.2.7. La composée des flèches de $D(C)$

$$(*) \qquad L_{C/B} \longrightarrow (L_{B/A} \otimes_B C)\,[1] \longrightarrow (\Omega^1_{B/A} \otimes_B C)\,[1] \ ,$$

où la première est la flèche de degré un du triangle de transitivité (1.2.5.2) et la seconde la flèche canonique (II 1.2.4.1), est l'élément de $\mathbb{E}\mathrm{xt}^1_C(L_{C/B}, \Omega^1_{B/A} \otimes_B C)$ défini par l'extension des parties principales (1.2.6.4) via l'isomorphisme (1.2.3).

Preuve. La flèche composée (*) est l'image de la flèche canonique $L_{B/A} \otimes_B C \longrightarrow \Omega^1_{B/A} \otimes_B C$ par l'opérateur bord

$$\mathbb{E}\mathrm{xt}^0_C(L_{B/A} \otimes_B C\ ,\ \Omega^1_{B/A} \otimes_B C) \longrightarrow \mathbb{E}\mathrm{xt}^1_C(L_{C/B},\ \Omega^1_{B/A} \otimes_B C)$$

de la suite des $\mathbb{E}\mathrm{xt}$ définie par (1.2.5.2). Comme la flèche canonique $L_{B/A} \otimes_B C \longrightarrow \Omega^1_{B/A} \otimes_B C$ correspond à la A-dérivation $d_{B/A} \otimes 1 : B \longrightarrow \Omega^1_{B/A} \otimes_B C$, l'assertion résulte donc de (1.2.5.4) et (1.2.6.5).

Lemme 1.2.8. Soit $A \longrightarrow B$ un morphisme d'Anneaux, surjectif de noyau I . Notons U la A-extension

$$0 \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow A/I^2 \longrightarrow B \longrightarrow 0 \quad .$$

Alors $f \longmapsto f_*U$ définit un isomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{Hom}_B(I/I^2,M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Exal}_A(B,M)$$

pour $M \in \mathrm{ob}\ B\text{-Mod}$.

Preuve. Recopier, mutatis mutandis, la démonstration de (EGA O_{IV} 18.3.8).

Corollaire 1.2.8.1. Sous les hypothèses de (1.2.8), on a $H_o(L_{B/A}) = 0$, et un isomorphisme fonctoriel canonique

$$H_1(L_{B/A}) \xrightarrow{\sim} I/I^2 \quad .$$

Preuve. Le produit $B \otimes_A B \longrightarrow B$ étant un isomorphisme, on a (II 1.1.2) $\Omega^1_{B/A} = 0$, donc (II 1.2.4.2) $H_o(L_{B/A}) = 0$. Par suite, la projection canonique $L_{B/A} \longrightarrow H_1(L_{B/A})\ [1]$ définit un isomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{Hom}_B(H_1(L_{B/A}),M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_B(L_{B/A},M)$$

pour $M \in \mathrm{ob}\ B\text{-Mod}$. Compte tenu de (1.2.3) et (1.2.8), on en déduit un isomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{Hom}_B(I/I^2,M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B(H_1(L_{B/A}),M) \quad ,$$

d'où la seconde assertion.

Proposition 1.2.9. Soient des morphismes d'Anneaux

(*) $$A \longrightarrow P \xrightarrow{p} B \quad ,$$

où p est surjectif de noyau I . On a alors un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_1(L_{B/P}) & \xrightarrow{d} & H_0(L_{P/A}\otimes_P B) \\ \downarrow{\scriptstyle (1.2.8.1)}\ \simeq & & \simeq\ (II\ 1.2.4.2)\downarrow \\ I/I^2 & \xrightarrow[(1.1.6)]{-d_{P/A}} & \Omega^1_{P/A}\otimes_P B \end{array} ,$$

où d est l'opérateur bord de la suite exacte d'homologie du triangle de transitivité défini par (*).

Preuve. Compte tenu de (1.2.5.4), on est ramené à vérifier que, pour $M \in \mathrm{ob}\ B\text{-Mod}$, le carré ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{P/A}\otimes_P B, M) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}(-d_{P/A},M)} & \mathrm{Hom}_B(I/I^2, M) \\ \downarrow{\scriptstyle (II\ 1.1.2.6)}\ \simeq & & \simeq\ (1.2.8)\downarrow \\ \mathrm{Der}_A(P,M) & \xrightarrow{\partial} & \mathrm{Exal}_P(B,M) \end{array} ,$$

où ∂ est l'homomorphisme défini en (1.2.5.4), est commutatif. Par fonctorialité, on se ramène aussitôt à vérifier que, pour $M = \Omega^1_{P/A}\otimes_P B$, les images de la flèche identique de $\Omega^1_{P/A}\otimes_P B$ par les deux composés sont égales. Cette dernière assertion résulte du fait que l'homomorphisme $\begin{pmatrix} p \\ -d_{P/A} \end{pmatrix} : P \longrightarrow B \oplus (\Omega^1_{P/A}\otimes_P B)$ induit un morphisme de P-extensions

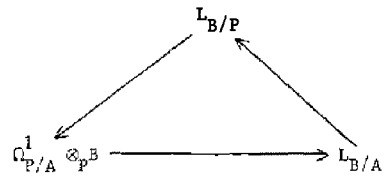
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I/I^2 & \longrightarrow & P/I^2 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle -d_{P/A}} & & \downarrow{\scriptstyle \begin{pmatrix} \cdot \\ -d_{P/A} \end{pmatrix}} & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^1_{P/A}\otimes_P B & \longrightarrow & B\oplus(\Omega^1_{P/A}\otimes_P B) & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \end{array} .$$

Corollaire 1.2.9.1. Sous les hypothèses de (1.2.9), supposons que la flèche canonique $L_{P/A} \longrightarrow \Omega^1_{P/A}$ (II 1.2.4.1) soit un quasi-isomorphisme et que $\Omega^1_{P/A}$ soit plat sur P (ces deux conditions sont vérifiées par exemple si $P = S_A(M)$, où M est un A-Module plat (II 1.2.4.4)). Alors dans D(B), le tronqué à l'ordre un $t_{[-1}L_{B/A}$ (I 1.4.7) ([1]) s'identifie au complexe de chaînes

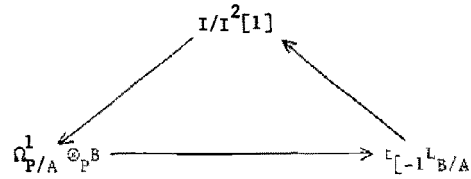
$$0 \longrightarrow I/I^2 \xrightarrow{d_{P/A}} \Omega^1_{P/A} \otimes_P B \longrightarrow 0 \quad ,$$

où $\Omega^1_{P/A} \otimes_P B$ est placé en degré zéro.

Preuve. Vu les hypothèses, le triangle de transitivité relatif à $A \longrightarrow P \longrightarrow B$ (II 2.1.2.1) s'écrit



Par troncature on en déduit, compte tenu de (1.2.8.1) et (1.2.9), un triangle distingué



où la flèche de degré un est donnée par $-d_{P/A} : I/I^2 \longrightarrow \Omega^1_{P/A} \otimes_P B$. Par suite $t_{[-1}L_{B/A}$ s'identifie dans D(B) au cône de $-d_{P/A} : I/I^2 \longrightarrow \Omega^1_{P/A} \otimes_P B$, d'où l'assertion (les complexes $0 \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow \Omega^1_{P/A} \otimes_P B \longrightarrow 0$ munis des différentielles $d_{P/A}$ et $-d_{P/A}$ étant évidemment canoniquement isomorphes).

([1]) $L_{B/A}$ est regardé ici comme objet de D(B) via Dold-Puppe (I 1.4.6).

Scholie 1.2.9.2. La projection $L_{B/A} \longrightarrow t_{[-1}L_{B/A}$ (I 1.4.7.1) induit un isomorphisme

$$\mathbb{E}\mathrm{xt}^i_B(L_{B/A},M) \xleftarrow{\sim} \mathbb{E}\mathrm{xt}^i_B(t_{[-1}L_{B/A},M) \qquad (i = 0, 1)$$

pour $M \in \mathrm{ob}\ B\text{-Mod}$. Ainsi (1.2.9.1), où l'on prend pour P une A-Algèbre libre, redonne, compte tenu de (II 1.2.4.3) et (1.2.3), un théorème de Grothendieck ([17] 7.4.2.2).

1.3. Une deuxième démonstration du théorème fondamental.

On peut redémontrer (1.2.9.1), du moins dans le cas où P est l'Algèbre symétrique d'un A-Module plat, par une méthode directe n'utilisant que la définition du complexe cotangent. Dès lors, si l'on admet le théorème de Grothendieck déjà cité ([17] 7.4.2.2), on obtient une nouvelle preuve du théorème fondamental (1.2.3). Les résultats de ce numéro n'étant pas indispensables pour la compréhension de la suite, nous conseillons au lecteur de le sauter en première lecture.

On continue à travailler dans le topos T des numéros (1.1) et (1.2).

1.3.1. Soient A un Anneau de T, B une A-Algèbre. Pour abréger, nous dirons que B est presque libre si l'on a $B \xrightarrow{\sim} S_A(M)$, où M est un A-Module plat. D'après Lazard-Deligne, (I 4.2.1.3), B est alors limite inductive locale de A-Algèbres libres de type fini. Si B' (resp. B'') est une A-Algèbre presque libre, il en est de même de $B' \otimes_A B''$; si B est une A-Algèbre presque libre, alors pour toute B-Algèbre C, $B \otimes_A C$ est une C-Algèbre presque libre.

1.3.2. Soient

(1.3.2.1) $$A \longrightarrow P \longrightarrow B$$

des morphismes d'Anneaux (de T), le second étant surjectif de noyau I. On notera $D_{B/P/A}$ le complexe de chaînes de B-Modules

(1.3.2.2) $$D_{B/P/A} = (0 \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow \Omega^1_{P/A} \otimes_P B \longrightarrow 0) \quad ,$$

où $\Omega^1_{P/A} \otimes_P B$ est placé en degré zéro, la différentielle étant définie par la différentielle extérieure $d_{P/A}$ (cf. (1.1.6)). Ce complexe dépend fonctoriellement de (1.3.2.1) : un diagramme commutatif

(*)
$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & P & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A' & \longrightarrow & P' & \longrightarrow & B' \end{array} \quad ,$$

où $P \longrightarrow B$ (resp. $P' \longrightarrow B'$) est surjectif, induit un morphisme de complexes de B-Modules $D_{B/P/A} \longrightarrow D_{B'/P'/A'}$, et, pour un "composé" de deux diagrammes tels que (*) on a une transitivité qu'on laisse au lecteur le soin d'expliciter.

Lemme 1.3.3. Soit un diagramme commutatif d'Anneaux

$$\begin{array}{ccc} P & & \\ \uparrow & \searrow^{j} & \\ A & \xrightarrow{i} & B \end{array} \quad .$$

où P est presque libre sur A et i (resp. j) surjectif de noyau I (resp. J). Alors la suite

(1.3.3.1) $$0 \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow J/J^2 \longrightarrow \Omega^1_{P/A} \otimes_P B \longrightarrow 0 \quad ,$$

définie par le morphisme de complexes $D_{B/A/A} \longrightarrow D_{B/P/A}$, est exacte.

Preuve. Posons $Q = P \otimes_A B$. On a un carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{i'} & Q \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \xrightarrow{i} & B \end{array} \quad ,$$

et j définit une augmentation t de Q sur B telle que $j = ti'$. Comme P est plat sur A, l'Idéal de i' est $I \otimes_A P$, et l'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow I \otimes_A P \longrightarrow J \longrightarrow K \longrightarrow 0 ,$$

où K est l'Idéal de t. Par tensorisation avec B (sur P), on en déduit une suite exacte de B-Modules

$$(*) \qquad I/I^2 \longrightarrow J/J^2 \longrightarrow K/K^2 \longrightarrow 0 .$$

Mais on a des isomorphismes canoniques

$$\Omega^1_{P/A} \otimes_P Q \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{Q/B} \qquad \text{(II 1.1.2.9)} ,$$

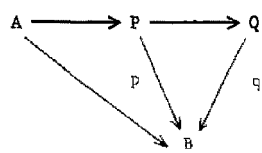
$$K/K^2 \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{Q/B} \otimes_Q B ,$$

(ce dernier parce que B est libre sur B (1.1.7.1)), donc on déduit de (*) une suite exacte

$$I/I^2 \longrightarrow J/J^2 \longrightarrow \Omega^1_{P/A} \otimes_P B \longrightarrow 0 ,$$

où l'on vérifie facilement que les flèches coïncident avec celles de (1.3.3.1). Il reste donc à prouver l'exactitude de (1.3.3.1) en I/I^2. Par passage à la limite inductive locale, on peut supposer qu'on a $P \xrightarrow{\sim} A[t_1,\dots,t_n]$. Quitte à se localiser, on peut trouver des sections $a_1,\dots,a_n$ de A telles que $i(a_r) = j(t_r)$, $1 \le r \le n$. L'augmentation s de P sur A définie par $s(t_r) = a_r$, $1 \le r \le n$, est telle que $j = is$. Elle définit donc une rétraction de la flèche $I/I^2 \longrightarrow J/J^2$, de sorte que (1.3.3.1) est alors exacte et scindée, ce qui achève la démonstration.

Proposition 1.3.4. Soit un diagramme commutatif d'Anneaux



où P (resp. Q) est presque libre sur A , et p (resp. q) surjectif. Alors la flèche canonique

$$D_{B/P/A} \longrightarrow D_{B/Q/A}$$

est un quasi-isomorphisme.

Preuve. Comme $P \longrightarrow Q$ se factorise canoniquement à travers $P \otimes_A Q$, qui est presque libre sur P , on peut supposer que Q est presque libre sur P . Notant I (resp. J) l'Idéal de p (resp. q), on a alors la suite exacte (I.3.3.1)

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow J/J^2 \longrightarrow \Omega^1_{Q/P} \otimes_Q B \longrightarrow 0 \quad .$$

D'autre part, comme Q est presque libre sur P , on a la suite exacte (II 1.1.2.13)

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{P/A} \otimes_P Q \longrightarrow \Omega^1_{Q/A} \longrightarrow \Omega^1_{Q/P} \longrightarrow 0 \quad ;$$

comme $\Omega^1_{Q/P}$ est plat sur P , on en déduit, par application du foncteur $\otimes_Q B$, une suite exacte

$$(**) \qquad 0 \longrightarrow \Omega^1_{P/A} \otimes_P B \longrightarrow \Omega^1_{Q/A} \otimes_Q B \longrightarrow \Omega^1_{Q/P} \otimes_Q B \longrightarrow 0 \quad .$$

Maintenant, on vérifie trivialement qu'on a un morphisme de suites exactes

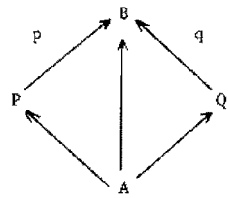
$$\begin{array}{lccccccc}
(*) & 0 \longrightarrow & I/I^2 & \longrightarrow & J/J^2 & \longrightarrow & \Omega^1_{Q/P} \otimes_Q B & \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle d_{P/A}} & & \downarrow{\scriptstyle d_{Q/A}} & & \downarrow{\scriptstyle id} & \\
(**) & 0 \longrightarrow & \Omega^1_{P/A} \otimes_P B & \longrightarrow & \Omega^1_{Q/A} \otimes_Q B & \longrightarrow & \Omega^1_{Q/P} \otimes_Q B & \longrightarrow 0
\end{array} \quad .$$

En d'autres termes, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow D_{B/P/A} \longrightarrow D_{B/Q/A} \longrightarrow id(\Omega^1_{Q/P} \otimes_Q B) \longrightarrow 0 \quad ,$$

où la première flèche est la flèche canonique, d'où la proposition.

Corollaire 1.3.4.1 (cf. SGA 6 VIII 2,2). Soit un diagramme commutatif d'Anneaux



où P (resp. Q) est presque libre sur A , et p (resp. q) surjectif. Alors il existe un isomorphisme canonique de D(B)

$$D_{B/P/A} \xrightarrow{\sim} D_{B/Q/A} \quad .$$

Preuve. La A-Algèbre $R = P \otimes_A Q$ est presque libre, donc, d'après (1.3.4) on a des quasi-isomorphismes canoniques

$$D_{B/P/A} \longrightarrow D_{B/R/A} \longrightarrow D_{B/Q/A} \quad ,$$

d'où l'assertion.

Proposition 1.3.5. Soient $A \longrightarrow B$ un morphisme d'Anneaux, $P = P_A(B)$ la résolution libre standard de B sur A , $L_{B/A} = \Omega^1_{P/A} \otimes_P B$ le complexe cotangent (II 1.2.3). Il existe un morphisme canonique de complexes de B-Modules

$$NL_{B/A} \longrightarrow D_{B/P_o/A} \quad ,$$

induisant des isomorphismes sur l'homologie en degré ≤ 1 . ([1])

Conjuguant (1.3.5) et (1.3.4.1), on obtient le résultat annoncé au début de (1.3) :

([1]) N désigne le foncteur "complexe normal" (I 1.3.1) ; on rappelle d'autre part que $P \longrightarrow B$ est surjectif.

Corollaire 1.3.6. Soient des morphismes d'Anneaux

$$A \longrightarrow P \longrightarrow B \ ,$$

où P est presque libre sur A, et $P \longrightarrow B$ surjectif. Alors, dans $D(B)$, le tronqué $t_{[-1}L_{B/A}$ s'identifie canoniquement à $D_{B/P/A}$.

Preuve.de (1.3.5). Soit J L'Idéal noyau de la flèche canonique $P \longrightarrow B$. D'après (1.3.4), $H_o(D_{B/P/A})$ et $H_1(D_{B/P/A})$ sont des B-Modules simpliciaux triviaux, en d'autres termes

$$Nd_{P/A} \ : \ N(J/J^2) \longrightarrow NL_{B/A}$$

est un isomorphisme en degré > 0 . On en déduit un morphisme de complexes

$$u \ : \ NL_{B/A} \longrightarrow D_{B/P_o/A} \ ,$$

tel que u_o soit l'identité et u_1 le composé

$$(NL_{B/A})_1 \longrightarrow (N(J/J^2))_1 \longrightarrow (N(J/J^2))_o = J_o/J_o^2 \ ,$$

où la seconde flèche est la différentielle de $N(J/J^2)$ et la première l'inverse de $(Nd_{P/A})_1$. On a alors une suite exacte ([1])

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow t_{-1]}N(J/J^2) \longrightarrow NL_{B/A} \xrightarrow{u} D_{B/P_o/A} \longrightarrow H_o(J/J^2)[1] \longrightarrow 0$$

Or, comme $P \longrightarrow B$ est un quasi-isomorphisme, J est acyclique, donc $J \overset{\ell}{\otimes}_P B = 0$ (I 3.3.2). La suite spectrale (I 3.3.3.1)

$$E^2_{pq} = H_p Tor^P_q(J,B) \Longrightarrow H_*(J \overset{\ell}{\otimes}_P B) = 0$$

donne $H_o(J \otimes_P B) = H_1(J \otimes_P B) = 0$, et par suite (*) implique que $H_i u$ est un isomorphisme pour $i \leq 1$, ce qui achève la démonstration.

([1]) Pour la notation $t_{-1]}$, voir (I 1.4.7).

2. Déformations de topos annelés et de morphismes de topos annelés.

Nous reprenons dans ce numéro quelques problèmes de déformations abordés par Grothendieck dans [17] . Le fait de disposer du "bon" complexe cotangent nous permet de préciser et complèter son étude, notamment sur la question de la "variation" des obstructions.

2.1. Déformations de topos annelés.

2.1.1. On se fixe d'abord un topos T et un Anneau A de T . Rappelons qu'on a un foncteur (1.1.1.2)

$$\pi \ : \ \underline{\mathrm{Exal}}_A \longrightarrow A\text{-Algmod} \qquad (^1)$$

associant à chaque A-extension $0 \longrightarrow I \longrightarrow B \longrightarrow B_0$ le couple (B_0, I) , et à chaque morphisme de A-extensions

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \underline{C} & & 0 & \longrightarrow & J & \longrightarrow & C & \longrightarrow & C_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & \underline{f} & & & & u & & f & & f_0 & & & \\ & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \underline{B} & & 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B_0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

le couple $\pi(f) = (f_0, u)$, où $u : I \longrightarrow J$ est le morphisme de B_0-Modules induit par f . Notons que le morphisme de C_0-Modules

$$v \ : \ I \otimes_{B_0} C_0 \longrightarrow J$$

défini par u (par adjonction) a pour Image I.C, de sorte que v est surjectif si et seulement si le carré d'Anneaux défini par $\underline{f}$ est cocartésien. Rappelons d'autre part le critère de platitude bien connu (cf. (Bourbaki, Alg. Com. Chap. III, § 5, th. 1) dont la démonstration s'étend trivialement au cas d'Anneaux d'un topos) :

(^{1}) A-Algmod est la sous-catégorie de Algmod (1.1.1) formée des couples (B,M), où B est une A-Algèbre et M un B-Module, un morphisme $(B,M) \longrightarrow (C,N)$ étant le couple d'un morphisme de A-Algèbres $B \longrightarrow C$ et d'un morphisme de B-Modules $M \longrightarrow N$.

Lemme 2.1.1.1. Soit, comme plus haut, $\underline{f} : \underline{B} \longrightarrow \underline{C}$ un morphisme de A-extensions tel que le carré d'Anneaux correspondant soit cocartésien. Alors, avec les notations précédentes, pour que C soit plat sur B, il faut et il suffit que C_o soit plat sur B_o et que v soit un isomorphisme.

2.1.2. Fixons maintenant une A-extension

$$\underline{B} = (0 \longrightarrow I \longrightarrow B \longrightarrow B_o \longrightarrow 0)$$

et un morphisme de A-Algmod d'origine $\pi(\underline{B})$:

$$(f_o : B_o \longrightarrow C_o,\ u : I \longrightarrow J) \quad ,$$

et considérons le problème suivant (où A ne joue qu'un rôle de figurant) :

Problème 2.1.2.1. Trouver un morphisme de A-extensions

$$\underline{f} : \underline{B} \longrightarrow \underline{C}$$

tel que l'on ait $\pi(\underline{f}) = (f_o, u)$.

Le problème peut-être reformulé ainsi : trouver une B-extension $\underline{C}$ de C_o par J dont l'image par la flèche composée

$$(*) \qquad \mathrm{Exal}_B(C_o, J) \longrightarrow \mathrm{Exal}_B(B_o, J) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{B_o}(I, J)$$

soit le morphisme donné u , la première flèche de (*) étant la flèche canonique définie par f_o , la seconde l'isomorphisme canonique (1.2.8). Or on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Exal}_B(C_o, J) & \xrightarrow{(*)} & \mathrm{Hom}_{B_o}(I, J) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle (1.2.3)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (1.2.8.1)} \\ \mathrm{Ext}^1_{C_o}(L_{C_o/B}, J) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_{C_o}(L_{B_o/B} \otimes_{B_o} C_o, J) \end{array} \quad ,$$

où la flèche horizontale inférieure est définie par la flèche canonique $L_{B_o/B} \otimes_{B_o} C_o \longrightarrow L_{C_o/B}$ (cela résulte simplement de la fonctorialité de l'isomorphisme (1.2.3)). Par suite, le problème (2.1.2.1) se résout par la suite exacte des $\mathbb{E}xt^i_{C_o}(-,J)$ définie par le triangle de transitivité $L_{C_o/B_o/B}$ (II 2.1.2.1), laquelle s'écrit, à isomorphisme canonique fonctoriel près :

$$(2.1.2.2) \quad 0 \longrightarrow \mathrm{Der}_{B_o}(C_o,J) \longrightarrow \mathrm{Der}_{B}(C_o,J) \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{Exal}_{B_o}(C_o,J) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathrm{Exal}_{B}(C_o,J) \xrightarrow{(*)} \mathrm{Hom}_{B_o}(I,J) \xrightarrow{\partial} \mathbb{E}xt^2_{C_o}(L_{C_o/B_o},J) \longrightarrow \ldots \quad .$$

On obtient (compte tenu des remarques suivant (1.1.5.1) et de (II 1.2.4.3)) :

Proposition 2.1.2.3. (i) Il existe une obstruction

$$\omega(\underline{B},f_o,u) = \partial u \in \mathbb{E}xt^2_{C_o}(L_{C_o/B_o},J)$$

dont l'annulation est nécessaire et suffisante pour que le problème (2.1.2.1) admette une solution (i.e. qu'il existe une B-extension $\underline{C}$ de C_o par J dont l'image par (*) soit u).

(ii) Quand $\omega(\underline{B},f_o,u) = 0$, l'ensemble des classes d'isomorphie de solutions $\underline{C}$ du problème est un torseur sous le groupe $\mathrm{Exal}_{B_o}(C_o,J)$ ($\xleftarrow{\sim} \mathbb{E}xt^1_{C_o}(L_{C_o/B_o},J)$ (1.2.3)).

(iii) Le groupe des automorphismes d'une solution $\underline{C}$ du problème s'identifie canoniquement à $\mathrm{Der}_{B_o}(C_o,J)$ ($\xleftarrow{\sim} \mathbb{E}xt^0_{C_o}(L_{C_o/B_o},J)$ (II 1.2.4.3).

2.1.3. Pour $\underline{B}$ et $f_o : B_o \longrightarrow C_o$ fixés comme en (2.1.2), l'obstruction $\omega(\underline{B},f_o,u)$ (2.1.2.3 (i)) dépend fonctoriellement de u. Plus précisément, si l'on désigne par

$$(2.1.3.1) \qquad \omega(\underline{B},f_o) \in \mathbb{E}xt^2_{C_o}(L_{C_o/B_o}, I \otimes_{B_o} C_o)$$

l'obstruction correspondant à la flèche d'adjonction $I \longrightarrow I \otimes_{B_o} C_o$, alors, pour

une flèche $u : I \longrightarrow J$ correspondant par adjonction à $v : I \otimes_{B_o} C_o \longrightarrow J$, on a

(2.1.3.2) $$\omega(\underline{B}, f_o, u) = v\, \omega(\underline{B}, f_o)$$

Tenant compte de (2.1.1.1), on déduit de (2.1.2.3) :

Corollaire 2.1.3.3. Supposons C_o plat sur B_o. Alors :

(i) La classe $\omega(\underline{B}, f_o)$ (2.1.3.1) est l'obstruction à l'existence d'une déformation plate de C_o sur B, i.e. d'une B-extension C telle que C soit plat sur B et $C \otimes_B B_o \longrightarrow C_o$ un isomorphisme.

(ii) Quand $\omega(\underline{B}, f_o) = 0$, l'ensemble des classes d'isomorphie de déformations plates de C_o sur B est un torseur sous le groupe $\mathrm{Exal}_{B_o}(C_o, I \otimes_{B_o} C_o)$ ($\xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{B_o}(L_{C_o/B_o}, I \otimes_{B_o} C_o)$ (1.2.3)).

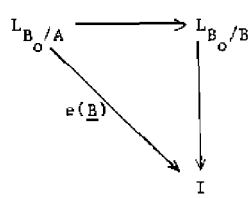
(iii) Le groupe des automorphismes d'une déformation plate donnée de C_o sur B s'identifie canoniquement à $\mathrm{Der}_{B_o}(C_o, I \otimes_{B_o} C_o)$ ($\xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^0_{B_o}(L_{C_o/B_o}, I \otimes_{B_o} C_o)$ (II 1.2.4.3)).

2.1.4. Fixons maintenant les morphismes

$$A \longrightarrow B_o \xrightarrow{f_o} C_o \quad ,$$

et étudions la dépendance de $\omega(\underline{B}, f_o)$ (2.1.3.1) par rapport à la A-extension $\underline{B}$. Notons $e(\underline{B}) \in \mathrm{Ext}^1_{B_o}(L_{B_o/A}, I)$ l'élément défini par $\underline{B}$ via l'isomorphisme (1.2.3). Regardant $e(\underline{B})$ comme une flèche de degré un $L_{B_o/A} \longrightarrow I$ dans $D(B_o)$, on a un triangle commutatif de $D(B_o)$

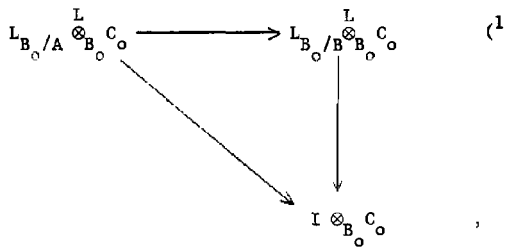
(2.1.4.1)



,

où la flèche horizontale est la flèche canonique (degré zéro) et la flèche verticale la flèche de degré un définie par (1.2.8.1) ; c'est en effet une simple conséquence de la fonctorialité de l'isomorphisme (1.2.3), vu que la flèche verticale en question n'est autre par définition que celle définie via l'isomorphisme (1.2.3) par $\underline{B}$ regardée comme B-extension. Par application du foncteur $\overset{L}{\otimes}_{B_o} C_o$, on déduit de (2.1.4.1) un triangle commutatif de $D(C_o)$:

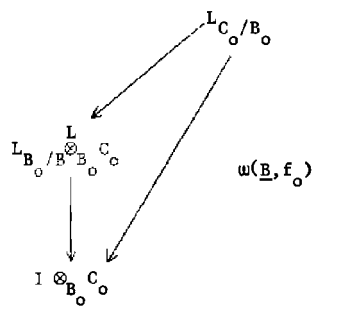
(2.1.4.2)



(1)

où la flèche verticale (de degré un) est la projection sur H_1 et la flèche oblique la composée de $e(\underline{B}) \overset{L}{\otimes}_{B_o} C_o$ et de la projection sur H_o. Observons maintenant que, par définition de $\omega(\underline{B}, f_o)$, on a un triangle commutatif de $D(C_o)$:

(2.1.4.3)

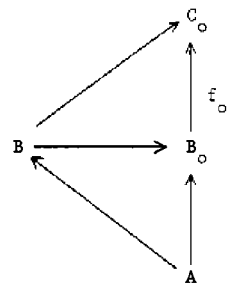


où la flèche oblique supérieure est la flèche de degré un du triangle de transitivité $L_{C_o/B_o/B}$ et la flèche verticale coïncide avec la flèche verticale de (2.1.4.2). Enfin, le morphisme de triangles de transitivité (II 2.1.1.6)

$$L_{C_o/B_o/A} \longrightarrow L_{C_o/B_o/B}$$

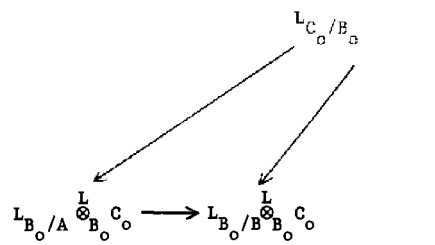
(1) On peut, si l'on veut, écrire $\otimes$ au lieu de $\overset{L}{\otimes}$, sur la ligne de (2.1.4.2).

défini par le diagramme commutatif



fournit un triangle commutatif de $D(C_o)$:

(2.1.4.4)



où la flèche oblique de gauche (resp. droite) est la flèche de degré un de $L_{C_o/B_o/A}$ (resp. $L_{C_o/B_o/B}$) et la flèche horizontale coïncide avec la flèche horizontale de (2.1.4.2). Assemblant les triangles (2.1.4.2), (2.1.4.3) et (2.1.4.4), on obtient :

Proposition 2.1.4.5. L'obstruction canonique $\omega(\underline{B}, f_o)$ (2.1.3.1) est égale au morphisme composé

$$L_{C_o/B_o} \longrightarrow L_{B_o/A} \overset{L}{\otimes}_{B_o} C_o \longrightarrow I \overset{L}{\otimes}_{B_o} C_o \longrightarrow I \otimes_{B_o} C_o \quad ,$$

où la première flèche est la flèche de degré un du triangle de transitivité $L_{C_o/B_o/A}$, la seconde la flèche $e(\underline{B}) \overset{L}{\otimes}_{B_o} C_o$ ($e(\underline{B})$ désignant la flèche de degré un $L_{B_o/A} \longrightarrow I$ définie par $\underline{B}$ via (1.2.3)), et la dernière la projection canonique sur H_o.

Corollaire 2.1.4.6. Quand C_o est une B_o-Algèbre plate, l'obstruction $\omega(\underline{B}, f_o)$ à l'existence d'une déformation plate de C_o sur B_o est donnée par le "cup-produit"

$$\omega(\underline{B}, f_o) = (e(\underline{B}) \otimes_{B_o} C_o) K(C_o/B_o/A) \quad ,$$

où $K(C_o/B_o/A)$ est la flèche de degré un du triangle de transitivité $L_{C_o/B_o/A}$.

2.1.5. Soient

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

des morphismes d'Anneaux de T. Tensorisant par C la suite exacte

(II 1.1.2.4) $\quad 0 \longrightarrow \Omega^1_{B/A} \longrightarrow P^1_{B/A} \longrightarrow B \longrightarrow 0$

via la structure droite (resp. gauche) de $P^1_{B/A}$, on obtient une $P^1_{B/A}$-extension $\underline{C}''$ (resp. $\underline{C}'$) de C par $\Omega^1_{B/A} \otimes_B C$, dont l'image dans $\mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, \Omega^1_{B/A} \otimes_B C)$ par la flèche (*) de (2.1.2.2) (B_o et C_o étant remplacés par B et C respectivement) est la flèche d'adjonction. D'après (2.1.2.3 (ii)) on a donc un élément

$$\mathrm{cl}(\underline{C}'') - \mathrm{cl}(\underline{C}') \in \mathbb{E}\mathrm{xt}^1_C(L_{C/B}, \Omega^1_{B/A} \otimes_B C) \qquad (1) \ .$$

Proposition 2.1.5.1. L'élément $\mathrm{cl}(\underline{C}'') - \mathrm{cl}(\underline{C}')$ n'est autre que la classe de l'extension des parties principales (1.2.6.4).

Preuve. Il suffit de remarquer que la B-extension induite par $\underline{C}'$ (resp. $\underline{C}''$) via $j_1 : B \longrightarrow P^1_{B/A}$ (structure gauche) est triviale (resp. est l'extension (1.2.6.4)) et d'utiliser que la flèche

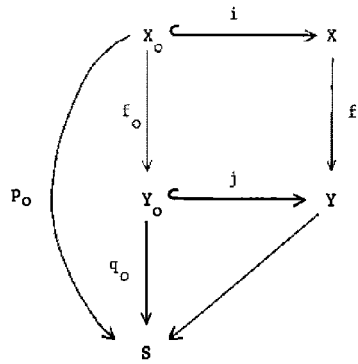
$$\mathbb{E}\mathrm{xt}^1_C(L_{C/P^1_{B/A}}, M) \longrightarrow \mathbb{E}\mathrm{xt}^1_C(L_{C/B}, M)$$

induite par j_1 (M étant un C-Module quelconque) rétracte l'injection canonique.

(1) cl = classe d'isomorphie de

2.1.6. Traduisons en langage "géométrique" les résultats précédents. Soit un diagramme commutatif ([1]) de topos annelés

(2.1.6.1)



où i (resp. j) est une S-extension de X_o (resp. Y_o) par I (resp. J) (1.1.10). On a alors, sur le topos $|X_o|$ ([2]), un morphisme de $p_o^{-1}(\underline{O}_S)$-extensions :

(2.1.6.2)

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & \underline{O}_X & \longrightarrow & \underline{O}_{X_o} & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & f_o^{-1}J & \longrightarrow & f_o^{-1}\underline{O}_Y & \longrightarrow & f_o^{-1}\underline{O}_{Y_o} & \longrightarrow & 0 \end{array} ,$$

où l'on a identifié $|X|$ à $|X_o|$ (resp. $|Y|$ à $|Y_o|$) au moyen de $|i|$ (resp. $|j|$). En particulier, on a un morphisme de $\underline{O}_{X_o}$-Modules

(2.1.6.3)

$$v : f_o^*J = f_o^{-1}J \otimes_{f_o^{-1}(\underline{O}_{Y_o})} \underline{O}_{X_o} \longrightarrow I \quad .$$

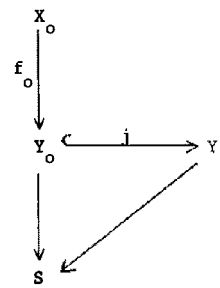
Quand f_o est plat, alors, d'après (2.1.1.1), f est plat si et seulement si v est un isomorphisme.

Fixons maintenant le diagramme

([1]) à isomorphisme donné près (cf. (II 1.1.4)).

([2]) On note $|-|$ le 2-foncteur associant à un topos annelé son topos sous-jacent.

(2.1.6.4)



et le morphisme v (2.1.6.3). Le problème de compléter (2.1.6.4) en un diagramme (2.1.6.1) correspondant à v est un problème du type (2.1.2.1) sur $|X_o|$. Traduisant (2.1.2.3), (2.1.3), (2.1.4.5), on obtient, compte tenu de (II 1.2.7, 2.1.5) :

Théorème 2.1.7. (i) Il existe une obstruction

$$\omega(f_o,j,v) \in \mathbb{E}xt^2_{\underline{O}_{X_o}}(L_{X_o/Y_o},I)$$

dont l'annulation est nécessaire et suffisante à l'existence d'un diagramme (2.1.6.1) induisant le diagramme (2.1.6.4) et le morphisme v (2.1.6.3) donnés. Quand $\omega(f_o,j,v) = 0$, l'ensemble des classes d'isomorphie de diagramme (2.1.6.1) solutions du problème est un torseur sous le groupe $\mathbb{E}xt^1_{\underline{O}_{X_o}}(L_{X_o/Y_o},I)$, et le groupe d'automorphismes d'une solution donnée s'identifie canoniquement à $\mathbb{E}xt^0_{\underline{O}_{X_o}}(L_{X_o/Y_o},I)$.

(ii) On a $\omega(f_o,j,v) = v\,\omega(f_o,j)$, où l'on a posé

$$\omega(f_o,j) = \omega(f_o,j,\mathrm{Id}(f_o^*J)) \in \mathbb{E}xt^2_{\underline{O}_{X_o}}(L_{X_o/Y_o},f_o^*J) \quad .$$

Quand f_o est plat, $\omega(f_o,j)$ est l'obstruction à l'existence d'une déformation plate de X_o sur Y ([1]) ; si $\omega(f_o,j) = 0$, l'ensemble des classes d'isomorphie de déformations plates de X_o sur Y est un torseur sous $\mathbb{E}xt^1_{\underline{O}_{X_o}}(L_{X_o/Y_o}, f_o^*J)$ et le groupe des automorphismes d'une déformation plate donnée s'identifie canoniquement à $\mathbb{E}xt^0_{\underline{O}_{X_o}}(L_{X_o/Y_o}, f_o^*J)$.

(iii) La classe $\omega(f_o,j)$, considérée comme morphisme de degré deux

([1]) i.e. une Y-extension X de X_o par I telle que le morphisme correspondant $f_o^*J \longrightarrow I$ soit un isomorphisme, auquel cas X est plat sur Y .

de $D(X_o)$, est égale au morphisme composé

$$L_{X_o} \longrightarrow Lf_o^* L_{Y_o/S} \longrightarrow Lf_o^* J \longrightarrow f_o^* J \quad ,$$

où la première flèche est la classe de Kodaira-Spencer $K(X_o/Y_o/S)$ (i.e. (II 2.1.5.7) le morphisme de degré un du triangle de transitivité $L_{X_o/Y_o/S}$), la seconde $Lf_o^* e(j)$, où $e(j) : L_{Y_o/S} \longrightarrow J$ est la flèche de degré un définie via (1.2.3) par la S-extension j , enfin la dernière flèche est la projection sur H_o .

2.1.8. Soient

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z$$

des morphismes de topos annelés. Notons Y^1 le topos Y annelé par l'Anneau des parties principales $P^1_{Y/Z}$ (II 1.1.4.1) ; on a donc une Z-extension canonique (triviale) :

$$Y \hookrightarrow Y^1$$

de Y par $\Omega^1_{Y/Z}$. Notons X' (resp. X") le topos X annelé par $f^* P^1_{Y/Z}$, où $P^1_{Y/Z}$ est regardé comme $\underline{O}_Y$-Algèbre pour la structure gauche (resp. droite). On a donc deux Y^1-extensions X', X" de X par $f^*\Omega^1_{Y/Z}$, d'où d'après (2.1.7 (i)), un élément

$$cl(X") - cl(X') \in \mathbb{E}xt^1_{\underline{O}_X}(L_{X/Y}, f^*\Omega^1_{Y/Z}) \quad .$$

Traduisant (1.2.7) et (2.1.5.1), on obtient le résultat suivant, qui justifie la terminologie "classe de Kodaira-Spencer" (cf. ([16], § 7)) :

Proposition 2.1.8.1. L'élément $cl(X") - cl(X')$ est l'image par le morphisme canonique

$$\mathbb{E}xt^1_{\underline{O}_X}(L_{X/Y}, Lf^* L_{Y/Z}) \longrightarrow \mathbb{E}xt^1_{\underline{O}_X}(L_{X/Y}, f^*\Omega^1_{Y/Z})$$

(déduit de la projection $L_{Y/Z} \longrightarrow \Omega^1_{Y/Z}$ (II 1.2.7.3)) de la classe de Kodaira-Spencer $K(X/Y/Z)$ (II 2.1.5.7).

2.1.9. a) Supposons que, dans (2.1.6.1), les topos X_o, Y_o, S soient localement annelés et les morphismes f_o, q_o admissibles au sens de Mme Hakim [18]. Alors il est immédiat que les topos X et Y sont localement annelés et les morphismes $X \longrightarrow Y \longrightarrow S$, i, j admissibles. Ainsi, quand (2.1.6.4) est un diagramme de topos localement annelés (et morphismes admissibles), le problème de prolonger (2.1.6.4) en un diagramme de topos localement annelés (2.1.6.1) (et morphismes admissibles) correspondant à un morphisme donné (2.1.6.3) équivaut au même problème où l'on oublie les conditions supplémentaires ("localement annelés", "admissibles"), donc est justiciable de (2.1.7).

b) Supposons que, dans (2.1.6.1), $X_o \longrightarrow Y_o \longrightarrow S$ "soient" des morphismes de schémas, (i.e. soient les morphismes de topos annelés zariskiens définis par des morphismes de schémas), et que I (resp. J) soit un $\underline{O}_{X_o}$-(resp. $\underline{O}_{Y_o}$-) Module quasi-cohérent. Alors il résulte de a) et de (EGA I 2e édition 5.1.9) que X et Y "sont" des schémas et les morphismes $X \longrightarrow Y \longrightarrow S$, i, j des morphismes de schémas. Par suite, quand (2.1.6.4) est un diagramme de schémas et I un $\underline{O}_{X_o}$-Module quasi-cohérent, le problème de prolonger (2.1.6.4) en un diagramme de schémas (2.1.6.1) correspondant à un morphisme (2.1.6.3) donné est encore justiciable de (2.1.7).

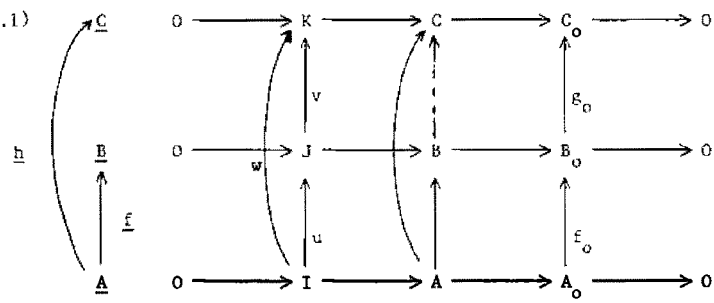
c) Enfin, supposons que dans (2.1.6.1) X_o "soit" un schéma relatif plat localement de présentation finie sur Y_o (i.e. que f_o soit le morphisme de topos annelés défini par un schéma relatif ...) ([1]) et que v (2.1.6.3) soit un isomorphisme. Alors il est immédiat que X est un schéma relatif plat localement de présentation finie sur Y. Par suite, si dans (2.1.6.4) X_o est un schéma relatif plat localement de présentation finie sur Y_o, le problème de déformer X_o en un schéma relatif plat sur Y est justiciable de (2.1.7 (ii) et (iii)).

([1]) voir Mme Hakim ([18] chap. IV) ; l'hypothèse de locale présentation finie implique que les deux notions de platitude envisagées dans (loc. cit.) coïncident.

2.2. Déformations de morphismes de topos annelés.

2.2.1. Soient T un topos, R un Anneau de T . Considérons le diagramme commutatif (en traits pleins)

(2.2.1.1)



défini par des morphismes de R-extensions $\underline{f} : \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$, $\underline{h} : \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$, et un morphisme $(g_o,v) : (B_o,J) \longrightarrow (C_o,K)$ de A-Algmod tel que $(h_o,w) = (g_o,v)(f_o,u)$, (f_o,u) (resp. (h_o,w)) étant induit par $\underline{f}$ (resp. $\underline{h}$). Observons en passant que, pour $\underline{f}$, $\underline{h}$, g_o donnés (tels que $h_o = g_o f_o$), alors, si la flèche $I \otimes_{A_o} B_o \longrightarrow J$ définie par u est un épimorphisme (resp. un isomorphisme), il existe au plus une (resp. une et une seule) flèche $v : J \longrightarrow K$ telle que $vu = w$. Cela étant, on se pose le

Problème 2.2.1.2. Compléter (2.2.1.1) suivant le pointillé en un diagramme commutatif, i.e. trouver un morphisme d'extensions $\underline{g} : \underline{B} \longrightarrow \underline{C}$ induisant (g_o,v) et tel que $\underline{g}\,\underline{f} = \underline{h}$.

Notons

(2.2.1.3) $$e(\underline{B}) \in \mathbb{E}\mathrm{xt}^1_{B_o}(L_{B_o/A},J) \quad , \quad e(\underline{C}) \in \mathbb{E}\mathrm{xt}^1_{C_o}(L_{C_o/A},K)$$

les éléments définis par les A-extensions $\underline{B}$, $\underline{C}$ via (1.2.3), et

$$v_* : \mathbb{E}\mathrm{xt}^1_{B_o}(L_{B_o/A},J) \longrightarrow \mathbb{E}\mathrm{xt}^1_{B_o}(L_{B_o/A},K) \xrightarrow{\sim} \mathbb{E}\mathrm{xt}^1_{C_o}(L_{B_o/A}\otimes_{B_o} C_o,K) \quad ,$$

(I 3.3.4.4)

$$*g_o : \mathbb{E}xt^1_{C_o}(L_{C_o/A},K) \longrightarrow \mathbb{E}xt^1_{C_o}(L_{B_o/A} \otimes_{B_o} C_o,K)$$

les morphismes canoniques définis par v , g_o . Il est clair que le problème (2.2.1.2) admet une solution si et seulement si les A-extensions $v*\underline{B}$ et $\underline{C}*g_o$ de B_o par K sont isomorphes, i.e. si l'on a

$$v*e(\underline{B}) - e(\underline{C})*g_o = 0 \quad .$$

La suite exacte des $\mathbb{E}xt^i_{B_o}(-,K)$ relative au triangle de transitivité $L_{B_o/A_o/A}$ s'écrit (cf. (2.1.2.2))

$$0 \longrightarrow \mathbb{E}xt^1_{B_o}(L_{B_o/A_o},K) \longrightarrow \mathbb{E}xt^1_{B_o}(L_{B_o/A},K) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{B_o}(I \otimes_{A_o} B_o,K) \longrightarrow \dots ,$$

ou, si l'on préfère,

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow \mathbb{E}xt^1_{C_o}(L_{B_o/A_o} \otimes_{B_o} C_o,K) \longrightarrow \mathbb{E}xt^1_{C_o}(L_{B_o/A} \otimes_{B_o} C_o,K) \to \mathrm{Hom}_{C_o}(I \otimes_{A_o} C_o,K) \to \dots ,$$

(en utilisant l'isomorphisme canonique (I 3.3.4.4)). Or, par hypothèse, les morphismes de I dans K induits par les A-extensions $v*\underline{B}$ et $\underline{C}*g_o$ coïncident avec le morphisme donné w . Par suite $v*e(\underline{B}) - e(\underline{C})*g_o$ donne zéro dans $\mathrm{Hom}_{C_o}(I \otimes_{A_o} C_o,K)$ dans la suite (*), donc on a

$$(2.2.1.4) \qquad v*e(\underline{B}) - e(\underline{C})*g_o \in \mathbb{E}xt^1_{C_o}(L_{B_o/A} \otimes_{B_o} C_o,K) \quad .$$

Quand $v*e(\underline{B}) - e(\underline{C})*g_o = 0$, il existe un isomorphisme entre les objets $v*\underline{B}$ et $\underline{C}*g_o$ de $\underline{\mathrm{Exal}}_A(B_o,K)$, et d'après les remarques suivant (1.1.5.1), l'ensemble de tels isomorphismes forme un torseur sous le groupe $\mathrm{Der}_A(B_o,K)$; notons qu'on a des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Der}_A(B_o,K) \xrightarrow{\sim} \mathbb{E}xt^0_{B_o}(L_{B_o/A},K) \qquad (\text{II } 1.2.4.3)$$

$$\xrightarrow{\sim} \mathbb{E}xt^0_{B_o}(L_{B_o/A_o},K) \qquad (\text{par la suite exacte des}$$

$\mathrm{Ext}^i_{B_o}(-,K)$ de $L_{B_o/A_o/A}$,

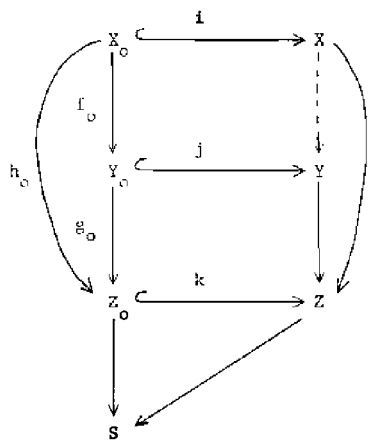
$$\xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^o_{C_o}(L_{B_o/A_o} \otimes_{B_o} C_o, K) \qquad \text{(I 3.3.4.4)} \quad .$$

En résumé, on a obtenu :

Proposition 2.2.2. Avec les notations (2.2.1.3), la classe (2.2.1.4) est l'obstruction dont l'annulation est nécessaire et suffisante à l'existence d'une solution du problème (2.2.1.2). Quand celle-ci est nulle, l'ensemble des solutions forme un torseur sous le groupe $\mathrm{Ext}^o_{C_o}(L_{B_o/A_o} \otimes_{B_o} C_o, K)$ $(\xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{A_o}(B_o, K))$.

2.2.3. Soit un diagramme commutatif [1] (en traits pleins) de topos annelés

(2.2.3.1)



où i (resp. j) est une Z-extension de X_o (resp. Y_o) par I (resp. J), et k une S-extension de Z_o par K . On a donc (1.2.3) des éléments

(2.2.3.2) $\qquad e(i) \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X_o}}(L_{X_o/Z}, I)$, $e(j) \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{Y_o}}(L_{Y_o/Z}, J)$,

et des morphismes canoniques

$$v : g_o^* K \longrightarrow J \quad , \quad w : h_o^* K \longrightarrow I \quad .$$

[1] avec le grain de sel habituel, cf. note [2] de (2.1.6).

Donnons-nous d'autre part un morphisme

(2.2.3.3) $$u : f_o^*J \longrightarrow I$$

tel que $w = u(f_o^*v)$. Notons comme tout à l'heure que si v est un épimorphisme (resp. un isomorphisme), alors il existe au plus un (resp. un et un seul) u vérifiant $w = u(f_o^*v)$. (En particulier, si g_o est plat et Y une déformation plate de Y_o sur Z, cf. (2.1.7 (ii)), u n'est plus une donnée supplémentaire). Cela posé, (2.2.2) se traduit ainsi :

Proposition 2.2.4. Notons $e(i)*f_o$ (resp. $u*e(j)$) l'image de $e(i)$ (resp. $e(j)$) par la flèche canonique

$$\mathbb{E}xt^1_{\underline{O}_{X_o}}(L_{X_o/Z}, I) \longrightarrow \mathbb{E}xt^1_{\underline{O}_{X_o}}(f_o^*L_{Y_o/Z}, I)$$

(resp. la flèche composée

$$\mathbb{E}xt^1_{\underline{O}_{Y_o}}(L_{Y_o/Z}, J) \longrightarrow \mathbb{E}xt^1_{\underline{O}_{X_o}}(f_o^*L_{Y_o/Z}, f_o^*J) \xrightarrow{u} \mathbb{E}xt^1_{\underline{O}_{X_o}}(f_o^*L_{Y_o/Z}, I)) \quad .$$

Alors on a

$$u*e(j) - e(i)*f_o \in \mathbb{E}xt^1_{\underline{O}_{X_o}}(f_o^*L_{Y_o/Z_o}, I) \quad ,$$

le groupe de droite s'injectant canoniquement dans $\mathbb{E}xt^1_{\underline{O}_{X_o}}(f_o^*L_{Y_o/Z}, I)$. Pour qu'on puisse compléter suivant le pointillé (2.2.3.1) en un diagramme commutatif induisant u, il faut et il suffit que l'on ait $u*e(j) - e(i)*f_o = 0$. Quand $u*e(j) - e(i)*f_o = 0$, l'ensemble des morphismes de topos annelés $X \longrightarrow Y$ solutions du problème est un torseur sous le groupe $\mathbb{E}xt^0_{\underline{O}_{X_o}}(f_o^*L_{Y_o/Z_o}, I)$.

Remarques 2.2.5. a) Faisant, dans (2.2.3.1), $Y = Y_o$, $Z = Z_o$, j (resp. k) = identité, on retrouve le résultat de Grothendieck ([17] 11.1.5) relatif au relèvement infinitésimal d'un morphisme.

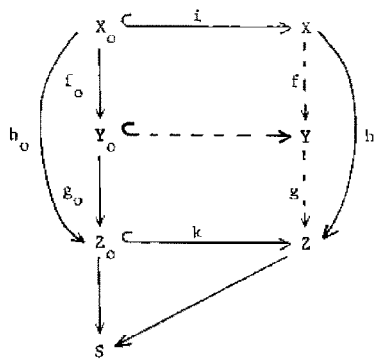
b) Si les topos annelés figurant dans (2.2.3.1) sont localement annelés et les morphismes correspondants admissibles (et, comme on a vu (2.1.9 a)), il suffit pour cela qu'il en soit ainsi des topos annelés et morphismes figurant sur la colonne

de gauche), alors toute solution $X \longrightarrow Y$ est nécessairement admissible. Par suite, si les topos et morphismes de topos de (2.2.3.1) "sont" des schémas et morphismes de schémas, toute solution $X \longrightarrow Y$ est un morphisme de schémas. De la même manière, si X_o et Y_o "sont" des schémas relatifs plats localement de présentation finie sur Z_o et v, w des isomorphismes, alors, comme on a vu, X et Y sont des schémas relatifs plats localement de présentation finie sur Z, et toute solution $X \longrightarrow Y$ est un morphisme de Z-schémas relatifs.

2.3. Compléments sur les déformations de morphismes.

2.3.1. Voici une variante des problèmes envisagés en (2.1.6) et (2.2.3). Soit un diagramme "commutatif", en traits pleins, de topos annelés

(2.3.1.1)



où k est une S-extension de Z_o par un $\underline{O}_{Z_o}$-Module K et i une Z-extension de X_o par un $\underline{O}_{X_o}$-Module I. On suppose que h est plat (donc $h_o^*K \xrightarrow{\sim} I$) et que g_o est plat. On cherche à compléter (2.3.1.1) suivant le pointillé en un diagramme commutatif de manière que g soit une déformation plate de g_o.

Proposition 2.3.2. (i) Il existe une obstruction

$$w \in \mathrm{Ext}^2(Y_o/X_o; L_{Y_o/Z_o}, g_o^*K)$$

dont l'annulation est nécessaire et suffisante pour que le problème précédent admette une solution ([1]).

(ii) Quand $\omega = 0$, l'ensemble des classes d'isomorphie de solutions est un torseur sous le groupe $\mathrm{Ext}^1(Y_o/X_o;L_{Y_o/Z_o},g_o^*K)$ ([1]) et le groupe des automorphismes d'une solution donnée s'identifie canoniquement à

$$\mathrm{Ext}^0(Y_o/X_o;L_{Y_o/Z_o},g_o^*K) = \mathrm{Ext}^0(Y_o/X_o;\Omega^1_{Y_o/Z_o},g_o^*K)\ ([1]).$$

Preuve. Introduisons les topos annelés $X_oY_o = \mathrm{Top}(f_o)$, $X_oZ_o = \mathrm{Top}(h_o)$, $XZ = \mathrm{Top}(h)$ ([2]). On a des morphismes de topos annelés

$$\begin{array}{ccc} X_oY_o & & \\ \downarrow & & \\ X_oZ_o & \hookrightarrow & XZ \end{array} ,$$

où la flèche verticale est définie par (Id,g_o) et la flèche horizontale, définie par (i,k), est une S-extension de X_oZ_o par $(h_o^*K \longleftarrow K)$. On peut reformuler le problème (2.3.1) en disant qu'on cherche une déformation plate de X_oY_o au-dessus de XZ, ou encore une XZ-extension de X_oY_o par $(h_o^*K \longleftarrow g_o^*K)$ telle que la flèche correspondante $(\mathrm{id},g_o)^*(h_o^*K \longleftarrow K) \longrightarrow (h_o^*K \longleftarrow g_o^*K)$ soit un isomorphisme. Appliquant (2.1.7), on trouve une obstruction

$$\omega \in \mathrm{Ext}^2(L_{X_oY_o/X_oZ_o}, (h_o^*K) \longleftarrow g_o^*K)) ,$$

et, quand $\omega = 0$, l'ensemble des classes d'isomorphie de solutions forme un torseur sous $\mathrm{Ext}^1(L_{X_oY_o/X_oZ_o},(h_o^*K \longleftarrow g_o^*K))$, le groupe des automorphismes d'une solution donnée s'identifiant à $\mathrm{Ext}^0(L_{X_oY_o/X_oZ_o},(h_o^*K \longleftarrow g_o^*K))$. Or, comme $L_{X_o/X_o} = 0$, on a, d'après (4.12.2),

$$L_{X_oY_o/X_oZ_o} = (0 \longleftarrow L_{Y_o/Z_o}) ,$$

([1]) pour la définition des $\mathrm{Ext}^i(Y_o/X_o;L_{Y_o/Z_o};g_o^*K)$, voir (4.10). Si L, M sont des complexes, nous noterons désormais $\mathrm{Ext}^i(L,M) = H^i\mathrm{RHom}(L,M)$ leur i-ième hyperext, au lieu de $\mathbf{Ext}^i(L,M)$.

([2]) nous utiliserons librement la terminologie et les résultats du n°4.

d'où (4.10.1)

$$\mathrm{Ext}^i(L_{X_oY_o/X_oZ_o},(h_o^*K) \longleftarrow g_o^*K)) = \mathrm{Ext}^i(Y_o/X_o;L_{Y_o/Z_o},g_o^*K)$$

pour tout i, ce qui achève la démonstration.

2.3.3. Dans la situation de (2.3.1.1), on peut envisager le problème plus général suivant. On se donne un $\underline{O}_{Y_o}$-Module J et des morphismes $v : g_o^*K \longrightarrow J$, $u : f_o^*J \longrightarrow I$ tels que $w = u(f_o^*v)$, où $w : h_o^*K \longrightarrow I$ est le morphisme défini par la Z-extension i, et l'on cherche une Z-extension Y de Y_o par J correspondant à v et un morphisme $X \longrightarrow Y$ de Z-extensions correspondant à u. Raisonnant comme dans la preuve de (2.3.2), on trouve une obstruction dans le groupe $\mathrm{Ext}^2((0 \longleftarrow L_{Y_o/Z_o}),(I \longleftarrow J))$; quand cette obstruction est nulle, l'ensemble des classes d'isomorphie de solutions forme un torseur sous $\mathrm{Ext}^1((0 \longleftarrow L_{Y_o/Z_o}),(I \longleftarrow J))$ et le groupe des automorphismes d'une solution s'identifie au groupe Ext^o des mêmes arguments. Les groupes Ext^i précédents sont accessibles au calcul grâce au triangle distingué (4.9) :

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{RHom}(Lf_o^*L_{Y_o/Z_o},I) & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ \mathrm{RHom}((0 \longleftarrow L_{Y_o/Z_o}),(I \longleftarrow J)) & \longrightarrow & \mathrm{RHom}(L_{Y_o/Z_o},J) \end{array} .$$

2.3.4. La preuve de (2.3.2) montre, compte tenu de (2.1.7 (iii)), que l'obstruction ω de (2.3.2) s'écrit comme cup-produit

$$\omega = e(i,k)K(X_oY_o/X_oZ_o/S) \quad ,$$

où $e(i,k) \in \mathrm{Ext}^1(L_{X_oZ_o/S},(h_o^*K \longleftarrow K))$ est la classe de la S-extension (i,k) de X_oZ_o et $K(X_oY_o/X_oZ_o/S) \in \mathrm{Ext}^1((0 \longleftarrow L_{Y_o/Z_o}), (\mathrm{Id},g_o)^*L_{X_oZ_o/S})$ est la classe de Kodaira-Spencer définie par le composé $X_oY_o \longrightarrow X_oZ_o \longrightarrow S$, le cup-produit étant défini par la composition de Yoneda. Il en résulte que ω possède, vis-à-vis des diagrammes pleins (2.3.1.1), les propriétés de fonctorialité qu'on est en droit

d'attendre. Nous en laissons la formulation au lecteur.

2.3.5. Si, dans (2.3.2), on suppose qu'il existe une déformation plate Y de Y_o au-dessus de Z, l'obstruction ω tombe, comme on va voir, dans un groupe plus petit. On a en effet la suite exacte de cohomologie relative (4.10.5) :

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(L_{Y_o/Z_o}, g_o^*K) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(f_o^*L_{Y_o/Z_o}, h_o^*K) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2(Y_o/X_o; L_{Y_o/Z_o}, g_o^*K) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^2(L_{Y_o/Z_o}, g_o^*K) \longrightarrow \ldots \quad .$$

Il découle aisément de (2.3.4) que l'image de ω dans $\mathrm{Ext}^2(L_{Y_o/Z_o}, g_o^*K)$ est l'obstruction à déformer platement Y_o au-dessus de Y. Par suite, quand une telle déformation existe, l'obstruction ω au problème (2.3.1) se trouve dans

$$\mathrm{Coker}(\mathrm{Ext}^1(L_{Y_o/Z_o}, g_o^*K) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(f_o^*L_{Y_o/Z_o}, h_o^*K)) \quad .$$

On pouvait d'ailleurs prévoir ce résultat. En effet, une déformation plate Y de Y_o étant choisie, l'obstruction à prolonger f_o se trouve, d'après (2.2.4), dans $\mathrm{Ext}^1(f_o^*L_{Y_o/Z_o}, h_o^*K)$. Si l'on remplace Y par une autre déformation plate Y', les classes de Y et Y' différent, d'après (2.1.7), par un élément $u \in \mathrm{Ext}^1(L_{Y_o/Z_o}, g_o^*K)$, et il découle de (2.2.4) que l'obstruction à prolonger f_o est alors modifiée par l'image de u dans $\mathrm{Ext}^1(f_o^*L_{Y_o/Z_o}, h_o^*K)$. D'où finalement l'obstruction dans le conoyau écrit plus haut.

2.3.6. On a des remarques analogues à (2.1.9) et (2.2.5 b)). Si, dans le diagramme plein (2.3.1.1), les topos sont localement annelés et les morphismes admissibles, toute solution du problème (2.3.1) est telle que Y soit localement annelé et les morphismes en pointillé admissibles. De même, si le diagramme plein (2.3.1.1) est défini par un diagramme de schémas, l'Idéal K étant alors quasi-cohérent, toute solution du problème est telle que Y "soit" un schéma et les morphismes en pointillé des morphismes de schémas. Remarquons également que, si f_o est une immersion fermée, il en est alors nécessairement de même de f.

3. Calcul du complexe cotangent de quelques types de morphismes.

3.1. Morphismes lisses, étales.

Proposition 3.1.1. (cf. [25] 5.4)). Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de shémas. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est étale (EGA IV 17.3.1) ;

(ii) f est localement de présentation finie et $L_{X/Y} = 0$ dans $D(X)$.

Proposition 3.1.2. (cf. [25] 5.4)). Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas. Considérons les conditions suivantes :

(i) f est lisse (EGA IV 17.3.1) ;

(ii) l'augmentation naturelle $L_{X/Y} \longrightarrow \Omega^1_{X/Y}$ (II 1.2.7.3) est un quasi-isomorphisme et $\Omega^1_{X/Y}$ est localement libre de type fini (autrement dit, dans la terminologie de (SGA 6 I 4.7, 4.8), $L_{X/Y}$ est d'amplitude parfaite $\subset [0,0]$) ;

(iii) f est formellement lisse (EGA IV 17.1.1).

Alors on a (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii), et (i), (ii) et (iii) sont équivalentes quand f est localement de présentation finie.

Preuve de (3.1.1) et (3.1.2).

a) (3.1.1 (i) $\Longrightarrow$ (ii)). Comme f est plat, on a, par changement de base (II 2.3.11),

$$pr_1^* L_{X/Y} \xrightarrow{\sim} L_{XX_YX/X} .$$

Par le triangle de transitivité (II 2.1.5.6) relatif au composé

$$X \xrightarrow{i} XX_YX \xrightarrow{pr_2} X ,$$

où i est l'immersion diagonale, on a

$$L_{X/XX_YX}[-1] \xrightarrow{\sim} i^* L_{XX_YX/Y} ,$$

d'où, puisque $i^* pr_1^* = Id$,

$$L_{X/XX_YX}[-1] \xrightarrow{\sim} L_{X/Y} .$$

Mais comme i est une immersion ouverte (EGA IV 17.4.2), on a, par localisation (II 2.3.0), $L_{X/XX_YX} = 0$ dans $D(X)$, d'où (3.1.1 (ii)), f étant localement de présentation finie par définition.

b) (3.1.2 (i) $\Longrightarrow$ (ii)). La question étant locale (II 2.3.0), on peut supposer que Y est affine et que f se factorise en $f = f'i$, où $f' : X' = Y[t_1,\dots,t_r] \longrightarrow Y$ est la projection canonique d'un espace affine-type au-dessus de Y et $i : X \longrightarrow X'$ un morphisme étale. Le triangle de transitivité relatif à $f'i$ (II 2.1.5.6) implique, compte tenu de a), qu'on a $i^*L_{X'/Y} \xrightarrow{\sim} L_{X/Y}$, d'où (ii) d'après (II 1.1.3.2 et 1.2.4.4).

c) (3.1.2 (ii) $\Longrightarrow$ (iii)). Soient T un schéma affine au-dessus de Y, T_o un sous-schéma fermé de T défini par un Idéal nilpotent I, $g_o : T_o \longrightarrow X$ un Y-morphisme. Il s'agit de montrer que, grâce à (ii), on peut prolonger g_o en un Y-morphisme $g : T \longrightarrow X$. Tout d'abord, on peut supposer que $I^2 = 0$ (car, une fois l'assertion prouvée dans ce cas, on peut, dans le cas général, prolonger g_o de proche en proche aux voisinages infinitésimaux successifs de T_o dans T). D'après (2.2.4), appliqué au cas particulier (2.2.5 a)), l'obstruction au problème se trouve dans $\mathrm{Ext}^1(Lg_o^*L_{X/Y}, I)$. Mais (ii) implique qu'on a $Lg_o^*L_{X/Y} = g_o^*\Omega^1_{X/Y}$, d'où

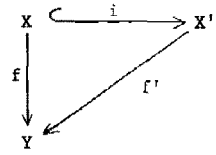
$$\mathrm{Ext}^1(Lg_o^*L_{X/Y}, I) = \mathrm{Ext}^1(g_o^*\Omega^1_{X/Y}, I)$$
$$= 0$$

puisque $g_o^*\Omega^1_{X/Y}$ est localement libre de type fini, I quasi-cohérent, et T_o affine. Il n'y a donc pas d'obstruction au prolongement de g_o, et l'on a ainsi prouvé (ii) $\Longrightarrow$ (iii).

d) Compte tenu de b) et c), l'équivalence de (3.1.2 (i), (ii), (iii)), pour f localement de présentation finie, résulte trivialement des définitions.

e) (3.1.1 (ii) $\Longrightarrow$ (i)). D'après d), (ii) implique que f est lisse, et comme $\Omega^1_{X/Y} = H_o(L_{X/Y}) = 0$, f est étale. Ceci achève la preuve de (3.1.1) et (3.1.2).

Corollaire 3.1.3. Soit un triangle commutatif de schémas



où f' est un morphisme lisse et i une immersion fermée définie par un Idéal I. Alors on a, dans $D(X)$,

$$t_{[-1}(L_{X/Y}) \xrightarrow{\sim} (0 \longrightarrow I/I^2 \xrightarrow{d} i^*\Omega^1_{X'/Y} \longrightarrow 0) \quad ,$$

où $t_{[-1}$ désigne le foncteur de troncation (I 1.4.7), I/I^2 est placé en degré -1, et d est défini par la différentielle extérieure $d_{X'/Y}$.

Preuve. Compte tenu de (3.1.2), l'assertion résulte de (1.2.9.1) appliqué à $f^{-1}(\underline{O}_Y) \longrightarrow i^{-1}(\underline{O}_{X'}) \longrightarrow \underline{O}_X$.

Remarque 3.1.4. La conclusion de (3.1.3) est encore valable si l'on suppose seulement f' formellement lisse. En effet, d'après ([17] 9.5.8), $H_1(L_{X'/Y}) = 0$ et $\Omega^1_{X'/Y}$ est plat, or dans la preuve de (1.2.9.1) on utilise seulement que $H_1(L_{P/A}) = 0$ et $\Omega^1_{P/A}$ est plat.

3.2. Immersions régulières, morphismes localement d'intersection complète.

3.2.1. Soient T un topos, A un Anneau (commutatif) de T, $u : E \longrightarrow A$ un homomorphisme de A-Modules. On appelle complexe de l'Algèbre extérieure (ou complexe de Koszul) construit sur u le complexe de chaînes

(3.2.1.1) $\qquad K.(u)$

tel que $K_n(u) = \wedge^n E$, la différentielle étant l'unique anti-dérivation de degré -1 de l'Algèbre extérieure $\wedge E$ égale à u sur E. Si $x_1,\ldots,x_n$ sont des sections de E, on a donc

$$d(x_1 \ldots x_n) = \Sigma\, (-1)^{i-1} u(x_i) x_1 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_n \quad .$$

La notion de complexe de Koszul introduite en (I 4.3.1.3) est un cas particulier de celle-ci : si $v : L \longrightarrow M$ est un morphisme de Modules sur un Anneau R de T, le complexe Kos.(v) de (loc. cit.) n'est autre que $K.(\overline{v})$, où $\overline{v} : L \otimes_R S_R(M) \longrightarrow S_R(M)$ est le morphisme $S_R(M)$-linéaire prolongeant canoniquement v.

La formation de $K.(u)$ commute au changement de base : si A' est une A-Algèbre (commutative) et u' l'homomorphisme déduit de u par extension des scalaires à A', on a

$$K.(u') = K.(u) \otimes_A A' \quad .$$

En particulier, notons $\overline{u} : S_A(E) \longrightarrow A$ le morphisme d'Anneaux défini par u. Comme $\overline{u}$ rétracte l'injection canonique $A \hookrightarrow S_A(E)$, on a $(E \otimes_A S_A(E)) \otimes_{S_A(E)} A = E$, et la relation $u(x\overline{u}(y)) = \overline{u}(xy)$ pour x section de E, y section de $S_A(E)$, montre que u se déduit, par extension des scalaires via $\overline{u}$, du morphisme $S_A(E)$-linéaire $E \otimes_A S_A(E) \longrightarrow S_A(E)$, $x \otimes y \longmapsto xy$. Par suite, si $K.(E)$ désigne le complexe de Koszul construit sur ce morphisme (ou, si l'on préfère, le complexe $Kos.(Id_E)$ (I 4.3.1.3) considéré comme complexe de $S_A(E)$-Modules), on a

$$K.(u) = K.(E) \otimes_{S_A(E)} A \quad , \tag{3.2.1.2}$$

A étant regardé comme $S_A(E)$-Algèbre via $\overline{u}$. Cette remarque, fort utile, est due à Berthelot (SGA 6 VII 1). Ce numéro ne fait d'ailleurs, dans une large mesure, que paraphraser (loc. cit.).

Définition 3.2.2. On dit que $u : E \longrightarrow A$ est un morphisme de Koszul (resp. un morphisme régulier) si E est plat (resp. localement facteur direct d'un Module libre de type fini) et si $K.(u)$ est une résolution de $A/u(E)$. Soit I un Idéal de A, on dit que I est de Koszul (resp. régulier), ou encore que $A \longrightarrow A/I$ est un épimorphisme de Koszul (resp. un épimorphisme régulier) si, localement sur T, il existe un morphisme de Koszul (resp. régulier) $u : E \longrightarrow A$ tel que $I = u(E)$.

Quand A est un Anneau local (de sorte que tout facteur direct d'un Module libre de type fini est alors localement libre), la notion d'Idéal régulier qu'on vient de définir coïncide avec celle de (SGA 6 VII 1.4).

3.2.3. Exemple. Soit R un Anneau de T , et soit

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

une suite exacte de R-Modules plats. Alors $S_R(M) \longrightarrow S_R(N)$ est un épimorphisme de Koszul. En effet le noyau de cet épimorphisme est l'Idéal engendré par l'image de L , i.e. l'Idéal image du morphisme $u : L \otimes S_R(M) \longrightarrow S_R(M)$ défini par $L \longrightarrow M$, et ce dernier est un morphisme de Koszul d'après (I 4.3.1.6). Si L est localement facteur direct d'un Module libre de type fini, $S_R(M) \longrightarrow S_R(N)$ est un épimorphisme régulier.

Proposition 3.2.4. Soient A un Anneau de T , I un Idéal de Koszul (resp. régulier) de A , B = A/I. Alors :

(i) I/I^2 est un B-Module plat (resp. localement facteur direct d'un Module libre de type fini) ;

(ii) l'homomorphisme canonique

$$S_B(I/I^2) \longrightarrow gr_I(A)$$

est un isomorphisme ;

(iii) l'homomorphisme canonique (1.2.8.1)

$$L_{B/A} \longrightarrow I/I^2\,[1]$$

est un isomorphisme de D(B).

Preuve. Commençons par prouver la proposition dans le cas particulier de (3.2.3), avec $A = S_R(M)$, et N = 0 , donc B = R, L = M , et $I = M.S_R(M)$. On a $I/I^2 = M$, et les assertions (i) et (ii) sont triviales. D'autres part, d'après (II 1.2.4.4), la flèche canonique $L_{A/R} \longrightarrow \Omega^1_{A/R}$ est un quasi-isomorphisme, d'où (iii) grâce au triangle de transitivité relatif au composé des injection et projection canoniques $R \longrightarrow A \longrightarrow R$. Passons maintenant au cas général. On peut se borner au cas où I est de Koszul et où l'on dispose d'un morphisme de Koszul $u : E \longrightarrow A$. Posons $S_A(E) = \overline{A}$, $E \otimes_A \overline{A} = \overline{E}$, notons $p : \overline{E} \longrightarrow \overline{A}$, le morphisme produit, et $\overline{u} : \overline{A} \longrightarrow A$

le morphisme défini par u, de sorte que (3.2.1) u se déduit de p par extension des scalaires via $\bar{u}$, et qu'on a

$$K.(u) = K.(E) \otimes_{\bar{A}} A \quad . \tag{3.2.4.1}$$

Si l'on pose $p(\bar{E}) = \bar{I}$, on a $I = \bar{I}.A = u(E)$, et par suite le carré

(3.2.4.2)
$$\begin{array}{ccc} \bar{A} & \xrightarrow{\bar{u}} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & B \end{array} \quad ,$$

où $\bar{A} \longrightarrow A$ et $A \longrightarrow B$ sont les projections canoniques, est cocartésien. On a :

$$\begin{aligned} I/I^2 &= I \otimes_A B \\ &= \bar{I} \otimes_{\bar{A}} B \\ &= E \otimes_A B \quad , \end{aligned}$$

ce qui prouve (i). D'autre part, comme $K.(E)$ (resp. $K.(u)$) est une résolution de A (resp. B), la relation (3.2.4.1) fournit

$$\mathrm{Tor}_i^{\bar{A}}(A,A) = 0 \tag{3.2.4.3}$$

pour $i > 0$ (I'un des arguments A étant regardé comme $\bar{A}$-Algèbre par la projection canonique, l'autre par $\bar{u}$), et par le théorème de changement de base (II 2.2.3) appliqué à (3.2.4.2) on en déduit

$$L_{B/A} = L_{A/\bar{A}} \otimes B$$

(A considéré comme $\bar{A}$-Algèbre par la projection canonique), d'où (iii), compte tenu du cas particulier déjà prouvé. Comme $\mathrm{gr}_{\bar{I}}(\bar{A}) = S_A(E)$ est un A-Module plat, on a

$$\mathrm{Tor}_i^{\bar{A}}(\mathrm{gr}_{\bar{I}}(\bar{A}),A) = \mathrm{gr}_{\bar{I}}(\bar{A}) \otimes_A \mathrm{Tor}_i^{\bar{A}}(A,A)$$

pour tout entier i, d'où, d'après (3.2.4.3),

$$\mathrm{Tor}_i^{\bar{A}}(\mathrm{gr}_{\bar{I}}(\bar{A}),A) = 0$$

pour $i > 0$. On en déduit facilement (cf. preuve de (SGA 6 VII 1.2)) que la flèche canonique

$$gr_{\bar{I}}(\bar{A}) \otimes_A B \longrightarrow gr_I(A)$$

est un isomorphisme, d'où (ii), ce qui achève la démonstration.

Remarques 3.2.5. Soient $A \longrightarrow A'$ un morphisme d'Anneaux de T , I un Idéal de A, $B = A/I$, $I' = I.A'$. Si I est de Koszul (resp. régulier), et si $\mathrm{Tor}_i^A(B,A') = 0$ pour $i > 0$, alors I' est de Koszul (resp. régulier). Cela résulte aussitôt des définitions (cf. (SGA 6 VII 1.5)). D'autre part, si $u : E \longrightarrow A$ est un morphisme de Koszul pour I , et si le morphisme $u' : E' \longrightarrow A'$ qui s'en déduit par changement de base est un morphisme de Koszul pour I', alors la flèche canonique

$$gr_I(A) \overset{L}{\otimes}_A A' \longrightarrow gr_{I'}(A')$$

est un isomorphisme. On a vu en effet dans la preuve de (3.2.4) que les flèches canoniques

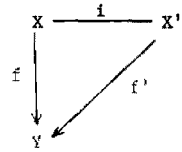
$$gr_{\bar{I}}(\bar{A}) \overset{L}{\otimes}_{\bar{A}} A \longrightarrow gr_I(A) \quad , \quad gr_{\bar{I}}(\bar{A}) \overset{L}{\otimes}_{\bar{A}} A' \longrightarrow gr_{I'}(A')$$

(avec les notations de (loc. cit.)) sont des isomorphismes. (Comparer (SGA 6 VII 1.2)).

Proposition 3.2.6 (cf. [25] 5.4, 5.5)). *Soit* $f : X \longrightarrow Y$ *un morphisme de schémas. Si* f *est localement d'intersection complète* (SGA 6 VIII 1.1), $L_{X/Y}$ *est d'amplitude parfaite* $\subset [-1,0]$ (SGA 6 I 4.7, 4.8), *i.e. est localement isomorphe dans* $D(X)$ *à un complexe de Modules libres de type fini concentré en degrés* -1 *et* 0 . *La réciproque est vraie quand* Y *est localement noethérien et* f *localement de type fini.*

Preuve. La partie directe résulte immédiatement de (3.1.2) et (3.2.4) grâce au triangle de transitivité. La réciproque est due à Quillen ([25] loc. cit.), compte tenu de (II 2.3.6.3).

Corollaire 3.2.7. Soit un triangle commutatif de schémas



où f' est un morphisme lisse et i une immersion fermée définie par un Idéal régulier I . Alors, avec les notations de (3.1.3), on a, dans D(X),

$$L_{X/Y} \overset{\sim}{\longrightarrow} (0 \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow i^*\Omega^1_{X'/Y} \longrightarrow 0) \quad ,$$

Preuve. Conjuguer (3.1.3) et (3.2.6).

3.3. Morphismes faiblement d'intersection complète.

Les résultats de ce numéro sont dûs à Quillen ([24] II) dans le cas ponctuel.

3.3.1. Soient T un topos, A un Anneau de T , I un Idéal de A , B = A/I. La suite exacte des Tor relative à la suite exacte $0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0$ fournit un isomorphisme

$$\text{Tor}_1^A(B,B) \overset{\sim}{\longrightarrow} I/I^2 \quad , \tag{3.3.1.1}$$

dont l'inverse se prolonge canoniquement en un homomorphisme d'Algèbres graduées anti-commutatives

$$\wedge_B(I/I^2) \longrightarrow \text{Tor}^A_\cdot(B,B) \quad . \tag{3.3.1.2}$$

Nous dirons que I est faiblement régulier si I/I^2 est plat et (3.3.1.2) un isomorphisme (cf. ([24] 8.4)).

Exemple. Si I est de Koszul (3.2.2), I est faiblement régulier. En effet, on peut supposer que I est l'image d'un morphisme de Koszul $u : E \longrightarrow A$, et l'on a

$$\text{Tor}^A_\cdot(B,B) = H.(K.(u) \otimes_A B) = \wedge_B(E \otimes_A B) = \wedge_B(I/I^2) \quad .$$

Les propriétés des Idéaux faiblement réguliers établies par Quillen ([24] II 8) dans le cas où T est le topos ponctuel se globalisent facilement. On peut en effet recopier les arguments de (loc. cit.) grâce aux résultats de (I 3.3.3 et 4.3). En particulier, si I est faiblement régulier, la flèche canonique

$$S_B(I/I^2) \longrightarrow gr_I(A)$$

est un isomorphisme. On a d'autre part l'utile "théorème de convergence" ([24] 8.8) : Soient R un Anneau simplicial de T , J un Idéal de R tel que $H_o(J) = 0$. Si J est faiblement régulier, alors $H_k(J^n) = 0$ pour $k < n$.

3.3.2. Grâce à ce résultat, la "suite spectrale fondamentale" de ([24] 6.8) se globalise à son tour sans difficulté. Soient A un Anneau de T , B une A-Algèbre, $P \longrightarrow B$ la résolution libre standard de B sur A (I 1.5.5.6). Posons $R = P \otimes_A B$, notons J l'Idéal de R noyau de l'augmentation $R \longrightarrow B$ définie par $P \longrightarrow B$. On a

$$J/J^2 = \Omega^1_{R/B} \otimes_R B = \Omega^1_{P/A} \otimes_P B = L_{B/A} \qquad \text{(II 1.2.3.1)} \quad .$$

Comme P est libre sur A terme à terme, R est libre sur B terme à terme ; l'augmentation $R \longrightarrow B$ étant isomorphe en chaque degré à la projection canonique, J est de Koszul terme à terme (3.2.3), et par suite (3.2.4) la flèche canonique

$$S_B(L_{B/A}) \longrightarrow gr_J(R)$$

est un isomorphisme. Filtrant R par les puissances de J , on en déduit une suite spectrale d'Algèbres bigraduées, fonctorielle en $A \longrightarrow B$:

$$(3.3.2.1) \qquad E^2_{pq} = H_{p+q}(S^q(L_{B/A})) \Longrightarrow \mathrm{Tor}^A_{\cdot}(B,B) \quad ,$$

$$d^r : E^r_{pq} \longrightarrow E^r_{p-r,q+r-1} \quad .$$

Comme J est faiblement régulier, le théorème de convergence rappelé plus haut implique que cette suite spectrale est concentrée dans le premier quadrant lorsque $H_o(J) = 0$, i.e. $B \otimes_A B \xrightarrow{\sim} B$. C'est le cas en particulier si $B = A/I$; l'homomor-

phisme (3.3.1.2) s'interprète alors comme un homomorphisme latéral : on a en effet un isomorphisme "de bas degré" $H_1(L_{B/A}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tor}_1^A(B,B) = I/I^2$ (1), et l'on a

$$H_{n+1}(S^n L_{B/A}) = \wedge^n H_1(L_{B/A}) = \wedge^n I/I^2$$

par l'isomorphisme de décalage (I 4.3.2.1 (i)). Utilisant ce fait, on obtient, en raisonnant comme dans ([24] 10.3) :

Proposition 3.3.3. Soient A un Aneau de T , I un Idéal de A , B = A/I. Pour que I soit faiblement régulier (3.3.1), il faut et il suffit que I/I^2 soit plat sur B et que la flèche canonique $L_{B/A} \longrightarrow I/I^2[1]$ (1.2.8.1) soit un quasi-isomorphisme.

Définition 3.3.4. Soient A un Anneau de T, B une A-Algèbre. On dit que B est faiblement d'intersection complète sur A si $L_{B/A}$ est d'amplitude plate $\subset [-1,0]$ (SGA 6 I 5.2), i.e. est isomorphe dans D(B) à un complexe de Module plats concentré en degrés -1 et 0. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de topos annelés (resp. de schémas). On dit que f est faiblement d'intersection complète si $\underline{O}_X$ est faiblement d'intersection complète sur $f^{-1}(\underline{O}_Y)$.

Pour un morphisme de schémas, "localement d'intersection complète" implique "faiblement d'intersection complète" (3.2.6).

Proposition 3.3.5. Soient

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

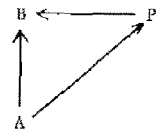
des morphismes d'Anneaux de T . Si B est faiblement d'intersection complète sur A et C faiblement d'intersection complète sur B , C est faiblement d'intersection complète sur A . Si C est faiblement d'intersection complète sur A et si $L_{B/A} \longrightarrow \Omega^1_{B/A}$ est un quasi-isomorphisme avec $\Omega^1_{B/A}$ plat, C est faiblement d'intersection complète sur B. Enfin, si C est faiblement d'intersection complète

(1) On peut montrer que cet isomorphisme coïncide avec celui donné par la théorie des extensions infinitésimales (1.2.8.1).

sur A et sur B , $L_{B/A} \otimes_B C$ est d'amplitude plate $\subset [-1,0]$, et par suite B est faiblement d'intersection complète sur A si de plus C est fidèlement plat sur B (i.e. le foncteur $C \otimes_B -$ est exact et fidèle sur la catégorie des B-Modules).

Preuve. C'est une conséquence immédiate du triangle de transitivité (II 2.1.2.1).

Proposition 3.3.6. Soit un triangle commutatif d'Anneaux de T :



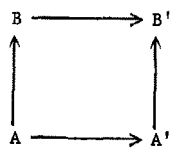
où $P \longrightarrow B$ est surjectif de noyau I , la flèche canonique $L_{P/A} \longrightarrow \Omega^1_{P/A}$ est un quasi-isomorphisme et $\Omega^1_{P/A}$ est plat. Alors, pour que B soit faiblement d'intersection complète sur A , il faut et il suffit que I soit faiblement régulier. Lorsqu'il en est ainsi, on a, dans D(B),

$$L_{B/A} \simeq (0 \longrightarrow I/I^2 \xrightarrow{d_{P/A}} \Omega^1_{P/A} \otimes_P B \longrightarrow 0) \quad ,$$

avec les notations de (1.2.9.1).

Preuve. Appliquer (3.3.5) et (1.2.9.1).

Proposition 3.3.7. Soit



un carré cocartésien d'Anneaux de T , tel que $\mathrm{Tor}_i^A(B,A') = 0$ pour $i > 0$. Si B est faiblement d'intersection complète sur A , B' est faiblement d'intersection complète sur A' .

Preuve. C'est une conséquence immédiate du théorème de changement de base (II 2.2.3).

4. Appendice : cohomologie relative.

4.1. Soit

$$f : X \longrightarrow Y$$

un morphisme de topos. On note

(4.1.1) $\mathrm{Top}(f)$ (ou XY)

la catégorie suivante. Les objets de $\mathrm{Top}(f)$ sont les triplets (E,F,u), où E (resp. F) est un objet de X (resp. Y) et $u : f^{-1}F \longrightarrow E$ un morphisme, f^{-1} désignant le foncteur image inverse pour les faisceaux d'ensembles. Un morphisme $(E,F,u) \longrightarrow (E',F',u')$ est un couple de morphismes $(E \xrightarrow{a} E',\ F \xrightarrow{b} F')$ tel que le carré

$$\begin{array}{ccc} E & \xleftarrow{u} & f^{-1}(F) \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^{-1}(b)} \\ E' & \xleftarrow{u'} & f^{-1}(F') \end{array}$$

soit commutatif. On notera souvent $(E \xleftarrow{u} F)$, ou simplement $(E \longleftarrow F)$, un triplet (E,F,u).

La catégorie $\mathrm{Top}(f)$ est un topos, qu'on appelle <u>topos de la flèche</u> f. En effet, $\mathrm{Top}(f)$ vérifie les propriétés d'exactitude habituelle des topos (SGA 4 IV 1.1.2) ; d'autre part, pour U (resp. V) parcourant une petite famille de générateurs de X (resp. Y), les objets $(U \longleftarrow \emptyset)$, $(f^{-1}V \xleftarrow{\mathrm{Id}} V)$ forment une petite famille de générateurs de $\mathrm{Top}(f)$, comme il résulte des relations

$$\mathrm{Hom}((U \longleftarrow \emptyset),(E \longleftarrow F)) = \mathrm{Hom}(U,E) \ ,$$

$$\mathrm{Hom}((f^{-1}V \longleftarrow V),(E \longleftarrow F)) = \mathrm{Hom}(V,F) \ .$$

Le foncteur restriction à X, $(E \longleftarrow F) \longmapsto E$, et le foncteur restriction à Y, $(E \longleftarrow F) \longmapsto F$, commutent aux limites inductives et aux limites projectives ; on peut en particulier les regarder comme les foncteurs images inverses

par des morphismes de topos

(4.1.2) $$i_X : X \longrightarrow XY \quad , \quad i_Y : Y \longrightarrow XY \quad .$$

Remarquons que i_X s'identifie canoniquement au morphisme de localisation par rapport à $(e_X \longleftarrow \emptyset)$, où e_X est l'objet final de X .

Proposition 4.2. Notons $D(XY,\mathbb{Z})$ la catégorie dérivée des faisceaux abéliens sur XY . Pour $(E \longleftarrow F) \in \mathrm{ob}\, D^+(XY,\mathbb{Z})$, le morphisme canonique (restriction à Y)

$$R\Gamma(XY,(E \longleftarrow F)) \longrightarrow R\Gamma(Y,F)$$

est un isomorphisme.

Preuve. Notons d'abord que pour $L \in \mathrm{ob}\, X$, $M \in \mathrm{ob}\, Y$, on a

(4.2.1) $$i_{X*}(L) = (L \xleftarrow{\mathrm{adj}} f_*L) \quad , \qquad i_{Y*}(M) = (e_X \longleftarrow M) \quad ,$$

où $\mathrm{adj} : f^{-1}f_*L \longleftarrow L$ est la flèche d'adjonction et e_X l'objet final de X . Tout faisceau $(L \longleftarrow M)$ sur XY se plonge canoniquement dans le faisceau $i_{X*}(L) \oplus i_{Y*}(M)$, et par suite la catégorie des faisceaux abéliens de XY possède suffisamment d'objets injectifs dont la restriction à X est injective et la restriction à Y flasque. La proposition en résulte aussitôt, compte tenu du fait que, pour tout faisceau $(L \longleftarrow M)$ de XY , la restriction

$$\Gamma(XY,(L \longleftarrow M)) \longrightarrow \Gamma(Y,M)$$

est un isomorphisme, comme on le vérifie trivialement.

4.3. Soit $\underline{O} = (\underline{O}_X \longleftarrow \underline{O}_Y)$ un Anneau de $\mathrm{Top}(f)$, autrement dit une structure de morphisme de topos annelés sur f . On notera f^* le foncteur image inverse pour les Modules.

Soit, pour $i = 0, 1$, $(L_i \xleftarrow{u_i} M_i)$ un $\underline{O}$-Module de XY . La formation du produit tensoriel commutant aux foncteurs images inverses, on a

$$(4.3.1)\qquad (L_o \xleftarrow{u_o} M_o) \otimes_{\underline{O}} (L_1 \xleftarrow{u_1} M_1) = (L_o \otimes L_1 \xleftarrow{u_o \otimes u_1} M_o \otimes M_1) \quad .$$

Soient d'autre part L un $\underline{O}_X$-Module et $(E \longleftarrow F)$ un $\underline{O}$-Module. On a

$$(4.3.2)\qquad \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}}((L \longleftarrow 0), (E \longleftarrow F)) = i_{X*}\underline{\mathrm{Hom}}(L,E)$$

$$= (\underline{\mathrm{Hom}}(L,E) \xleftarrow{\mathrm{adj}} f_*\underline{\mathrm{Hom}}(L,E)) \quad .$$

En effet, interprétant i_X comme un morphisme de localisation, on a $(L \longleftarrow 0) = i_{X!}(L)$, où $i_{X!}$ est le foncteur prolongement par zéro, d'où le premier isomorphisme, puis le second d'après (4.2.1).

Soient enfin M un $\underline{O}_Y$-Module et $(E \xleftarrow{u} F)$ un $\underline{O}$-Module. On a

$$(4.3.3)\qquad \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}}((f^*M \xleftarrow{\mathrm{Id}} M),(E \xleftarrow{u} F)) = (\underline{\mathrm{Hom}}(f^*M,E) \longleftarrow \underline{\mathrm{Hom}}(M,F)) \quad ,$$

où la flèche de droite est composée de la flèche canonique $f^*\underline{\mathrm{Hom}}(M,F) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(f^*M, f^*F)$ et de $\underline{\mathrm{Hom}}(f^*M,u)$. C'est une conséquence immédiate de (4.3.1) et de l'isomorphisme cher à Cartan

$$\mathrm{Hom}(P \otimes Q, R) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(P, \underline{\mathrm{Hom}}(Q,R)) \quad .$$

On notera $D(XY)$ (resp. $D(X)$, resp. $D(Y)$) la catégorie dérivée des $\underline{O}$-Modules (resp. $\underline{O}_X$-Modules, resp. $\underline{O}_Y$-Modules). Le foncteur $L \longmapsto (L \longleftarrow 0)$ (resp. $(0 \longleftarrow L)$) sur la catégorie des $\underline{O}_X$-(resp. $\underline{O}_Y$-Modules) définit un foncteur de $D(X)$ (resp. $D(Y)$) dans $D(XY)$, encore noté $L \longmapsto (L \longleftarrow 0)$ (resp. $(0 \longleftarrow L)$).

Proposition 4.4. Soient $L \in \mathrm{ob}\, D^-(X)$, $(E \longleftarrow F) \in \mathrm{ob}\, D^+(XY)$. Il existe des isomorphismes fonctoriels canoniques :

(i) $i_X^*\underline{\mathrm{RHom}}((L \longleftarrow 0),(E \longleftarrow F)) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{RHom}}(L,E)$,

(ii) $i_Y^*\underline{\mathrm{RHom}}((L \longleftarrow 0),(E \longleftarrow F)) \xrightarrow{\sim} Rf_*\underline{\mathrm{RHom}}(L,E)$,

(iii) $\mathrm{RHom}((L \longleftarrow 0),(E \longleftarrow F)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{RHom}(L,E)$.

Preuve. On peut supposer L à composantes plates et $(E \longleftarrow F)$ à composantes injectives. Comme i_X "est" un morphisme de localisation, E est à composantes injectives, donc $\underline{Hom}'(L,E)$ également, et par suite (i) et (ii) découlent de (4.3.2). Quant à l'isomorphisme (iii), il se déduit de (ii), grâce à (4.2), par application du foncteur $R\Gamma(Y,-)$.

Lemme 4.5. Soient L un $\underline{O}_Y$-Module plat, M un $\underline{O}_X$-Module injectif. On a

$$\underline{Ext}^i(L, f_*M) = 0$$

pour $i > 0$.

Preuve. Il suffit de montrer que $Ext^i(L, f_*M) = 0$ pour $i > 0$, la relation du lemme s'en déduisant par passage à un faisceau associé. Or, plus généralement, soient E un complexe, borné supérieurement, de $\underline{O}_Y$-Modules plats, et F un complexe, borné inférieurement, de $\underline{O}_X$-Modules injectifs. Je dis que la flèche canonique

$$(*) \qquad Hom_{Hot(Y)}(E, f_*F) \longrightarrow Hom_{D(Y)}(E, f_*F) \quad ,$$

définie par le foncteur de localisation $Hot(Y) \longrightarrow D(Y)$, est un isomorphisme (Hot(Y) désignant la catégorie des complexes de $\underline{O}_Y$-Modules à homotopie près). Comme $Hom_{D(Y)}(E, f_*F)$ est la limite inductive, suivant les classes de quasi-isomorphismes $E' \longrightarrow E$, des groupes $Hom_{Hot(Y)}(E', f_*F)$, et que les quasi-isomorphismes $E' \longrightarrow E$ avec E' à composantes plates et borné supérieurement forment un système cofinal, il suffit de prouver que, pour un tel quasi-isomorphisme, la flèche $Hom_{Hot(Y)}(E, f_*F) \longrightarrow Hom_{Hot(Y)}(E', f_*F)$ est un isomorphisme. Or on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} Hom_{Hot(Y)}(E, f_*F) & \longrightarrow & Hom_{Hot(Y)}(E', f_*F) \\ \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\ Hom_{Hot(X)}(f^*E, F) & \longrightarrow & Hom_{Hot(X)}(f^*E', F) \end{array} \quad ,$$

où les flèches verticales sont les isomorphismes de dualité. Comme $E' \longrightarrow F$ est un quasi-isomorphisme de complexes à composantes plates, il en est de même de $f^*E' \longrightarrow f^*E$, et comme F est à composantes injectives, la flèche horizontale inférieure est un isomorphisme, donc aussi la flèche horizontale supérieure. Par suite (*) est un isomorphisme, ce qui prouve notre assertion du début (en prenant E et F réduits au degré zéro), et achève la démonstration du lemme.

Proposition 4.6. (Dualité triviale, cf. (SGA 4 XVII) ([1])). Soient $L \in \mathrm{ob}\, D^-(Y)$, $M \in \mathrm{ob}\, D^+(X)$. Il existe des isomorphismes fonctoriels canoniques

(i) $\underline{R\mathrm{Hom}}(L, Rf_*M) \xrightarrow{\sim} Rf_*\underline{R\mathrm{Hom}}(Lf^*L, M)$,

(ii) $R\mathrm{Hom}(L, Rf_*M) \xrightarrow{\sim} R\mathrm{Hom}(Lf^*L, M)$.

Preuve. On peut supposer L borné supérieurement et à composantes plates, et M borné inférieurement et à composantes injectives. Alors f^*L est à composantes plates, $\underline{\mathrm{Hom}}^\cdot(f^*L, M)$ à composantes injectives, et (i) ne fait, compte tenu de (4.5), que traduire l'isomorphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Hom}}^\cdot(L, f_*M) \xrightarrow{\sim} f_*\underline{\mathrm{Hom}}^\cdot(f^*L, M) \quad .$$

L'isomorphisme (ii) se déduit de (i) par application du foncteur $R\Gamma(Y,-)$.

Définition 4.7. On dit qu'un objet $(L \xleftarrow{u} M)$ de $D^-(XY)$ est quasi-cartésien si la flèche $Lf^*M \longrightarrow L$ définie par u est un isomorphisme de $D(X)$.

Proposition 4.8. Soient $(L \longleftarrow M) \in \mathrm{ob}\, D^-(XY)$, $(E \longleftarrow F) \in \mathrm{ob}\, D^+(XY)$. On suppose $(L \longleftarrow M)$ quasi-cartésien. Alors les flèches canoniques

$$i_X^*\underline{R\mathrm{Hom}}((L \longleftarrow M), (E \longleftarrow F)) \longrightarrow \underline{R\mathrm{Hom}}(L, E) \quad ,$$

$$i_Y^*\underline{R\mathrm{Hom}}((L \longleftarrow M), (E \longleftarrow F)) \longrightarrow \underline{R\mathrm{Hom}}(M, F)$$

sont des isomorphismes.

([1]) L'énoncé (4.5) et son corollaire (4.6) sont standard, nous n'en donnons une démonstration que pour épargner au lecteur une pêche à la ligne dans (loc. cit.).

Preuve. L'hypothèse que $(L \longleftarrow M)$ est quasi-cartésien signifie qu'il existe un complexe P, borné supérieurement, de $\underline{O}_Y$-Modules plats tel que $(L \longleftarrow M)$ soit isomorphe, dans D(XY), à $(f^*P \xleftarrow{Id} P)$. D'autre part, comme on l'a déjà observé dans la preuve de (4.2) (avec $\underline{O} = \mathbb{Z}$), la catégorie des $\underline{O}$-Modules possède assez d'injectifs du type $i_{X*}(I) \oplus i_{Y*}(J) = (I \xleftarrow{adj} f_*I) \oplus (0 \longleftarrow J)$ (où I (resp. J) est un $\underline{O}_X$- (resp. $\underline{O}_Y$-) Module injectif. Donc on peut supposer que $(E \longleftarrow F)$ est borné inférieurement et à composantes de ce type. On a alors $\underline{Hom}^\cdot(f^*P,E) \xrightarrow{\sim} \underline{RHom}(f^*P,E)$, et $\underline{Hom}^\cdot(P,F) \xrightarrow{\sim} \underline{RHom}(P,F)$ d'après (4.5), et la proposition en résulte, compte tenu de ce que

$$\underline{Hom}^\cdot((f^*P \xleftarrow{Id} P), (E \longleftarrow F)) = (\underline{Hom}^\cdot(f^*P,E) \longleftarrow \underline{Hom}^\cdot(P,F))$$

d'après (4.3.3).

Proposition 4.9. Soient $M \in \text{ob } D^-(Y)$, $(E \longleftarrow F) \in \text{ob } D^+(XY)$. On a

$$i_X^*\underline{RHom}((0 \longrightarrow M),(E \longleftarrow F)) = 0 \quad ,$$

et il existe des triangles distingués canoniques fonctoriels

$$\begin{array}{ccccc} Rf_*\underline{RHom}(Lf^*M,E) & & \overset{(4.6)}{(\simeq} & & \underline{RHom}(M,Rf_*E)\ ) \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & i_Y^*\underline{RHom}((0 \longleftarrow M),(E \longleftarrow F)) & \longrightarrow & \underline{RHom}(M,F) \end{array} \quad ,$$

$$\begin{array}{ccccc} \underline{RHom}(M,Rf_*E) & & \overset{(4.6)}{(\simeq} & & \underline{RHom}(Lf^*M,E)\ ) \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \underline{RHom}((0 \longleftarrow M),(E \longleftarrow F)) & \longrightarrow & \underline{RHom}(M,F) \end{array} \quad ,$$

où les flèches obliques de droite proviennent, par application des foncteurs $\underline{RHom}(M,-)$, $\underline{RHom}(M,-)$, de la flèche $F \longrightarrow Rf_*E$ définie par $(E \longleftarrow F)$.

Preuve. On peut supposer M borné supérieurement et à composantes plates, donc $Lf^*M \xrightarrow{\sim} f^*M$. On a la suite exacte évidente :

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow (f^*M \longleftarrow 0) \longrightarrow (f^*M \xleftarrow{Id} M) \longrightarrow (0 \longleftarrow M) \longrightarrow 0 \ .$$

Appliquant à (*) le foncteur $\underline{RHom}(-,(E \longleftarrow F))$, on obtient un triangle distingué

$$\begin{array}{ccc} & \underline{RHom}((f^*M \longleftarrow 0),(E \longleftarrow F)) & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ \underline{RHom}((0 \longleftarrow M),(E \longleftarrow F)) & \longrightarrow & \underline{RHom}((f^*M \xleftarrow{Id} M),(E \longleftarrow F)) \end{array} \ .$$

Induisant ce triangle sur X, puis sur Y , on obtient, compte tenu de (4.4) et (4.8), la première relation et le premier triangle distingué de (4.9). Le second triangle se déduit du premier par application du foncteur $R\Gamma(Y,-)$, compte tenu de (4.2).

4.10. Soient $M \in \text{ob } D^-(Y)$, $F \in \text{ob } D^+(Y)$. On suppose que f^* est dérivable en F au sens de Deligne (SGA 4 XVII) et que $Lf^*F \in \text{ob } D^+(X)$. Cela signifie, rappelons-le que le pro-objet de $D(X)$

$$Lf^*F \overset{dfn}{=} \text{"lim"} \underset{F' \xrightarrow{s} F}{\longleftarrow} f^*F' \quad ,$$

où s parcourt les classes d'homotopie de quasi-isomorphismes de but F , est essentiellement constant de valeur un objet de $D^+(X)$ (cette hypothèse est vérifiée par exemple si f est de tor-dimension finie, ou si F est d'amplitude plate finie (SGA 6 I 5)). On a alors un objet de $D^+(XY)$:

$$(Lf^*F \longleftarrow F) \overset{dfn}{=} \text{"lim"} \underset{F' \xrightarrow{s} F}{\longleftarrow} (f^*F' \xleftarrow{Id} F') \quad .$$

On pose :

(4.10.1) $\quad \underline{R\mathrm{Hom}}(Y/X;M,F) = i_Y^{*}\underline{R\mathrm{Hom}}((0 \longleftarrow M), (Lf^{*}F \longleftarrow F))$,

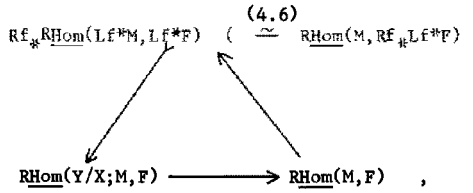
$\underline{R\mathrm{Hom}}(Y/X;M,F) = \underline{R\mathrm{Hom}}((0 \longleftarrow M), (Lf^{*}F \longleftarrow F))$,

$\underline{\mathrm{Ext}}^{i}(Y/X;M,F) = H^{i}\underline{R\mathrm{Hom}}(Y/X;M,F)$,

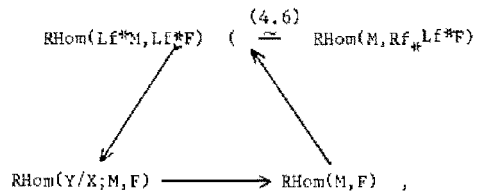
$\mathrm{Ext}^{i}(Y/X;M,F) = H^{i}R\mathrm{Hom}(Y/X;M,F)$.

De (4.9) on déduit des triangles distingués canoniques fonctoriels :

(4.10.2)



(4.10.3)



où les flèches obliques de droite sont données par la flèche "d'adjonction" $F \longrightarrow Rf_{*}Lf^{*}F$. Ceux-ci fournissent des suites exactes longues de cohomologie :

(4.10.4) $\quad \ldots \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^{i}(Y/X;M,F) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^{i}(M,F) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^{i}(M,Rf_{*}Lf^{*}F) \longrightarrow$

$\longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^{i+1}(Y/X;M,F) \longrightarrow \ldots$,

(4.10.5) $\quad \ldots \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i}(Y/X;M,F) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i}(M,F) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i}(Lf^{*}M,Lf^{*}F) \longrightarrow$

$\longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+1}(Y/X;M,F) \longrightarrow \ldots$.

Quand $\underline{0}$ est le faisceau constant $\mathbb{Z}$ (de sorte que l'hypothèse du début de (4.10) est toujours vérifiée), on pose

(4.10.5) $$R\Gamma(Y/X;F) = R\mathrm{Hom}(Y/X;\mathbb{Z},F) \quad ,$$

$$H^i(Y/X;F) = H^i R\Gamma(Y/X;F) \quad .$$

Le groupe $H^i(Y/X;F)$ s'appelle i-ième groupe de cohomologie relative de F modulo Y . Quand $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de localisation, $H^i(Y/X;F)$ n'est autre que le i-ième groupe d'hypercohomologie de F à support dans le fermé complémentaire de Y (SGA 4 V).

Remarques 4.11. a) L'introduction des $R\mathrm{Hom}(Y/X;M,F)$ est due à Grothendieck, qui les définissait par le triangle (4.10.3). La définition que nous donnons ici, outre qu'elle intervient naturellement dans les calculs de (2.3), a l'avantage d'être fonctorielle.

b) Supposons $f : X \longrightarrow Y$ de tor-dimension finie. Notons $D'(XY)$ la catégorie suivante. Les objets de $D'(XY)$ sont les triplets (E,F,u), où $E \in \mathrm{ob}\, D(X)$, $F \in \mathrm{ob}\, D(Y)$, et $u \in \mathrm{Hom}_{D(X)}(Lf^*F,E)$. Une flèche $(E,F,u) \to (E',F',u')$ est un couple (a,b), $a \in \mathrm{Hom}_{D(X)}(E,E')$, $b \in \mathrm{Hom}_{D(Y)}(F,F')$ tel que le carré

$$\begin{array}{ccc} E & \xleftarrow{\ u\ } & Lf^*F \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Lf^*b} \\ E' & \xleftarrow{\ u'\ } & Lf^*F' \end{array}$$

soit commutatif. La catégorie $D'(XY)$ est triangulée, au sens de Verdier [27], les triangles exacts étant définis comme les triplets $(\underline{E},\underline{F},\underline{u})$, où $\underline{E}$ (resp. $\underline{F}$) est un triangle distingué de $D(X)$ (resp. $D(Y)$) et $\underline{u} : Lf^*\underline{F} \longrightarrow \underline{E}$ un morphisme de triangles. On a un foncteur évident

(4.11.1) $$D(XY) \longrightarrow D'(XY) \quad ,$$

qui est exact et conservatif. En revanche, (4.11.1) n'est pas fidèle en général. En effet, avec les notations de (4.10), on a

$$\mathrm{Hom}_{D'(XY)}((0 \leftarrow M), (Lf^*F \leftarrow F)) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Ext}^0(M,F) \longrightarrow \mathrm{Ext}^0(Lf^*M,Lf^*F)),$$

tandis que

$$\mathrm{Hom}_{D(XY)}((0 \longleftarrow M),(Lf^*F \longleftarrow F)) = \mathrm{Ext}^0(Y/X;M,F) \qquad (4.10.1)\ ,$$

et la flèche du deuxième groupe dans le premier est donnée par la suite exacte (4.10.5)

$$\mathrm{Ext}^0(Y/X;M,F) \longrightarrow \mathrm{Ext}^0(M,F) \longrightarrow \mathrm{Ext}^0(Lf^*M,Lf^*F) \quad ;$$

cette flèche n'est en général ni injective ni surjective, comme on le sait déjà dans le cas de la cohomologie à support dans un fermé (cf (4.10.5)).

4.12. Soit un carré "commutatif" (i.e. à isomorphisme donné près) de topos annelés

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ Z & \xrightarrow{g} & T \end{array} \quad .$$

Celui-ci définit de manière évidente un morphisme de topos annelés

$$(p,q) \ : \ XY \longrightarrow ZT \quad ;$$

pour un faisceau d'ensembles (resp. de modules) $(E \xleftarrow{u} F)$ de ZT,

$$(p,q)^{-1}(E \longleftarrow F) = (p^{-1}E \longleftarrow q^{-1}F)$$

(resp. $\qquad (p,q)^*(E \longleftarrow F) = (p^*E \longleftarrow q^*F)$) ,

la flèche au second membre étant composée de l'isomorphisme

$f^{-1}q^{-1}F \xrightarrow{\sim} p^{-1}g^{-1}F$ (resp. $f^*q^*F \xrightarrow{\sim} p^*g^*F$) et de $p^{-1}u$ (resp. p^*u).

On a des carrés "commutatifs" de topos annelés :

(4.12.1)
$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i_X} & XY & \xleftarrow{i_Y} & Y \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (p,q)} & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ Z & \xrightarrow{i_Z} & ZT & \xleftarrow{i_T} & T \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les morphismes de restriction (4.1.2).

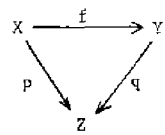
Proposition 4.12.2. La flèche de $D(X)$ (resp. $D(Y)$)

$$i_X^* L_{XY/ZT} \longrightarrow L_{X/Z} \qquad (\text{resp. } i_Y^* L_{XY/ZT} \longrightarrow L_{Y/T})$$

définie (II 1.2.7.2) par le carré (4.12.1) est un isomorphisme.

Preuve. On a en effet $i_X^* \underline{O}_{XY} = i_X^{-1} \underline{O}_{XY} = \underline{O}_X$, et des relations analogues avec i_Y, i_Z, i_T, d'où $L_{X/XY} = 0$, $L_{Y/XY} = 0$, $L_{Z/ZT} = 0$, $L_{T/ZT} = 0$, et la proposition découle du triangle de transitivité (II 2.1.5.6).

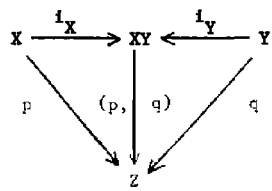
4.13. De manière analogue, un triangle "commutatif" de topos annelés



définit un morphisme de topos annelés

$$(p,q) : XY \longrightarrow Z \ ,$$

et des triangles "commutatifs"



,

et la flèche correspondante de $D(X)$ (resp. $D(Y)$)

$$i_X^* L_{XY/Z} \longrightarrow L_{X/Z} \qquad (\text{resp. } i_Y^* L_{XY/Z} \longrightarrow L_{Y/Z})$$

est un isomorphisme.

CHAPITRE IV

DEFORMATIONS DE MODULES

Sauf mention du contraire, les faisceaux d'anneaux considérés dans ce chapitre sont supposés commutatifs et unitaires.

Introduction.

Soient $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas, $i : X_o \hookrightarrow X$ une immersion fermée définie par un Idéal I de carré nul, M_o un $\underline{O}_{X_o}$-Module localement libre de type fini. Il est bien connu et élémentaire qu'il existe une obstruction

$$\omega \in H^2(X_o, \underline{End}(M_o) \otimes I)$$

dont l'annulation est nécessaire et suffisante pour l'existence d'une déformation de M_o en un $\underline{O}_X$-Module localement libre de type fini. Fixons $f_o = if : X_o \longrightarrow Y$; il est naturel de se demander comment varie ω en fonction de la Y-extension i, de classe (III 1.2.3)

$$e(i) \in Ext^1(L_{X_o/Y}, I) \quad .$$

Pour résoudre cette question, il s'avère commode de transformer le problème, par l'artifice de Nagata, en un problème de déformation d'Algèbres graduées, en remplaçant M_o par l'Algèbre des nombres duaux $\underline{O}_{X_o} \oplus M_o$ (II 1.1.1.3). Une variante graduée de (III 2.1.7 (iii)) fournit alors la réponse, qui est que ω s'exprime comme cup-produit

$$\omega = (e(i) \otimes M_o) \quad at(M_o) \quad ,$$

où

$$at(M_o) \in H^1(X_o, L_{X_o/Y} \otimes M_o)$$

est une classe ne dépendant que de f_o et M_o. Quand f_o est lisse, $at(M_o)$

n'est autre que la classe de "l'extension des parties principales", ou "classe d'Atiyah" [28], qui représente l'obstruction à l'existence d'une connexion sur M_o relativement à Y ; on retrouve ainsi en corollaire le fait bien connu que l'existence d'une telle connexion implique la possibilité de déformer M_o en un Module localement libre au-dessus de tout Y-épaississement d'ordre un de X_o . La méthode nécessite quelques sorites, rassemblés aux n°s 1 et 2, sur l'extension de la théorie du complexe cotangent au cas gradué ; cette extension est d'ailleurs essentiellement triviale. Le problème du début est traité, dans un cadre un peu plus général, au n° 3, avec d'autres problèmes analogues.

Dans tout ce chapitre, T désigne un topos fixé.

1. Catégories dérivées de Modules gradués.

1.1. Anneaux et Modules gradués.

1.1.1. Soit X un faisceau d'ensembles (resp. un $\mathbb{Z}$-Module) de T . Une graduation sur X est une famille de sous-faisceaux d'ensembles (resp. de sous-$\mathbb{Z}$-Modules) $(X^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que

$$X = \coprod X^n \qquad (\text{resp. } X = \oplus X^n) \quad .$$

Un faisceau (resp. $\mathbb{Z}$-Module) gradué est un faisceau (resp. $\mathbb{Z}$-Module) muni d'une graduation. On notera

$$T^{gr} \qquad (\text{resp. } \mathbb{Z}\text{-Modgr}(T))$$

la catégorie des faisceaux gradués (resp. $\mathbb{Z}$-Modules gradués) de T , les morphismes étant les homomorphismes $f : X \longrightarrow Y$ gradués de degré zéro, i.e. tels que $f(X^n) \subset Y^n$ pour tout n . La catégorie T^{gr} n'est autre que la catégorie produit $T^{\mathbb{Z}}$, ou topos somme de $\mathbb{Z}$ copies de T .

1.1.2. Un Anneau gradué de T est un Anneau A de T , muni d'une graduation sur le $\mathbb{Z}$-Module sous-jacent telle que $A^iA^j \subset A^{i+j}$ quels que soient i et $j \in \mathbb{Z}$. Une A-Algèbre graduée est un Anneau gradué B muni d'un homomorphisme d'Anneaux gradués $A \longrightarrow B$. Un A-Module gradué est un A-Module M , muni d'une

graduation sur le $\mathbb{Z}$-Module sous-jacent telle que $A^i M^j \subset M^{i+j}$ quels que soient i et $j \in \mathbb{Z}$. On notera

$$A - \text{Alggr} \qquad (\text{resp. } A\text{-Modgr})$$

la catégorie des A-Algèbres graduées (resp. A-Modules gradués) (avec pour morphismes les homomorphismes gradués de degré zéro).

Dans la suite, nous ne considérerons, sauf mention du contraire, que des Anneaux gradués à degrés ≥ 0 i.e. tels que $A^i = 0$ pour $i < 0$.

1.1.3. Soit A un Anneau gradué de T. Pour $M \in \text{ob } A\text{-Modgr}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on note $M(n)$ le A-Module gradué ayant même A-Module non gradué sous-jacent et tel que $M(n)^p = M^{n+p}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$. On note d'autre part

$$k^n : A\text{-Modgr} \longrightarrow A^o\text{-Mod}$$

le foncteur "composante de degré n". Si F est un A^o-Module, on désignera encore par F le A-Module gradué égal à F placé en degré zéro, i.e. tel que $F^o = F$, $F^i = 0$ pour $i \neq 0$. Le foncteur k^n admet un adjoint à droite et un adjoint à gauche, donnés par les formules :

$$\text{(1.1.3.1)} \qquad \text{Hom}_{A^o\text{-Mod}}(k^n(E),F) = \text{Hom}_{A\text{-Modgr}}(E,F(-n)) \quad ,$$

$$\text{(1.1.3.2)} \qquad \text{Hom}_{A^o\text{-Mod}}(F,k^n(E)) = \text{Hom}_{A\text{-Modgr}}(F \otimes_{A^o} A(-n),E) \quad ,$$

pour $E \in \text{ob } A\text{-Modgr}$, $F \in \text{ob } A^o\text{-Mod}$.

1.1.4. Soient E, $F \in \text{ob } A\text{-Modgr}$. Comme dans le cas où T est le topos ponctuel, $E \otimes_A F$ est de façon naturelle un A-Module gradué, de graduation

$$k^n(E \otimes_A F) = \sum_{i+j=n} \text{Im } E^i \otimes_{A^o} F^j \quad .$$

Si B est une A-Algèbre graduée, on a un foncteur extension des scalaires

$$B \otimes_A - : A\text{-Modgr} \longrightarrow B\text{-Modgr} \quad .$$

1.1.5. Soit $X \in \mathrm{ob}\ T^{gr}$ (1.1.1). Le A-Module libre engendré par X est de façon naturelle un A-Module gradué, de graduation

$$k^n(A^{(X)}) = \bigoplus_{i+j=n} A^i \otimes_{A^o} A^{o(X^j)} .$$

En d'autres termes, on a

$$A^{(X)} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A^{o(X^n)} \otimes_{A^o} A(-n) .$$

On dit qu'un A-Module gradué est <u>libre</u> s'il est isomorphe à un Module gradué du type $A^{(X)}$ pour $X \in \mathrm{ob}\ T^{gr}$ (dans le cas où T est le topos ponctuel, cette définition coïncide avec la définition classique). Le foncteur $X \longmapsto A^{(X)}$ de T^{gr} dans $A\text{-Modgr}$ est adjoint à gauche du foncteur "oubli" qui à un A-Module gradué M associe le faisceau gradué somme disjointe des faisceaux d'ensembles sous-jacents aux M^i : autrement dit, pour $X \in \mathrm{ob}\ T^{gr}$, $M \in \mathrm{ob}\ A\text{-Modgr}$, on a

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-Modgr}}(A^{(X)}, M) = \mathrm{Hom}_{T^{gr}}(X, \amalg M^i) .$$

1.1.6. Soit M un A-Module gradué. L'Algèbre symétrique $S_A(M)$ est de manière naturelle une A-Algèbre graduée ([1]), de graduation

$$k^n(S_A(M)) = \sum_{i_1+\ldots+i_p = n} \mathrm{Im}\, M^{i_1} \otimes \ldots \otimes M^{i_p}$$

(produit tensoriel pris sur A^o). En particulier, si M est à degré ≥ 0, il en est de même de $S_A(M)$, et l'on a

$$k^o(S_A(M)) = S_{A^o}(M^o) .$$

Le foncteur $M \longmapsto S_A(M)$ est adjoint à gauche du foncteur "oubli" $A\text{-Alggr} \longrightarrow A\text{-Modgr}$: pour $B \in \mathrm{ob}\ A\text{-Alggr}$, on a

---

([1]) non nécessairement à degrés ≥ 0 ...

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-Alggr}}(S_A(M),B) = \mathrm{Hom}_{A\text{-Modgr}}(M,B) \quad .$$

1.1.7. Pour $X \in \mathrm{ob}\ T^{gr}$, on pose

$$S_A(A^{(X)}) = A[X] \quad \in \mathrm{ob}\ A\text{-Alggr} \quad .$$

On dit qu'une A-Algèbre graduée est libre si elle est isomorphe à une Algèbre graduée du type $A[X]$, $X \in \mathrm{ob}\ T^{gr}$.

On peut résumer les formules d'adjonction (1.1.6) à (1.1.8) par le diagramme

$$A\text{-Alggr} \underset{S_A(-)}{\overset{\longrightarrow}{\longleftarrow}} A\text{-Modgr} \underset{A^{(-)}}{\overset{\longrightarrow}{\longleftarrow}} T^{gr} \quad ,$$

où les flèches supérieures sont les flèches d'oubli définies plus haut, et les flèches inférieures leurs adjointes à gauche.

1.1.8. Voici une variante des formules d'adjonction précédentes, qui nous sera utile pour la suite. Soit A un Anneau de T (non gradué), qu'on peut aussi regarder comme un Anneau gradué de graduation concentrée en degré zéro. Notons T^{gr+} (resp. $A\text{-Modgr}^+$, resp. $A\text{-Alggr}^+$) la sous-catégorie pleine de T^{gr} (resp. A-Modgr, resp. A-Alggr) formée des objets X tels que $X^i = \emptyset$ pour $i \leq 0$ (resp. $X^i = 0$ pour $i \leq 0$, resp. $X^i = 0$ pour $i < 0$ et $X^0 = A$). On a alors le diagramme d'adjonctions

$$A\text{-Alggr}^+ \underset{S_A(-)}{\overset{\longrightarrow}{\longleftarrow}} A\text{-Modgr}^+ \underset{A^{(-)}}{\overset{\longrightarrow}{\longleftarrow}} T^{gr+}$$

où les flèches supérieures sont les flèches d'oubli évidentes.

1.2. Catégories dérivées.

1.2.1. Soit A un Anneau gradué de T. Il résulte de l'exactitude des foncteurs k^n que la catégorie $A\text{-Modgr}$ (1.1.2) est une catégorie abélienne vérifiant AB 5. De plus, les objets $\mathbb{Z}^{(U)} \otimes A(-n)$, pour $U \in \text{ob } T$ et $n \in \mathbb{Z}$, forment une petite famille de générateurs, comme il découle aussitôt de (1.1.3.2). La catégorie $A\text{-Modgr}$ possède donc assez d'injectifs. On notera

$$D(A)_{gr}$$

la catégorie dérivée de $A\text{-Modgr}$, i.e. [27] la catégorie localisée de $C(A\text{-Modgr})$ par rapport aux quasi-isomorphismes ; notons qu'une flèche f de $C(A\text{-Modgr})$ est un quasi-isomorphisme si et seulement si la flèche de $C(A\text{-Mod})$ sous-jacente est un quasi-isomorphisme au sens usuel, ou encore si $k^i f$ est un quasi-isomorphisme de $C(A^o\text{-Mod})$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. On notera $D^-(A)_{gr}$, $D^+(A)_{gr}$, etc. les sous-catégories pleines de $D(A)_{gr}$ définies par les conditions de degré habituelles. On désignera par

$$\mathrm{RHom}_A(-,-)_{gr}$$

le foncteur dérivé du foncteur $\mathrm{Hom}_A^{\cdot}(-,-)_{gr}$, et l'on posera, pour E, $F \in \text{ob } D(A)_{gr}$, $i \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{Ext}_A^i(E,F)_{gr} = \mathrm{Hom}_{D(A)_{gr}}(E,F[i]) = \mathrm{Hom}_{D(A)_{gr}}(E[-i],F)$$

$$\left(= H^i \mathrm{RHom}_A(E,F)_{gr} \quad \text{si} \quad F \in \text{ob } D^+(A)_{gr} \right) .$$

1.2.2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Le foncteur $k^n : A\text{-Modgr} \longrightarrow A^o\text{-Mod}$, étant exact, définit un foncteur

$$k^n : D(A)_{gr} \longrightarrow D(A^o) .$$

De manière analogue, le foncteur $M \longmapsto M(n)$ de la catégorie $A\text{-Modgr}$ dans elle-même induit un foncteur, encore noté $M \longmapsto M(n)$, de $D(A)_{gr}$ dans $D(A)_{gr}$. La formule

(1.1.3.1) fournit, par passage aux catégories dérivées, un isomorphisme de foncteurs cohomologiques

$$\text{(1.2.2.1)} \qquad \operatorname{Ext}^i_{A^o}(k^n(E),F) \simeq \operatorname{Ext}^i_A(E,F(-n))_{gr}$$

pour $E \in \text{ob } D(A)_{gr}$, $F \in \text{ob } D(A^o)$ (d'où résulte d'ailleurs un isomorphisme

$$\operatorname{RHom}_{A^o}(k^n(E),F) \simeq \operatorname{RHom}_A(E,F)(-n))_{gr}$$

pour $E \in \text{ob } D(A)_{gr}$, $F \in \text{ob } D^+(A^o))$.

1.2.3. Pour tout $M \in \text{ob A-Modgr}$, il existe un épimorphisme $L \longrightarrow M$ de A-Modgr tel que le A-Module sous-jacent à L soit plat : cela résulte simplement de ce que les $\mathbb{Z}^{(U)} \otimes A(-n)$, $U \in \text{ob } T$, $n \in \mathbb{Z}$, forment une famille de générateurs de A-Modgr, comme on l'a vu plus haut. On en déduit facilement que le bifoncteur "produit tensoriel gradué" $\otimes_A$ (1.1.4) admet un dérivé gauche

$$\overset{L}{\otimes}_A : D^-(A)_{gr} \times D(A)_{gr} \longrightarrow D(A)_{gr} ,$$

envoyant $D^-(A)_{gr} \times D^-(A)_{gr}$ dans $D^-(A)_{gr}$. Pour $E \in \text{ob } D^-(A)_{gr}$, $F \in \text{ob } D(A)_{gr}$, $E \overset{L}{\otimes}_A F$ est défini comme le pro-objet de $D(A)_{gr}$

$$\underset{E' \longrightarrow E}{\text{"lim"} \leftarrow} E' \otimes_A F ,$$

où $E' \longrightarrow E$ parcourt les classes d'homotopie de quasi-isomorphismes gradués ; ce pro-objet est essentiellement constant de valeur $P \otimes_A F$, où P est un complexe borné supérieurement de A-Modules gradués plats (l'existence d'un tel quasi-isomorphisme $P \longrightarrow E$ découle de la remarque faite plus haut).

Si B est une A-Algèbre graduée, on définit de manière analogue le dérivé gauche du foncteur extension des scalaires (1.1.4)

$$B \overset{L}{\otimes}_A - : D^-(A)_{gr} \longrightarrow D^-(B)_{gr} .$$

1.2.4. On appelle faisceau simplicial gradué de T tout objet de la catégorie $\mathrm{Simpl}(T)^{gr} = \mathrm{Simpl}(T^{gr})$. Par un Anneau simplicial gradué A de T on entend un Anneau gradué de $\mathrm{Simpl}(T)$ (ou, ce qui revient au même, un objet simplicial de la catégorie des Anneaux gradués de T) ; quand on parlera de A-Module gradué (resp. A-Algèbre graduée), il sera sous-entendu qu'il s'agit de A-Module gradué (resp. A-Algèbre graduée) de $\mathrm{Simpl}(T)$.

On dit qu'un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ de faisceaux simpliciaux gradués de T est un quasi-isomorphisme si le morphisme de faisceaux simpliciaux non gradués sous-jacent est un quasi-isomorphisme (I 2.2.1), ou, ce qui revient au même, si chaque $f^i : X^i \longrightarrow Y^i$ est un quasi-isomorphisme. Soit A un Anneau simplicial gradué. On dit qu'un morphisme $u : M \longrightarrow N$ de A-Modules gradués est un quasi-isomorphisme si le morphisme de A-Modules non gradués sous-jacent est un quasi-isomorphisme (I 3.1.7), ce qui signifie aussi que chaque $u^i : M^i \longrightarrow N^i$ est un quasi-isomorphisme. On dit qu'un morphisme de A-Algèbres graduées est un quasi-isomorphisme si le morphisme de A-Modules sous-jacent est un quasi-isomorphisme. Définition analogue pour un morphisme de A-Algèbres graduées augmentées vers une A-Algèbre graduée B .

On appelle catégorie dérivée graduée de T , et l'on note $D.(T)_{gr}$ la catégorie localisée de $\mathrm{Simpl}(T)^{gr}$ par rapport aux quasi-isomorphismes (I 1.4.1). C'est simplement le produit de $\mathbb{Z}$ exemplaires de $D.(T)$. Soit A un Anneau simplicial gradué de T . On note $D.(A)_{gr}$ la catégorie localisée de A-Modgr par rapport aux quasi-isomorphismes. Quand A est l'objet simplicial constant défini par un Anneau gradué A de T , $D.(A)_{gr}$ s'identifie par Dold-Puppe (cf. (I 1.4.6)) à la sous-catégorie pleine de $D(A)_{gr}$ (1.2.1) formée des objets dont la cohomologie est nulle en degré > 0 . Enfin, on note $D(A\text{-Alggr})$ (resp. $D(A\text{-Alggr}/B)$ la catégorie localisée de A-Alggr (resp. A-Alggr/B , B une A-Algèbre graduée donnée) par rapport aux quasi-isomorphismes.

Les sorites développés en (I 3) dans le cas non gradué s'étendent, trivialement, mutatis mutandis, au cas gradué : constructions de cylindres, cônes, espaces de chemins, de lacets, homotopies, etc. Les catégories $D.(A)_{gr}$, $D(A\text{-Alggr})$,

D(A-Alggr/B) se calculent par fractions à partir de catégories "à homotopie près" convenables. On a une notion de triangle distingué de $D.(A)_{gr}$ (triangle isomorphe au triangle défini par le cône d'un morphisme de A-Modgr), de triangle distingué associé à une suite exacte de A-Modgr. On pose, pour $E, F \in \text{ob } D.(A)_{gr}$,

$$\mathbb{E}\text{xt}^i_A(E,F)_{gr} = \begin{cases} \text{Hom}_{D.(A)_{gr}}(E,\sigma^i F) & \text{si } i \geq 0 \\ \text{Hom}_{D.(A)_{gr}}(\sigma^{-i}E,F) & \text{si } i \leq 0 \end{cases} .$$

Un triangle distingué de $D.(A)_{gr}$ donne naissance, comme en (I 3.2.2.10), à des suites exactes longues de $\mathbb{E}\text{xt}^i(-,-)_{gr}$. On a un analogue gradué de (I 3.2.3.8) permettant de calculer $\mathbb{E}\text{xt}^1_A(E,F)_{gr}$ en termes d'extensions ordinaires de Modules gradués. Enfin on a un sorite de produit tensoriel dérivé gradué $\overset{\mathbb{L}}{\otimes} : D.(A)_{gr} \times D.(A)_{gr} \longrightarrow D.(A)_{gr}$. Nous n'insisterons pas davantage sur cette transposition des résultats de (I 3) au cas gradué, laquelle ne présente aucune difficulté.

1.3. Résolutions standard.

1.3.1. Soient A un Anneau gradué de T, B une A-Algèbre graduée (rappelons qu'on se borne à considérer des Anneaux gradués à degrés ≥ 0). Le couple de foncteurs adjoints (1.1.7)

$$A\text{-Alggr} \underset{A[-]}{\overset{\text{"oubli"}}{\rightleftarrows}} T^{gr\geq 0} ,$$

où $T^{gr\geq 0}$ désigne la sous-catégorie pleine de T^{gr} formée des objets X tels que $X^i = \emptyset$ pour $i < 0$, fournit une résolution standard (I 1.5)

$$P_A(B)^{gr} ,$$

qui est une A-Algèbre simpliciale graduée, libre en chaque degré, augmentée vers B par un quasi-isomorphisme gradué. Il résulte aussitôt des définitions qu'on a

$$k^o P_A(B)^{gr} = P_{A^o}(B^o) , \tag{1.3.1.1}$$

où le second membre est la résolution standard de B^o sur A^o (I 1.5.5.6), la composante de degré zéro de l'augmentation $P_A(B)^{gr} \longrightarrow B$ s'identifiant à l'augmentation naturelle de $P_{A^o}(B^o)$ sur B^o .

1.3.2. Soient A un Anneau de T , B une A-Algèbre graduée (à degrés ≥ 0). Le couple de foncteurs adjoints (1.1.8)

$$A\text{-Alg}gr^+ \underset{A[-]}{\overset{\text{"oubli"}}{\rightleftarrows}} T^{gr+}$$

fournit de même une résolution standard

$$P_A(B)^{gr+} \quad ,$$

qui est un objet simplicial de $A\text{-Alg}gr^+$, libre en chaque degré, augmenté vers B par un quasi-isomorphisme gradué. Observant que, pour $X \in \text{ob } T^{gr+}$, on a

$$A[X] = A \oplus A^{(X^1)} \oplus o(1) \quad ,$$

où $o(1)$ désigne une somme de termes de degré ≥ 2, on trouve que $P_A(B)^{gr+}$ s'écrit

$$P_A(B)^{gr+} = A \oplus F_A(B^1) \oplus o(1) \quad , \tag{1.3.2.1}$$

où $F_A(B^1)$ désigne la résolution standard du A-Module B^1 (I 1.5.5.2) ; la partie homogène de degré un de l'augmentation $P_A(B)^{gr+} \longrightarrow B$ s'identifie à l'augmentation naturelle de $F_A(B^1)$ sur B^1 .

1.3.3. Soient A un Anneau simplicial gradué, B une A-Algèbre graduée. On note $P_A^{\Delta}(B)^{gr}$ le sous-objet diagonal de $P_A(B)^{gr}$: c'est une A-Algèbre graduée, libre degré à degré, augmentée vers B par un quasi-isomorphisme. De même, si A est de graduation concentrée en degré zéro, on note $P_A^{\Delta}(B)^{gr+}$ le sous-objet diagonal de $P_A(B)^{gr+}$: c'est une A-Algèbre graduée, telle que $k^o(P_A(B)^{gr+}) = A$, libre degré à degré, et augmentée vers B par un quasi-isomorphisme. On a des formules analogues à (1.3.1.1) et (1.3.1.2) avec un Δ en exposant.

1.3.4. On a, pour les résolutions $P_A(B)^{gr}$, $P_A(B)^{gr+}$ des propriétés de fonctorialité analogues à celles décrites en (II 1.2.1, 1.2.2) dans le cas non gradué. Nous laissons au lecteur le soin de les énoncer.

2. Complexe cotangent d'une Algèbre graduée.

2.1. Modules de différentielles gradués.

Soient A un Anneau gradué de T , B une A-Algèbre graduée. Dans la suite exacte (II 1.1.2.1)

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow B \otimes_A B \xrightarrow{p} B \longrightarrow 0 \quad ,$$

$B \otimes_A B$ est une A-Algèbre graduée (1.1.4) et le morphisme produit p est un homomorphisme de A-Algèbres graduées, donc I est un Idéal gradué. Par suite $\Omega^1_{B/A} = I/I^2$ est de façon naturelle un B-Module gradué, et la dérivation $d_{B/A} : B \longrightarrow \Omega^1_{B/A}$ est un homomorphisme (de degré zéro) de A-Modules gradués.

Si $B \longrightarrow C$ est un homomorphisme de A-Algèbres graduées, l'homomorphisme canonique (II 1.1.2.8) $\Omega^1_{B/A} \otimes_B C \longrightarrow \Omega^1_{C/A}$ est un homomorphisme de C-Modules gradués, de même que l'homomorphisme canonique $\Omega^1_{C/A} \longrightarrow \Omega^1_{C/B}$, et la suite

$$\Omega^1_{B/A} \otimes_B C \longrightarrow \Omega^1_{C/A} \longrightarrow \Omega^1_{C/B} \longrightarrow 0 \tag{2.1.1}$$

est une suite exacte de C-Modules gradués (que l'on peut compléter par un zéro à gauche dès que C est libre sur B comme Algèbre non graduée).

Si M est un B-Module gradué, on définit le groupe

$$\mathrm{Der}_A(B,M)_{gr}$$

des A-dérivations graduées de B dans M (i.e. des dérivations d telles que $d(B^i) \subset M^i$ pour tout i). La dérivation $d_{B/A}$ définit un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A},M)_{gr} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_A(B,M)_{gr} \quad . \tag{2.1.2}$$

D'autre part, considérant l'Algèbre des nombres duaux $B \oplus M$ comme une B-Algèbre graduée de graduation $k^n(B \oplus M) = k^n(B) \oplus k^n(M)$, on a un isomorphisme canonique

fonctoriel

$$\text{(2.1.3)} \qquad \mathrm{Der}_A(B,M)_{gr} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A\text{-Alggr}/B}(B, B \oplus M) \quad ,$$

défini comme dans le cas non gradué (II 1.1.1.4).

Observons que l'on a $k^o(B \otimes_A B) = B^o \otimes_{A^o} B^o$, d'où

$$\text{(2.1.4)} \qquad k^o(\Omega^1_{B/A}) = \Omega^1_{B^o/A^o} \quad ,$$

isomorphisme fonctoriel en $A \longrightarrow B$.

Supposons A concentré en degré zéro et $B^o = A$. D'après (2.1.4), on a alors $k^o(\Omega^1_{B/A}) = 0$. On a de plus un isomorphisme canonique

$$\text{(2.1.5)} \qquad k^1(\Omega^1_{B/A}) = B^1 \quad ,$$

fonctoriel en $B \in \mathrm{ob}\ A\text{-Alggr}^+$ (1.1.8) (ce qui signifie que, pour $f : B \longrightarrow C$, la flèche induite sur $k^1(\Omega^1_{-/A})$ s'identifie à $f^1 : B^1 \longrightarrow C^1$). En effet, on a

$$B \otimes_A B = A \oplus (B^1 \oplus B^1) \oplus o(1) \quad ,$$

où $o(1)$ désigne une somme de termes de degré ≥ 2, et le produit $p : B \otimes_A B \longrightarrow B$ s'écrit

$$p = \mathrm{Id} \oplus s \oplus \ldots \quad ,$$

où $s : B^1 \oplus B^1 \longrightarrow B^1$ est l'addition. On en déduit

$$\mathrm{Ker}(p) = A^1 \oplus o(1) \quad ,$$

et (2.1.5) en découle aussitôt.

2.2. Définition du complexe cotangent gradué.

Soient A un Anneau gradué de T , B une A-Algèbre graduée. On pose

$$\text{(2.2.1)} \qquad L^{gr}_{B/A} = \Omega^1_{P/A} \otimes_P B \quad ,$$

où $P = P_A(B)^{gr}$ (1.3.1). C'est un B-Module simplicial gradué (qu'on peut aussi

regarder par Dold-Puppe comme un complexe de chaînes de B-Modules gradués) dont chaque composante $(L^{gr}_{B/A})_n$ est un B-Module gradué libre. Il dépend fonctoriellement de $A \longrightarrow B$ d'une manière évidente. Une A-Algèbre graduée libre étant encore libre comme A-Algèbre non graduée, il découle de (II 1.2.6.3) qu'on a un isomorphisme canonique fonctoriel de D(B)

$$L^{gr}_{B/A} \simeq L_{B/A} \quad . \tag{2.2.2}$$

On a une augmentation naturelle

$$L^{gr}_{B/A} \longrightarrow \Omega^1_{B/A} \tag{2.2.3}$$

induisant un isomorphisme de B-Modules gradués

$$H_o(L^{gr}_{B/A}) \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{B/A} \quad .$$

Des raisonnements analogues à ceux du cas non gradué (II 1.2) montrent que (2.2.3) est un quasi-isomorphisme si B est une A-Algèbre graduée libre et que $L^{gr}_{B/A}$ peut se calculer à l'aide d'une résolution graduée libre quelconque Q de B, i.e. $L^{gr}_{B/A} \simeq \Omega^1_{Q/A} \otimes_Q B$ dans $D(B)_{gr}$.

Les formules (1.3.1.1) et (2.1.4) impliquent qu'on a un isomorphisme canonique fonctoriel de B^o-Modules simpliciaux

$$k^o(L^{gr}_{B/A}) = L_{B^o/A^o} \quad . \tag{2.2.4}$$

D'autre part, si A est de graduation concentrée en degré zéro et $B^o = A$, on a, dans $D(A)$, $k^o(L^{gr}_{B/A}) = 0$, et un isomorphisme canonique

$$k^1(L^{gr}_{B/A}) = B^1 \quad , \tag{2.2.5}$$

fonctoriel en $B \in \mathrm{ob}\ A\text{-Alg}gr^+$. Le premier point découle de (2.2.4) (compte tenu de ce que $L_{A/A} = 0$), le second du calcul de $L^{gr}_{B/A}$ à l'aide de la résolution graduée libre $P_A(B)^{gr+}$ (1.3.2) : on tire en effet de (1.3.2.1) et (2.1.5)

$$k^1(\Omega^1_{P/A} \otimes_P B) = F_A(B^1)$$

pour $P = P_A(B)^{gr+}$, d'où (2.2.5).

Soient A un Anneau simplicial gradué de T, B une A-Algèbre graduée. On note

(2.2.6) $$L^{\Delta gr}_{B/A}$$

le sous-objet diagonal de $L^{gr}_{B/A}$. Comme en (II 1.2.6.7), on a un isomorphisme canonique fonctoriel pour $M \in \mathrm{ob}\, D.(B)_{gr}$:

(2.2.7) $$\mathrm{Hom}_{D.(B)_{gr}}(L^{\Delta gr}_{B/A}, M) = \mathrm{Hom}_{D(A\text{-}Alggr/B)}(B, B \oplus M) \quad ,$$

qui caractérise $L^{\Delta gr}_{B/A}$ en tant qu'objet de $D.(B)_{gr}$. La preuve est analogue à celle de (loc. cit.), nous laissons les détails au lecteur.

2.3. Triangle de transitivité gradué et classe d'Atiyah.

Soient

(2.3.1) $$A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

des morphismes d'Anneaux gradués de T. Posons $P_A(B)^{gr} = P$, $Q = P^{\Delta}_P(C)^{gr}$. La suite exacte (2.1.1), complétée par un zéro à gauche, relative à $A \longrightarrow P \longrightarrow Q$ donne, par extension des scalaires à C une suite exacte de C-Modules simpliciaux gradués

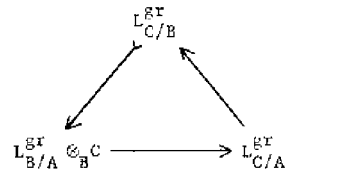
(2.3.2) $$L^{gr}_{C/B/A} \quad ,$$

qui dépend fonctoriellement de (2.3.1) d'une manière évidente que le lecteur explicitera (cf. (II 2.1)). D'après (II 2.1.4.2) on a un isomorphisme canonique de $VT.(C)$

(2.3.3) $$L^{gr}_{C/B/A} \xrightarrow{\sim} L_{C/B/A} \quad .$$

D'autre part, le triangle distingué de $D(C)_{gr}$ défini par (2.3.2) s'écrit, à isomorphisme canonique fonctoriel près,

(2.3.4)



où les flèches de degré zéro sont les flèches évidentes de fonctorialité.

De (1.3.1.1) et (2.1.4), on déduit encore qu'on a un isomorphisme fonctoriel canonique de suites exactes courtes de C^0-Modules simpliciaux

(2.3.5) $$k^0(L^{gr}_{C/B/A}) = L_{C^0/B^0/A^0} \quad .$$

Plus généralement, des morphismes d'Anneaux simpliciaux gradués

(2.3.1)' $$A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

donnent naissance à une suite exacte de C-Modules gradués

(2.3.2)' $$L^{\Delta gr}_{C/B/A} \quad ,$$

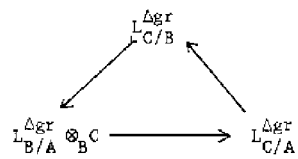
qui dépend fonctoriellement de (2.3.1)'. On a des isomorphismes canoniques fonctoriels

(2.3.3)' $$L^{\Delta gr}_{C/B/A} \xrightarrow{\sim} L_{C/B/A} \quad ,$$

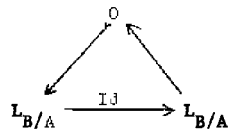
(2.3.5)' $$k^0(L^{\Delta gr}_{C/B/A}) = L_{C^0/B^0/A^0} \quad ,$$

analogues à (2.3.3) et (2.3.5), et le triangle distingué de $D.(C)_{gr}$ défini par (2.3.2)' s'écrit, à isomorphisme canonique fonctoriel près,

(2.3.4)'

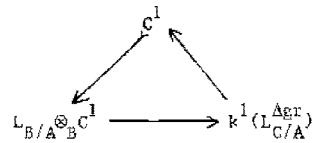


2.3.6. Soient $A \longrightarrow B$ un morphisme d'Anneaux de T, et C une B-Algèbre simpliciale graduée telle que $C^o = B$. D'après (2.3.5)', le triangle distingué de D(B) défini par $k^o(L^{\Delta gr}_{C/B/A})$ s'écrit (à isomorphisme canonique fonctoriel près)



D'autre part, il découle de (2.2.5) que le triangle distingué de D(B) défini par $k^1(L^{\Delta gr}_{C/B/A})$ s'écrit (à isomorphisme canonique fonctoriel près)

(2.3.6.1)



Posons $C^1 = M$. Il résulte de la fonctorialité de $L^{\Delta gr}_{C/B/A}$ que le morphisme de degré un de (2.3.6.1) :

(2.3.6.2) $$M \longrightarrow L_{B/A} \otimes_B M\ [1]$$

ne dépend que de $A \longrightarrow B$ et du B-Module simplicial M , et non du choix de la B-Algèbre simpliciale graduée C telle que $C^o = B$, $C^1 = M$. On dit que (2.3.6.2) est la <u>classe d'Atiyah</u> de M relative à $A \longrightarrow B$. On la note $at_{B/A}(M)$.

2.3.7. Voici une autre description de la classe (2.3.6.2). Soit $P = P_A(B)$ la résolution standard de B sur A (I 1.5.5.6), et considérons la suite exacte des parties principales (II 1.2.6.3) définie par M vu comme P-Module par restriction des scalaires :

(2.3.7.1) $$0 \longrightarrow \Omega^1_{P/A} \otimes_P M \longrightarrow P^1_{P/A}(M) \longrightarrow M \longrightarrow 0 \quad .$$

Par le foncteur χ de (I 3.2.3.4) on en déduit une flèche

$$M \longrightarrow \sigma(\Omega^1_{P/A} \otimes_P M)$$

de $D.(P)$, d'où, par extension des scalaires à B et compte tenu de (I 3.3.4.6), une flèche de $D(B)$:

$$M \longrightarrow L_{B/A} \otimes_B M[1] \quad . \tag{2.3.7.2}$$

Proposition 2.3.7.3.. Les flèches (2.3.6.2) et (2.3.7.2) coïncident.

Preuve. Soit C une P-Algèbre graduée telle que $C^0 = P$, $C^1 = M$ (par exemple l'Algèbre des nombres duaux $P \oplus M$), et soit $Q \longrightarrow C$ un quasi-isomorphisme de $P\text{-Alggr}^+$, Q étant libre graduée en chaque degré (par exemple $Q = P^{\Delta}_P(C)^{gr+}$ (1.3.3)). Munissant l'Algèbre $P^1_{P/A}(Q)$ de la graduation définie par celle de Q, on a, d'après (II 1.2.6.7), un morphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Omega^1_{P/A} \otimes_P Q & \longrightarrow & P^1_{P/A}(Q) & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \begin{pmatrix} \mathrm{Id} \\ d_{Q/P} \end{pmatrix}} & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega^1_{P/A} \otimes_P Q & \longrightarrow & Q \oplus \Omega^1_{Q/A} & \longrightarrow & Q \oplus \Omega^1_{Q/P} & \longrightarrow & 0
\end{array} ,$$

où les flèches sont des morphismes gradués de degré zéro. Appliquant le foncteur k^1, on obtient un morphisme de suites exactes de P-Modules

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Omega^1_{P/A} \otimes_P Q^1 & \longrightarrow & P^1_{P/A}(Q^1) & \longrightarrow & Q^1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \begin{pmatrix} \mathrm{Id} \\ \mathrm{Id} \end{pmatrix}} & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega^1_{P/A} \otimes_P Q^1 & \longrightarrow & Q^1 \oplus k^1(\Omega^1_{Q/A}) & \longrightarrow & Q^1 \oplus Q^1 & \longrightarrow & 0
\end{array} ,$$

où la ligne supérieure est l'extension des parties principales de Q^1 relative à P/A. Composant avec la projection canonique

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^1_{P/A} \otimes_P Q^1 & \longrightarrow & Q^1 \oplus k^1(\Omega^1_{Q/A}) & \longrightarrow & Q^1 \oplus Q^1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle Id} & & \downarrow{\scriptstyle (0,Id)} & & \downarrow{\scriptstyle (0,Id)} & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^1_{P/A} \otimes_P Q^1 & \longrightarrow & k^1(\Omega^1_{Q/A}) & \longrightarrow & Q^1 & \longrightarrow & 0 \end{array} ,$$

on obtient finalement un morphisme de suites exactes de P-Modules

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^1_{P/A} \otimes_P Q^1 & \longrightarrow & P^1_{P/A}(Q^1) & \longrightarrow & Q^1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle Id} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Id} & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^1_{P/A} \otimes_P Q^1 & \longrightarrow & k^1(\Omega^1_{Q/A}) & \longrightarrow & Q^1 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

La proposition en résulte immédiatement par extension des scalaires à B .

Corollaire 2.3.7.4. Soient $A \longrightarrow B$ un morphisme d'Anneaux de T , M un B-Module simplicial. Le morphisme de degré un de D(B)

$$(*) \qquad M \longrightarrow \Omega^1_{B/A} \overset{L}{\otimes}_B M\,[1] \quad ,$$

composé de (2.3.6.2) et de la flèche définie par l'augmentation naturelle $L_{B/A} \longrightarrow \Omega^1_{B/A}$, coïncide avec le morphisme de degré un défini par l'extension des parties principales, relative à B/A , d'une résolution plate arbitraire de M . Par suite, si M est concentré en degré zéro (comme complexe de B-Modules), le morphisme de degré un

$$M \longrightarrow \Omega^1_{B/A} \otimes_B M[1]$$

déduit de (*) par projection sur H_o est celui défini par l'extension des parties principales de M .

Preuve. On peut supposer M plat. L'augmentation $P = P_A(B) \longrightarrow B$ définit un morphisme de la suite exacte des parties principales de M relative à P/A dans

celle relative à B/A :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^1_{P/A} \otimes_P M & \longrightarrow & P^1_{P/A}(M) & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^1_{B/A} \otimes_B M & \longrightarrow & P^1_{B/A}(M) & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array} .$$

Les assertions du corollaire en résultent aussitôt, compte tenu de (2.3.7.3).

Remarque 2.3.7.5. Soit $f : Y \longrightarrow S$ un morphisme de schémas. Soient n un entier ≥ 0, et M un $\underline{O}_Y$-Module localement libre de rang n. Celui-ci correspond donc à un torseur X sur Y sous $GL(n)_Y$. Notons $p : X \longrightarrow Y$ la projection. Comme p est lisse, on a la suite exacte

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow p^* \Omega^1_{Y/S} \longrightarrow \Omega^1_{X/S} \longrightarrow \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow 0 \quad ,$$

qui est de façon naturelle une suite de G-$\underline{O}_X$-Modules ($G = GL(n)$). Celle-ci définit donc, par descente à Y, une suite exacte de $\underline{O}_Y$-Modules, qui s'écrit

$$(**) \qquad 0 \longrightarrow \Omega^1_{Y/S} \longrightarrow At(X) \longrightarrow \underline{End}(M) \longrightarrow 0$$

(on voit en effet facilement que $\Omega^1_{X/Y}$ s'identifie canoniquement à $p^*\underline{End}(M)$). L'extension (**) est l'analogue de l'extension introduite par Atiyah dans [28]. Elle définit une classe

$$a'(M) \in H^1(Y, \Omega^1_{Y/S} \otimes \underline{End}(M)) \quad .$$

D'autre part, on a l'extension des parties principales de M relativement à S :

$$(***) \qquad 0 \longrightarrow \Omega^1_{Y/S} \otimes M \longrightarrow P^1_{Y/S}(M) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

($P^1_{Y/S}(M) = P^1_{\underline{O}_Y / f^{-1}(\underline{O}_S)}(M)$), qui définit une classe

$$a''(M) \in H^1(Y, \Omega^1_{Y/S} \otimes \underline{End}(M)) \quad .$$

Je dis qu'on a

$$a'(M) = a''(M)$$

(ce qui justifie dans une certaine mesure la terminologie "classe d'Atiyah" de (2.3.6), compte tenu de (2.3.7.4)). On vérifie en effet facilement que les splittages de (**) (resp. (***)) sont les connexions sur M relativement à S. Les splittages locaux de (**) (resp. (***)) forment un seul et même torseur C sous le groupe $\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{End}}(M),\Omega^1_{Y/S}) = \Omega^1_{Y/S} \otimes \underline{\mathrm{End}}(M)$, et la classe de C dans le groupe H^1 correspondant coïncide à la fois avec $a'(M)$ et $a''(M)$, ce qui prouve notre assertion.

2.4. Complexe cotangent et extensions graduées.

Soient A un Anneau gradué de T, B une A-Algèbre graduée, I un B-Module gradué. Une A-extension graduée de B par I est une A-extension

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow E \xrightarrow{p} B \longrightarrow 0 \quad ,$$

où E est une A-Algèbre graduée et p un homomorphisme de A-Algèbres graduées. Les A-extensions graduées de B par I forment un groupe abélien noté

(2.4.1) $$\mathrm{Exal}_A(B,I)_{gr} \quad ,$$

qui dépend fonctoriellement de $(A \longrightarrow B,I)$ de la même manière que son homologue non gradué (III 1.1.5.1). Compte tenu des résultats résumés en (1.2.4), on construit, en paraphrasant les raisonnements du cas non gradué (III 1.2.3), un isomorphisme canonique fonctoriel

(2.4.2) $$\mathrm{Exal}_A(B,I)_{gr} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_B(L^{gr}_{B/A},I)_{gr} \quad ,$$

avec les notations de (1.2.1), $L^{gr}_{B/A}$ étant vu comme un objet de $D(B)_{gr}$ par Dold-Puppe. On en déduit comme dans le cas non gradué (III 1.2.9.1) un procédé de calcul du tronqué à l'ordre un de $L^{gr}_{B/A}$: soit $P \longrightarrow B$ un morphisme surjectif de A-Algèbres graduées, d'Idéal noyau I ; on suppose que $\Omega^1_{P/A}$ est plat sur P et que l'augmentation $L^{gr}_{P/A} \longrightarrow \Omega^1_{P/A}$ est un quasi-isomorphisme ; alors il existe

un isomorphisme canonique de $D(B)_{gr}$:

$$(2.4.3) \qquad t_{[-1}(L^{gr}_{B/A}) = (0 \longrightarrow I/I^2 \xrightarrow{d_{P/A}} \Omega^1_{P/A} \otimes_P B \longrightarrow 0) \quad ,$$

où I/I^2 est placé en degré -1 .

Corollaire 2.4.4. Soit $A \longrightarrow B$ un morphisme surjectif d'Anneaux de T , et soit M un B-Module. Il existe un isomorphisme fonctoriel canonique de $D(B)$:

$$k^1(t_{[-1}(L^{gr}_{(B\oplus M)/A}) \simeq t_{[-1}(M \overset{L}{\otimes}_A B) \qquad (1) \quad ,$$

où $B \oplus M$ désigne l'Algèbre des nombres duaux sur M considérée comme B-Algèbre graduée avec M de degré un.

Preuve. Soit

$$F = (\ldots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_o) \longrightarrow M$$

une résolution plate de M sur A (par exemple $F = F_A(M)$, la résolution libre standard (I 1.5.5.2), si l'on veut être canonique et fonctoriel ...). On a $M \overset{L}{\otimes}_A B = F \otimes_A B$, d'où (I 1.4.7)

$$(*) \qquad t_{[-1}(M \overset{L}{\otimes}_A B) = (0 \longrightarrow \mathrm{Coker}(F_2 \otimes_A B) \longrightarrow F_1 \otimes_A B) \longrightarrow F_o \otimes_A B \longrightarrow 0)$$

$$= (0 \longrightarrow Z_1 \otimes_A B \longrightarrow F_o \otimes_A B \longrightarrow 0) \quad ,$$

où $Z_1 = \mathrm{Coker}(F_2 \longrightarrow F_1) = \mathrm{Ker}(F_o \longrightarrow M)$. Maintenant, pour calculer $t_{[-1}k^1L^{gr}_{C/A} = k^1t_{[-1}L^{gr}_{C/A}$, où $C = B \oplus M$, utilisons le morphisme surjectif de A-Algèbres graduées

$$p : P = S_A(F_o) \longrightarrow C$$

défini par $F_o \longrightarrow M$ et $A \longrightarrow B$, F_o étant considéré comme A-Module gradué concentré en degré un. Posons $\mathrm{Ker}\ p = K$, on a, d'après (2.4.3),

---

(1) NB. Les foncteurs k^i et $t_{[j}$ sur $D(B)_{gr}$ commutent.

$$t_{[-1}(L^{gr}_{C/A}) = (0 \longrightarrow K/K^2 \longrightarrow \Omega^1_{P/A} \otimes B \longrightarrow 0) \quad .$$

Notant I l'Idéal noyau de $A \longrightarrow B$, on a

$$k^1(K/K^2) = Z_1/IZ_1 = Z_1 \otimes_A B \quad ,$$

$$k^1(\Omega^1_{P/A} \otimes_P B) = F_o \otimes_A B \quad ,$$

et la composante de degré un de $d_{P/A} : K/K^2 \longrightarrow \Omega^1_{P/A} \otimes_P B$ s'identifie à $i \otimes_A B$, où $i : Z_1 \longrightarrow F_o$ est l'injection, d'où le corollaire, compte tenu de (*).

3. Déformations de Modules et de morphismes de Modules.

3.1. Déformations de Modules.

Soit

(3.1.1)
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B_o & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & \nwarrow & \uparrow & & \\ & & & & & & A & & \end{array}$$

une extension d'Algèbres de T (III 1.1.1). Une extension de B-Modules

$$\underline{M} = (0 \longrightarrow J \longrightarrow M \xrightarrow{p} M_o \longrightarrow 0) \quad ,$$

où M_o et J sont annulés par I, définit un homomorphisme canonique de B_o-Modules

$$u(\underline{M}) : I \otimes_{B_o} M_o \longrightarrow J \quad ,$$

tel que $u(\underline{M})(x \otimes m_o) = xm$, pour x une section de I, m une section de M, et $m_o = p(m)$. L'image de $u(\underline{M})$ est IM, de sorte que $u(\underline{M})$ est un épimorphisme si et seulement si la flèche $M \otimes_B B_o \longrightarrow M_o$ définie par p est un isomorphisme. Lorsqu'il en est ainsi, M est plat sur B si et seulement si M_o est plat sur B_o et $u(\underline{M})$ un isomorphisme (critère de platitude). Dans les mêmes conditions ($M \otimes_B B_o \longrightarrow M_o$ un isomorphisme), il résulte de (SGA 6 I 2.16.2 et 5.8.3) que M est localement facteur direct d'un B-Module libre de type fini si et seulement

si $u(\underline{M})$ est un isomorphisme et M_o est localement facteur direct d'un B_o-Module libre de type fini ; quand B_o est un Anneau local [18], donc aussi B, on peut remplacer "localement facteur direct d'un Module libre de type fini" par "localement libre de type fini".

Considérons maintenant le problème suivant. On se donne des B_o-Modules M_o, J, et un morphisme $u_o : I \otimes_{B_o} M_o \longrightarrow J$; trouver une extension $\underline{M}$ telle que $u(\underline{M}) = u_o$. D'après les remarques qu'on vient de faire, ce problème contient comme cas particulier celui envisagé dans l'introduction. Nous allons le reformuler en termes d'extensions d'Algèbres graduées. Notons d'abord qu'une extension $\underline{M}$ comme plus haut définit une B-extension graduée (2.4)

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow J \longrightarrow B_o \oplus M \xrightarrow{Id \oplus p} B_o \oplus M_o \longrightarrow 0 \quad ,$$

dont la composante de degré zéro est

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow B_o \xrightarrow{Id} B_o \longrightarrow 0$$

et la composante de degré un est égale à $\underline{M}$. Il est immédiat qu'on obtient ainsi un isomorphisme fonctoriel

$$(3.1.2) \qquad Ext^1_B(M_o,J) \xrightarrow{\sim} Exal_B(B_o \oplus M_o,J)_{gr} \quad ,$$

où, dans le membre de droite, M_o et J sont considérés comme de degré un. En outre, l'homomorphisme canonique (cf. (III 2.1.1))

$$I \otimes_{B_o}(B_o \oplus M_o) \longrightarrow J$$

défini par (*) s'identifie à $u(\underline{M})$ quand on identifie $Hom_{B_o \oplus M_o}(I \otimes_{B_o}(B_o \oplus M_o),J)_{gr}$ à $Hom_{B_o}(I \otimes_{B_o} M_o,J)$ par l'isomorphisme canonique (1.1.3.1). On a donc un carré commutatif

$$(3.1.3) \qquad \begin{array}{ccc} Ext^1_B(M_o,J) & \xrightarrow{u(-)} & Hom_{B_o}(I \otimes_{B_o} M_o,J) \\ \downarrow{\scriptstyle (3.1.2)} & & \downarrow{\scriptstyle (1.1.3.1)} \\ Exal_B(B_o \oplus M_o,J)_{gr} & \longrightarrow & Hom_{B_o \oplus M_o}(I \otimes_{B_o}(B_o \oplus M_o),J)_{gr} \end{array} \quad ,$$

où la flèche horizontale inférieure est la flèche "homomorphisme canonique associé" ; comme dans le cas non gradué (III 2.1.2), celle-ci s'identifie d'ailleurs canoniquement à la flèche

$$\mathrm{Ext}^1_{C_o}(L^{gr}_{C_o/B},J)_{gr} \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{C_o}(L_{B_o/B}\otimes_{B_o}C_o,J)_{gr}$$

définie par la flèche de fonctorialité $L_{B_o/B}\otimes_{B_o}C_o \longrightarrow L^{gr}_{C_o/B}$, où l'on a posé $B_o \oplus M_o = C_o$. Par suite, notre problème se ramène à un analogue gradué de (III 2.1.2.1), qui se résout par l'introduction de la suite exacte des $\mathrm{Ext}^i_{C_o}(-,J)_{gr}$ relative au triangle de transitivité $L^{gr}_{C_o/B_o/B}$ (2.3.2). Comme J est de graduation concentrée en degré un, cette suite exacte s'identifie canoniquement d'après (1.2.2.1) à la suite exacte des $\mathrm{Ext}^i_{B_o}(-,J)$ relative au triangle $k^1(L^{gr}_{C_o/B_o/B})$. D'après (2.3.6.1), ce dernier s'écrit, à isomorphisme canonique fonctoriel près,

$$k^1(L^{gr}_{C_o/B_o/B}) \quad = \quad \begin{array}{ccc} & M_o & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ L_{B_o/B}\otimes_{B_o}M_o & \longrightarrow & k^1(L^{gr}_{C_o/B}) \end{array} .$$

Compte tenu de (3.1.3), il en résulte que la suite exacte des $\mathrm{Ext}^i_{B_o}(-,J)$ correspondante s'écrit, à isomorphisme canonique fonctoriel près,

$$\text{(3.1.4)} \qquad \mathrm{Ext}^o_{B_o}(L_{B_o/B}\otimes_{B_o}M_o,J) = 0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{B_o}(M_o,J) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{B}(M_o,J) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{u(-)} \mathrm{Hom}_{B_o}(I\otimes_{B_o}M_o,J) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Ext}^2_{B_o}(M_o,J) \longrightarrow \ldots \quad ,$$

où la première flèche est la flèche évidente donnée par la restriction des scalaires. On en déduit :

Proposition 3.1.5. *Etant donné des B_o-Modules M_o, J et un morphisme $u_o : I\otimes_{B_o}M_o \longrightarrow J$, il existe une obstruction*

$$\omega(B,u_o) = \partial u_o \in \mathrm{Ext}^2_{B_o}(M_o,J)$$

dont l'annulation est nécessaire et suffisante pour l'existence d'une extension

de B-Modules M de M_o par J telle que $u(M) = u_o$. Quand $\omega(B,u_o) = 0$, l'ensemble des classes d'isomorphie de telles extensions M est un torseur sous $\mathrm{Ext}^1_{B_o}(M_o,J)$, et le groupe des automorphismes d'une extension M donnée est $\mathrm{Hom}_{B_o}(M_o,J)$ ([1]).

En particulier, pour $J = I \otimes_{B_o} M_o$ et $u_o = \mathrm{Id} : I \otimes_{B_o} M_o \longrightarrow I \otimes_{B_o} M_o$, il y a une obstruction, dite canonique,

$$\omega(B,M_o) \overset{\text{dfn}}{=} \omega(B,\mathrm{Id}) \in \mathrm{Ext}^2_{B_o}(M_o, I \otimes_{B_o} M_o) \quad , \tag{3.1.6}$$

dont l'obstruction relative à un $u_o : I \otimes_{B_o} M_o \longrightarrow J$ se déduit par composition avec u_o :

$$\omega(B,u_o) = u_o\, \omega(B,M_o) \quad . \tag{3.1.7}$$

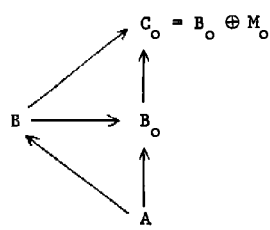
D'après les remarques faites au début de ce n°, $\omega(B,M_o)$ représente, quand M_o est plat, l'obstruction à l'existence d'un B-Module plat M tel que $M \otimes_B B_o \Longrightarrow M_o$. Par construction, $\omega(B,M_o)$ est la flèche composée de $D(B_o)$:

$$M_o \longrightarrow L_{B_o/B} \otimes_{B_o} M_o\,[1] \longrightarrow I \otimes_{B_o} M_o[2] \quad ,$$

où la première flèche est la classe d'Atiyah de M_o relative à B (2.3.6.2) et la seconde est définie par la projection de $L_{B_o/B} \otimes_{B_o} M_o$ sur $H_1(L_{B_o/B} \otimes_{B_o} M_o) = I \otimes_{B_o} M_o$. Par des raisonnements analogues à ceux de (III 2.1.4), utilisant le morphisme de triangles

$$k^1(L^{gr}_{C_o/B_o/A}) \longrightarrow k^1(L^{gr}_{C_o/B_o/B})$$

défini par le diagramme commutatif



,

([1]). La toute dernière assertion est triviale.

on en déduit :

Proposition 3.1.8. L'obstruction canonique $\omega(B,M_o)$ (3.1.6) est égale à la flèche composée de $D(B_o)$:

$$M_o \xrightarrow{at_{B_o/A}(M_o)} L_{B_o/A} \overset{L}{\otimes}_{B_o} M_o[1] \xrightarrow{e(B) \overset{L}{\otimes}_{B_o} M_o[1]} I \overset{L}{\otimes}_{B_o} M_o[2] \longrightarrow I \otimes_{B_o} M_o[2],$$

où $at_{B_o/A}(M_o)$ est la classe d'Atiyah (2.3.6.2), $e(B) : L_{B_o/A} \longrightarrow I[1]$ la classe de l'extension B (III 1.2.3), et la dernière flèche l'augmentation évidente. En particulier, si M_o est plat, $\omega(B,M_o)$ est donnée par le cup-produit

$$\omega(B,M_o) = (e(B) \otimes M_o) at_{B_o/A}(M_o) \quad .$$

Corollaire 3.1.9. Supposons $A \longrightarrow B_o$ surjectif de noyau K, d'où une A-extension

$$0 \longrightarrow K/K^2 \longrightarrow A/K^2 \longrightarrow B_o \longrightarrow 0 \quad .$$

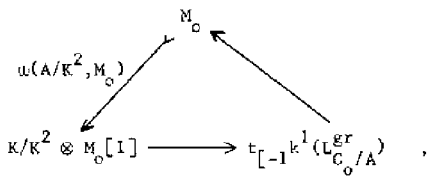
On a $Tor_o^A(M_o,B_o) = M_o$, $Tor_1^A(M_o,B_o) = K/K^2 \otimes M_o$, et l'obstruction canonique $\omega(A/K^2,M_o)$ n'est autre que l'élément de $Ext^2_{B_o}(H_o(M_o \overset{L}{\otimes}_A B_o), H_1(M_o \overset{L}{\otimes}_A B_o))$ défini par $M_o \overset{L}{\otimes}_A B_o$ (1).

Preuve. D'après (III 1.2.8), $e(A/K^2)$ est l'augmentation canonique $L_{B_o} \to K/K^2[1]$. Appliquant (3.1.8), on en déduit que $\omega(A/K^2,M_o)$ est égal au composé

$$M_o \xrightarrow{a} L_{B_o/A} \overset{L}{\otimes}_{B_o} M_o[1] \longrightarrow H_1(L_{B_o/A} \overset{L}{\otimes}_{B_o} M_o)[2] = K/K^2 \otimes M_o[2] \ ,$$

où $a = at_{B_o/A}(M_o)$ et la seconde flèche est l'augmentation canonique. Revenant à la définition de la classe d'Atiyah (2.3.6.2), on en conclut qu'on a un triangle distingué

(1) Rappelons [27] que si X est un complexe d'une catégorie abélienne A, la filtration de X par les $t_{n]}(X)$ (I 1.4.7) définit des éléments $\xi_n \in Ext^2(H^n(X), H^{n-1}(X))$, qui sont des invariantsde X dans D(A).



et par suite (vu l'unicité à isomorphisme près du troisième sommet d'un triangle distingué construit sur une base donnée [27]) que $\omega(A/K^2,M_o)$ est la classe canonique définie par $t_{[-1}k^1(L^{gr}_{C_o/A})$. Le corollaire résulte donc de (2.4.4) ([1]).

Question 3.1.10. Dans la situation de (3.1.8), supposons B_o local, donc aussi B , et M_o localement libre de type fini. Les déformations locales de M_o en un B-Module localement libre de type fini forment une gerbe [13] liée par le groupe $\underline{End}(M_o) \otimes I$. Comparer la classe de cette gerbe dans $H^2(T,\underline{End}(M_o) \otimes I)$ à l'obstruction $\omega(B,M_o)$ (3.1.6) (bien entendu l'une et l'autre classe représente l'obstruction à prolonger M_o en un B-Module localement libre de type fini ...).

Remarque 3.1.11. Soit $f_o : X_o \longrightarrow Y$ un morphisme lisse de schémas, et soit M_o un $\mathcal{O}_{X_o}$-Module localement libre de type fini. D'après (III 3.1.2) la flèche canonique $L_{X_o/Y} \longrightarrow \Omega^1_{X_o/Y}$ est un quasi-isomorphisme, donc (2.3.7.4) la classe d'Atiyah $at_{X_o/Y}(M_o)$ est celle définie par l'extension des parties principales

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{X_o/Y} \otimes M_o) \longrightarrow P^1_{X_o/Y}(M_o) \longrightarrow M_o \longrightarrow 0 \quad .$$

Celle-ci splitte quand M_o possède une connexion relativement à Y , et par suite, comme on l'a déjà signalé dans l'introduction,(3.1.8) implique qu'alors M_o se prolonge en un Module localement libre au-dessus de tout Y-épaississement d'ordre un de X_o (fait d'ailleurs bien connu et facile à prouver directement). Nous renvoyons le lecteur à l'exercice (3.1.14) ci-dessous pour la construction d'un exemple (f_o,M_o,i) (i une Y-extension d'ordre un de X_o) avec $\omega(i,M_o) \neq 0$.

([1]) NB. Les deux premières assertions de (3.1.9) sont triviales.

3.1.12. Reprenons la situation du début de ce numéro, définie par l'extension (3.1.1), et des B_o-Modules M_o , J . L'existence d'une suite exacte du type (3.1.4), et par suite la proposition (3.1.5), peut s'établir par un calcul direct ([1]) ne faisant pas intervenir la théorie du complexe cotangent. L'isomorphisme "cher à Cartan"

$$\text{(3.1.12.1)} \qquad \mathrm{RHom}_B(M_o,J) \xrightarrow{\sim} \mathrm{RHom}_{B_o}(M_o \overset{L}{\otimes}_B B_o,J)$$

fournit en effet une suite spectrale

$$\text{(3.1.12.2)} \qquad E_2^{pq} = \mathrm{Ext}^p_{B_o}(\mathrm{Tor}^B_q(M_o,B_o),J) \Longrightarrow \mathrm{Ext}^*_B(M_o,J) \quad ,$$

et, si l'on tient compte de l'isomorphisme bien connu

$$\text{(3.1.12.3)} \qquad \mathrm{Tor}^B_1(M_o,B_o) \xrightarrow{\sim} I \otimes_{B_o} M_o \quad ,$$

la suite exacte des termes de bas degré de (3.1.12.2) s'écrit

$$\text{(3.1.12.4)} \qquad 0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{B_o}(M_o,J) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_B(M_o,J) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{B_o}(I \otimes_{B_o} M_o,J) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\partial} \mathrm{Ext}^2_{B_o}(M_o,J) \quad .$$

On a la compatibilité rassurante :

Proposition 3.1.13. Les suites exactes (3.1.4) et (3.1.12.4) coïncident.

Preuve. a) Explicitons d'abord l'isomorphisme

$$(*) \qquad \mathrm{Ext}^i_B(M_o,J) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^i_{B_o}(M_o \overset{L}{\otimes}_B B_o,J)$$

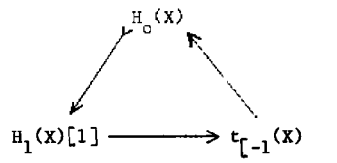
défini par (3.1.12.1). Soit $f : M_o \longrightarrow J$ une flèche de degré i de D(B). La flèche image de f par (*) est la composée des flèches suivantes de $D(B_o)$:

([1]) dû a Grothendieck.

$$M_o \overset{L}{\otimes}_B B_o \xrightarrow{f \overset{L}{\otimes} Id} J \overset{L}{\otimes}_B B_o \longrightarrow J \quad ,$$

où la seconde flèche est la flèche d'adjonction.

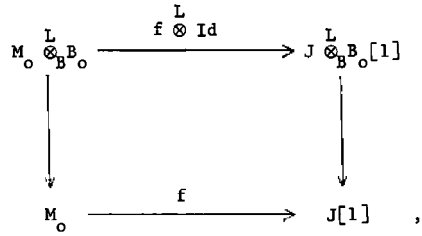
b) Posons $M_o \overset{L}{\otimes}_B B_o = X$. On sait [27] que la suite spectrale (3.1.12.2) s'obtient en appliquant le ∂-foncteur $\mathrm{Ext}^*_{B_o}(-,J)$ au "deuxième objet spectral canonique" de X , et qu'en particulier la suite exacte des termes de bas degré (3.1.12.4) n'est autre que le début de la suite exacte des $\mathrm{Ext}^i_{B_o}(-,J)$ relative au triangle distingué



c) Prouvons que les flèches $\mathrm{Ext}^1_{B_o}(M_o,J) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_B(M_o,J)$ de (3.1.4) et (3.1.12.4) coïncident. Soit $f : M_o \longrightarrow J[1]$ une flèche de $D(B_o)$. D'après b), son image dans $\mathrm{Ext}^1_B(M_o,J) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{B_o}(M_o \overset{L}{\otimes}_B B_o, J)$ par (3.1.12.4) est la flèche composée

$$g : M_o \overset{L}{\otimes}_B B_o \longrightarrow M_o \xrightarrow{f} J[1] \quad ,$$

où la première flèche est l'augmentation sur H_o, ou la flèche d'adjonction si l'on préfère. Or on a un carré commutatif



où les flèches verticales sont les flèches d'adjonction. Compte tenu de a), il en résulte que g est aussi l'image par (*) de la flèche de $D(B)$ définie par f par restriction des scalaires, ce qui prouve notre assertion.

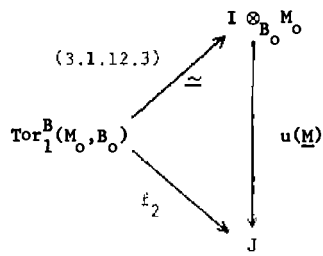
d) Prouvons que les flèches $\mathrm{Ext}^1_B(M_o,J) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{B_o}(M_o \otimes_{B_o} I,J)$ de (3.1.4) et (3.1.12.4) coïncident. Soit $f : M_o \longrightarrow J[1]$ une flèche de $D(B)$, qu'on peut supposer définie par une suite exacte de B-Modules

$$\underline{M} = (0 \longrightarrow J \longrightarrow M \longrightarrow M_o \longrightarrow 0) \quad .$$

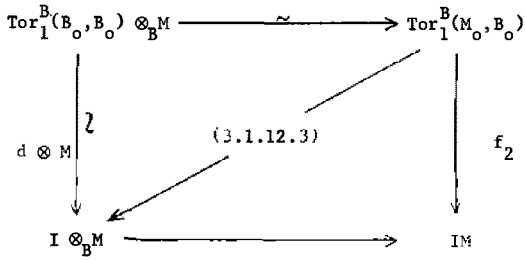
Pour calculer l'image de f selon (3.1.12.4), on doit procéder ainsi. On commence, d'après a), par remplacer f par la flèche $f_1 : M_o \overset{L}{\otimes}_B B_o \longrightarrow J[1]$ de $D(B_o)$ obtenue en composant $f \overset{L}{\otimes}_B \mathrm{Id} : M_o \overset{L}{\otimes}_B B_o \longrightarrow J \overset{L}{\otimes}_B B_o [1]$ avec la flèche d'adjonction $J \overset{L}{\otimes}_B B_o \longrightarrow J$, i.e. l'augmentation sur H_o . Puis, d'après b), on associe à f_1 la flèche

$$f_2 = H_1(f_1) : \mathrm{Tor}^B_1(M_o,B_o) \longrightarrow H_1(J[1]) = J \quad ,$$

autrement dit l'opérateur bord de la suite exacte des $\mathrm{Tor}^B_i(-,B_o)$ relative à $\underline{M}$. Enfin, on identifie f_2 à une flèche $I \otimes_{B_o} M_o \longrightarrow J$ au moyen de l'isomorphisme (3.1.12.3), qui par définition est l'opérateur bord de la suite exacte des $\mathrm{Tor}^B_i(M_o,-)$ relative à la suite exacte $0 \longrightarrow I \longrightarrow B \longrightarrow B_o \longrightarrow 0$. On doit prouver que le triangle suivant est commutatif :



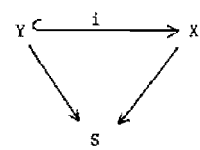
Comme la suite exacte $(0 \longrightarrow IM \longrightarrow M \longrightarrow M \otimes_B B_o \longrightarrow 0)$ s'envoie dans $\underline{M}$, on peut supposer, par fonctorialité, que $J = IM$, i.e. $M \otimes_B B_o \xrightarrow{\sim} M_o$, donc $I \otimes_B M \xrightarrow{\sim} I \otimes_{B_o} M_o$. La commutativité à prouver résulte alors de celle du diagramme



où les flèches horizontales sont les flèches canoniques évidentes (celle du haut étant un isomorphisme), et $d : \mathrm{Tor}_1^B(B_o,B_o) \xrightarrow{\sim} I$ l'opérateur bord de la suite des $\mathrm{Tor}_i^B(B_o,-)$ (ou des $\mathrm{Tor}_i^B(-,B_o)$, ce qui revient au même par commutativité de $\overset{L}{\otimes}$) relative à la suite exacte $0 \longrightarrow I \longrightarrow B \longrightarrow B_o \longrightarrow 0$; la commutativité de ce dernier diagramme est elle-même conséquence de l'associativité de $\overset{L}{\otimes}$.

e) Il reste à prouver que les flèches $\mathrm{Hom}_{B_o}(I \otimes_{B_o} M_o, J) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_{B_o}(M_o,J)$ de (3.1.4) et (3.1.12.4) coïncident. Par fonctorialité, il suffit de montrer que la flèche identique de $I \otimes_{B_o} M_o$ a même image dans $\mathrm{Ext}^2_{B_o}(M_o, I \otimes_{B_o} M_o)$ par les flèches ∂ de (3.1.4) et (3.1.12.4), i.e., d'après b), que $w(B,M_o)$ est la classe canonique définie par le complexe $M_o \overset{L}{\otimes}_B B_o$. Or cette assertion n'est qu'un cas particulier de (3.1.9). Cela termine la démonstration de (3.1.13).

Exercice 3.1.14. a) Soit un triangle commutatif de schémas



où X et Y sont lisses sur S et i est une immersion fermée d'Idéal I ; on note $N_{Y/X} = I/I^2$ le faisceau conormal. On se donne un $\underline{O}_Y$-Module localement libre de type fini L. Montrer que l'obstruction $w(i,L) \in H^2(Y, \underline{\mathrm{End}}(L) \otimes N_{Y/X})$ à prolonger L en un faisceau localement libre de type fini au-dessus du premier voisinage infinitésimal de Y dans X est l'image de la classe d'Atiyah $at_{Y/S}(L) \in H^1(Y, \underline{\mathrm{End}}(L) \otimes \Omega^1_{Y/S})$ par l'homomorphisme bord déduit de la suite exacte standard

(1) $$0 \longrightarrow N_{Y/X} \longrightarrow i^*\Omega^1_{X/S} \longrightarrow \Omega^1_{Y/S} \longrightarrow 0 \quad .$$

b) En déduire que si L', L'' sont des $\underline{O}_Y$-Modules inversibles, on a

$$\omega(i,L' \otimes L'') = \omega(i,L') + \omega(i,L'')$$

et que l'homomorphisme $H^1(Y,\underline{O}_Y^*) \longrightarrow H^2(Y,N_{Y/X})$ ainsi obtenu est donné par l'opérateur bord relatif à la suite exacte déduite de (1) par l'homomorphisme "dérivée logarithmique" $\underline{O}_Y^* \longrightarrow \Omega^1_{Y/S}$, $f \longmapsto df/f$.

c) On se place sur $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, et l'on prend pour Y la quadrique $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ plongée dans $X = \mathbb{P}^3$ par le morphisme de Segre $i : Y \longrightarrow X$ correspondant au faisceau très ample $\underline{O}_Y(1) = pr_1^*\underline{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \otimes pr_2^*\underline{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$. On pose, pour $i = 1, 2$, $L_i = pr_i^*\underline{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$, et $e_i = at_{Y/S}(L_i) \in H^1(Y,\Omega^1_{Y/S})$ ("première classe de Chern"). Montrer que $H^1(Y,\Omega^1_{Y/S})$ (resp. $H^2(Y,N_{Y/X})$) est libre de base (e_1,e_2) (resp. e_1e_2), et que la suite exacte de cohomologie de (1) fournit la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(Y,\underline{O}_Y) \longrightarrow H^1(Y,\Omega^1_{Y/S}) \xrightarrow{\partial} H^2(Y,N_{Y/X}) \longrightarrow 0 \quad .$$

d) En déduire qu'on a

$$\omega(i,L_1) = -\omega(i,L_2) = \pm\, e_1e_2$$

(et par suite que ni L_1 ni L_2 ne peut-être déformé en un faisceau inversible au-dessus du premier voisinage infinitésimal de Y dans X).

3.2. Déformations de morphismes de Modules.

Reprenons l'extension (3.1.1). Soit $\underline{f} : \underline{E} \longrightarrow \underline{F}$ un morphisme d'extensions de B-Modules :

(3.2.1)
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & F & \longrightarrow & F_o & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow{\scriptstyle f_1} & & \uparrow{\scriptstyle f} & & \uparrow{\scriptstyle f_o} & & \\ 0 & \longrightarrow & J & \longrightarrow & E & \longrightarrow & E_o & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad ,$$

où E_o, F_o, J, K sont annulés par I . On a alors un carré commutatif

(3.2.2)

$$\begin{array}{ccc} I \otimes E_o & \xrightarrow{u(\underline{E})} & J \\ \downarrow{\scriptstyle I\otimes f_o} & & \downarrow{\scriptstyle f_1} \\ I \otimes F_o & \xrightarrow{u(\underline{F})} & K \end{array}$$

Maintenant, donnons-nous seulement les extensions $\underline{E}$, $\underline{F}$ et des morphismes de B_o-Modules $f_o : E_o \longrightarrow F_o$, $f_1 : J \longrightarrow K$ tels que le carré (3.2.2) soit commutatif. Pour qu'il existe un morphisme $\underline{f} : \underline{E} \longrightarrow \underline{F}$ induisant f_o et f_1 , il est évidemment nécessaire et suffisant que l'extension $f_1{}^*\underline{E}$ de E_o par K soit isomorphe à l'extension $\underline{F}{}^*f_o$, i.e. qu'on ait $f_1{}^*cl(\underline{E}) - cl(\underline{F})^*f_o = 0$, où $cl(\underline{E}) \in Ext^1_B(E_o,J)$ (resp. $cl(\underline{F}) \in Ext^1_B(F_o,K)$) désigne la classe de $\underline{E}$ (resp. $\underline{F}$). A priori, on a $f_1{}^*cl(\underline{E}) - cl(\underline{F})^*f_o \in Ext^1_B(E_o,K)$, mais la commutativité de (3.2.2) implique qu'on a $u(f_1{}^*cl(\underline{E}) - cl(\underline{F})^*f_o) = 0$, d'où par la suite exacte (3.1.4)

$$0 \longrightarrow Ext^1_{B_o}(E_o,K) \longrightarrow Ext^1_B(E_o,K) \xrightarrow{u} Hom_{B_o}(I \otimes_{B_o} E_o,K) \quad ,$$

$f_1{}^*cl(\underline{E}) - cl(\underline{F})^*f_o \in Ext^1_{B_o}(E_o,K)$. En résumé :

Proposition 3.2.3. Etant donné des extensions de B-Modules $\underline{E}$, $\underline{F}$ comme en (3.2.1), et des morphismes de B_o-Modules $f_o : E_o \longrightarrow F_o$, $f_1 : J \longrightarrow K$ tels que le carré (3.2.2) soit commutatif, pour qu'il existe un morphisme d'extensions $\underline{f} : \underline{E} \longrightarrow \underline{F}$ induisant f_o et f_1 , il faut et il suffit que l'élément

$$f_1{}^*cl(\underline{E}) - cl(\underline{F})^*f_o \in Ext^1_{B_o}(E_o,K)$$

soit nul. Lorsqu'il en est ainsi, l'ensemble des solutions $\underline{f}$ est un torseur sous $Hom_{B_o}(E_o,K)$ [1] .

---

[1] La dernière assertion est triviale.

On pourrait également déduire (3.2.3) d'une variante graduée de (III 2.2.2), mais il serait un peu lourd, pour une question aussi triviale, d'utiliser la machinerie du complexe cotangent gradué ... Il n'en va pas de même avec le problème voisin suivant.

Donnons-nous l'extension $\underline{E}$ comme en (3.2.1), ainsi que des B_o-Modules F_o , K , et des morphismes de B_o-Modules $f_o : E_o \longrightarrow F_o$, $f_1 : J \longrightarrow K$, $u_o : I \otimes F_o \longrightarrow K$ tels que le carré

(3.2.4)

$$\begin{array}{ccc} I \otimes E_o & \xrightarrow{u(\underline{E})} & J \\ {\scriptstyle I \otimes f_o}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_1} \\ I \otimes F_o & \xrightarrow{u_o} & K \end{array}$$

soit commutatif, et cherchons à quelle condition il existe une extension $\underline{F}$ de F_o par K telle que $u(\underline{F}) = u_o$, et un morphisme d'extensions $\underline{f} : \underline{E} \longrightarrow \underline{F}$ induisant f_o et f_1 . Ce problème contient évidemment comme cas particulier le problème envisagé en (3.1) (prendre $E = 0$). Le cas le plus intéressant dans la pratique est celui où $u(\underline{E})$ et u_o sont des épimorphismes ; pour un $f_o : E_o \longrightarrow F_o$ donné, il existe alors au plus un $f_1 : J \longrightarrow K$ tel que le carré (3.2.4) soit commutatif, et si f_o est un épimorphisme, toute solution $\underline{f} : \underline{E} \longrightarrow \underline{F}$ est telle que $f : E \longrightarrow F$ soit un épimorphisme : en d'autres termes, on a alors affaire à un problème de <u>déformation de Modules quotients</u>.

Introduisons la A-extension graduée (2.4)

(3.2.5) $$0 \longrightarrow I \oplus J \longrightarrow B \oplus E \longrightarrow B_o \oplus E_o \longrightarrow 0 \quad ,$$

dont la partie homogène de degré 0 (resp. 1) est (3.1.1) (resp. $\underline{E}$), $B \oplus E$, $B_o \oplus E_o$ désignant des Algèbres des nombres duaux ; notons en passant que la structure de $(B_o \oplus E_o)$-Module gradué sur $I \oplus J$ est définie par la structure de B_o-Module de I et l'homomorphisme $u(\underline{E}) : I \otimes E_o \longrightarrow J$. Considérons $B_o \oplus F_o$ comme une $(B_o \oplus E_o)$-Algèbre graduée au moyen de l'homomorphisme $Id \oplus f_o$, et K comme un $(B_o \oplus E_o)$-Module gradué concentré en degré 1 . Remarquant que le produit

tensoriel gradué (1.1.4) $(I \oplus J) \otimes_{(B_o \oplus E_o)} (B_o \oplus F_o)$ a pour partie homogène de degré 1

$$k^1((I \oplus J) \otimes_{(B_o \oplus E_o)} (B_o \oplus F_o)) = J \overset{(I \otimes E_o)}{\oplus} (I \otimes F_o) \quad , \tag{3.2.6}$$

la somme amalgamée au second membre étant prise relativement aux homomorphismes $u(\underline{E}) : I \otimes E_o \longrightarrow J$, $I \otimes f_o : I \otimes E_o \longrightarrow I \otimes F_o$, on voit, d'après (1.1.3.1), que la donnée de morphismes $f_1 : J \longrightarrow K$, $u_o : I \otimes F_o \longrightarrow K$ tels que le carré (3.2.4) soit commutatif équivaut à celle d'un morphisme de $(B_o \oplus E_o)$-Modules gradués

$$(f_1, u_o) : (I \oplus J) \otimes_{(B_o \oplus E_o)} (B_o \oplus F_o) \longrightarrow K \quad . \tag{3.2.7}$$

Le problème revient donc à trouver une $(B_o \oplus E_o)$-extension graduée de $B_o \oplus F_o$ par K telle que l'homomorphisme canonique associé soit précisément (f_1, u_o) (3.2.7). Le problème se résout donc encore une fois par l'introduction d'un triangle de transitivité convenable, à savoir celui relatif aux morphismes d'Anneaux gradués

$$B \oplus E \longrightarrow B_o \oplus E_o \longrightarrow B_o \oplus F_o \quad . \tag{3.2.8}$$

En fait, comme en (3.1), seule la partie homogène de degré 1 de ce triangle nous intéresse. Notons $C(f_o)$ le cône de $f_o : E_o \longrightarrow F_o$, i.e.

$$C(f_o) = (0 \longrightarrow E_o \xrightarrow{f_o} F_o \longrightarrow 0) \quad , \tag{3.2.9}$$

où F_o est placé en degré zéro. On a un isomorphisme canonique fonctoriel de $D(B_o)$:

$$k^1(L^{gr}_{(B_o \oplus F_o)/(B_o \oplus E_o)}) = C(f_o) \quad , \tag{3.2.10}$$

conséquence de (2.2.5) et du triangle de transitivité relatif aux morphismes $B_o \longrightarrow B_o \oplus E_o \longrightarrow B_o \oplus F_o$. Cela étant, la suite exacte des $Ext^i(-,K)_{gr}$ du triangle de transitivité relatif à (3.2.8) s'écrit :

$$0 \longrightarrow Ext^1_{B_o}(C(f_o),K) \longrightarrow Exal_{(B \oplus E)}(B_o \oplus F_o, K)_{gr} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow Hom_{B_o}(J \overset{(I \otimes E_o)}{\oplus} (I \otimes F_o), K) \xrightarrow{\partial} Ext^2_{B_o}(C(f_o),K) \longrightarrow \ldots \quad , \tag{3.2.11}$$

et par suite on obtient :

Proposition 3.2.12. Etant donné une extension $\underline{E}$ comme en (3.2.1), des B_o-Modules F_o, K, et des morphismes de B_o-Modules $f_o : E_o \longrightarrow F_o$, $f_1 : J \longrightarrow K$, $u_o : I \otimes F_o \longrightarrow K$ tels que le carré (3.2.4) soit commutatif, il existe une obstruction

$$\omega(B,\underline{E},f_o,f_1,u_o) = \partial(f_1,u_o) \in \mathrm{Ext}^2_{B_o}(C(f_o),K) \qquad (1)$$

dont l'annulation est nécessaire et suffisante pour l'existence d'une extension de B-Modules $\underline{F}$ de F_o par K telle que $u(\underline{F}) = u_o$ et d'un morphisme d'extensions $\underline{f} : \underline{E} \longrightarrow \underline{F}$ induisant f_o et f_1. Quand cette obstruction est nulle, l'ensemble des classes d'isomorphie de solutions $(\underline{F},\underline{f})$ est un torseur sous $\mathrm{Ext}^1_{B_o}(C(f_o),K)$ et le groupe des automorphismes d'une solution donnée s'identifie à $\mathrm{Ext}^0_{B_o}(C(f_o),K) = \mathrm{Hom}_{B_o}(\mathrm{Coker}(f_o),K)$ (2).

Remarque 3.2.13. Si f_o est un épimorphisme, de noyau N_o, on a

$$C(f_o) \simeq N_o[1] \quad ,$$

d'où $\mathrm{Ext}^i_{B_o}(C(f_o),K) \simeq \mathrm{Ext}^{i-1}_{B_o}(N_o,K)$; ainsi l'obstruction de (3.2.12) se trouve dans $\mathrm{Ext}^1_{B_o}(N_o,K)$; quand elle est nulle, l'ensemble des solutions est un torseur sous $\mathrm{Hom}_{B_o}(N_o,K)$, et le groupe des automorphismes d'une solution est le groupe unité. Il est évidemment facile de démontrer ces résultats directement, sans utiliser de complexe cotangent ...

3.2.14. En ce qui concerne la fonctorialité de l'obstruction $\omega(B,\underline{E},f_o,f_1,u_o)$, on a une discussion analogue à celle de (3.1). Nous nous bornerons à indiquer rapidement les résultats. Tout d'abord, si l'on note M_o la somme amalgamée (3.2.6), on a une obstruction canonique

$$\omega(B,\underline{E},f_o) \in \mathrm{Ext}^2_{B_o}(C(f_o),M_o) \quad , \qquad (3.2.14.1)$$

dont l'obstruction $\omega(B,\underline{E},f_o,f_1,u_o)$ se déduit par composition avec

---

(1) où $C(f_o)$ désigne le cône de f_o (3.2.9).

(2) La dernière assertion est immédiate.

$(f_1,u_o) : M_o \longrightarrow K$ (3.2.7) :

(3.2.14.2) $$\omega(B,\underline{E},f_o,f_1,u_o) = (f_1,u_o)\ \omega(B,\underline{E},f_o)$$

(observons en passant que l'on a $I \otimes F_o \xrightarrow{\sim} M_o$ si $u(\underline{E})$ est un isomorphisme, cas fréquent en pratique). D'autre part, le triangle de transitivité des complexes cotangents gradués relatif à $A \longrightarrow B_o \oplus E_o \longrightarrow B_o \oplus F_o$ fournit une flèche canonique et fonctorielle de $D(B_o)$:

(3.2.14.3) $$at_{B_o/A}(f_o) : C(f_o) \longrightarrow k^1(L^{gr}_{B_o\oplus E_o/A} \otimes_{(B_o\oplus E_o)} (B_o \oplus F_o))\ [1]\ .$$

Si l'on désigne par

(3.2.14.4) $$e(B,\underline{E}) \in \mathrm{Ext}^1_{B_o\oplus E_o}(L^{gr}_{B_o\oplus E_o/A}, I \oplus J)_{gr}$$

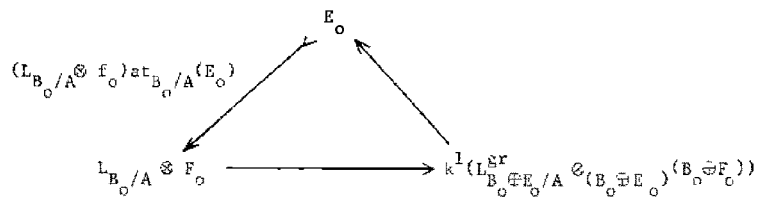
la classe (2.4.2) de la A-extension graduée (3.2.5), l'obstruction canonique (3.2.14.1) est égale à la flèche composée

$$C(f_o) \xrightarrow{at_{B_o/A}(f_o)} k^1(L^{gr}_{B_o\oplus E_o/A} \otimes_{(B_o\oplus E_o)} (B_o \oplus F_o))\ [1] \longrightarrow M_o\ [2]\ ,$$

où la seconde flèche est composée de $k^1(e(B,E) \overset{L}{\otimes}_{(B_o\oplus E_o)} (B_o\oplus F_o))$ et de l'augmentation naturelle $k^1((I\oplus J) \overset{L}{\otimes}_{(B_o\oplus E_o)} (B_o\oplus F_o))\ [2] \longrightarrow$

$\longrightarrow k^1((I\oplus J) \otimes_{(B_o\oplus E_o)} (B_o\oplus F_o))\ [2] = M_o[2]$ (3.2.6).

Exercice 3.2.15. Montrer qu'on a un triangle distingué

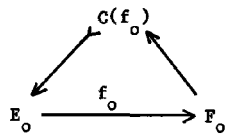


(Hint : calculer $k^1(L^{gr}_{B_o\oplus E_o/B_o/A} \otimes_{(B_o\oplus E_o)} (B_o\oplus F_o))$) .

Exercice 3.2.16. Dans la situation de (3.2.12), on suppose qu'il existe une extension de B-Modules $\underline{F}$ de F_o par K telle que $u(\underline{F}) = u_o$. Montrer qu'alors l'obstruction $\omega(B,\underline{E},f_o,f_1,u_o)$ se trouve dans

$$\mathrm{Coker}(\mathrm{Ext}^1_{B_o}(F_o,K) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{B_o}(E_o,K)) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^2_{B_o}(C(f_o),K)$$

(interpréter la suite exacte des $\mathrm{Ext}^i_{B_o}(-,K)$ définie par le triangle distingué



).

CHAPITRE V

CLASSES DE CHERN DES COMPLEXES PARFAITS

0. Introduction.

Soient k un corps (resp. le corps des complexes), X une variété algébrique (resp. analytique) lisse sur k, E un $\underline{O}_X$-Module localement libre. Utilisant la structure connue de la cohomologie de Hodge du fibré projectif $\underline{P}(E)$ en termes de celle de X, on sait (voir Grothendieck [31]) attacher à E une classe totale de Chern :

$$(0.1) \qquad c_t(E) = 1 + c^1(E)t + \ldots + c^n(E)t^n + \ldots \,, \; c^n(E) \in H^n(X, \Omega^n_{X/k}) \,.$$

Celle-ci jouit des propriétés suivantes, qui la caractérisent :

(0.2) Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de variétés lisses sur k, et soit F un $\underline{O}_Y$-Module localement libre. Alors on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c^n(f^*F) = f^*c^n(F) \,.$$

(0.3) Soit $0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$ une suite exacte de $\underline{O}_X$-Modules localement libres. Alors on a :

$$c_t(E) = c_t(E')\, c_t(E'') \,.$$

(0.4) Si E est inversible, $c^1(E)$ est l'image de la classe de E dans $\mathrm{Pic}(X) = H^1(X, \underline{O}_X^*)$ par l'homomorphisme dérivée logarithmique $\underline{O}_X^* \longrightarrow \Omega^1_{X/k}$, $f \longmapsto df/f$, et $c^i(E) = 0$ pour $i > 1$.

Utilisant (0.4) et la caractérisation axiomatique des classes de Chern [31], il est facile de montrer que $c^n(E)$ coïncide avec la classe déduite de l'extension d'Atiyah [28] (cf. (IV 2.3.7.5))

$$(0.5) \qquad 0 \longrightarrow \Omega^1_{X/k} \longrightarrow \mathrm{At}(E) \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}(E) \longrightarrow 0$$

(dont les splittages sont les connexions sur E) à l'aide du "polynôme invariant" $(-1)^n \mathrm{Trace}\ \Lambda^n$. Notons (cf. (IV loc. cit.)) que la classe d'obstruction d'Atiyah $at(E) \in H^1(X, \underline{End}(E) \otimes \Omega^1_{X/k})$ coïncide avec la classe définie par l'extension des parties principales

$$(0.6) \qquad 0 \longrightarrow \Omega^1_{X/k} \otimes E \longrightarrow P^1_{X/k}(E) \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

(puisque toutes deux sont la classe du fibré des connexions sur E). Si maintenant E est un complexe de $\underline{O}_X$-Modules (quelconques), prenant les parties principales terme à terme, on obtient une suite exacte de complexes analogue à (0.6), d'où l'on déduit, pour $E \in \mathrm{ob}\ D^-(X)$, un morphisme canonique de D(A), dit morphisme d'Atiyah :

$$(0.7) \qquad E \longrightarrow E \overset{L}{\otimes} \Omega^1_{X/k}[1] \quad .$$

Il est tentant, dès lors, de partir de (0.7) pour généraliser la construction "à la Atiyah" des $c^n(E)$ au cas où E est un complexe parfait (SGA 6 I), en utilisant la théorie de la trace pour les complexes parfaits et les foncteurs dérivés des puissances extérieures (resp. symétriques). Ainsi, $c^1(E)$, par exemple, sera définie comme suit. La flèche (0.7) correspond, par la formule d'adjonction chère à Cartan et grâce au fait que E est parfait ([1]), à une flèche

$$\underline{O}_X \longrightarrow E^\vee \overset{L}{\otimes} E \overset{L}{\otimes} \Omega^1_{X/k}[1]$$

(où l'on a posé $E^\vee = \underline{RHom}(E, \underline{O}_X)$), que l'on peut "contracter", par l'homomorphisme canonique $E^\vee \overset{L}{\otimes} E \longrightarrow \underline{O}_X$ (SGA 6 I 7.5) , en une flèche $\underline{O}_X \longrightarrow \Omega^1_{X/k}[1]$; celle-ci sera par définition la classe $c^1(E)$. Bien entendu, on voudra que les $c^n(E)$ satisfassent à des relations analogues à (0.2) et (0.3) :

$$(0.2)' \qquad c^n(Lf^*F) = f^* c^n(F) \quad ,$$

$$(0.3)' \qquad c_t(E) = c_t(E')c_t(E'') \quad ,$$

si $0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$ est une suite exacte de complexes parfaits. De (0.3)' on tire en particulier :

([1]) En toute rigueur on doit, pour des raisons de degré, supposer E d'amplitude parfaite finie (SGA 6 I 4.8).

(0.8) $$c^1(E) = c^1(E') + c^1(E'') \quad .$$

Contrairement à ce qu'on a envie de croire, cette dernière relation n'est malheureusement pas évidente sur la définition proposée plus haut (et qui est visiblement la seule raisonnable). Supposons, pour simplifier, que E', E, E'' soient à degrés bornés supérieurement et à composantes plates. On a alors un diagramme commutatif, où les colonnes sont exactes et les lignes sont les suites exactes des parties principales :

(0.9)

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & E' \otimes \Omega^1_{X/k} & \longrightarrow & P^1_{X/k}(E') & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & E \otimes \Omega^1_{X/k} & \longrightarrow & P^1_{X/k}(E) & \longrightarrow & E & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & E'' \otimes \Omega^1_{X/k} & \longrightarrow & P^1_{X/k}(E'') & \longrightarrow & E'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array} \quad .$$

Dans le langage de Deligne [30], on interprète (0.9) comme définissant un morphisme de "vrais" triangles

(0.10) $$[E] \longrightarrow [E] \overset{L}{\otimes} \Omega^1_{X/k}[1] \quad ,$$

où $[E]$ désigne le vrai triangle défini par la suite exacte $(0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0)$, induisant sur chaque morceau E', E, E'' la flèche (0.7). On sait, par la théorie de Deligne [30], que si $u : [L] \longrightarrow [L]$ est un endomorphisme d'un vrai triangle $[L] = (0 \longrightarrow L' \longrightarrow L \longrightarrow L'' \longrightarrow 0)$ tel que L', L et L'' soient parfaits, alors on a $Tr(u|L) = Tr(u|L') + Tr(u|L'')$, où $Tr : Hom(L,L)$ (resp....) $\longrightarrow H^0(X, \underline{O}_X)$ est l'homomorphisme trace. Il y a donc lieu de généraliser cette additivité au cas de la situation (0.10). Cette généralisation n'est pas triviale, du fait que la notion de trace envisagée dans la théorie de

Deligne est de nature locale, tandis que celle qui intervient en (0.10) est de nature globale : en fait, dans la théorie de Deligne, la formule d'additivité est prouvée par localisation et dévissage des complexes parfaits en jeu, et l'on ne voit pas comment ces arguments pourraient s'étendre à la situation (0.10). La résolution de cette difficulté est la motivation principale de la théorie qui suit, et qui permettra en particulier de construire des classes de Chern $c^n(E) \in H^n(X,\Omega^n_{X/k})$ pour E parfait, satisfaisant à (0.2)' et (0.3)' . Très succinctement, l'idée est de subtituer à la notion de vrai triangle celle, plus souple, de complexe filtré, et d'effectuer dans la"catégorie dérivée correspondante" les constructions que l'on effectue habituellement dans la catégorie dérivée ordinaire $D(X)$, telles que celles des foncteurs $\overset{L}{\otimes}$, RHom, etc. et des flèches canoniques entre iceux, en regardant chaque fois l'effet du passage au gradué associé.

L'organisation du chapitre est la suivante. Au n° 1, on étudie la "catégorie dérivée filtrée" $DF(A)$ d'une catégorie abélienne A , obtenue en localisant la catégorie des complexes munis d'une filtration finie par rapport aux flèches qui induisent des quasi-isomorphismes sur les gradués associés. La raison pour laquelle nous nous limitons au cas de filtrations finies est qu'elles suffisent pour les applications que nous avons en vue, et que par ailleurs la considération de filtrations infinies (sans doute utile dans d'autres contextes) introduirait des problèmes de convergence sans intérêt pour notre propos. Le principal résultat du n° 1 est l'interprétation, quand A possède assez d'injectifs, de $\mathrm{Hom}(L,M)$ pour L, $M \in \mathrm{ob}\ DF(A)$ comme groupe de cohomologie attaché à un complexe $\mathrm{RHom}(L,M)$ convenable. On suit de très près le canavas fourni par le Séminaire Hartshorne [32] . Au n° 2 on construit, dans la catégorie dérivée filtrée d'un topos annelé, les foncteurs $\overset{L}{\otimes}$ et RHom ; on étudie les relations entre ceux-ci (isomorphismes "chers à Cartan", flèches canoniques de composition des homomorphismes, etc.), ainsi que la compatibilité avec le passage au gradué. Le n° 3 développe la théorie des traces pour les complexes filtrés dont le gradué est parfait, fournissant en particulier une réponse affirmative à la question d'additivité indiquée plus haut. Le n° 4 est un intermède sur la construction des foncteurs dérivés des puissances symétriques et extérieures dans "la catégorie

dérivée filtrée", dont on se sert au n° 5 pour définir la classe totale de Chern d'un complexe parfait à partir du morphisme d'Atiyah. La théorie développée au n° 5 contient en particulier celle du polynôme caractéristique d'un endomorphisme d'un complexe parfait. Le n° 6 donne des application de la théorie à la construction de classes de cohomologie locale.

1. Extensions filtrés (resp. graduées).

Dans ce n° , A désigne une catégorie abélienne. Si X est une catégorie additive (resp. abélienne), on utilise les notations C(X), K(X) (resp. D(X)) pour désigner la catégorie des complexes, complexes à homotopie près (resp. catégorie dérivée) de X .

1.1. Notons CF(A) la catégorie dont les objets sont les complexes de A (à différentielle de degré + 1) munis d'une filtration décroissante finie (indexée par $\mathbb{Z}$) et les morphismes les morphismes de complexes compatibles aux filtrations. C'est une catégorie additive. Pour $L \in \text{ob } CF(A)$ et $i \in \mathbb{Z}$, on note $L^i \in \text{ob } A$ la composante de degré i de L et $F^iL \in \text{ob } C(A)$ le i-ième cran de la filtration. Si l'on désigne par Fil(A) la catégorie (additive) des objets filtrés de A , CF(A) s'identifie à la sous-catégorie pleine de C(Fil(A)) formée des objets de filtration "uniformément" finie. On a un foncteur additif "gradué associé :

$$\text{(1.1.1)} \qquad gr : CF(A) \longrightarrow CG(A) \quad ,$$

où CG(A) désigne la catégorie des complexes de A munis d'une graduation finie. On note $k^i : CG(A) \longrightarrow C(A)$ le foncteur composante de degré i , et l'on pose $k^i gr = gr^i$.

Soient $L \in \text{ob } CF(A)$ (resp. CG(A)) et $n \in \mathbb{Z}$. On note comme d'habitude $L[n]$ le complexe définie par $L[n]^i = L^{i+n}$, $d_{L[n]} = (-1)^n d_L$, muni de la filtration (resp. graduation) $F^i(L[n]) = (F^iL)[n]$ (resp. $k^i(L[n]) = (k^iL)[n]$) . On note d'autre part L(n) l'objet de CF(A) (resp. CG(A)) ayant même complexe sous-jacent et dont la filtration (resp. graduation) est définie par $F^i(L(n)) = F^{i+n}(L)$ (resp. $k^i(L(n)) = k^{i+n}(L)$). Le foncteur (1.1.1) commute (à isomorphisme canonique près) à la translation des degrés et au décalage de la filtration (resp. graduation).

Soit $L \in \mathrm{ob}\, CF(A)$. Pour $i \in \mathbb{Z}$, posons $F_iL = L/F^iL$. On dit que la suite d'épimorphismes $F_{i+1}L \longrightarrow F_iL$ est la <u>cofiltration</u> de L ; filtration et cofiltration se déterminent mutuellement, elles s'échangent par passage à la catégorie opposée A^o. Soit $n \in \mathbb{Z}$; le foncteur de troncation $t_{[n}$ (resp. $t_{n]}$) sur $C(A)$ défini en (I 1.4.7) transforme épimorphisme en épimorphisme (resp. monomorphisme en monomorphisme). Par suite, les $t_{[n}(F_iL)$ (resp. $t_{n]}(F^iL)$) forment une cofiltration (resp. filtration) finie de $t_{[n}(L)$ (resp. $t_{n]}(L)$). On obtient de la sorte un foncteur

(1.1.2) $$t_{[n} \text{ (resp. } t_{n]}) : CF(A) \longrightarrow C^{[n}F(A) \text{ (resp. } C^{n]}F(A)),$$

où $C^{[n}F(A)$ (resp. $C^{n]}F(A)$) désigne la sous-catégorie pleine de $CF(A)$ formée des complexes nuls en degré $< n$ (resp. $> n$). Les flèches canoniques (I (1.4.7.1), (1.4.7.2))

$$L \longrightarrow t_{[n}(L) \quad , \quad t_{n]}(L) \longrightarrow L$$

sont compatibles aux filtrations, et donnent, pour $M \in \mathrm{ob}\, \tilde{C}F(A)$, $N \in \mathrm{ob}\, C^{\tilde{n}]}F(A)$, des isomorphismes (canoniques fonctoriels)

$$\mathrm{Hom}(t_{[n}L, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(L, M) \quad , \quad \mathrm{Hom}(N, L) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}(N, t_{n]}L) \quad .$$

Elles induisent d'autre part des isomorphismes

(1.1.3) $$H^pF_iL \xrightarrow{\sim} H^pF_it_{[n}L \quad , \quad \text{pour } p \geq n \text{ et tout } i \ ,$$

$$H^pF^it_{n]}L \xrightarrow{\sim} H^pF^iL \quad , \quad \text{pour } p \leq n \text{ et tout } i \ .$$

De (1.1.3) et du lemme des cinq on déduit que l'on a

$$H^pF^iL \xrightarrow{\sim} H^pF^it_{[n}L \quad , \quad \text{pour } p \geq n+1 \text{ et tout } i \ ,$$

$$H^pF_it_{n]}L \xrightarrow{\sim} H^pF_iL \quad , \quad \text{pour } p \leq n-1 \text{ et tout } i \ ;$$

on ne peut rien dire en général des $H^nF^it_{[n}L$ et $H^nF_it_{n]}L$.

On définit de manière analogue sur $CG(A)$ les foncteurs $t_{[n}$, $t_{n]}$; ils commutent aux foncteurs k^i . En revanche le foncteur $gr : CF(A) \longrightarrow CG(A)$ ne commute aux foncteurs $t_{[n}$ (resp. $t_{n]}$) que si A est réduite à l'objet nul.

Soit $f : L \longrightarrow M$ une flèche de $CF(A)$ (resp. $CG(A)$). Le cône de f , $X = Cf$, défini par les formules usuelles $X = L[1] \oplus M$, $d_X = \begin{pmatrix} d_{L[1]} & 0 \\ f & d_M \end{pmatrix}$, est, muni de la filtration (resp. graduation) "somme", un objet de $CF(A)$ (resp. $CG(A)$), et l'on a une suite exacte semi-scindée (i.e. scindée degré à degré) de complexes filtrés (resp. gradués)

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow Cf \longrightarrow L[1] \longrightarrow 0 \quad , \tag{1.1.4}$$

qui dépend fonctoriellement de f .

1.2. On dit qu'une flèche de $CG(A)$ est un quasi-isomorphisme si la flèche de complexes non gradués sous-jacente est un quasi-isomorphisme. On dit qu'une flèche f de $CF(A)$ est un quasi-isomorphisme filtré (ou parfois simplement, quasi-isomorphisme) si elle vérifie les conditions équivalentes suivantes :

(i) $F_i f$ est un quasi-isomorphisme pour tout i ,

(ii) $F^i f$ est un quasi-isomorphisme pour tout i ,

(iii) $gr(f)$ est un quasi-isomorphisme.

Si l'on convient de dire qu'un objet L de $CF(A)$ est acyclique quand grL l'est (ou, de manière équivalente, chaque $F_i L$, ou chaque $F^i L$)), les conditions précédentes sont encore équivalentes, vu (1.1.4), à

(iv) Cf est acyclique .

On note $DF(A)$ (resp. $DG(A)$) la catégorie déduite de $CF(A)$ (resp. $CG(A)$) en inversant les quasi-isomorphismes. Le foncteur (1.1.1) se prolonge naturellement en un foncteur

$$gr : DF(A) \longrightarrow DG(A) \quad . \tag{1.2.1}$$

Celui-ci commute (à isomorphisme canonique près) à la translation des degrés et au

décalage de la filtration (resp. graduation).

Soient $u, v : L \rightrightarrows M$ des flèches de $CF(A)$ (resp. $CG(A)$). Une homotopie filtrée (resp. graduée) entre u et v est une homotopie h telle que $h(F^iL^n) \subset F^iL^{n-1}$ (resp. $h(k^iL^n) \subset k^iL^{n-1}$) pour tous i, $n \in \mathbb{Z}$. On notera $KF(A)$ (resp. $KG(A)$) la catégorie ayant mêmes objets que $CF(A)$ (resp. $CG(A)$) et dont les flèches sont les classes de flèches à homotopie filtrée (resp. graduée) près. Si l'on désigne par $Fil(A)$ (resp. $Gr(A)$) la catégorie (additive) des objets filtrés (resp. gradués) de A, la catégorie $KF(A)$ (resp. $KG(A)$) est, à isomorphisme canonique près, une sous-catégorie pleine de $K(Fil(A))$ (resp. $K(GR(A))$. Un argument standard (cf. Verdier [27] et (I 2.3.3, 3.1.2)) montre que $KF(A)$ (resp. $KG(A)$) s'identifie canoniquement à la catégorie localisée de $CF(A)$ (resp. $CG(A)$) par rapport aux homotopismes filtrés (resp. gradués). Si f et g sont deux flèches de $CF(A)$ (resp. $CG(A)$) induisant la même flèche de $KF(A)$ (resp. $KG(A)$), on a, pour tout i, $H(F^if) = H(F^ig)$ (resp. $H(k^if) = H(k^ig)$) ; par suite, la notion de quasi-isomorphisme se prolonge naturellement à $KF(A)$ (resp. $KG(A)$), et $DF(A)$ (resp. $DG(A)$) s'obtient à partir de $KF(A)$ (resp. $KG(A)$) en inversant les quasi-isomorphismes. D'autre part, la structure triangulée (au sens de Verdier) de $K(Fil(A))$ (resp. $K(Gr(A))$) induit une structure triangulée sur $KF(A)$ (resp. $KG(A)$) : un triangle $T = (L \xrightarrow{cl(f)} M \longrightarrow N \longrightarrow L[1])$ de $KF(A)$ (resp. $KG(A)$) est dit distingué si son image dans $K(Fil(A))$ (resp. $K(Gr(A))$) l'est, i.e. si T est isomorphe dans $KF(A)$ (resp. $KG(A)$) au triangle canonique défini par le cône de f. Les objets acycliques de $KF(A)$ (resp. $KG(A)$) forment une sous-catégorie épaisse, et l'ensemble des quasi-isomorphismes est le système multiplicatif correspondant. Il en résulte en particulier que <u>les quasi-isomorphismes de $KF(A)$ (resp. $KG(A)$) permettent un calcul de fractions bilatère</u> (I 1.4.2) : pour $L, M \in ob\ KF(A)$, on a

$$\text{(1.2.2)} \qquad \mathrm{Hom}_{DF(A)}(L,M) = \varinjlim_{L' \xrightarrow{qis} L} \mathrm{Hom}_{KF(A)}(L',M) = \varinjlim_{M \xrightarrow{qis} M'} \mathrm{Hom}_{KF(A)}(L,M')$$

$$= \varinjlim_{L' \xrightarrow{qis} L,\ M \xrightarrow{qis} M'} \mathrm{Hom}_{KF(A)}(L',M')$$

et l'on a des formules analogues avec KG et DG au lieu de KF et DF . En outre DF(A) (resp. DG(A)) est munie d'une structure (unique) de catégorie triangulée telle que le foncteur de passage au quotient $KF(A) \longrightarrow DF(A)$ (resp. $KG(A) \longrightarrow DG(A)$) soit exact. D'autre part, le foncteur "gradué associé" (1.1.1) commute à la formation du cône d'un morphisme, donc induit un foncteur exact $gr : KF(A) \longrightarrow KG(A)$, et le foncteur (1.2.1), déduit par passage au quotient, est encore exact. Pour $n \in \mathbb{Z}$ et $L, M \in \mathrm{ob}\ DF(A)$ (resp. DG(A)), on pose

$$\text{(1.2.3)} \qquad \mathrm{Ext}^n_{fil}(L,M) = \mathrm{Hom}_{DF(A)}(L,M[n]) = \mathrm{Hom}_{DF(A)}(L[-n],M)$$

$$\text{(resp.} \qquad \mathrm{Ext}^n_{grad}(L,M) = \mathrm{Hom}_{DG(A)}(L,M[n]) = \mathrm{Hom}_{DG(A)}(L[-n],M)\ ) \quad .$$

Un triangle distingué T de DF(A) (resp. DG(A)) fournit comme on sait pour $X \in \mathrm{ob}\ DF(A)$ (resp. DG(A)) des suites exactes fonctorielles $\mathrm{Ext}^\cdot_{fil}(T,X)$ et $\mathrm{Ext}^\cdot_{grad}(X,T)$, et l'on a des morphismes de suites exacte $gr : \mathrm{Ext}^\cdot_{fil}(T,X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^\cdot_{grad}(grT,grX)$, $gr : \mathrm{Ext}^\cdot_{fil}(X,T) \longrightarrow \mathrm{Ext}^\cdot_{grad}(grX,grT)$.

Remarque 1.2.3.1. Les foncteurs "composantes" k^i définissent une équivalence de la catégorie CG(A) (resp. KG(A), resp. DG(A)) avec la catégorie des objets gradués (de graduation finie) de C(A) (resp. K(A), resp. D(A)). Les constructions dans CG(A) (resp. KG(A), resp. DG(A)) que l'on effectuera dans la suite (foncteurs $\mathrm{Hom}^\cdot$, RHom, $\overset{L}{\otimes}$, $\underline{\mathrm{RHom}}$, etc. et relations entre iceux) se ramèneront trivialement à des constructions dans C(A) (resp. K(A) , resp. D(A)). Cependant on préfera souvent utiliser le langage fugué "filtré resp. gradué" pour la simplicité de l'exposition.

Lemme 1.2.4. Soient $L \in \mathrm{ob}\, CF(A)$ et $n \in \mathbb{Z}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $H^p(gr^i L) = 0$ pour $p < n$ et tout i ;

(ii) $H^p(F_i L) = H^p(F^i L) = 0$ pour $p < n$ et tout i ;

(iii) $L \longrightarrow t_{[n}(L)$ est un quasi-isomorphisme (1.2).

Les conditions analogues, où l'on remplace $p < n$ et $t_{[n}$ par $p > n$ et $t_{n]}$, sont équivalentes.

Preuve. Partons de (i). Comme $F^i L = 0$ pour i assez grand positif, les suites exactes $0 \longrightarrow F^{i+1} L \longrightarrow F^i L \longrightarrow gr^i L \longrightarrow 0$ impliquent par récurrence $H^p(F^i L) = 0$ pour $p < n$ et tout i. Comme $F_i L = 0$ pour i assez grand négatif, les suites exactes $0 \longrightarrow gr^i L \longrightarrow F_{i+1} L \longrightarrow F_i L \longrightarrow 0$ impliquent par récurrence $H^p(F_i L) = 0$ pour $p < n$ et tout i, ce qui prouve (ii). Partons de (ii). On a $H^p F_i L \xrightarrow{\sim} H^p F_i t_{[n} L$ pour $p \geq n$ et tout i d'après (1.1.3), et $H^p F_i L \xrightarrow{\sim} H^p F_i t_{[n} L = 0$ pour $p < n$ et tout i par hypothèse, donc $H^p F_i L \xrightarrow{\sim} H^p F_i t_{[n} L$ pour tout p et tout i, ce qui prouve (iii). Enfin (iii) implique que $grL \longrightarrow grt_{[n} L$ est un quasi-isomorphisme, d'où (i) puisque $t_{[n} L$ est nul en degré $< n$. La deuxième partie de (1.2.4) se démontre de manière analogue.

1.2.5. Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. On note $D^{[n} F(A)$ (resp. $D^{n]} F(A)$) la sous-catégorie pleine de $DF(A)$ formée des objets vérifiant les conditions équivalentes de (1.2.4) (resp. les conditions "analogues" de (1.2.4)). On pose $D^{[a,b]} F(A) = D^{[a} F(A) \cap D^{b]} F(A)$, avec les conventions que $D^{[-\infty,b]} F(A) = D^{b]} F(A)$ $(b \in \mathbb{Z})$, $D^{[a,+\infty]} F(A) = D^{[a} F(A)$ $(a \in \mathbb{Z})$, $D^{[-\infty,+\infty]} F(A) = DF(A)$, $D^{[-\infty,-\infty]} F(A) = D^{[+\infty,+\infty]} F(A) = 0$. Notons $C^{[a,b]} F(A)$ la sous-catégorie pleine de $CF(A)$ formée des objets L tels que $L^i = 0$ pour $i \notin [a,b]$, et $Qis_{[a,b]}$ l'ensemble des quasi-isomorphismes de $C^{[a,b]} F(A)$. On a un foncteur naturel :

$$C^{[a,b]} F(A)\ (Qis_{[a,b]}{}^{-1}) \longrightarrow D^{[a,b]} F(A) \quad . \tag{1.2.5.1}$$

De même, si l'on note $D^{[a,b]}G(A)$ (resp. $C^{[a,b]}G(A)$) la sous-catégorie pleine de DG(A) (resp. CG(A)) formée des objets L tels que $H^i(L)$ (resp. L^i) = 0 pour $i \notin [a,b]$, on a un foncteur naturel

$$C^{[a,b]}G(A)(Qis_{[a,b]}^{-1}) \longrightarrow D^{[a,b]}G(A) \quad . \tag{1.2.5.2}$$

Lemme 1.2.5.3. Les foncteurs (1.2.5.1) et (1.2.5.2) sont des équivalentes de catégories.

Preuve. C'est une conséquence formelle de (1.2.2) et de l'existence des foncteurs de troncation (1.1.2) (cf. (SGA 4 XVII 5.5.4.1) et (I 1.4.6)).

1.2.5.4. Faisant $a = b = 0$ dans (1.2.5.3), et identifiant à $C^{[o,o]}F(A)$ (resp. $C^{[o,o]}G(A)$) la catégorie Filf(A) (resp. Grf(A)) des objets de A munis d'une filtration (resp. graduation) finie, on trouve que Filf(A) (resp. Grf(A)) s'identifie à la sous-catégorie pleine de DF(A) (resp. DG(A)) formée des objets L tels que $H^p(gr^iL)$ (resp. $H^p(L)$) = 0 pour $p \neq 0$ et tout i. Pour L, M $\in$ ob Filf(A) (resp. Grf(A)), on a donc $Hom(L,M) \xrightarrow{\sim} Ext^o_{fil}(L,M)$ (resp. $Ext^o_{grad}(L,M)$ (1.2.3)) ; pour $n \geq 1$, on peut montrer que le groupe $Ext^n_{fil}(L,M)$ (resp. $Ext^n_{grad}(L,M)$) s'interprète comme l'ensemble des classes de suites exactes

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow X^{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow X^o \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

pour la relation d'équivalence habituelle de Yoneda ("suite exacte" voulant dire bien entendu "objet acyclique de CF(A) (resp. CG(A))").

1.2.5.5. Notons C.FA (resp. C.GA) la catégorie des objets simpliciaux de A munis d'une filtration (resp. graduation) finie. La théorie de Dold-Puppe montre que le foncteur normalisation

$$N : C.FA \longrightarrow C^{o]}F(A)$$

(resp. $N : C.GA \longrightarrow C^{o]}G(A)$)

est une équivalence de catégories. Disons qu'une flèche f de $C.FA$ (resp. $C.GA$) est un quasi-isomorphisme si Nf est un quasi-isomorphisme, et notons $D.F(A)$ (resp. $D.G(A)$) la catégorie déduite de $C.FA$ (resp. $C.GA$) en inversant les quasi-isomorphismes. Alors N induit une équivalence de catégories $D.F(A) \xrightarrow{\approx} C^{o]}F(A)\ (Qis_{o]}^{-1})$ (resp. $D.G(A) \xrightarrow{\approx} C^{o]}G(A)(Qis_{o]}^{-1})$) . Faisant $a = -\infty$, $b = 0$ dans (1.2.5.3), on obtient par composition une équivalence naturelle de catégories

$$D.F(A) \xrightarrow{\approx} D^{o]}F(A) \quad (\text{resp. } D.G(A) \xrightarrow{\approx} D^{o]}G(A)\ ) .$$

1.2.6. Notons $D^{+}F(A)$ (resp. $D^{-}F(A)$, resp. $D^{b}F(A)$) la sous-catégorie pleine de $DF(A)$ formée des objets L tels que $H^{p}(gr^{i}L) = 0$ pour tout i et p assez petit (resp. assez grand, resp. extérieur à un intervalle de $\mathbb{Z}$). Si l'on note $C^{+}F(A)$ (resp. $C^{-}F(A)$, resp. $C^{b}F(A)$) la sous-catégorie pleine de $CF(A)$ formée des objets L tels que $L^{i} = 0$ pour i assez petit (resp. assez grand, resp. extérieur à un intervalle de $\mathbb{Z}$), on voit comme en (1.2.5.3) que le foncteur canonique $C^{+}F(A)(Qis^{-1}) \longrightarrow D^{+}F(A)$ (resp. $C^{-}F(A)(Qis^{-1}) \longrightarrow D^{-}F(A)$, resp. $C^{b}F(A)(Qis^{-1}) \longrightarrow$ $\longrightarrow D^{b}F(A)$) est une équivalence de catégories. De même, la sous-catégorie pleine $D^{+}G(A)$ (resp. $D^{-}G(A)$, resp. $D^{b}G(A)$) de $DG(A)$ formée des L tels que $H^{p}(L) = 0$ pour p assez petit (resp. assez grand, resp. extérieur à un intervalle de $\mathbb{Z}$) est canoniquement équivalente à la catégorie déduite de $C^{+}G(A)$ (resp. $C^{-}G(A)$, resp. $C^{b}G(A)$) (définie de manière analogue à $C^{+}F(A)$ (resp. ...)) en inversant les quasi-isomorphismes.

1.2.7. Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. On dit qu'un objet L de $CF(A)$ (resp. $CG(A)$) est de <u>filtration</u> (resp. <u>graduation</u>) <u>concentrée dans</u> $[a,b]$ (pour $a = b$ on dit simplement concentrée en degré a) si $F^{i}L = L$ pour $i \leq a$, $F^{i}L = 0$ pour $i > b$ (resp. $k^{i}L) = 0$ pour $i \notin [a,b]$). On note $CF^{[a,b]}(A)$

(resp. $CG^{[a,b]}(A)$) la sous-catégorie pleine de $CF(A)$ (resp. $CG(A)$) formée des objets de filtration (resp. graduation) concentrée dans $[a,b]$. On a $CF(A) = CF^{[-\infty,+\infty]}(A) = \varinjlim_{[a,b]\subset\mathbb{Z}} CF^{[a,b]}(A)$ (resp. itou avec G au lieu de F). Le foncteur gradué associé induit un foncteur

$$gr : CF^{[a,b]}(A) \longrightarrow CG^{[a,b]}(A) .$$

Nous identifierons $C(A)$ (catégorie des complexes de A) à $CF^{[o,o]}(A)$ (resp. $CG^{[o,o]}(A)$) ; cette identification est compatible avec le foncteur gradué associé. En inversant les quasi-isomorphismes de $CF^{[a,b]}(A)$ (resp. $CG^{[a,b]}(A)$), on obtient une catégorie notée $DF^{[a,b]}(A)$ (resp. $DG^{[a,b]}(A)$). On a bien entendu $DF^{[-\infty,+\infty]}-A) = DF(A)$, $DG^{[-\infty,+\infty]}(A) = DG(A)$, $D(A) = DF^{[o,o]}(A) = DG^{[o,o]}(A)$. La catégorie $DF^{[a,b]}(A)$ (resp. $DG^{[a,b]}(A)$) s'obtient par un calcul de fractions bilatère à partir de la catégorie "à homotopie près" $KF^{[a,b]}(A)$ (resp. $KG^{[a,b]}(A)$).

Lemme 1.2.7.1. Pour $[a,b] \subset [c,d]$, le foncteur canonique

$$DF^{[a,b]}(A) \longrightarrow DF^{[c,d]}(A) \quad (\text{resp. } DG^{[a,b]}(A) \longrightarrow DG^{[a,b]}(A))$$

est pleinement fidèle.

Preuve. On peut se borner à prouver l'assertion relative au cas filtré (l'autre étant triviale). Soit $L \in \text{ob } DF^{[a,b]}(A)$, il suffit de montrer que dans l'ensemble des quasi-isomorphismes de $KF^{[c,d]}(A)$ de but L ceux qui appartiennent à $KF^{[a,b]}(A)$ forment un système cofinal ; or soit $L' \longrightarrow L$ un quasi-isomorphisme appartenant à $KF^{[c,d]}(A)$, notons L'' l'objet de $KF^{[a,b]}(A)$ défini par $F^iL'' = F^iL'$ pour $i \in [a,b]$, l'inclusion naturelle $L'' \longrightarrow L'$ est un quasi-isomorphisme, et l'on gagne.

1.2.8. Soient $[a,b]$ et $[c,d]$ des intervalles de $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. On emploiera les notations

$$D^{[a,b]}F^{[c,d]}(A) = D^{[a,b]}F(A) \cap DF^{[c,d]}(A) ,$$

$$D^{+}F^{[c,d]}(A) = D^{+}F(A) \cap DF^{[c,d]}(A) ,$$

et itou avec D^- et D^b au lieu de D^+, et itou avec G au lieu de F. Bien entendu ces diverses catégories se calculent directement en inversant les quasi-isomorphismes dans les catégories de complexes correspondantes $C^{[a,b]}_F{}^{[c,d]}(A) = C^{[a,b]}_{F(A)} \cap CF^{[c,d]}(A)$, etc.

1.3. Le foncteur Hom' filtré (resp. gradué).

1.3.1. Soient $L, M \in \text{ob } CF(A)$. Oubliant les filtrations, on a un complexe de groupes abéliens $\mathrm{Hom}'(L,M) = \mathrm{Hom}'_{C(A)}(L,M)$, défini par les formules usuelles :

$$\mathrm{Hom}^p(L,M) = \prod_i \mathrm{Hom}_A(L^i, M^{i+p}) \quad , \quad d^p = d_L + (-1)^{p+1} d_M \quad .$$

On a un sous-complexe $\mathrm{Hom}'_{CF(A)}(L,M) = \mathrm{Hom}'_{C(\mathrm{Fil}(A))}(L,M) \subset \mathrm{Hom}'(L,M)$ défini par

$$\mathrm{Hom}^p_{CF(A)}(L,M) = \prod_i \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fil}(A)}(L^i, M^{i+p}) \quad .$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on posera

$$F^n\mathrm{Hom}'(L,M) = \mathrm{Hom}'_{CF(A)}(L, M(n)) \quad ,$$

où $M(n)$ est déduit de M par décalage de la filtration de n unités (1.1). On a $F^0\mathrm{Hom}'(L,M) = \mathrm{Hom}'_{CF(A)}(L,M)$. Les $F^n\mathrm{Hom}'(L,M)$ définissent un objet de $CF(Ab)$ (Ab désignant la catégorie des groupes abéliens), ayant $\mathrm{Hom}'(L,M)$ comme complexe ordinaire sous-jacent, et que nous noterons encore $\mathrm{Hom}'(L,M)$; c'est un foncteur covariant en M, contravariant en L. Soient $[a,b]$ et $[c,d]$ des intervalles de $\mathbb{Z}$, le foncteur Hom' induit un foncteur (avec les notations (1.2.7))

$$CF^{[a,b]}(A)^o \times CF^{[c,d]}(A) \longrightarrow CF^{[c-b,d-a]}(Ab) \quad ;$$

en particulier, pour $n \in \mathbb{N}$, il induit des foncteurs

$$CF^{[o,n]}(A)^o \times CF^{[o,n]}(A) \longrightarrow CF^{[-n,n]}(Ab) \quad ,$$

$$C(A)^o \times CF^{[o,n]}(A) \longrightarrow CF^{[o,n]}(Ab) \quad ,$$

$$CF^{[o,n]}(A)^o \times C(A) \longrightarrow CF^{[-n,o]}(Ab) \quad ,$$

où $C(A)$ est identifiée à $CF^{[o,o]}(A)$. Les formules habituelles dans $C(Fil(A))$ impliquent que l'on a :

$$(1.3.1.1)\qquad \begin{cases} \mathrm{Hom}_{CF(A)}(L,M) = Z^oF^o\mathrm{Hom}^\cdot(L,M) \ , \\ \mathrm{Hom}_{KF(A)}(L,M) = H^oF^o\mathrm{Hom}^\cdot(L,M) \ . \end{cases}$$

1.3.2. Soient E, $F \in \mathrm{ob}\ CG(A)$. Oubliant les graduations de E et F, on définit de même un complexe $\mathrm{Hom}^\cdot(E,F) = \mathrm{Hom}^\cdot_{C(A)}(E,F)$. Celui-ci est naturellement bigradué en tant qu'objet de $C(Ab)$:

$$\mathrm{Hom}^\cdot(E,F) = \bigoplus_{i,j} \mathrm{Hom}^\cdot(k^i(E),\, k^j(F)) \ .$$

On regardera $\mathrm{Hom}^\cdot(E,F)$ comme muni de la graduation diagonale :

$$k^n\mathrm{Hom}^\cdot(E,F) = \bigoplus_{j-i=n} \mathrm{Hom}^\cdot(k^i(E),k^j(F))$$

$$= \mathrm{Hom}^\cdot_{CG(A)}(E,F(n)) \ ,$$

où $\mathrm{Hom}^\cdot_{CG(A)}(-,-)$ désigne le complexe des homomorphismes respectant les graduations et $F(n)$ le complexe F où l'on a décalé la graduation de n unités (1.1). Ainsi $\mathrm{Hom}^\cdot(E,F)$ est un objet de $CG(Ab)$, qui est un foncteur covariant en F, contravariant en E. Comme dans le cas filtré, si $[a,b]$ et $[c,d]$ sont des intervalles de $\mathbb{Z}$, le foncteur $\mathrm{Hom}^\cdot$ induit un foncteur

$$CG^{[a,b]}(A)^o \times CG^{[c,d]}(A) \longrightarrow CG^{[c-b,d-a]}(Ab) \ .$$

On a aussi des formules analogues à (1.3.1.1) :

$$(1.3.2.1)\qquad \begin{cases} \mathrm{Hom}_{CG(A)}(E,F) = Z^ok^o\mathrm{Hom}^\cdot(E,F) \ , \\ \mathrm{Hom}_{KG(A)}(E,F) = H^ok^o\mathrm{Hom}^\cdot(E,F) \ . \end{cases}$$

Soient L , $M \in$ ob $CF(A)$. Le foncteur gradué associé définit un morphisme de complexes

$$\mathrm{Hom}^{\cdot}_{CF(A)}(L,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}^{\cdot}_{CG(A)}(\mathrm{gr}L,\mathrm{gr}M) \quad ,$$

qui s'annule sur $F^1\mathrm{Hom}^{\cdot}(L,M)$, donc donne par passage au quotient un morphisme

$$\mathrm{gr}^0\mathrm{Hom}^{\cdot}(L,M) \longrightarrow k^0\mathrm{Hom}^{\cdot}(\mathrm{gr}L,\mathrm{gr}M) \quad .$$

Soit $n \in \mathbb{Z}$, remplaçant M par $M(n)$ on obtient pour tout n un morphisme

$$\mathrm{gr}^n\mathrm{Hom}^{\cdot}(L,M) \longrightarrow k^n\mathrm{Hom}^{\cdot}(\mathrm{gr}L,\mathrm{gr}M) \quad ,$$

i.e. une flèche de $CG(Ab)$:

(1.3.2.2) $$\mathrm{grHom}^{\cdot}(L,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}^{\cdot}(\mathrm{gr}L,\mathrm{gr}M) \quad ,$$

visiblement fonctorielle en L et M . Nous verrons plus bas (1.4.2) un cas important où cette flèche est un isomorphisme.

1.3.3. Le foncteur $\mathrm{Hom}^{\cdot}$ filtré (resp. gradué) est compatible aux homotopies filtrées (resp. gradués,), donc définit un foncteur encore noté

$$\mathrm{Hom}^{\cdot} : KF(A)^{\circ} \times KF(A) \longrightarrow KF(Ab)$$

(resp. $\mathrm{Hom}^{\cdot} : KG(A)^{\circ} \times KG(A) \longrightarrow KG(Ab)$).
On voit facilement, comme dans le cas ordinaire, que celui-ci est exact en chaque variable (au sens de Verdier).

1.4. Le foncteur $\mathrm{RHom}^{\cdot}$ filtré (resp. gradué).

Définition 1.4.1. On dit qu'un objet E de $CG(A)$ est de type injectif si E (ou, ce qui revient au même, chaque k^iE) est un complexe d'injectifs. On dit qu'un objet L de $CF(A)$ est de type injectif s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :

(i) grL est de type injectif ;

(ii) F^iL est un complexe d'injectifs pour tout i .

(L'équivalence de (i) et (ii) est immédiate).

Lemme 1.4.2. Soient $L, M \in \mathrm{ob}\ CF(A)$. Si M est de type injectif, la flèche (1.3.2.2) est un isomorphisme.

Preuve. On fait la vérification composante par composante, donc on peut supposer les complexes L et M réduits au degré zéro. Comme les F^iM sont injectifs, la filtration de M est scindable, donc on est aussitôt ramené au cas où celle-ci est concentrée en degré zéro (1.2.7). Alors, par définition, $F^0\mathrm{Hom}(L,M)$ est l'ensemble des homomorphismes $f : L \longrightarrow M$ tels que $f(F^1L) = 0$, i.e. on a

$$F^0\mathrm{Hom}(L,M) = \mathrm{Hom}(F_1L,M) \quad ,$$

avec la convention habituelle $F_1L = L/F^1L$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on a donc

$$\begin{aligned} F^{-n}\mathrm{Hom}(L,M) &= F^0\mathrm{Hom}(L(n),M) \\ &= \mathrm{Hom}(F_1L(n),M) \\ &= \mathrm{Hom}(F_{n+1}L,M) \quad . \end{aligned}$$

Appliquant alors le foncteur $\mathrm{Hom}(-,M)$, qui est exact puisque M est injectif, à la suite exacte

$$0 \longrightarrow gr^nL \longrightarrow F_{n+1}L \longrightarrow F_nL \longrightarrow 0 \quad ,$$

on trouve que la flèche canonique

$$gr^{-n}\mathrm{Hom}(L,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(gr^nL,M)$$

est un isomorphisme, ce qui achève la démonstration.

Lemme 1.4.3. Soient $L \in \mathrm{ob}\ CF(A)$ (resp. $CG(A)$) et $M \in \mathrm{ob}\ C^+F(A)$ (resp. $C^+G(A)$), avec M de type injectif. Si L où M est acyclique (i.e. a une image nulle dans $DF(A)$ (resp. $DG(A)$), il en est de même de $\mathrm{Hom}^\cdot(L,M)$.

Preuve. L'assertion dans le cas gradué résulte aussitôt de l'assertion analogue dans le cas non gradué, qui est bien connue([32] I 6.2). L'assertion dans le cas filtré en découle grâce à (1.4.2).

Lemme 1.4.4. Supposons que A ait assez d'injectifs. Alors, pour tout $M \in \mathrm{ob}\ C^+F(A)$, il existe un quasi-isomorphisme $f : M \longrightarrow I$ de $C^+F(A)$ tel que I soit de type injectif et $gr(f)$ un monomorphisme.

Preuve. On peut supposer que, pour un entier n convenable (assez grand), on a construit un morphisme d'objets de $CF(A)$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \subset \ldots & \subset & I_{n+1} & \subset & I_n \\ \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle f_{n+1}} & & \uparrow{\scriptstyle f_n} \\ 0 \subset \ldots & \subset & M_{n+1} & \subset & M_n \end{array}$$

tel que $gr^p f$ pour $p \geq n$ soit un monomorphisme et un quasi-isomorphisme et que I_p soit un complexe d'injectifs pour $p \geq n$. Il s'agit de construire un morphisme de suites exactes de complexes

$$(*) \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I_n & \longrightarrow & I_{n-1} & \longrightarrow & I_{n-1}/I_n & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow{\scriptstyle f_n} & & \uparrow{\scriptstyle f_{n-1}} & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & M_n & \longrightarrow & M_{n-1} & \longrightarrow & M_{n-1}/M_n & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

tel que I_{n-1} soit un complexe d'injectifs et que la flèche verticale de droite soit un monomorphisme et un quasi-isomorphisme. Posons $J_{n-1} = I \oplus_{M_n} M_{n-1}$. Comme par hypothèse f_n est un monomorphisme et un quasi-isomorphisme, il en est de même de $M_{n-1} \longrightarrow J_{n-1}$. Choisissons une flèche $J_{n-1} \longrightarrow I_{n-1}$ qui soit un

monomorphisme et un quasi-isomorphisme, avec I_{n-1} un complexe d'injectifs borné inférieurement, on sait que c'est possible, A possédant assez d'injectifs. Prenant alors pour f_n la flèche composée $M_{n-1} \longrightarrow J_{n-1} \longrightarrow I_{n-1}$ et pour $I_n \longrightarrow I_{n-1}$ l'injection composée $I_n \longrightarrow J_{n-1} \longrightarrow I_{n-1}$, on obtient un morphisme (*) jouissant des propriétés requises. Cela permet, par récurrence descendante, de construire la flèche f cherchée.

Proposition 1.4.5. On suppose que A possède assez d'injectifs. Pour $L \in$ ob $KF(A)$, $M \in$ ob $K^+F(A)$, le ind-objet de $DF(Ab)$

$$RHom(L,M) = \text{"lim"}_{M \xrightarrow{t} M'} Hom^\cdot(L,M') = \text{"lim"}_{\substack{L' \xrightarrow{s} L \\ M \xrightarrow{t} M'}} Hom^\cdot(L',M') \quad ,$$

où s (resp. t) parcourt la catégorie des quasi-isomorphismes de $KF(A)$ de but L (resp. source M), est essentiellement constant de valeur $Hom^\cdot(L,I)$, où $M \longrightarrow I$ est un quasi-isomorphisme de $K^+F(A)$ avec I de type injectif. Le foncteur ainsi défini ([1]) :

$$RHom : DF(A)^o \times D^+F(A) \longrightarrow DF(Ab)$$

est le dérivé droit du foncteur $Hom^\cdot$ (au sens de (I 1.4.4)), il est exact en chaque variable.

Preuve. Le foncteur $Hom^\cdot : KF(A)^o \times K^+F(A) \longrightarrow KF(Ab)$ étant exact (1.3.3), la première assertion est une conséquence immédiate de (1.4.3) et (1.4.4). La seconde se prouve de la façon standard.

Corollaire 1.4.6. Sous l'hypothèse de (1.4.10), on a, pour $L \in$ ob $DF(A)$, $M \in$ ob $D^+F(A)$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$Ext^n_{fil}(L,M) = H^nF^oRHom(L,M) \quad ,$$

où le premier membre est défini en (1.2.3).

([1]) On utilise implicitement (1.2.6).

Preuve. Par décalage, on peut supposer $n = 0$. On a par définition

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^0_{fil}(L,M) &= \varinjlim_{M \xrightarrow{qis} M'} \mathrm{Hom}_{KF(A)}(L,M') \\ &= \varinjlim_{M \xrightarrow{qis} M'} H^0F^0\mathrm{Hom}^\cdot(L,M') \qquad \text{d'après (1.3.1.1)} \\ &= H^0F^0\mathrm{RHom}(L,M) \qquad \text{d'après (1.4.5)} \quad . \end{aligned}$$

Corollaire 1.4.7. Sous l'hypothèse de (1.4.5), le foncteur naturel

$$K^+FI(A) \longrightarrow D^+F(A) \quad ,$$

où $K^+FI(A)$ désigne la sous-catégorie pleine de $K^+F(A)$ formée des objets de type injectif, est une équivalence de catégories.

Preuve. D'après (1.4.6) le foncteur en question est pleinement fidèle, et c'est une équivalence de catégories d'après (1.2.6) et (1.4.4).

1.4.8. La théorie du RHom gradué se développe parallèlement à celle du RHom filtré, avec cette différence que c'est une paraphrase triviale du cas non gradué. On a ainsi des analogues gradués des résultats (1.4.3) à (1.4.7), qu'on laisse au lecteur le soin d'énoncer. La flèche (1.3.2.2) donne, par passage aux ind-objets, une flèche canonique de $DG(Ab)$:

$$\text{(1.4.8.1)} \qquad \mathrm{gr}\ \mathrm{RHom}(L,M) \longrightarrow \mathrm{RHom}(\mathrm{gr}L,\mathrm{gr}M) \quad ,$$

pour $L \in \mathrm{ob}\ DF(A)$, $M \in \mathrm{ob}\ D^+F(A)$.

On notera que dans l'identification de $DG(A)$ avec la catégorie des objets gradués de $D(A)$ (1.2.3.1), $\mathrm{RHom}(E,F)$ pour $E \in \mathrm{ob}\ DG(A)$, $F \in \mathrm{ob}\ D^+G(A)$ s'identifie à l'objet gradué $\bigoplus_n k^n\,\mathrm{RHom}(E,F)$, avec

$$k^n RHom(E,F) = \bigoplus_i RHom(k^i E, k^{i+n} F) \quad ,$$

le RHom au second membre étant calculé dans D(A).

Proposition 1.4.9. La flèche (1.4.8.1) est un isomorphisme.

Preuve. Vu la définition des foncteurs RHom, cela résulte de (1.4.2).

1.4.10. Supposons toujours que A ait assez d'injectifs. Le foncteur RHom filtré (resp. gradué) défini plus haut commute trivialement au foncteur oubli de la filtration (resp. graduation). Pour $L \in ob\ DF(A)$, $M \in ob\ D^+F(A)$, la filtration de RHom(L,M) définit une suite spectrale (convergente)

$$E_1^{pq} = H^{p+q} gr^p RHom(L,M) \Longrightarrow Ext^*(L,M) \quad .$$

D'après (1.4.9), on peut récrire le terme E_1 sous la forme

$$E_1^{pq} = Ext^{p+q}_{grad}(grL, grM(p)) = \bigoplus_i Ext^{p+q}(gr^i L, gr^{i+p} M) \quad .$$

La différentielle d_1 envoie $Ext^{p+q}(gr^i L, gr^{i+p} M)$ dans $Ext^{p+q+1}(gr^i L, gr^{i+p+1} M) \oplus Ext^{p+q+1}(gr^{i-1} L, gr^{i+p} M)$ par $(\pm d', \pm d'')$, où d' (resp. d'') est l'opérateur cobord défini par la suite exacte

$$0 \longrightarrow gr^{i+p+1} M \longrightarrow F^{i+p} M / F^{i+p+2} M \longrightarrow gr^{i+p} M \longrightarrow 0$$

(resp. $0 \longrightarrow gr^i L \longrightarrow F^{i-1} L / F^{i+1} L \longrightarrow gr^{i-1} L \longrightarrow 0$) .

Nous laissons au lecteur plus courageux que nous le soin de préciser les signes.

2. Les foncteurs $\overset{L}{\otimes}$ et RHom filtrés (resp. gradués).

Dans ce numéro, A désigne un Anneau commutatif d'un topos T , A-Mod la catégorie des A-Modules. On abrégera en CF(A), CG(A), etc., les notations CF(A-Mod), CG(A-Mod), etc., du n° 1. Quand il n'en pourra résulter de confusion, on écrira $\otimes$ (resp. Hom) au lieu de $\otimes_A$ (resp. $\underline{\mathrm{Hom}}_A$).

2.1. Le foncteur $\overset{L}{\otimes}$ filtré (resp. gradué).

2.1.1. Soient L, M $\in$ ob CF(A). On filtre $L \otimes M$ par les sous-complexes

$$F^n(L \otimes M) = \sum_{p+q \geq n} \mathrm{Im}(F^pL \otimes F^qM) = \sum_{p+q=n} \mathrm{Im}(F^pL \otimes F^qM) \quad .$$

On définit ainsi un foncteur additif :

$$\otimes : CF(A) \times CF(A) \longrightarrow CF(A) \quad ,$$

possédant les propriétés habituelles d'associativité et de commutativité. Il induit des foncteurs $C^-F(A) \times C^-F(A) \longrightarrow C^-F(A)$ et $CF^{[a,b]}(A) \times CF^{[c,d]}(A) \to CF^{[a+c,b+d]}(A)$ pour [a,b] , [c,d] des intervalles de $\mathbb{Z}$, avec les notations de (1.2.7). En particulier, il induit un foncteur $C(A) \times CF^{[c,d]}(A) \longrightarrow CF^{[c,d]}(A)$, où C(A) est identifiée à $CF^{[o,o]}(A)$.

2.1.2. Soient E , F $\in$ ob CG(A). Le complexe $E \otimes F$ est naturellement bigradué, on le regarde comme un objet de CG(A) grâce à la graduation totale

$$k^n(E \otimes F) = \bigoplus_{p+q=n} k^p(E) \otimes k^q(F) \quad .$$

On définit ainsi un foncteur additif (induit par (IV 1.1.4)):

$$\otimes : CG(A) \times CG(A) \longrightarrow CG(A) \quad ,$$

"associatif et commutatif", envoyant $C^-G(A) \times C^-G(A)$ dans $C^-G(A)$ et

$CG^{[a,b]}(A) \times CG^{[c,d]}(A)$ dans $CG^{[a+c,b+d]}(A)$ pour $[a,b]$, $[c,d]$ des intervalles de $\mathbb{Z}$.

Soient L, $M \in$ ob $CF(A)$. Pour $p+q = n$, la flèche composée

$$F^pL \otimes F^qM \longrightarrow F^n(L \otimes M) \longrightarrow gr^n(L \otimes M)$$

s'annule sur $Im(F^{p+1}L \otimes F^qM) + Im(F^pL \otimes^{q+1}M)$, donc définit par passage au quotient une flèche

$$gr^pL \otimes gr^pM \longrightarrow gr^n(L \otimes M) \quad .$$

D'où finalement une flèche canonique de $CG(A)$:

(2.1.2.1) $$grL \otimes grM \longrightarrow gr(L \otimes M) \quad .$$

Définition 2.1.3. On dit qu'un objet E de $CG(A)$ est plat si E , ou ce qui revient au même, chaque composante de E est un complexe de Modules plats. On dit qu'un objet L de $CF(A)$ est plat s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :

(i) grL est plat ;

(ii) F_iL $(= L/F^iL)$ est un complexe de Modules plats pour tout i .

(L'équivalence de (i) et (ii) est immédiate).

Lemme 2.1.4. Si L (ou M) est plat, la flèche canonique (2.1.2.1) est un isomorphisme.

Preuve. On peut supposer L et M réduits au degré zéro. Raisonnons par récurrence sur la longueur $b - a$ de l'intervalle $[a,b]$ tel que $L \in$ ob $Fil^{[a,b]}(A)$. Pour $b - a = 0$, on peut, quitte à décaler, supposer $a = b = 0$. On a alors :

$$F^n(L \otimes M) = Im(L \otimes F^nM) \quad \text{par définition ,}$$

$$= L \otimes F^nM \quad \text{puisque } L \text{ est plat.}$$

Appliquant le foncteur $L \otimes -$ à la suite exacte $0 \longrightarrow F^{n+1}M \longrightarrow F^nM \longrightarrow gr^nM \longrightarrow 0$, on conclut que la flèche canonique $L \otimes gr^nM \longrightarrow gr^n(L \otimes M)$ est un isomorphisme, ce qui prouve l'assertion dans ce cas. Supposons maintenant $b-a > 0$. Par hypothèse

gr^aL est plat, donc, par Lazard-Deligne (I 4.2.1.1), gr^aL est limite d'un système inductif local $P_\alpha \longrightarrow gr^aL$ avec P_α libre de type fini. La filtration sur $L_\alpha = L \underset{gr^aL}{\times} P_\alpha$ déduite de celle de L fait de L_α un objet plat de $Fil^{[a,b]}(A)$, (et en plus $gr^aL_\alpha = P_\alpha$ est libre de type fini). Comme les foncteurs $\otimes$ et gr commutent aux limites inductives, on est donc ramené au cas où gr^aL est libre de type fini. Quitte à se localiser, on peut alors écrire $L = L' \oplus L''$, où L' (resp. L") est un objet plat de $Fil^{[a+1,b]}(A)$ (resp. $Fil^{[a,a]}(A)$), et l'on gagne par l'hypothèse de récurrence.

Lemme 2.1.5. (i) Soient $E \in ob\ C^-G(A)$, $F \in ob\ CG(A)$. On suppose E plat et E ou F acyclique. Alors $E \otimes F \in ob\ CG(A)$ est acyclique.

(ii) Soient $L \in ob\ C^-F(A)$, $M \in ob\ CF(A)$. On suppose L plat et L ou M acyclique. Alors $L \otimes M \in ob\ CF(A)$ est acyclique.

Preuve. (i) Comme $F = \varinjlim t_{n]}(F)$, on peut supposer $F \in ob\ C^-G(A)$. On peut oublier la graduation, et l'assertion est bien connue.

(ii) Comme L est plat, on a $gr(L \otimes M) = grL \otimes grM$ d'après (2.1.4), l'assertion résulte donc de (i).

Lemme 2.1.6. Soit $L \in ob\ C^-F(A)$. Il existe un quasi-isomorphisme $f : P \longrightarrow L$ de $C^-F(A)$ tel que P soit plat et que gr(f) soit un épimorphisme.

Preuve. Elle est analogue à celle de (1.4.4) ([1]). On construit par récurrence croissante sur n un morphisme d'objets cofiltrés

$$\begin{array}{ccccccc} P^n & \longrightarrow & P^{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle f_n} & & \downarrow{\scriptstyle f^{n-1}} & & \downarrow & & \\ L^n & \longrightarrow & L^{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 \end{array} ,$$

($L^i = L/F^iL$) tel que, pour $i \leq n$, P^i soit un complexe de Modules plats (borné supérieurement) et $gr^i(f)$ à la fois un épi- et un quasi-isomorphisme. Les détails sont laissés au lecteur.

(1) On pourrait donner un énoncé commun.

2.1.7. Le foncteur $\otimes : CF(A) \times CF(A) \longrightarrow CF(A)$ (resp. $CG(A) \times CG(A) \longrightarrow CG(A)$) est compatible aux homotopies filtrées (resp. graduées), donc définit un foncteur encore noté $\otimes : KF(A) \times KF(A) \longrightarrow KF(A)$ (resp. $KG(A) \times KG(A) \longrightarrow KG(A)$). On voit facilement que celui-ci est exact en chaque variable (au sens de Verdier). Par ailleurs, la sous-catégorie pleine de $KF(A)$ (resp. $KG(A)$) formée des objets plats est stable par formation du cône d'un morphisme. De ces considérations et de (2.1.5), (2.1.6), (1.2.6), on déduit par un raisonnement standard (cf. preuve de (1.4.5)) :

Proposition 2.1.8. Pour $L \in \mathrm{ob}\, K^-F(A)$, $M \in \mathrm{ob}\, KF(A)$, le pro-objet de $DF(A)$:

$$L \overset{L}{\otimes} M = \text{"lim"}_{\substack{L' \xrightarrow{s} L \\ M' \xrightarrow{t} M}} L' \otimes M' \simeq \text{"lim"}_{L' \xrightarrow{s} L} L' \otimes M \simeq \text{"lim"}_{M' \xrightarrow{t} M} L \otimes M'$$

où s (resp. t) parcourt la catégorie des quasi-isomorphismes de $KF(A)$ de but L (resp. M), est essentiellement constant de valeur $P \otimes M$, où $P \longrightarrow L$ est un quasi-isomorphisme de $K^-F(A)$ avec P plat. Le foncteur ainsi défini :

$$\overset{L}{\otimes} : D^-F(A) \times DF(A) \longrightarrow DF(A)$$

est le dérivé gauche, au sens de (I 1.4.4), du foncteur $\otimes : K^-F(A) \times KF(A) \longrightarrow KF(A)$, il est exact en chaque variable. On a un énoncé analogue avec G au lieu de F, qu'on laisse au lecteur le soin d'énoncer (c'est un cas particulier de (IV 1.2.3)).

On laisse également au lecteur le soin d'étudier les propriétés d'associativité et de commutativité du foncteur $\overset{L}{\otimes}$.

On notera que dans l'identification de $DG(A)$ avec la catégorie des objets gradués de $D(A)$ (1.2.3.1), $E \overset{L}{\otimes} F$ pour $E \in \mathrm{ob}\, D^-G(A)$, $F \in \mathrm{ob}\, DG(A)$ s'identifie à l'objet gradué $\bigoplus_n k^n(E \overset{L}{\otimes} F)$, avec

$$k^n(E \overset{L}{\otimes} F) = \bigoplus_{p+q=n} k^pE \overset{L}{\otimes} k^qF \quad ,$$

le $\overset{L}{\otimes}$ au second membre étant calculé dans $D(A)$.

2.1.9. La flèche (2.1.2.1) donne, par passage aux pro-objets, une flèche canonique de $DG(A)$:

$$\text{(2.1.9.1)} \qquad \mathrm{grL} \overset{L}{\otimes} \mathrm{grM} \longrightarrow \mathrm{gr}(L \overset{L}{\otimes} M) \quad ,$$

pour $L \in \mathrm{ob}\, D^{-}F(A)$, $M \in \mathrm{ob}\, DF(A)$.

Proposition 2.1.10. La flèche (2.1.9.1) est un isomorphisme.

Preuve. Vu la définition des foncteurs $\overset{L}{\otimes}$, c'est une simple conséquence de (2.1.4).

2.2. Le foncteur RHom filtré (resp. gradué).

2.2.1. Soient L , $M \in \mathrm{ob}\, CF(A)$. Oubliant les filtrations, on définit un objet $\underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}(L,M)$ de $C(A)$ par les formules usuelles :

$$\underline{\mathrm{Hom}}^{p}(L,M) = \prod_i \underline{\mathrm{Hom}}(L^i, M^{i+p}) \quad , \quad d^p = d_L + (-1)^{p+1} d_M \quad .$$

On a un sous-complexe $\underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}_{CF(A)}(L,M) \subset \underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}(L,M)$, défini par

$$\underline{\mathrm{Hom}}^{p}_{CF(A)}(L,M) = \prod_i \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Fil}(A)}(L^i, M^{i+p}) \quad ,$$

où $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Fil}(A)}(L^i, M^{i+p})$ est le faisceau des homomorphismes de L^i dans M^{i+p} préservant les filtrations, $U \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fil}(A|U)}(L^i|U \, , \, M^{i+p}|U)$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on posera :

$$F^n \underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}(L,M) = \mathrm{Hom}^{\cdot}_{CF(A)}(L, M(n)) \quad .$$

On définit un foncteur :

$$\underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot} \; : \; CF(A) \times CF(A) \longrightarrow CF(A) \quad ,$$

qui envoie $C^{-}F(A)^{o} \times C^{+}F(A)$ dans $C^{+}F(A)$, et $CF^{[a,b]}(A)^{o} \times CF^{[c,d]}(A)$ dans $CF^{[c-b,d-a]}(A)$ pour $[a,b]$, $[c,d]$ des intervalles de $\mathbb{Z}$.

2.2.2. Soient E, $F \in \mathrm{ob}\, CG(A)$. On gradue $\underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}(E,F) \in \mathrm{ob}\, C(A)$ par

$$k^n\underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}(E,F) = \bigoplus_{j-i=n} \underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}(k^i(E), k^j(F))$$

$$= \underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}_{CG(A)}(E,F(n)) \quad ,$$

où $\underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}_{CG(A)}$ désigne le complexe des faisceaux d'homomorphismes respectant les graduations. On définit ainsi un foncteur

$$\underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot} : CG(A)^{o} \times CG(A) \longrightarrow CG(A) \quad ,$$

qui envoie $C^{-}G(A)^{o} \times C^{+}G(A)$ dans $C^{+}G(A)$ et $CG^{[a,b]}(A)^{o} \times CG^{[c,d]}(A)$ dans $CG^{[c-b,d-a]}(A)$ pour $[a,b]$, $[c,d]$ des intervalles de $\mathbb{Z}$.

Soient L, $M \in \mathrm{ob}\, CF(A)$. Comme en (1.3.2), on voit que le foncteur gradué associé définit une flèche de $CG(A)$:

(2.2.2.1) $$\mathrm{gr}\underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}(L,M) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}(\mathrm{gr}L, \mathrm{gr}M) \quad .$$

Lemme 2.2.2.2. *Si M est de type injectif (1.4.1), la flèche (2.2.2.1) est un isomorphisme.*

La preuve est analogue à celle de (1.4.2) et laissée au lecteur.

2.2.3. Notons Γ le foncteur "sections au-dessus de l'objet final de T". Pour $K \in \mathrm{ob}\, CF(A)$ (resp. $CG(A)$), le complexe ΓK est naturellement filtré (resp. gradué), d'où un foncteur

$$\Gamma : CF(A) \longrightarrow CF(Ab)$$

(resp. $\Gamma : CG(A) \longrightarrow CG(Ab)$).

Le foncteur gradué associé définit, pour $K \in \mathrm{ob}\, CF(A)$, une flèche de $CG(Ab)$:

(2.2.3.1) $$\mathrm{gr}\Gamma K \longrightarrow \Gamma\, \mathrm{gr}K \quad ,$$

qui est un isomorphisme pour K de type injectif, comme on le vérifie trivialement.

Soient $L, M \in \text{ob } CF(A)$ (resp. $CG(A)$). On a (par définition)

$$\Gamma\, \underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}(L,M) = \underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}(L,M) \quad , \tag{2.2.3.2}$$

(isomorphisme dans $CF(Ab)$ (resp. $CG(Ab)$), et plus généralement, pour $U \in \text{ob } T$,

$$\Gamma(U, \underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}(L,M)) = \mathrm{Hom}^{\cdot}(L|U, M|U) \quad .$$

Lemme 2.2.4. *Soient* $L \in \text{ob } CF(A)$ (resp. $CG(A)$), $M \in \text{ob } C^{+}F(A)$ (resp. $C^{+}G(A)$). *On suppose* M *de type injectif et* L *ou* M *acyclique. Alors* $\underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}(L,M)$ *est acyclique.*

Preuve. L'assertion dans le cas gradué se ramène trivialement au cas non gradué ([32] II 3.1). L'assertion dans le cas filtré en découle grâce à (2.2.2.2). On peut aussi (indépendamment) utiliser (2.2.3.2) et (1.4.3).

Lemme 2.2.5. *Soit* K *un objet acyclique et de type injectif de* $C^{+}F(A)$ (resp. $C^{+}G(A)$). *Alors* $\Gamma K = 0$ *dans* $KF(Ab)$ (resp. $KG(Ab)$).

Preuve. Conséquence triviale de (1.4.3).

2.2.6. Les foncteurs $\underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}$ et Γ filtrés (resp. gradués) sont compatibles aux homotopies filtrées (resp. graduées) donc définissent des foncteurs

$$\mathrm{Hom}^{\cdot} : KF(A)^{\circ} \times KF(A) \longrightarrow KF(A) \quad , \quad \Gamma : KF(A) \longrightarrow KF(Ab)$$

(resp. $\underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot} : KG(A)^{\circ} \times KG(A) \longrightarrow KG(A)$, $\Gamma : KG(A) \longrightarrow KG(A)$) .
Ceux-ci sont exacts en chaque variable. Par le raisonnement habituel, on déduit alors de (2.2.4) et (2.2.5) :

Proposition 2.2.7. a) Pour $L \in \mathrm{ob}\, KF(A)$, $M \in \mathrm{ob}\, K^+F(A)$, le ind-objet de $DF(A)$:

$$R\underline{\mathrm{Hom}}(L,M) = \varinjlim_{L' \xrightarrow{s} L,\ M \xrightarrow{t} M'} \underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}(L',M') \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{M \xrightarrow{t} M'} \underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}(L,M')$$

où s (resp. t) parcourt la catégorie des quasi-isomorphismes de $KF(A)$ de but L (resp. source M) est essentiellement constant de valeur $\underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}(L,I)$, où $M \longrightarrow I$ est un quasi-isomorphisme de $K^+F(A)$ avec I de type injectif. Le foncteur ainsi défini :

$$R\underline{\mathrm{Hom}} : DF(A)^{\circ} \times D^+F(A) \longrightarrow DF(A)$$

est le dérivé droit (au sens de (I 1.4.4)) du foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot} : KF(A)^{\circ} \times K^+F(A) \to KF(A)$, il est exact en chaque variable. On a un énoncé analogue avec G au lieu de F.

b) Pour $M \in \mathrm{ob}\, K^+F(A)$, le ind-objet de $DF(A)$:

$$R\Gamma M = \varinjlim_{M \xrightarrow{t} M'} \Gamma M' \quad ,$$

où t parcourt la catégorie des quasi-isomorphismes de $KF(A)$ de source M est essentiellement constant de valeur ΓI, où $M \longrightarrow I$ est un quasi-isomorphisme de $K^+F(A)$ avec I de type injectif. Le foncteur ainsi défini

$$R\Gamma : D^+F(A) \longrightarrow D^+F(Ab)$$

est le dérivé droit de $\Gamma : K^+F(A) \longrightarrow K^+F(Ab)$, il est exact. On a un énoncé analogue avec G au lieu de F.

Dans l'identification de $DG(A)$ avec la catégorie des objets gradués de $D(A)$, $R\underline{\mathrm{Hom}}(E,F)$ pour $E \in \mathrm{ob}\, DG(A)$, $F \in \mathrm{ob}\, D^+G(A)$ s'identifie à l'objet gradué $\bigoplus_n k^n R\underline{\mathrm{Hom}}(E,F)$, avec

$$k^n \underline{RHom}(E,F) = \bigoplus_i \underline{RHom}(k^i E, k^{i+n} F) \quad ,$$

le $\underline{RHom}$ au second membre étant calculé dans $D(A)$. D'autre part, $R\Gamma\, F$ s'identifie à $\bigoplus_n R\Gamma\, k^n F$ comme objet gradué de $D(Ab)$ ([1]).

2.2.8. Les flèches (2.2.2.1) et (2.2.3.1) donnent, par passage aux ind-objets, des isomorphismes :

(2.2.8.1) $$gr\underline{RHom}(L,M) \xrightarrow{\sim} \underline{RHom}(grL, grM) \quad ,$$

$$gr R\Gamma\, M \xrightarrow{\sim} R\Gamma\, grM \quad ,$$

pour $L \in ob\, DF(A)$, $M \in ob\, D^+F(A)$.

Lemme 2.2.9. Soient $L, M \in ob\, CF(A)$ (resp. $CG(A)$). Si L est plat (2.1.3) et si M est de type injectif, alors $\underline{Hom}^{\cdot}(L,M)$ est de type injectif.

Preuve. L'assertion dans le cas gradué est une conséquence triviale du fait que le $\underline{Hom}$ d'un Module plat dans un Module injectif est injectif. L'assertion dans le cas filtré s'y ramène grâce à (2.2.2.2).

Compte tenu de (2.1.6) et (2.2.3.2), on déduit de (2.2.9) :

Proposition 2.2.10. Pour $L \in ob\, D^-F(A)$ (resp. $D^-G(A)$), $M \in ob\, D^+F(A)$ (resp. $D^+G(A)$), il existe un isomorphisme canonique fonctoriel

$$R\Gamma\, \underline{RHom}(L,M) \longrightarrow \underline{RHom}(L,M) \quad .$$

En outre, pour $L \in ob\, D^-F(A)$, $M \in ob\, D^+F(A)$, on a un carré commutatif d'isomorphismes :

([1]) Noter aussi que, par oubli de la filtration (resp. graduation), les foncteurs $\overset{L}{\otimes}$ (2.1.8), $\underline{RHom}$, $R\Gamma$ (2.2.7) s'identifient aux foncteurs usuels $\overset{L}{\otimes}$, $\underline{RHom}$, $R\Gamma$.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{gr}\ R\Gamma\ \underline{\mathrm{RHom}}(L,M) & \longrightarrow & \mathrm{gr}\ \underline{\mathrm{RHom}}(L,M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R\Gamma\ \underline{\mathrm{RHom}}(\mathrm{gr}L,\mathrm{gr}M) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{RHom}}(\mathrm{gr}L,\mathrm{gr}M) \end{array} ,$$

où les flèches verticales sont définies par (2.2.2.1) et (2.2.3.1).

2.3. Formules d'adjonction "chères à Cartan" et composition des homomorphismes.

2.3.1. Soient L, M, $N \in \mathrm{ob}\ CF(A)$ (resp. $CG(A)$). L'isomorphisme cher à Cartan :

$$\underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}(L \otimes M,\ N) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}(L,\underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}(M,N)) \quad , \tag{2.3.1.1}$$

$$f \longmapsto (x \longmapsto (f_x : y \longmapsto f(x \otimes y)))$$

qui est a priori une flèche de $C(A)$, est en fait un isomorphisme de $CF(A)$ (resp. $CG(A)$) comme on le vérifie trivialement. En outre, pour L, M, $N \in \mathrm{ob}\ CF(A)$, on a un carré commutatif de $CG(A)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{gr}\ \underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}(L \otimes M,\ N) & \xrightarrow{\mathrm{gr}\ (2.3.1.1)} & \mathrm{gr}\ \underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}(L,\underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}(M,N)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}(\mathrm{gr}L \otimes \mathrm{gr}M,\mathrm{gr}N) & \xrightarrow{(2.3.1.1)} & \underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}(\mathrm{gr}L,\underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}(\mathrm{gr}M,\mathrm{gr}N)) \end{array} , \tag{2.3.1.2}$$

où les flèches verticales sont définies par (2.1.2.1) et (2.2.2.1). Vu la définition des foncteurs $\overset{L}{\otimes}$ et $\underline{\mathrm{RHom}}$, et compte tenu de (2.2.9), l'isomorphisme (2.3.1.1) fournit, pour $L \in \mathrm{ob}\ DF(A)$ (resp. $DG(A)$), $M \in \mathrm{ob}\ D^{-}F(A)$ (resp. $D^{-}G(A)$), $N \in \mathrm{ob}\ D^{+}F(A)$ (resp. $D^{+}G(A)$) un isomorphisme fonctoriel de $DF(A)$ (resp. $DG(A)$) :

$$\underline{\mathrm{RHom}}(L \overset{L}{\otimes} M\ ,\ N) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{RHom}}(L,\underline{\mathrm{RHom}}(M,N)) \quad . \tag{2.3.1.3}$$

Bien entendu, dans le cas gradué, la flèche (2.3.1.3) est donnée sur les différents morceaux homogènes par l'isomorphisme de Cartan usuel dans $D(A)$.

En outre, il découle de la commutativité de (2.3.1.2) que, pour $L \in \mathrm{ob}\, DF(A)$, $M \in \mathrm{ob}\, D^-F(A)$, $N \in \mathrm{ob}\, D^+F(A)$, on a un carré commutatif d'isomorphismes de $DG(A)$:

(2.3.1.4)
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{gr}\ \underline{R\mathrm{Hom}}(L \overset{L}{\otimes} M\ ,\ N) & \xrightarrow{\mathrm{gr}(2.3.1.3)} & \mathrm{gr}\ \underline{R\mathrm{Hom}}(L, \underline{R\mathrm{Hom}}(M,N)) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \underline{R\mathrm{Hom}}(\mathrm{gr}L \overset{L}{\otimes} \mathrm{gr}M,\ \mathrm{gr}N) & \xrightarrow{(2.3.1.3)} & \underline{R\mathrm{Hom}}(\mathrm{gr}L,\ \underline{R\mathrm{Hom}}(\mathrm{gr}M, \mathrm{gr}N)) \end{array} ,$$

où les flèches verticales sont les isomorphismes définis par (2.1.9.1) et (2.2.8.1).

Appliquant le foncteur Γ à (2.3.1.1), on obtient un isomorphisme de $CF(Ab)$ (resp. $CG(Ab)$) :

(2.3.1.5)
$$\mathrm{Hom}^{\cdot}(L \otimes M\ ,\ N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^{\cdot}(L, \underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}(M,N)) \quad ,$$

et l'on a un carré commutatif analogue à (2.3.1.2). On en déduit comme plus haut, pour $L \in \mathrm{ob}\, DF(A)$ (resp. $DG(A)$), $M \in \mathrm{ob}\, D^-F(A)$ (resp. $D^-G(A)$), $N \in \mathrm{ob}\, D^+F(A)$ (resp. $D^+G(A)$) un isomorphisme fonctoriel de $DF(Ab)$ (resp. $DG(Ab)$) :

(2.3.1.6)
$$R\mathrm{Hom}(L \overset{L}{\otimes} M\ ,\ N) \xrightarrow{\sim} R\mathrm{Hom}(L, \underline{R\mathrm{Hom}}(M,N)) \quad .$$

Pour $L \in \mathrm{ob}\, D^-F(A)$ (resp. $D^-G(A)$), celui-ci peut d'ailleurs, compte tenu de (2.2.10), se déduire de (2.3.1.3) par application du foncteur $R\Gamma$. Pour $L \in \mathrm{ob}\, DF(A)$, $M \in \mathrm{ob}\, D^-F(A)$, $N \in \mathrm{ob}\, D^+F(A)$, on a un carré commutatif d'isomorphismes de $DG(Ab)$, analogue à (2.3.1.4) :

(2.3.1.7)
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{gr}\ R\mathrm{Hom}(L \overset{L}{\otimes} M\ ,\ N) & \xrightarrow{\mathrm{gr}\ (2.3.1.6)} & \mathrm{gr}\ R\mathrm{Hom}(L, \underline{R\mathrm{Hom}}(M,N)) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ R\mathrm{Hom}(\mathrm{gr}L \overset{L}{\otimes} \mathrm{gr}M,\ \mathrm{gr}N) & \xrightarrow{(2.3.1.6)} & R\mathrm{Hom}(\mathrm{gr}L,\ \underline{R\mathrm{Hom}}(\mathrm{gr}M, \mathrm{gr}N)) \end{array} ,$$

où les flèches verticales sont les isomorphismes définis par (1.4.13.1) et (2.1.9.1).

Soit $n \in \mathbb{Z}$, appliquant à (2.3.1.6) le foncteur $H^n F^o$ (resp. $H^n k^o$), on obtient, compte tenu de (1.4.6) (et de la formule analogue graduée), un isomorphisme :

$$\text{(2.3.1.8)} \qquad \mathrm{Ext}^n_{\mathrm{fil}}(L \overset{L}{\otimes} M\ ,\ N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^n_{\mathrm{fil}}(L, \underline{\mathrm{RHom}}(M,N)) \quad .$$

$$\text{(resp. } \mathrm{Ext}^n_{\mathrm{grad}}(L \overset{L}{\otimes} M\ ,\ N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^n_{\mathrm{grad}}(L,\ \underline{\mathrm{RHom}}(M,N)) \quad) \ .$$

Dans le cas gradué, on a $\mathrm{Ext}^n_{\mathrm{grad}}(L \overset{L}{\otimes} M,N) = \bigoplus_r \mathrm{Ext}^n(k^r(L \overset{L}{\otimes} M),\ k^r N)$,

$\mathrm{Ext}^n_{\mathrm{grad}}(L,\underline{\mathrm{RHom}}(M,N)) = \bigoplus_r \mathrm{Ext}^n(k^r L, k^r \underline{\mathrm{RHom}}(M,N))$, les Ext^n aux seconds membres étant pris dans $D(A)$, et (2.3.1.8) sur le morceau de degré r

$$\bigoplus_{p+q=r} \mathrm{Ext}^n(k^p L \overset{L}{\otimes} k^q M, k^r N) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=r} \mathrm{Ext}^n(k^p L, \underline{\mathrm{RHom}}(k^q M, k^r N))$$

est donné par la somme des isomorphismes de Cartan usuels dans $D(A)$. Dans le cas filtré, on a un carré commutatif déduit de (2.3.1.6) par application de $H^n F^o \to H^n gr^o$

$$\begin{array}{c} H^n F^o(2.3.1.6) \\ \downarrow \\ H^n gr^o(2.3.1.6) \end{array} \quad .$$

Composant ce carré avec celui déduit de (2.3.1.7) par application du foncteur $H^n k^o$, on obtient un carré commutatif

$$\text{(2.3.1.9)} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^n_{\mathrm{fil}}(L \overset{L}{\otimes} M\ ,\ N) & \xrightarrow{(2.3.1.8)} & \mathrm{Ext}^n_{\mathrm{fil}}(L, \underline{\mathrm{RHom}}(M,N)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Ext}^n_{\mathrm{grad}}(grL \overset{L}{\otimes} grM,\ grN) & \xrightarrow{(2.3.1.8)} & \mathrm{Ext}^n_{\mathrm{grad}}(grL,\ \underline{\mathrm{RHom}}(grM, grN)) \end{array} \ ,$$

où les flèches verticales sont $f \longmapsto gr(f)$.

2.3.2. Soient L, $M \in \mathrm{ob}\, CF(A)$ (resp. $CG(A)$). L'homomorphisme de contraction :

$$L \otimes \underline{\mathrm{Hom}}'(L,M) \longrightarrow M \quad , \tag{2.3.2.1}$$

$$x \otimes f \longmapsto f(x)$$

défini a priori en tant que flèche de $C(A)$, est en fait compatible aux filtrations (resp. graduations), donc est une flèche de $CF(A)$ (resp. $CG(A)$). On vérifie trivialement que pour L, $M \in \mathrm{ob}\, CF(A)$, on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{gr}L \otimes \mathrm{gr}\underline{\mathrm{Hom}}'(L,M) & \xrightarrow{(2.1.2.1)} & \mathrm{gr}(L \otimes \underline{\mathrm{Hom}}'(L,M)) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{gr}L \otimes (2.2.2.1)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{gr}(2.3.2.1)} \\ \mathrm{gr}L \otimes \underline{\mathrm{Hom}}'(\mathrm{gr}L, \mathrm{gr}M) & \xrightarrow{(2.3.2.1)} & \mathrm{gr}M \end{array} \tag{2.3.2.2}$$

Vu la définition des foncteurs $\overset{L}{\otimes}$ et $\underline{\mathrm{RHom}}$, la flèche (2.3.2.1) fournit pour $L \in \mathrm{ob}\, D^-F(A)$ (resp. $D^-G(A)$), $M \in \mathrm{ob}\, D^+F(A)$ (resp. $D^+G(A)$) une flèche fonctorielle de $DF(A)$ (resp. $DG(A)$) :

$$L \overset{L}{\otimes} \underline{\mathrm{RHom}}(L,M) \longrightarrow M \quad , \tag{2.3.2.3}$$

dite flèche de contraction. Elle correspond par la formule chère à Cartan (2.3.1.6) à la flèche identique $\underline{\mathrm{RHom}}(L,M) \longrightarrow \underline{\mathrm{RHom}}(L,M)$. Dans le cas gradué, on a $L \overset{L}{\otimes} \underline{\mathrm{RHom}}(L,M) = \bigoplus_{p,q,r} k^pL \overset{L}{\otimes} \underline{\mathrm{RHom}}(k^qL, k^rM)$, où $\overset{L}{\otimes}$ et $\underline{\mathrm{RHom}}$ sont calculés dans $D(A)$, et la flèche de contraction est donnée par une matrice (a_{pqrs}), où

$$a_{pqrs} : k^pL \overset{L}{\otimes} \underline{\mathrm{RHom}}(k^qL, k^rM) \longrightarrow k^sM \quad .$$

Il découle de la définition que $a_{pqrs} = 0$ pour $p \neq q$ ou $r \neq s$ et que a_{pprr} est la flèche de contraction usuelle dans $D(A)$. En particulier, pour M concentré en degré zéro, (2.3.2.3) est donnée par la somme des flèches de contraction $k^pL \overset{L}{\otimes} \underline{\mathrm{RHom}}(k^pL, M) \longrightarrow M$. Dans le cas filtré, le carré (2.3.2.2) fournit un carré commutatif de $DG(A)$:

(2.3.2.4)

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{grL} \overset{L}{\otimes} \mathrm{grR\underline{Hom}}(L,M) & \xrightarrow{(2.1.9.1)} & \mathrm{gr}(L \overset{L}{\otimes} R\underline{\mathrm{Hom}}(L,M)) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{grL} \overset{L}{\otimes} (2.2.8.1)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{gr}(2.3.2.3)} \\ \mathrm{grL} \overset{L}{\otimes} R\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{grL},\mathrm{grM}) & \xrightarrow{(2.3.2.3)} & \mathrm{grM} \end{array} ,$$

où la flèche horizontale supérieure et la flèche verticale de gauche sont des isomorphismes. Compte tenu de la définition "par adjonction" de la flèche de contraction, la commutativité de (2.3.2.4) peut aussi se déduire de celle de (2.3.1.9).

2.3.3. (1) Soient $L \in \mathrm{ob}\, D^{-}F(A)$ (resp. $D^{-}G(A)$), $M \in \mathrm{ob}\, D^{b}F(A)$ (resp. $D^{b}G(A)$), $N \in \mathrm{ob}\, D^{+}F(A)$ (resp. $D^{+}G(A)$). On suppose que l'on a $R\underline{\mathrm{Hom}}(L,M)$ ou $R\underline{\mathrm{Hom}}(M,N) \in \mathrm{ob}\, D^{b}F(A)$ (resp. $D^{b}G(A)$). On va définir une flèche fonctorielle de $DF(A)$ (resp. $DG(A)$), dite flèche de composition :

$$(2.3.3.1) \qquad R\underline{\mathrm{Hom}}(L,M) \overset{L}{\otimes} R\underline{\mathrm{Hom}}(M,N) \longrightarrow R\underline{\mathrm{Hom}}(L,N) \quad .$$

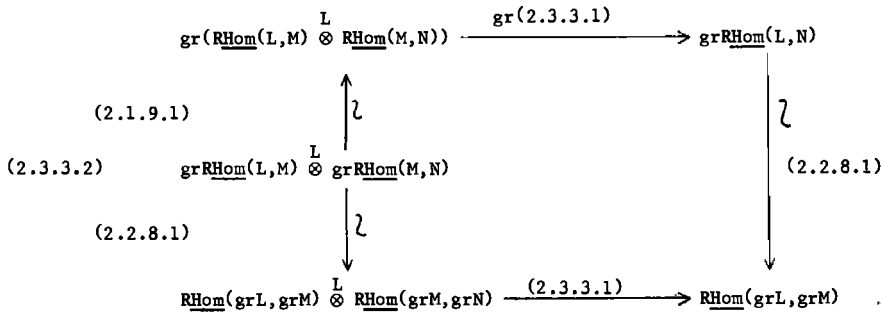
Vu les hypothèses de degré, les deux membres ont un sens. Par la formule chère à Cartan (2.3.1.8), il est équivalent de définir une flèche

$$(*) \qquad L \overset{L}{\otimes} R\underline{\mathrm{Hom}}(L,M) \overset{L}{\otimes} R\underline{\mathrm{Hom}}(M,N) \longrightarrow N \quad .$$

Par contraction on envoie $L \overset{L}{\otimes} R\underline{\mathrm{Hom}}(L,M)$ dans M et $M \overset{L}{\otimes} R\underline{\mathrm{Hom}}(M,N)$ dans N, on définit ainsi une flèche (*) d'où la flèche (2.3.3.1) annoncée. Dans le cas gradué, les deux membres de (2.3.3.1) se décomposent en morceaux et (2.3.3.1) est donnée par une matrice dont les seuls coefficients non nuls sont ceux qui envoient $R\underline{\mathrm{Hom}}(k^{p}L,k^{q}M) \overset{L}{\otimes} R\underline{\mathrm{Hom}}(k^{q}M,k^{r}N)$ dans $R\underline{\mathrm{Hom}}(k^{p}L,k^{r}N)$, la flèche correspondante étant la flèche de composition usuelle dans $D(A)$. Plaçons-nous dans le cas filtré. Du fait que l'isomorphisme cher à Cartan et la flèche de contraction sont "compatibles avec le passage au gradué associé", en vertu de (2.3.1.9) et (2.3.2.4), on déduit facilement qu'il en est de même de la flèche de composition, i.e. que le diagramme

(1) Les résultats de ce numéro ne seront pas utilisés dans la suite.

ci-dessous est commutatif :



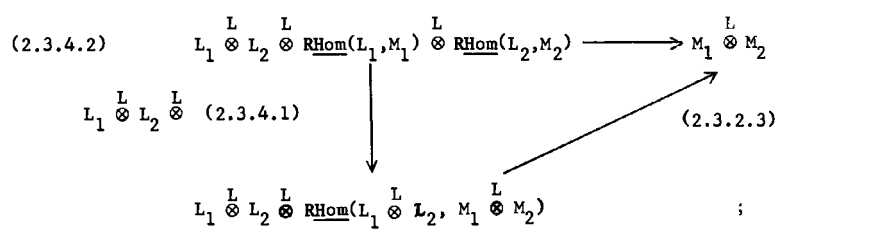
2.3.4. Soient, pour $i = 1, 2$, $L_i \in \text{ob } D^-F(A)$ (resp. $D^-G(A)$), $M_i \in \text{ob } D^+F(A)$ (resp. $D^+G(A)$). On suppose que l'on a M_1 ou $M_2 \in \text{ob } D^bF(A)$ (resp. $D^bG(A)$), $M_1 \overset{L}{\otimes} M_2 \in \text{ob } D^+F(A)$ (resp. $D^+G(A)$), $\underline{RHom}(L_1,M_1)$ ou $\underline{RHom}(L_2,M_2) \in \text{ob } D^bF(A)$ (resp. $D^bG(A)$). On va définir une flèche fonctorielle en $DF(A)$ (resp. $DG(A)$), dite flèche de produit :

$$\text{(2.3.4.1)} \qquad \underline{RHom}(L_1,M_1) \overset{L}{\otimes} \underline{RHom}(L_2,M_2) \longrightarrow \underline{RHom}(L_1 \overset{L}{\otimes} L_2,\ M_1 \overset{L}{\otimes} M_2)\ .$$

Les deux membres ont un sens d'après les hypothèses faites. D'après la formule chère à Cartan, il est équivalent de définir une flèche

$$\text{(*)} \qquad L_1 \overset{L}{\otimes} L_2 \overset{L}{\otimes} \underline{RHom}(L_1,M_1) \overset{L}{\otimes} \underline{RHom}(L_2,M_2) \longrightarrow M_1 \overset{L}{\otimes} M_2\ .$$

On prendra pour (*) la flèche produit tensoriel des flèches de contraction (2.3.2.3). Le diagramme ci-dessous, où la flèche horizontale est le produit tensoriel des flèches de contraction, est alors commutatif :



il suffit en effet de la transformer par la formule d'adjonction chère à Cartan pour aboutir à une tautologie. On peut dire, de manière abrégée, que la contraction est compatible au produit. On laisse au lecteur patient le soin de montrer que, plus généralement, sous des hypothèses de degré convenables, "la composition des homomorphismes définie en (2.3.3.1) est compatible au produit".

Considérant A comme muni de la filtration (resp. graduation) triviale concentrée en degré zéro, on a, pour $L \in \text{ob } DF(A)$ (resp. $DG(A)$), $M \in \text{ob } D^+F(A)$ (resp. $D^+G(A)$), des isomorphismes canoniques triviaux :

$$A \overset{L}{\otimes} L \xrightarrow{\sim} L \quad , \quad \underline{R\mathrm{Hom}}(A,L) \xrightarrow{\sim} L \quad . \tag{2.3.4.3}$$

Supposons $L \in \text{ob } D^-F(A)$ (resp. $D^-G(A)$). Faisant $L_1 = L$, $L_2 = A$, $M_1 = A$, $M_2 = M$, et tenant compte de (2.3.4.3), la flèche de produit correspondante (2.3.4.1) s'écrit :

$$\underline{R\mathrm{Hom}}(L,A) \overset{L}{\otimes} M \longrightarrow \underline{R\mathrm{Hom}}(L,M) \quad . \tag{2.3.4.4}$$

On verra au n° 3 un cas important où cette flèche est un isomorphisme.

On laisse au lecteur le soin, dans le cas gradué du début de (2.3.4), de décomposer la flèche (2.3.4.1) en morceaux, comme on l'a déjà fait pour l'isomorphisme cher à Cartan, la flèche de contraction et la flèche de composition.

Plaçons-nous maintenant dans la situation filtrée du début de (2.3.4). Comme en (2.3.3), le fait que l'isomorphisme cher à Cartan et la flèche de contraction sont compatibles avec le passage au gradué associé permet de montrer la commutativité du diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{gr}(\underline{R\mathrm{Hom}}(L_1,M_1) \overset{L}{\otimes} \underline{R\mathrm{Hom}}(L_2,M_2)) & \xrightarrow{\mathrm{gr}(2.3.4.1)} & \mathrm{gr}\underline{R\mathrm{Hom}}(L_1 \overset{L}{\otimes} L_2,\ M_1 \overset{L}{\otimes} M_2) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \underline{R\mathrm{Hom}}(\mathrm{gr}L_1,\mathrm{gr}M_1) \overset{L}{\otimes} \underline{R\mathrm{Hom}}(\mathrm{gr}L_2,\mathrm{gr}M_2) & \xrightarrow{(2.3.4.1)} & \underline{R\mathrm{Hom}}(\mathrm{gr}L_1 \overset{L}{\otimes} \mathrm{gr}L_2,\ \mathrm{gr}M_1 \overset{L}{\otimes} \mathrm{gr}M_2) \end{array} \tag{2.3.4.5}$$

où les flèches verticales sont les isomorphismes définis par (2.1.9.1) et (2.2.8.1).

2.3.5. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de topos annelés. Paraphrasant la construction (2.2.7 b)), on définit

(2.3.5.1) $\qquad Rf_* : D^+F(X) \ \text{(resp. } D^+G(X)) \longrightarrow D^+F(Y) \ \text{(resp. } D^+G(Y)) \quad .$

La formation de Rf_*L, pour $L \in \text{ob } D^+F(X)$ (resp. $D^+G(X)$), commute (à isomorphisme canonique fonctoriel près) à l'oubli de D^+F (resp. D^+G) dans D^+. On a d'autre part un isomorphisme canonique fonctoriel

(2.3.5.2) $\qquad grRf_*L \xrightarrow{\sim} Rf_*grL \qquad (\text{resp. } Rf_*L = \bigoplus_n Rf_*k^nL) \quad .$

De manière analogue, utilisant les résolutions filtrées (resp. graduées) plates, on définit

(2.3.5.3) $\qquad Lf^* : D^-F(Y) \ \text{(resp. } D^-G(Y)) \longrightarrow D^-F(X) \ \text{(resp. } D^-G(X)) \ ,$

foncteur "compatible" à l'oubli de la filtration (resp. graduation), et donnant lieu, pour $L \in \text{ob } D^-F(Y)$ (resp. $D^-G(Y)$), à un isomorphisme fonctoriel canonique

(2.3.5.4) $\qquad Lf^*grL \xrightarrow{\sim} grLf^*L \qquad (\text{resp. } Lf^*L = \bigoplus_n Lf^*k^nL) \quad .$ (1)

Le fait que f^* commute à $\otimes$ donne, par passage aux dérivés, un isomorphisme canonique fonctoriel

(2.3.5.5) $\qquad Lf^*(L \overset{L}{\otimes} M) \xrightarrow{\sim} Lf^*L \overset{L}{\otimes} Lf^*M$

pour $L, M \in \text{ob } D^-F(Y)$ (resp. $D^-G(Y)$).

D'autre part, la formule de dualité triviale (III 4.6) s'étend immédiatement au cas filtré (resp. gradué) : pour $L \in \text{ob } D^-F(Y)$ (resp. $D^-G(Y)$), $M \in \text{ob } D^+F(X)$ (resp. $D^+G(X)$), on a un isomorphisme canonique fonctoriel de $D^+F(Y)$ (resp. $D^+G(Y)$)

(1) On pourrait englober les constructions (2.2.7 b)), (2.3.5.1), (2.3.5.3) dans un même sorite général de foncteurs dérivés filtrés (resp. gradués) ; le lecteur l'écrira s'il en a envie.

(2.3.5.6) $\underline{\mathrm{RHom}}(L,\mathrm{R}f_*M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}f_*\underline{\mathrm{RHom}}(Lf^*L,M)$

(compatible, dans le cas filtré, au passage au gradué associé), donnant (par application de $R\Gamma$, puis de $H^oF^oR\Gamma$ (resp. $H^ok^oR\Gamma$)) des isomorphismes canoniques fonctoriels

(2.3.5.7) $\mathrm{RHom}(L,\mathrm{R}f_*M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{RHom}(Lf^*L,M)$,

(2.3.5.8) $\mathrm{Hom}(L,\mathrm{R}f_*M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(Lf^*L,M)$.

De (2.3.5.8) on déduit en particulier des "flèches d'adjonction"

(2.3.5.9) $Lf^*\mathrm{R}f_*M \longrightarrow M$,

(2.3.5.10) $L \longrightarrow \mathrm{R}f_*Lf^*L$,

définies dès que $M \in \mathrm{ob}\ D^+F(X)$ (resp. $D^+G(X)$), $\mathrm{R}f_*M \in \mathrm{ob}\ D^bF(Y)$ (resp. $D^bG(Y)$), $L \in \mathrm{ob}\ D^-F(Y)$ (resp. $D^-G(Y)$), $Lf^*L \in \mathrm{ob}\ D^bF(X)$ (resp. $D^bG(X)$). Soit $N \in \mathrm{ob}\ D^bF(Y)$ (resp. $D^bG(Y)$) tel que $Lf^*N \in \mathrm{ob}\ D^bF(X)$ (resp. $D^bG(X)$) ; appliquant (2.3.5.6) à $M = Lf^*N$ et utilisant la flèche d'adjonction (2.3.5.10) pour N, on obtient une flèche canonique fonctorielle

(2.3.5.11) $\underline{\mathrm{RHom}}(L,N) \longrightarrow \mathrm{R}f_*\underline{\mathrm{RHom}}(Lf^*L,Lf^*N)$.

2.3.6. Supposons maintenant $\underline{O}_Y$ de tor-dimension globale finie. Cela signifie qu'il existe un entier n tel que tout $\underline{O}_Y$-Module soit de tor-dimension $\leq n$ (SGA 6 I 5). Alors l'énoncé (2.1.5), pour $(T,A) = (Y,\underline{O}_Y)$, est valable sans hypothèse de degré sur E et L ; en effet, on est aussitôt ramené au cas "ordinaire" (non filtré), pour lequel l'assertion est connue [27]. De même la variante de (2.1.6) avec C^-F remplacé par CF est vraie. Il en résulte qu'on peut étendre le domaine de définition de $\overset{L}{\otimes}_Y$ (2.1.8) et Lf^*(2.3.5.1) à DF (resp. DG), i.e définir des foncteurs

(2.3.6.1) $\overset{L}{\otimes} : DF(Y) \times DF(Y)$ (resp. $DG(Y) \times DG(Y)$) $\longrightarrow DF(Y)$ (resp. $DG(Y)$),

(2.3.6.2) $\quad Lf^* : DF(Y)$ (resp. $DG(Y)$) $\longrightarrow DF(X)$ (resp. $DG(X)$)

prolongeant (2.1.8) et (2.3.5.1) et ayant des propriétés analogues de commutation à l'oubli de la filtration (resp. graduation) et au passage au gradué associé. L'isomorphisme (2.3.5.5) est alors valable sans restriction de degré sur les arguments. Notons que $\overset{L}{\otimes}_Y$ envoie $D^+ \times D^+$ dans D^+, et $D^b \times D^b$ dans D^b ; de même, Lf^* envoie D^+ dans D^+ et D^b dans D^b . L'isomorphisme (2.3.5.8) est valable sans hypothèse de degré sur L , dès que $M \in \text{ob } D^+F(X)$ (resp. $D^+G(X)$) , et les flèches d'adjonction (2.3.5.9) et (2.3.5.10) sont définies dès que L, M sont dans D^+ .

Les remarques précédentes s'appliquent en particulier au cas où $f : X \longrightarrow Y$ est la projection de X sur le topos ponctuel annelé par $\mathbb{Z}$: f^{-1} est le foncteur "faisceau constant associé", et $f_* = \Gamma$. On va en profiter pour définir, sous les hypothèses de degré faites au début de (2.3.4), une flèche fonctorielle de $DF(Ab)$ (resp. $DG(Ab)$) ([1]), dite <u>flèche de produit globale</u> :

(2.3.6.3) $\quad R\mathrm{Hom}(L_1,M_1) \overset{L}{\otimes} R\mathrm{Hom}(L_2,M_2) \longrightarrow R\mathrm{Hom}(L_1 \overset{L}{\otimes} L_2, M_1 \overset{L}{\otimes} M_2)$.

D'après (2.2.10), (2.3.5.5) et (2.3.5.8) il revient au même de définir une flèche

(*) $\quad Lf^*Rf_*\underline{R\mathrm{Hom}}(L_1,M_1) \overset{L}{\otimes} Lf^*Rf_*\underline{R\mathrm{Hom}}(L_2,M_2) \longrightarrow \underline{R\mathrm{Hom}}(L_1 \overset{L}{\otimes} L_2, M_1 \overset{L}{\otimes} M_2)$.

On prend pour (*) la flèche composée de (2.3.4.1) et du produit tensoriel des flèches d'adjonction (2.3.5.9) $Lf^*Rf_* \longrightarrow Id$. Utilisant les flèches canoniques $F^o(-) \overset{L}{\otimes} F^o(-) \longrightarrow F^o(- \overset{L}{\otimes} -)$ (resp. $k^o(-) \overset{L}{\otimes} k^o(-) \longrightarrow k^o(- \overset{L}{\otimes} -)$) et $H^o(-) \otimes H^o(-) \longrightarrow H^o(- \overset{L}{\otimes} -)$, on déduit de (2.3.6.3), par application de F^o (resp. k^o) une flèche canonique

(2.3.6.4) $\quad \mathrm{Hom}(L_1,M_1) \otimes \mathrm{Hom}(L_2,M_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}(L_1 \overset{L}{\otimes} L_2, M_1 \overset{L}{\otimes} M_2)$,

dont on laisse au lecteur le soin de vérifier que c'est la flèche évidente $(f_1,f_2) \longmapsto f_1 \overset{L}{\otimes} f_2$.

([1]) Rappelons que Ab désigne la catégorie des groupes abéliens.

On laisse également au lecteur le soin de définir, sous les hypothèses de (2.3.3), une flèche de composition globale :

$$\text{(2.3.6.5)} \qquad \mathrm{RHom}(L,M) \overset{L}{\otimes} \mathrm{RHom}(M,N) \longrightarrow \mathrm{RHom}(L,N) \quad ,$$

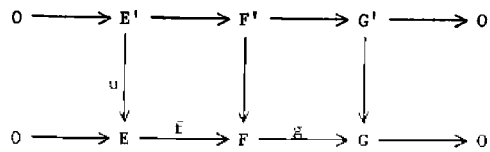
et d'étudier les relations de celle-ci avec la flèche (2.3.6.3).

3. Complexes filtrés (resp. gradués) parfaits : traces et cup-produits.

On prend les notations du n° 2.

3.1. Soit P l'une des propriétés de finitude pour un complexe envisagées dans (SGA 6 I), et soit $L \in \mathrm{ob}\, DF(A)$ (resp. $DG(A)$). Nous dirons, dans le cas gradué, que L possède la propriété P si l'objet de D(A) sous-jacent à L la possède ; il revient d'ailleurs au même (loc. cit., passim) de dire que, pour tout i, $k^i(L)$ possède la propriété P . Dans le cas filtré, nous dirons que L possède la propriété P si grL la possède. Nous aurons surtout à utiliser le cas où P est la propriété d'être d'amplitude parfaite finie (loc. cit., I 4.8). Comme dans (loc. cit. I 5.8.4), nous emploierons les notations $DF(A)_{torf}$, $DF(A)_{parf}$, etc., pour désigner la sous-catégorie pleine de DF(A) formée des objets de tor-dimension finie, d'amplitude parfaite finie, etc. ; d'après (loc. cit.), les sous-catégories ainsi définies sont des sous-catégories triangulées.

Exercice 3.1.1. Soit $L \in \mathrm{ob}\, DF(A)$ un complexe filtré parfait (cf. (SGA 6 I 4.7, 4.8)). Montrer qu'il existe localement un quasi-isomorphisme (1.2) $L' \longrightarrow L$ de CF(A) tel que grL' soit strictement parfait (SGA 6 I 2.1). Hint : montrer qu'étant donné une suite exacte de complexes parfaits $0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \longrightarrow 0$ et un quasi-isomorphisme $u : E' \longrightarrow E$ avec E' strictement parfait, il existe localement un morphisme de suites exactes de complexes



tel que les flèches verticales soient des quasi-isomorphismes et que F' et G' soient strictement parfaits.

Proposition 3.2. Soient L, M ∈ ob DF(A) (resp. DG(A)), et [m,n], [p,q] des intervalles de $\mathbb{Z}$. Posons a = m+p, b = n+q. Si L est d'amplitude plate ⊂ [m,n] et M à cohomologie ⊂ [p,q] (i.e. ∈ ob $D^{[p,q]}_{F(A)}$ (resp. $D^{[p,q]}_{G(A)}$)), alors $L \overset{L}{\otimes} M$ est à cohomologie ⊂ [a,b]. Si L (resp. M) est d'amplitude plate ⊂ [m,n] (resp. [p,q]), $L \overset{L}{\otimes} M$ est d'amplitude plate ⊂ [a,b]. Si L (resp. M) est d'amplitude parfaite ⊂ [m,n] (resp. [p,q]) $L \overset{L}{\otimes} M$ est d'amplitude parfaite ⊂ [a,b].

Preuve. D'après (2.1.10), il suffit de prouver le cas gradué. Mais celui-ci résulte de (SGA 6 I 4.17 et 5.6).

Proposition 3.3. Soient L, M ∈ ob DF(A) (resp. DG(A)), et [m,n] , [p,q] des intervalles de $\mathbb{Z}$. Posons a = p-n, b = q-m. On suppose L d'amplitude parfaite [m,n] . Alors, si M est à cohomologie (resp. d'amplitude plate, resp. d'amplitude parfaite) ⊂ [p,q] , RHom(L,M) est à cohomologie (resp. d'amplitude plate, resp. d'amplitude parfaite) ⊂ [a,b].

Preuve. Compte tenu de (2.2.8.1), on peut se borner à l'assertion relative à L , M ∈ ob DG(A), qui résulte de (SGA 6 I 7.1).

Notation 3.4. Pour L ∈ ob DF(A) (resp. DG(A)), on posera

$$L^{\vee} = \underline{R}\mathrm{Hom}(L,A) \quad ,$$

où A est considéré comme muni de la filtration (resp. graduation triviale concentrée en degré zéro. Si L est d'amplitude parfaite finie, il en est donc de même de $L^{\vee}$ d'après (3.3).

3.5. Soient L, $M \in \mathrm{ob}\ CF(A)$ (resp. $CG(A)$). La flèche canonique de $C(A)$

(3.5.1) $$L \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}(\underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}(L,M),M)$$

$$x \longmapsto (f \longmapsto f(x))$$

est compatible aux filtrations (resp. graduations), donc est une flèche de $CF(A)$ (resp. $CG(A)$). On vérifie trivialement que, pour $L \in \mathrm{ob}\ CF(A)$, le diagramme ci-dessous est commutatif :

(3.5.2)
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{grL} & \xrightarrow{\mathrm{gr}(3.5.1)} & \mathrm{gr}\underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}(\underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}(L,M),M) \\ {\scriptstyle \mathrm{Id}}\downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{grL} & \xrightarrow{(3.5.1)} & \underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}(\underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}(\mathrm{grL},\mathrm{grM}),\mathrm{grM}) \end{array} ,$$

où la flèche verticale de droite est donnée par (2.2.2.1).

Par l'argument habituel, on voit que la flèche (3.5.1) définit, pour $L \in \mathrm{ob}\ DF(A)$ (resp. $DG(A)$), $M \in \mathrm{ob}\ D^{+}F(A)$ (resp. $D^{+}G(A)$), une flèche fonctorielle :

(3.5.3) $$L \longrightarrow \underline{\mathrm{RHom}}(\underline{\mathrm{RHom}}(L,M),M) \quad ,$$

et que dans le cas filtré le carré (3.5.2) donne naissance à un carré commutatif :

(3.5.4)
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{grL} & \xrightarrow{\mathrm{gr}(3.5.3)} & \mathrm{gr}\underline{\mathrm{RHom}}(\underline{\mathrm{RHom}}(L,M),M) \\ {\scriptstyle \mathrm{Id}}\downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{grL} & \xrightarrow{(3.5.3)} & \underline{\mathrm{RHom}}(\underline{\mathrm{RHom}}(\mathrm{grL},\mathrm{grM}),\mathrm{grM}) \end{array} ,$$

où la flèche verticale de droite est l'isomorphisme (2.2.8.1). Pour $M = A$ (avec filtration (resp. graduation) triviale), la flèche (3.5.3) prend le nom de <u>flèche de bidualité</u>.

Proposition 3.5.5. Soit $L \in \text{ob } DF(A)$ (resp. $DG(A)$). Si L est parfait, la flèche de bidualité $L \longrightarrow L^{\vee\vee}$ est un isomorphisme.

Preuve. Compte tenu de (3.5.4), on peut se borner à prouver l'assertion dans le cas gradué. Il suffit d'ailleurs de montrer que la flèche non graduée sous-jacente est un isomorphisme, mais cette dernière assertion n'est autre que (SGA 6 I 7.2).

Proposition 3.6. Soient, pour $i = 1, 2$, $L_i \in \text{ob } D^-F(A)$ (resp. $D^-G(A)$), $M_i \in \text{ob } D^+F(A)$ (resp. $D^+G(A)$). On suppose que L_1 est d'amplitude parfaite finie, que L_2 est parfait, et que l'on a $M_1 \in \text{ob } D^bF(A)$ (resp. $D^bG(A)$), $M_1 \overset{L}{\otimes} M_2 \in \text{ob } D^+F(A)$ (resp. $D^+G(A)$). Alors la flèche de produit (2.3.4.1) :

$$\underline{R\mathrm{Hom}}(L_1,M_1) \overset{L}{\otimes} \underline{R\mathrm{Hom}}(L_2,M_2) \longrightarrow \underline{R\mathrm{Hom}}(L_1 \overset{L}{\otimes} L_2, M_1 \overset{L}{\otimes} M_2)$$

est définie et est un isomorphisme.

Preuve. D'après (3.3) on a $\underline{R\mathrm{Hom}}(L_1,M_1) \in \text{ob } D^bF(A)$ (resp. $D^bG(A)$), donc la flèche est bien définie. Pour prouver qu'elle est un isomorphisme, on peut, compte tenu de (2.3.4.5), se borner au cas gradué, et, dans ce cas, il suffit de montrer que la flèche non graduée sous-jacente est un isomorphisme. Par localisation et dévissage de L_i, on est ramené à $L_1 = L_2 = A$, auquel cas la flèche de produit n'est autre que la flèche identique de $M_1 \overset{L}{\otimes} M_2$.

Corollaire 3.6.1. Sous les hypothèses de (3.6) sur L_1 et L_2, la flèche de produit

$$L_1^{\vee} \overset{L}{\otimes} L_2^{\vee} \longrightarrow (L_1 \overset{L}{\otimes} L_2)^{\vee}$$

est un isomorphisme.

Corollaire 3.6.2. Pour $L \in \text{ob } DF(A)_{parf}$ (resp. $DG(A)_{parf}$), et $M \in \text{ob } D^+F(A)$ (resp. $D^+G(A)$), la flèche de produit (2.3.4.4) :

$$L^{\vee} \overset{L}{\otimes} M \longrightarrow \underline{R\mathrm{Hom}}(L,M)$$

est un isomorphisme.

3.7. Soient $E \in \text{ob } DF(A)_{\underline{parf}}$ (resp. $DG(A)_{\underline{parf}}$), $K \in \text{ob } D^-F(A)$ (resp. $D^-G(A)$), $L \in \text{ob } D^+F(A)$ (resp. $D^+G(A)$). Alors $\underline{RHom}(E \overset{L}{\otimes} K, E \overset{L}{\otimes} L) \in \text{ob } D^+F(A)$ (resp. $D^+G(A)$) est défini. On a l'isomorphisme cher à Cartan (2.3.1.3) :

$$c : \underline{RHom}(E \overset{L}{\otimes} K , E \overset{L}{\otimes} L) \xrightarrow{\sim} \underline{RHom}(K,\underline{RHom}(E,E \overset{L}{\otimes} L)) \quad .$$

D'autre part, la flèche de produit définit (3.6.2) un isomorphisme :

$$p : \underline{RHom}(K,E^{\vee} \overset{L}{\otimes} E \overset{L}{\otimes} L) \xrightarrow{\sim} \underline{RHom}(K,\underline{RHom}(E,E \overset{L}{\otimes} L)) \quad .$$

Enfin la flèche de contraction (2.3.2.3) $E^{\vee} \overset{L}{\otimes} E \longrightarrow A$ définit une flèche :

$$t : \underline{RHom}(K,E^{\vee} \overset{L}{\otimes} E \overset{L}{\otimes} L) \longrightarrow \underline{RHom}(K,L) \quad .$$

On note

$$(3.7.1) \qquad Tr : \underline{RHom}(E \overset{L}{\otimes} K,E \overset{L}{\otimes} L) \longrightarrow \underline{RHom}(K,L)$$

la flèche composée $tp^{-1}c$. Comme l'isomorphisme cher à Cartan, la flèche de produit et la flèche de contraction sont compatibles avec le passage au gradué associé d'après (2.3.1.4), (2.3.4.5) et (2.3.2.4), il en est de même de la flèche (3.7.1), i.e. dans le cas filtré on a un carré commutatif

$$(3.7.2) \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{grRHom}(E \overset{L}{\otimes} K,E \overset{L}{\otimes} L) & \xrightarrow{\mathrm{gr}(3.7.1)} & \mathrm{grRHom}(K,L) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \underline{RHom}(\mathrm{gr}E \overset{L}{\otimes} \mathrm{gr}K,\mathrm{gr}E \overset{L}{\otimes} \mathrm{gr}L) & \xrightarrow{(3.7.1)} & \underline{RHom}(\mathrm{gr}K,\mathrm{gr}L) \end{array} ,$$

où les isomorphismes verticaux sont définis par (2.1.9.1) et (2.2.8.1). Appliquant à (3.7.1) le foncteur $R\Gamma$, et tenant compte de (2.2.10), on trouve une flèche, notée encore Tr,

$$(3.7.3) \qquad Tr : RHom(E \overset{L}{\otimes} K,E \overset{L}{\otimes} L) \longrightarrow RHom(K,L) \quad ,$$

qu'on pourrait aussi définir directement en utilisant l'isomorphisme cher à Cartan sous la forme (2.3.1.6). Appliquant à (3.7.3) le foncteur H^0F^0 (resp. H^0k^0), et tenant compte de (1.4.11), on trouve une flèche, notée encore Tr,

(3.7.4) $$\mathrm{Tr} : \mathrm{Hom}(E \overset{L}{\otimes} K,\ E \overset{L}{\otimes} L) \longrightarrow \mathrm{Hom}(K,L) \quad ,$$

(le Hom étant pris dans $DF(A)$ (resp. $DG(A)$)). Les flèches (3.7.1), (3.7.3) et (3.7.4) s'appellent homomorphismes traces. Elles sont, pour E fixé, visiblement fonctorielles en K et L : soient $K' \longrightarrow K$ une flèche de $D^{-}F(A)$ (resp. $D^{-}G(A)$), $L \longrightarrow L'$ une flèche de $D^{+}F(A)$ (resp. $D^{+}G(A)$), alors on a un carré commutatif :

(3.7.4.1)
$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{RHom}}(E \overset{L}{\otimes} K, E \overset{L}{\otimes} L) & \xrightarrow{(3.7.1)} & \underline{\mathrm{RHom}}(K,L) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{\mathrm{RHom}}(E \overset{L}{\otimes} K', E \overset{L}{\otimes} L') & \xrightarrow{(3.7.1)} & \underline{\mathrm{RHom}}(K',L') \end{array} \quad ,$$

et deux carrés commutatifs analogues avec RHom, Hom au lieu de $\underline{\mathrm{RHom}}$. Nous verrons plus bas (3.8.11) que les flèches (3.7.1), (3.7.3), (3.7.4) sont, pour K et L fixés, fonctorielles en E par rapport aux isomorphismes.

3.7.4.2. Explicitons maintenant la flèche (3.7.4). Dans le cas gradué, on a :

$$\mathrm{Hom}(E \overset{L}{\otimes} K, E \overset{L}{\otimes} L) = \bigoplus_{p+q=p'+q'} \mathrm{Hom}(k^{p}E \overset{L}{\otimes} k^{q}K, k^{p'}E \overset{L}{\otimes} k^{q'}L) \quad ,$$

$$\mathrm{Hom}(K,L) = \bigoplus_{r} \mathrm{Hom}(k^{r}K, k^{r}L) \quad ,$$

les $\overset{L}{\otimes}$ et Hom aux seconds membres étant calculés dans $D(A)$, de sorte que (3.7.4) est donnée par une matrice $(t_{pqp'r})$, où $t_{pqp'r}$ envoie $\mathrm{Hom}(k^{p}E \overset{L}{\otimes} k^{q}K, k^{p'}E \overset{L}{\otimes} k^{q'}L)$ dans $\mathrm{Hom}(k^{r}K, k^{r}L)$. Les décompositions étudiées plus haut de l'isomorphisme cher à Cartan, de la flèche de produit et de la flèche de contraction entraînent que l'on a $t_{pqp'r} = 0$ pour $p \neq p'$ ou $q \neq r$ et que

$$t_{prpr} : \mathrm{Hom}(k^{p}E \overset{L}{\otimes} k^{r}K, k^{p}E \overset{L}{\otimes} k^{r}L) \longrightarrow \mathrm{Hom}(k^{r}K, k^{r}L)$$

est donné par l'homomorphisme trace "usuel" dans $D(A)$, i.e. par (3.7.4) dans le cas particulier où tous les arguments sont dans $DG^{[o,o]}(A) = D(A)$ (cf. (1.2.7)). En particulier si K et L sont de graduation concentrée en degré zéro (cas impor-

tant pour les applications), l'homomorphisme (3.7.4) est la somme des homomorphismes traces

$$\mathrm{Tr} : \mathrm{Hom}(k^p E \overset{L}{\otimes} K, k^p E \overset{L}{\otimes} L) \longrightarrow \mathrm{Hom}(K,L)$$

relatifs à chaque composante $k^p E$.

Dans le cas filtré, le carré (3.7.2) fournit, compte tenu de (2.2.8.1), un carré commutatif de DG(Ab) :

(3.7.5)
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{grRHom}(E \overset{L}{\otimes} K, E \overset{L}{\otimes} L) & \xrightarrow{\mathrm{gr}(3.7.3)} & \mathrm{grRHom}(K,L) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \mathrm{RHom}(\mathrm{gr}E \overset{L}{\otimes} \mathrm{gr}K, \mathrm{gr}E \overset{L}{\otimes} \mathrm{gr}L) & \xrightarrow{(3.7.3)} & \mathrm{RHom}(\mathrm{gr}K, \mathrm{gr}L) \end{array} ,$$

où les isomorphismes verticaux sont définis par (1.4.13.1) et (2.1.9.1). Composant le carré commutatif $H^0F^0(3.7.3) \longrightarrow H^0\mathrm{gr}^0(3.7.3)$ (défini par la projection canonique $F^0 \longrightarrow \mathrm{gr}^0$) avec le carré commutatif déduit de (3.7.5) par application du foncteur H^0k^0 ; on trouve un carré commutatif :

(3.7.6)
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(E \overset{L}{\otimes} K, E \overset{L}{\otimes} L) & \xrightarrow{(3.7.4)} & \mathrm{Hom}(K,L) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}(\mathrm{gr}E \overset{L}{\otimes} \mathrm{gr}K, \mathrm{gr}E \overset{L}{\otimes} \mathrm{gr}L) & \xrightarrow{(3.7.4)} & \mathrm{Hom}(\mathrm{gr}K, \mathrm{gr}L) \end{array} ,$$

où les flèches verticales sont donnés par $f \longmapsto \mathrm{gr}f$.

Corollaire 3.7.7. (additivité des traces). Soient $E \in \mathrm{ob}\, DF(A)_{\mathrm{parf}}$, $K \in \mathrm{ob}\, D^-(A)$, $L \in \mathrm{ob}\, D^+(A)$, et $f : E \overset{L}{\otimes} K \longrightarrow E \overset{L}{\otimes} L$ une flèche de $DF(A)$ (on identifie $D(A)$ à la sous-catégorie pleine $DF^{[o,o]}(A)$ de $DF(A)$, cf. (1.2.7)). Alors on a :

$$\mathrm{Tr}\, f = \sum_n \mathrm{Tr}\, \mathrm{gr}^n(f) .$$

Preuve. Dans (3.7.6) la flèche verticale de droite est la flèche identique de Hom(K,L), et la flèche horizontale inférieure, comme on l'a remarqué plus haut

(3.7.4.2), est la somme des homomorphismes traces relatifs à chaque composante $gr^n E$, d'où l'assertion.

Remarque 3.7.7.1. Tr f est aussi l'image de f par le morphisme trace "usuel" dans D(A) lorsqu'on oublie la filtration de E , cela découle trivialement des définitions.

3.7.8. Soient, pour i = 1, 2, $E_i \in \text{ob } DF(A)_{\underline{parf}}$ (resp. $DG(A)_{\underline{parf}}$), $K_i \in \text{ob } D^-F(A)$ (resp. $D^-G(A)$), $L_i \in \text{ob } D^+F(A)$ (resp. $D^+G(A)$). On suppose que l'on a L_1 ou $L_2 \in \text{ob } D^bF(A)$ (resp. $D^bG(A)$), et $L_1 \overset{L}{\otimes} L_2 \in \text{ob } D^+F(A)$ (resp. $D^+G(A)$), et, pour un i, $\underline{RHom}(K_i, L_i) \in \text{ob } D^bF(A)$ (resp. $D^bG(A)$). On peut alors former le diagramme suivant :

(3.7.8.1)
$$\begin{array}{ccc} \underline{RHom}(E_1 \overset{L}{\otimes} K_1, E_1 \overset{L}{\otimes} L_1) \overset{L}{\otimes} \underline{RHom}(E_2 \overset{L}{\otimes} K_2, E_2 \overset{L}{\otimes} L_2) & \xrightarrow{Tr \overset{L}{\otimes} Tr} & \underline{RHom}(K_1, L_1) \overset{L}{\otimes} \underline{RHom}(K_2, L_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{RHom}(E_1 \overset{L}{\otimes} E_2 \overset{L}{\otimes} K_1 \overset{L}{\otimes} K_2, E_1 \overset{L}{\otimes} E_2 \overset{L}{\otimes} L_1 \overset{L}{\otimes} L_2) & \xrightarrow{Tr} & \underline{RHom}(K_1 \overset{L}{\otimes} K_2, L_1 \overset{L}{\otimes} L_2) , \end{array}$$

où la flèche verticale de droite est la flèche de produit (2.3.4.1) et la flèche verticale de gauche est composée de la flèche de produit (2.3.4.1) et de l'isomorphisme défini par les isomorphismes de symétrie $E_1 \overset{L}{\otimes} K_1 \overset{L}{\otimes} E_2 \overset{L}{\otimes} K_2 \xrightarrow{\sim} E_1 \overset{L}{\otimes} E_2 \overset{L}{\otimes} K_1 \overset{L}{\otimes} K_2$, $E_1 \overset{L}{\otimes} L_1 \overset{L}{\otimes} E_2 \overset{L}{\otimes} L_2 \xrightarrow{\sim} E_1 \overset{L}{\otimes} E_2 \overset{L}{\otimes} L_1 \overset{L}{\otimes} L_2$ (noter que l'hypothèse $\underline{RHom}(K_i, L_i) \in \text{ob } D^bF(A)$ (resp. $D^bG(A)$) pour un i implique que l'on a, pour le même i , $\underline{RHom}(E_i \overset{L}{\otimes} K_i, E_i \overset{L}{\otimes} L_i) \in \text{ob } D^bF(A)$ (resp. $D^bG(A)$) : la preuve est analogue à celle de (3.3) et laissée en exercice au lecteur). Utilisant la flèche de produit globale (2.3.6.3), on définit de manière analogue un diagramme

(3.7.8.2)
$$\begin{array}{ccc} RHom(E_1 \overset{L}{\otimes} K_1, E_1 \overset{L}{\otimes} L_1) \overset{L}{\otimes} RHom(E_2 \overset{L}{\otimes} K_2, E_2 \overset{L}{\otimes} L_2) & \xrightarrow{Tr \overset{L}{\otimes} Tr} & RHom(K_1, L_1) \overset{L}{\otimes} RHom(K_2, L_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ RHom(E_1 \overset{L}{\otimes} E_2 \overset{L}{\otimes} K_1 \overset{L}{\otimes} K_2, E_1 \overset{L}{\otimes} E_2 \overset{L}{\otimes} L_1 \overset{L}{\otimes} L_2) & \xrightarrow{Tr} & RHom(K_1 \overset{L}{\otimes} K_2, L_1 \overset{L}{\otimes} L_2) . \end{array}$$

Proposition 3.7.8.3. Les diagrammes (3.7.8.1) et (3.7.8.2) sont commutatifs.

"Preuve". La commutativité de (3.7.8.2) découle facilement (vu la définition de la flèche de produit globale) de celle de (3.7.8.1). Nous ne donnerons pas la preuve de cette dernière, que nous avouons d'ailleurs ne pas avoir faite en détail, et qui n'est qu'un exercice de routine nécessitant probablement plusieurs pages de diagrammes. Le point clé est la compatibilité de l'isomorphisme cher à Cartan avec la flèche de produit (2.3.4.1), vu qu'on sait déjà que la flèche de contraction et la flèche de produit sont compatibles aux produits (cf. (2.3.4.2)).

Appliquant à (3.7.8.2) le foncteur F^{o} (resp. k^{o}), on obtient un carré commutatif :

(3.7.8.4)
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(E_1 \overset{L}{\otimes} K_1, E_1 \overset{L}{\otimes} L_1) \otimes \mathrm{Hom}(E_2 \overset{L}{\otimes} K_2, E_2 \overset{L}{\otimes} L_2) & \xrightarrow{\mathrm{Tr} \otimes \mathrm{Tr}} & \mathrm{Hom}(K_1, L_1) \otimes \mathrm{Hom}(K_2, L_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}(E_1 \overset{L}{\otimes} E_2 \overset{L}{\otimes} K_1 \overset{L}{\otimes} K_2, E_1 \overset{L}{\otimes} E_2 \overset{L}{\otimes} L_1 \overset{L}{\otimes} L_2) & \xrightarrow{\mathrm{Tr}} & \mathrm{Hom}(K_1 \overset{L}{\otimes} K_2, L_1 \overset{L}{\otimes} L_2) \end{array} ,$$

où les flèches verticales sont définies par les flèches de produit (2.3.6.4). Le carré (3.7.8.4) exprime la multiplicativité de la trace : pour $f_i \in \mathrm{Hom}(E_i \overset{L}{\otimes} K_i, E_i \overset{L}{\otimes} L_i)$ on a :

$$\mathrm{Tr}(f_1 \overset{L}{\otimes} f_2) = \mathrm{Tr}(f_1) \overset{L}{\otimes} \mathrm{Tr}(f_2) \quad . \tag{3.7.8.5}$$

3.8. Soient $E, F \in \mathrm{ob}\, DF(A)_{\underline{parf}}$ (resp. $DG(A)_{\underline{parf}}$), et, pour $i = 1, 2$, $K_i \in \mathrm{ob}\, D^{-}F(A)$ (resp. $D^{-}G(A)$), $L_i \in \mathrm{ob}\, D^{+}F(A)$ (resp. $D^{+}G(A)$). On suppose que l'on a L_1 ou $L_2 \in \mathrm{ob}\, D^{b}F(A)$ (resp. $D^{b}G(A)$), et $L_1 \overset{L}{\otimes} L_2 \in \mathrm{ob}\, D^{+}F(A)$ (resp. $D^{+}G(A)$). Posons $K_1 \overset{L}{\otimes} K_2 = K$, $L_1 \overset{L}{\otimes} L_2 = L$. On a l'homomorphisme défini par la flèche de produit (2.3.4.1) et les isomorphismes de symétrie :

$$(*) \qquad \underline{\mathrm{RHom}}(E \overset{L}{\otimes} K_1, F \overset{L}{\otimes} L_1) \overset{L}{\otimes} \underline{\mathrm{RHom}}(F \overset{L}{\otimes} K_2, E \overset{L}{\otimes} L_2) \longrightarrow \underline{\mathrm{RHom}}(E \overset{L}{\otimes} F \overset{L}{\otimes} K, E \overset{L}{\otimes} F \overset{L}{\otimes} L) \ ;$$

d'autre part, comme $E \overset{L}{\otimes} F$ est d'amplitude parfaite finie (3.2), on a l'homomorphisme trace (3.7.1) :

$$(**) \qquad \underline{R\mathrm{Hom}}(E \overset{L}{\otimes} F \overset{L}{\otimes} K,\ E \overset{L}{\otimes} F \overset{L}{\otimes} L) \longrightarrow \underline{R\mathrm{Hom}}(K,L) \quad .$$

Le composé de (*) et (**) :

$$(3.8.1) \qquad \underline{R\mathrm{Hom}}(E \overset{L}{\otimes} K_1, F \overset{L}{\otimes} L_1) \overset{L}{\otimes} \underline{R\mathrm{Hom}}(F \overset{L}{\otimes} K_2, E \overset{L}{\otimes} L_2) \longrightarrow \underline{R\mathrm{Hom}}(K,L)$$

s'appelle l'homomorphisme cup-produit. De manière analogue, utilisant la flèche de produit globale (2.3.6.3) et l'homomorphisme trace (3.7.3) on définit un cup-produit "global" :

$$(3.8.2) \qquad R\mathrm{Hom}(E \overset{L}{\otimes} K_1, F \overset{L}{\otimes} L_1) \overset{L}{\otimes} R\mathrm{Hom}(F \overset{L}{\otimes} K_2,\ E \overset{L}{\otimes} L_2) \longrightarrow R\mathrm{Hom}(K,L) \quad ,$$

d'où l'on déduit une flèche canonique :

$$(3.8.3) \qquad \mathrm{Hom}(E \overset{L}{\otimes} K_1, F \overset{L}{\otimes} L_1) \otimes \mathrm{Hom}(F \overset{L}{\otimes} K_2, E \overset{L}{\otimes} L_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}(K,L) \quad .$$

On laisse au lecteur le soin, dans le cas gradué, de décomposer suivant les morceaux homogènes les flèches (3.8.1), (3.8.2), et d'écrire la matrice de (3.8.3) (cf. la décomposition de la trace). Dans le cas filtré, on a un carré commutatif :

$$(3.8.4) \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{gr}\underline{R\mathrm{Hom}}(E \overset{L}{\otimes} K_1, F \overset{L}{\otimes} L_1) \overset{L}{\otimes} \mathrm{gr}\underline{R\mathrm{Hom}}(F \overset{L}{\otimes} K_2, E \overset{L}{\otimes} L_2) & \xrightarrow{\mathrm{gr}(3.8.1)} & \mathrm{gr}\underline{R\mathrm{Hom}}(K,L) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \underline{R\mathrm{Hom}}(\mathrm{gr}E \overset{L}{\otimes} \mathrm{gr}K_1, \mathrm{gr}F \overset{L}{\otimes} \mathrm{gr}L_1) \overset{L}{\otimes} \underline{R\mathrm{Hom}}(\mathrm{gr}F \overset{L}{\otimes} \mathrm{gr}K_2, \mathrm{gr}E \overset{L}{\otimes} \mathrm{gr}L_2) & \xrightarrow{(3.8.1)} & \underline{R\mathrm{Hom}}(\mathrm{gr}K, \mathrm{gr}L) \end{array}$$

où les flèches verticales sont les isomorphismes définis par (2.1.9.1) et (2.2.8.1). On a un carré commutatif analogue (3.8.5) avec RHom au lieu de $\underline{R\mathrm{Hom}}$, d'où l'on déduit un carré commutatif :

$$(3.8.6) \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(E \overset{L}{\otimes} K_1, F \overset{L}{\otimes} L_1) \otimes \mathrm{Hom}(F \overset{L}{\otimes} K_2, E \overset{L}{\otimes} L_2) & \xrightarrow{(3.8.3)} & \mathrm{Hom}(K,L) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}(\mathrm{gr}E \overset{L}{\otimes} \mathrm{gr}K_1, \mathrm{gr}F \overset{L}{\otimes} \mathrm{gr}L_1) \otimes \mathrm{Hom}(\mathrm{gr}F \overset{L}{\otimes} \mathrm{gr}K_2, \mathrm{gr}E \overset{L}{\otimes} \mathrm{gr}L_2) & \xrightarrow{(3.8.3)} & \mathrm{Hom}(\mathrm{gr}K, \mathrm{gr}L) \end{array} ,$$

où les flèches verticales sont données par $f \longmapsto \mathrm{gr}f$. Le carré (3.8.6) exprime

l'additivité du cup-produit : si K_i, L_i $(i=1,2)$ sont de filtrations concentrées en degré zéro, il fournit la formule

$$(3.8.7) \qquad \langle u,v\rangle = \sum_n \langle gr^n u, gr^n v\rangle \quad ,$$

pour $u \in \mathrm{Hom}(E \overset{L}{\otimes} K_1, F \overset{L}{\otimes} L_1)$, $v \in \mathrm{Hom}(F \overset{L}{\otimes} K_2, E \overset{L}{\otimes} L_2)$, où l'on a noté $\langle\ ,\ \rangle$ le cup-produit (3.8.3).

Soient E', F', K'_i, L'_i des objets de $DF(A)$ (resp. $DG(A)$) satisfaisant aux mêmes hypothèses que E, F, K_i, L_i. Alors, moyennant des restrictions de degré convenables, on a un diagramme commutatif analogue à (3.7.8.1), exprimant "la compatibilité du cup-produit aux produits". "En particulier" on a, pour $u \in \mathrm{Hom}(E \overset{L}{\otimes} K_1, F \overset{L}{\otimes} L_1)$, $v \in \mathrm{Hom}(F \overset{L}{\otimes} K_2, E \overset{L}{\otimes} L_2)$, $u' \in \mathrm{Hom}(E' \overset{L}{\otimes} K'_1, F' \overset{L}{\otimes} L'_1)$, $v' \in \mathrm{Hom}(F' \overset{L}{\otimes} K'_2, E' \overset{L}{\otimes} L'_2)$:

$$(3.8.8) \qquad \langle u \overset{L}{\otimes} u',\ v \overset{L}{\otimes} v'\rangle = \langle u,v\rangle \overset{L}{\otimes} \langle u',v'\rangle \quad ,$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne, comme ci-dessus, le cup-produit (3.8.3). Les détails sont laissés au lecteur patient.

On laisse également au lecteur les assertions suivantes, qui expriment la relation entre trace et cup-produit, dans le cas particulier où $K_i = L_i = A$ (muni de la filtration (resp. graduation) triviale concentrée en degré zéro). On a un diagramme commutatif :

$$(3.8.9) \qquad \begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{RHom}}(E,F) \overset{L}{\otimes} \underline{\mathrm{RHom}}(F,E) & \xrightarrow{(2.3.3.1)} & \underline{\mathrm{RHom}}(E,E) \\ \Big\downarrow (2.3.3.1) & \searrow (3.8.1) & \Big\downarrow (3.7.1) \\ \underline{\mathrm{RHom}}(F,F) & \xrightarrow{(3.7.1)} & A \end{array} \quad ,$$

et un diagramme commutatif analogue avec RHom au lieu de $\underline{\mathrm{RHom}}$, et ΓA au lieu de A, d'où l'on déduit la formule (cf. SGA 6 I 8.3) :

$$(3.8.10) \qquad \mathrm{Tr}(uv) = \mathrm{Tr}(vu) = \langle u,v\rangle \quad ,$$

pour $u \in \mathrm{Hom}(E,F)$, $v \in \mathrm{Hom}(F,E)$.

3.8.11. Soit $s : E \longrightarrow F$ un isomorphisme. Celui-ci correspond, par l'isomorphisme cher à Cartan à une flèche, notée encore $s : A \longrightarrow \underline{R\mathrm{Hom}}(E,F)$. Envoyant $\underline{R\mathrm{Hom}}(F,E) = A \overset{L}{\otimes} \underline{R\mathrm{Hom}}(F,E)$ dans $\underline{R\mathrm{Hom}}(E,F) \overset{L}{\otimes} R\mathrm{Hom}(F,E)$ par $s \overset{L}{\otimes} \mathrm{Id}$, on déduit de (3.8.9) un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \underline{R\mathrm{Hom}}(F,E) & \xrightarrow{\sim} & \underline{R\mathrm{Hom}}(E,E) \\ \downarrow \wr & & \downarrow (3.7.1) \\ \underline{R\mathrm{Hom}}(F,F) & \xrightarrow{(3.7.1)} & A \end{array}$$

où les flèches autres que la trace sont les isomorphismes définis par s (on peut aussi le vérifier directement ...). Il en résulte qu'on a un carré commutatif (avec les notations de (3.7)) :

$$\begin{array}{ccc} \underline{R\mathrm{Hom}}(F \overset{L}{\otimes} K, E \overset{L}{\otimes} L) & \xrightarrow{\sim} & \underline{R\mathrm{Hom}}(E \overset{L}{\otimes} K, E \overset{L}{\otimes} L) \\ \downarrow \wr & & \downarrow (3.7.1) \\ \underline{R\mathrm{Hom}}(F \overset{L}{\otimes} K, F \overset{L}{\otimes} L) & \xrightarrow{(3.7.1)} & \underline{R\mathrm{Hom}}(K,L) \end{array} \qquad (3.8.11.1)$$

où les flèches autres que la trace sont les isomorphismes définis par s. On en déduit des carrés commutatifs analogues avec RHom, Hom au lieu de $\underline{R\mathrm{Hom}}$. Ce dernier exprime le caractère central de la trace (ou son invariance par isomorphisme, comme on préfère) : pour $f \in \mathrm{Hom}(E \overset{L}{\otimes} K, E \overset{L}{\otimes} L)$, on a :

$$\mathrm{Tr}(sfs^{-1}) = \mathrm{Tr}(f) \quad . \qquad (3.8.11.2)$$

3.9. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de topos annelés, et soient $E \in \mathrm{ob}\, DF(Y)_{\underline{parf}}$ (resp. $DG(Y)_{\underline{parf}}$), $K \in \mathrm{ob}\, D^{-}F(Y)$ (resp. $D^{-}G(Y)$), $L \in \mathrm{ob}\, D^{b}F(Y)$ (resp. $D^{b}G(Y)$) tel que $Lf^{*}L \in \mathrm{ob}\, D^{b}F(X)$ (resp. $D^{b}G(X)$). On laisse au lecteur à l'inépuisable patience le soin de vérifier que le carré ci-dessous est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{RHom}}(E \overset{L}{\otimes} K, E \overset{L}{\otimes} L) & \xrightarrow{(3.7.1)} & \underline{\mathrm{RHom}}(K,L) \\ \Big\downarrow (3.9.1)\ (2.3.5.11) & & \Big\downarrow (2.3.5.11) \\ Rf_*\underline{\mathrm{RHom}}(Lf^*E \overset{L}{\otimes} Lf^*K, Lf^*E \overset{L}{\otimes} Lf^*L) & \xrightarrow{Rf_*(3.7.1)} & Rf_*\underline{\mathrm{RHom}}(Lf^*K, Lf^*L) \end{array}$$

(noter que l'on a $Lf^*E \in \mathrm{ob}\ DF(X)_{\underline{parf}}$ (resp. $DG(X)_{\underline{parf}}$) d'après (3.2)). Par application du foncteur $R\Gamma$ on déduit de (3.9.1) un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{RHom}(E \overset{L}{\otimes} K, E \overset{L}{\otimes} L) & \xrightarrow{(3.7.3)} & \mathrm{RHom}(K,L) \\ \Big\downarrow (3.9.2) & & \Big\downarrow \\ \mathrm{RHom}(Lf^*E \overset{L}{\otimes} Lf^*K, Lf^*E \overset{L}{\otimes} Lf^*L) & \xrightarrow{(3.7.3)} & \mathrm{RHom}(Lf^*K, Lf^*L) \end{array} ,$$

d'où un carré commutatif analogue avec Hom au lieu de RHom, qu'on peut résumer par la formule :

$$\mathrm{Tr}(Lf^*u) = Lf^*\mathrm{Tr}(u) \quad , \tag{3.9.3}$$

pour $u \in \mathrm{Hom}(E \overset{L}{\otimes} K, E \overset{L}{\otimes} L)$.

4. Les foncteurs S^n, $\wedge^n$, Γ^n filtrés (resp. gradués).

On conserve les notations du n° 2.

4.1. Rappelons (I 1.5.5 b), 4.2.2.6) que $S = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S^n$ (resp. $\wedge = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \wedge^n$, resp. $\Gamma = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Gamma^n$) désigne le foncteur Algèbre symétrique (resp. extérieure, resp. à puissances divisées) sur la catégorie des A-Modules. Soit L un A-Module filtré, et soit n un entier ≥ 1 . On filtre S^nL (resp. $\wedge^nL$) par les sous-Modules :

$$F^kS^nL \ (\text{resp. } F^k \wedge {}^nL) = \sum_{i_1+\ldots+i_n \geq k} \mathrm{Im}\, F^{i_1}L \otimes \ldots \otimes F^{i_n}L$$

$$= \mathrm{Im}\, F^k(L^{\otimes n}) \quad (\text{cf. } (2.1.1)) \quad ,$$

où Im est relatif à l'homomorphisme canonique $L^{\otimes n} \longrightarrow S^n L$ (resp. $\Lambda^n L$) ; on filtre $\Gamma^n L$ par les sous-Modules

$$F^k \Gamma^n L = \sum_{\substack{n_1+\ldots+n_p = n \\ n_1 i_1+\ldots+n_p i_p \geq k}} \gamma_{n_1}(F^{i_1}L) \ldots \gamma_{n_p}(F^{i_p}L) \quad .$$

Si la filtration de L est contenue dans un intervalle [a,b], celle de $S^n L$ (resp. $\Lambda^n L$, resp. $\Gamma^n L$) est contenue dans l'intervalle [na,nb]. Pour n = 1, la filtration ainsi définie sur $S^n L = \Lambda^n L = \Gamma^n L = L$ est la filtration initiale de L. Pour n = 0, on munit $S^n L = \Lambda^n L = \Gamma^n L = A$ de la filtration triviale concentrée en degré zéro. Notons $T^\cdot$ l'un des foncteurs S, Λ, Γ. Pour $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$, on a

$$T^n(L(p)) = T^n L\,(np) \quad , \tag{4.1.1}$$

où X(i) désigne comme d'habitude X où l'on a décalé la filtration de i unités. D'autre part, la filtration qu'on vient de définir sur $T^\cdot$ est compatible avec sa structure d'Algèbre, i.e., pour m, n ∈ ℕ et p, q ∈ ℤ, l'homomorphisme produit $T^m \otimes T^n \longrightarrow T^{m+n}$ envoie $F^p T^m L \otimes F^q T^n L$ dans $F^{p+q} T^{m+n} L$.

Soient L, M des A-Modules filtrés. Pour $n \in \mathbb{N}$, l'isomorphisme canonique (I 4.2.2.6)

$$T^n(L \oplus M) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{p+q = n} T^p L \otimes T^q M \tag{4.1.2}$$

est compatible aux filtrations, quand on munit les produits tensoriels au membre de droite de leur filtration naturelle (2.1.1). En d'autres termes, l'isomorphisme canonique

$$T^\cdot(L \oplus M) \xrightarrow{\sim} T^\cdot L \otimes T^\cdot M \tag{4.1.2}'$$

est un isomorphisme d'Algèbres graduées filtrées, ce qui serait d'ailleurs évident a priori sur la caractérisation universelle de $T^\cdot$ comme Algèbre graduée filtrée, caractérisation dont on laisse l'énoncé au lecteur.

Soit P un A-Module gradué. Pour $n \in \mathbb{N}$, T^nP est muni d'une graduation "totale" naturelle, concentrée dans l'intervalle $[na,nb]$ si celle de P est concentrée dans $[a,b]$, et qu'on laisse au lecteur le soin d'expliciter. Elle est compatible aux produits, de sorte que $T^\cdot P$ se trouve ainsi muni d'une structure d'Algèbre bigraduée, strictement anti-commutative pour le degré extérieur dans le cas $T^\cdot = \wedge^\cdot$. On a des isomorphismes de Modules gradués, analogues à (4.1.1) et (4.1.2) :

$$T^n(P(p)) \simeq T^nP\ (np)\ , \tag{4.1.3}$$

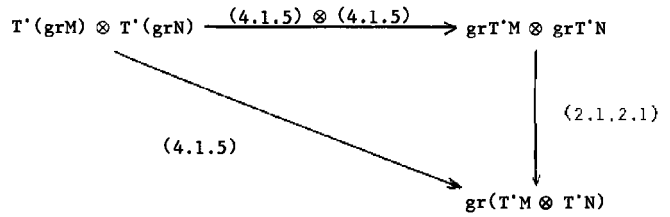
$$T^n(P \oplus Q) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{p+q=n} T^pP \otimes T^qQ\ . \tag{4.1.4}$$

Soit L un A-Module filtré. L'injection canonique $\mathrm{gr}L \longrightarrow \mathrm{gr}SL$ (resp. $\mathrm{gr} \wedge L$) se prolonge canoniquement en un homomorphisme d'Algèbres bigraduées $S\mathrm{gr}L \longrightarrow \mathrm{gr}SL$ (resp. $\wedge \mathrm{gr}L \longrightarrow \mathrm{gr} \wedge L$). D'autre part, on vérifie facilement qu'on a $\gamma_n(F^k\Gamma L) \subset F^{nk}\Gamma L$, pour $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$, de sorte que les puissances divisées de ΓL définissent par passage au gradué associé un morphisme d'Algèbres bigraduées $\Gamma\,\mathrm{gr}L \longrightarrow \mathrm{gr}\Gamma L$. En résumé, on a donc un homomorphisme canonique d'Algèbres bigraduées :

$$T^\cdot(\mathrm{gr}L) \longrightarrow \mathrm{gr}T^\cdot L\ . \tag{4.1.5}$$

Proposition 4.1.6. Soit L un A-Module filtré, de filtration finie, tel que $\mathrm{gr}L$ soit plat. Alors (4.1.5) est un isomorphisme.

Preuve. On raisonne par récurrence sur la longueur $d = b-a$ de l'intervalle $[a,b]$ dans lequel est concentrée la filtration de L. Pour $d = 0$, on peut, compte tenu de (4.1.1) et (4.1.3), supposer $a = b = 0$, et il n'y a rien à démontrer. Supposons $d > 0$. Par passage à la limite inductive locale, on se ramène, comme dans la preuve de (2.1.4), au cas où $L = M \oplus N$, M et N étant de filtration concentrée dans un intervalle de longueur $< d$. On a alors $T^\cdot(\mathrm{gr}L) \simeq T^\cdot(\mathrm{gr}M) \otimes T^\cdot(\mathrm{gr}N)$, $\mathrm{gr}T^\cdot L \simeq \mathrm{gr}(T^\cdot M \otimes T^\cdot N)$, et un triangle commutatif :



Par l'hypothèse de récurrence, la flèche horizontale est un isomorphisme ; de plus $grT'M$ et $grT'N$ sont plats, donc, d'après (2.1.4), la flèche verticale est un isomorphisme. Donc la flèche oblique est un isomorphisme, cqfd.

4.1.7. Il est intéressant d'expliciter le cas particulier où L est de filtration concentrée dans l'intervalle $[0,1]$. Posons $gr^0L = L''$, $gr^1L = F^1L = L'$, d'où une suite exacte

$$0 \longrightarrow L' \longrightarrow L \longrightarrow L'' \longrightarrow 0 \quad .$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, la filtration de T^nL est concentrée dans l'intervalle $[0,n]$: on a

$$F^kT^nL = \mathrm{Im}\, T^kL' \otimes T^{n-k}L \quad ,$$

c'est la <u>filtration</u> dite <u>de Koszul</u>. On a

$$T^n grL = \bigoplus_{p+q=n} T^pL' \otimes T^qL'' \quad ,$$

la composante homogène de degré p étant $T^pL' \otimes T^qL''$. Si L' et L'' sont plats, la flèche (4.1.5)

$$k^p(T^n grL) = T^pL' \otimes T^qL'' \longrightarrow gr^pT^nL$$

est un isomorphisme. Le "premier quotient" de T^nL est T^nL'' : on a la suite exacte

$$L' \otimes T^{n-1}L \longrightarrow T^nL \longrightarrow T^nL'' \longrightarrow 0 \quad .$$

Le "dernier quotient" est $gr^nT^nL = F^nT^nL = T^nL'$.

4.2. Soit $L \in \mathrm{ob}\, CF(A)$ (resp. $CG(A)$). On munit le complexe T^nL (I 4.1.3.2) de la filtration (resp. graduation) définie par

$$(4.2.1) \qquad F^pT^nL = \int N F^{p-i} T^n K_i L \qquad (\text{resp. } k^pT^nL = \int N k^{p-i} T^n K_i L) \ .$$

On définit ainsi un foncteur

$$(4.2.2) \qquad T^n : CF(A) \ (\text{resp. } CG(A)) \longrightarrow CF(A) \ (\text{resp. } CG(A)) \ ,$$

envoyant $C^-F(A)$ (resp. $C^-G(A)$) dans $C^-F(A)$ (resp. $C^-G(A)$), et $CF^{[a,b]}(A)$ (resp. $CG^{[a,b]}(A)$) dans $CF^{[na,nb]}(A)$ (resp. $CG^{[na,nb]}(A)$). Notons que la filtration (resp. graduation) somme sur $T'L = \oplus T^nL$ est compatible à la structure d'Algèbre de $T'L$ (I 4.2.3.5). L'homomorphisme (4.1.5) fournit dans le cas filtré, un homomorphisme fonctoriel d'Algèbres différentielles trigraduées

$$(4.2.3) \qquad T'(grL) \longrightarrow grT'L \ .$$

D'après (4.1.6), celui-ci est un isomorphisme quand grL est plat. Compte tenu de (I 4.2.2.1), il en résulte :

Lemme 4.2.4. *Soit $f : L \longrightarrow M$ un quasi-isomorphisme de $C^-F(A)$ tel que grL et grM soient plats. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T^nf est un quasi-isomorphisme de $C^-F(A)$.*

Observant par ailleurs que les foncteurs (4.2.2) sont "compatibles" aux homotopies filtrées (resp. graduées) (cf. (I 4.1.3.5)), on conclut (grâce à (2.1.6)) :

Proposition 4.2.5. *Pour $L \in \mathrm{ob}\, D^-F(A)$ et $n \in \mathbb{N}$, le pro-objet de $D^-F(A)$:*

$$LT^nL = \text{"lim"}_{\longleftarrow_{L' \xrightarrow{s} L}} T^nL' \ ,$$

où s parcourt les quasi-isomorphismes de $K^-F(A)$ de but L, est essentiellement constant, de valeur T^nP, où $P \longrightarrow L$ est un quasi-isomorphisme avec grP plat (2.1.3). En d'autres termes (I 1.4.4), le foncteur T^n admet un dérivé gauche

$$LT^n : D^-F(A) \longrightarrow D^-F(A) \quad .$$

On définit de manière analogue :

(4.2.6) $$LT^n : D^-G(A) \longrightarrow D^-G(A) \quad .$$

Tenant compte de (I 4.2.3.3), on déduit de (4.2.3) des isomorphismes fonctoriels canoniques de $D^-(A)$:

(4.2.7) $$\bigoplus_{\substack{n_1+\ldots+n_p = n \\ n_1 i_1+\ldots+n_r i_r = p}} LT^{n_1}(gr^{i_1}L) \overset{L}{\otimes} \ldots \overset{L}{\otimes} LT^{n_r}(gr^{i_r}L) \xrightarrow{\sim} gr^p LT^n(L) \quad ,$$

pour $L \in \mathrm{ob}\, D^-F(A)$. D'autre part, la structure multiplicative de $T'E$, pour $E \in \mathrm{ob}\, CF(A)$ (resp. $CG(A)$), donne, par passage aux dérivés, des homomorphismes canoniques fonctoriels de $D^-F(A)$ (resp.$D^-G(A)$) :

(4.2.8) $$LT^m L \overset{L}{\otimes} LT^n L \longrightarrow LT^{m+n} L \quad ,$$

pour $L \in \mathrm{ob}\, D^-F(A)$ (resp. $D^-G(A)$ (le produit tensoriel au premier membre étant défini comme en (2.1.8)), avec une propriété d'associativité évidente.

Proposition 4.2.9. Soient $n \in \mathbb{N}$, $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{Z}$ contenant 0, $L \in \mathrm{ob}\, D^-F(A)$. On suppose que L est d'amplitude plate (resp. parfaite) $\subset [a,b]$ (SGA 6 I 4, 5). Alors $LT^n L$ est d'amplitude plate (resp. parfaite) $\subset [na,nb]$ (3.1). Enoncé analogue pour $L \in \mathrm{ob}\, D^-G(A)$.

Preuve. Appliquer (SGA I 4.19.2), (I 4.2.2.5), et (4.2.7).

4.3. Soit $u : L \longrightarrow M$ un morphisme de A-Modules filtrés (resp. gradués). On vérifie immédiatement que les différentielles définies en (I 4.3.1.2) sur $\wedge L \otimes SM$ et $\Gamma L \otimes \wedge M$ sont compatibles aux filtrations (resp. graduations). Ainsi $Kos.(u)$ et $Kos'(u)$ (I 4.3.1.3) sont des complexes filtrés (resp. gradués). Dans le

cas filtré, (4.1.5) fournit des homomorphismes canoniques fonctoriels

(4.3.1) $\qquad Kos.(gru) \longrightarrow grKos(u)\ ,\ Kos^{\cdot}(gru) \longrightarrow grKos^{\cdot}(u)\ ,$

qui sont des isomorphismes quand grL et grM sont plats (L et M étant de filtration finie). Il en résulte en particulier que, si

$$E = (0 \longrightarrow L' \longrightarrow L \longrightarrow L'' \longrightarrow 0)$$

est une suite exacte de Modules filtrés (de filtration finie) telle que grE soit une suite exacte de Modules plats, alors les suites exactes de Koszul (I 4.3.1.7)

$$(4.3.2)_n \quad 0 \longrightarrow \wedge^n L' \longrightarrow \wedge^{n-1} L' \otimes L \longrightarrow \dots S^n L \longrightarrow S^n L'' \longrightarrow 0\ ,$$

$$(4.3.3)_n \quad 0 \longrightarrow \Gamma^n L' \longrightarrow \Gamma^n L \longrightarrow \dots \longrightarrow L \otimes \wedge^{n-1} L'' \longrightarrow \wedge^n L'' \longrightarrow 0$$

donnent des suites exactes par passage aux gradués associés. Notant que, pour $E \in$ ob $CF(A)$ (resp. $CG(A)$), la suite exacte standard

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow C(E) \longrightarrow E[1] \longrightarrow 0\ ,$$

où $C(E)$ est le cône du morphisme identique de E, est une suite de complexes filtrés (resp. gradués), on en déduit, par des raisonnements analogues à ceux de la preuve de (I 4.3.2.1), des isomorphismes fonctoriels canoniques de $D^-F(A)$ (resp. $D^-G(A)$)

$$(4.3.4) \qquad L S^n(M[1]) \xrightarrow{\sim} L \wedge {}^n M[n]\ ,$$

$$(4.3.5) \qquad L \wedge^n (M[1]) \xrightarrow{\sim} L \Gamma {}^n M\,[n]$$

pour $M \in$ ob $D^-F(A)$ (resp. $D^-G(A)$), n étant un entier ≥ 1. Ceux-ci sont, dans le cas filtré, compatibles au passage au gradué associé en un sens que le lecteur explicitera. Ils sont d'autre part compatibles aux produits (4.2.8), i.e. on a des carrés commutatifs de $D^-F(A)$ (resp. $D^-G(A)$) analogues aux carrés de (I 4.3.2.1).

4.4. Soient L, M des A-Modules. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$S^n_{diag}(L \oplus M) = S^nL \otimes S^nM \quad .$$

Alors $S_{diag}(L \oplus M) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} S^n_{diag}(L \oplus M)$ est une sous-Algèbre de $S(L \oplus M) = SL \otimes SM$. L'injection naturelle $L \otimes M \longrightarrow S_{diag}(L \oplus M)$ se prolonge canoniquement en un morphisme d'Algèbres graduées

$$\varphi^{\cdot} : S(L \otimes M) \longrightarrow S_{diag}(L \oplus M) \quad . \tag{4.4.1}$$

Concrètement, si $x_1,\ldots,x_n$ (resp. $y_1,\ldots,y_n$) sont des sections de L (resp. M), on a

$$\varphi^n((x_1 \otimes y_1)\ldots(x_n \otimes y_n)) = x_1\ldots x_n \otimes y_1\ldots y_n \quad .$$

Si maintenant L, M sont des A-Modules filtrés (resp. gradués), les flèches $\varphi^n : S^n(L \otimes M) \longrightarrow S^nL \otimes S^nM$ sont compatibles aux filtrations (resp. graduations) des deux membres. Dans le cas filtré, on a un carré commutatif

(4.4.2)
$$\begin{array}{ccc} S(grL \otimes grM) & \xrightarrow{\varphi^{\cdot}} & S_{diag}(grL \oplus grM) \\ \downarrow & & \downarrow \\ grS(L \otimes M) & \xrightarrow{gr\varphi^{\cdot}} & grS_{diag}(L \oplus M) \end{array}$$

où les flèches verticales sont les flèches canoniques définies par (2.1.2.1) et (4.1.5). Dans le cas gradué, on a un carré commutatif

(4.4.3)
$$\begin{array}{ccc} \bigotimes_{i,j} S(k^iL \otimes k^jM) & \xrightarrow{\sim} & S(L \otimes M) \\ \downarrow {\scriptstyle \bigotimes_{i,j}\varphi^{\cdot}} & & \downarrow {\scriptstyle \varphi^{\cdot}} \\ \bigotimes_{i,j} S_{diag}(k^iL \oplus k^jM) & \longrightarrow & S_{diag}(L \oplus M) \end{array} \quad ,$$

où la flèche horizontale supérieure est l'isomorphisme canonique et la flèche horizontale inférieure le produit des injections canoniques

$S_{diag}(k^iL \oplus k^jM) \longrightarrow S_{diag}(L \oplus M)$ (la vérification est immédiate).

Par passage aux dérivés (i.e. en remplaçant les arguments par des résolutions filtrées (resp. graduées) plates), on déduit de (4.4.1), pour $n \in \mathbb{N}$, une flèche canonique fonctorielle de $D^-F(A)$ (resp. $D^-G(A)$)

$$\varphi^n : LS^n(L \overset{L}{\otimes} M) \longrightarrow LS^nL \overset{L}{\otimes} LS^nM \quad , \tag{4.4.4}$$

pour L, $M \in \mathrm{ob}\, D^-F(A)$ (resp. $D^-G(A)$). Dans le cas filtré, le carré (4.4.2) fournit un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} LS(grL \overset{L}{\otimes} grM) & \xrightarrow{\varphi^\cdot} & LS_{diag}(grL \oplus grM) \\ \downarrow & & \downarrow \\ grLS(L \overset{L}{\otimes} M) & \xrightarrow{gr\varphi^\cdot} & grLS_{diag}(L \oplus M) \end{array} \quad , \tag{4.4.5}$$

où les flèches verticales sont définies par (2.1.9.1) et (4.2.7) (pour X, Y, $Z \in \mathrm{ob}\, D^-F(A)$ (resp. $D^-G(A)$), on pose

$$LS(X) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} LS^n(X) \quad , \quad LS_{diag}(Y \oplus Z) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} LS^nY \overset{L}{\otimes} LS^nZ \quad ,$$

qu'on munit de la filtration (resp. graduation) somme). Dans le cas gradué, le carré (4.4.3) fournit un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \overset{L}{\underset{i,j}{\otimes}}\, LS(k^iL \overset{L}{\otimes} k^jM) & \xrightarrow{\sim} & LS(L \overset{L}{\otimes} M) \\ \downarrow \overset{L}{\underset{i,j}{\otimes}} \varphi^\cdot & & \downarrow \varphi^\cdot \quad (1) \\ \overset{L}{\underset{i,j}{\otimes}}\, LS_{diag}(k^iL \oplus k^jM) & \longrightarrow & LS_{diag}(L \oplus M) \end{array} \quad . \tag{4.4.6}$$

4.5. Soient L, M des A-Modules. Posons

$$\wedge S^n(L,M) = \wedge^nL \otimes S^nM \quad .$$

Alors $\wedge S(L,M) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \wedge S^n(L,M)$ est une sous-Algèbre de $\wedge L \otimes SM$.

(1) Les produits tensoriels à gauche sont pris dans le même ordre en haut et en bas.

L'injection canonique $L \otimes M \longrightarrow \wedge S(L,M)$ se prolonge en un homomorphisme d'Algèbres graduées

$$\psi^{\cdot} : \wedge(L \otimes M) \longrightarrow \wedge S(L,M) \quad . \tag{4.5.1}$$

Si $x_1,\dots,x_n$ (resp. $y_1,\dots,y_n$) sont des sections de L (resp. M), on a

$$\psi^n((x_1 \otimes y_1)\dots(x_n \otimes y_n)) = x_1\dots x_n \otimes y_1\dots y_n \quad .$$

Si L, M sont des A-Modules filtrés (resp. gradués), les flèches ψ^{ll} sont compatibles aux filtrations (resp. graduations) des deux membres, et l'on a des carrés commutatifs analogues à (4.4.2) et (4.4.3). Par dérivation, on déduit de (4.5.1) des flèches canoniques fonctorielles de $D^-F(A)$ (resp. $D^-G(A)$)

$$\psi^n : L\wedge^n(L \overset{L}{\otimes} M) \longrightarrow L\wedge^n L \overset{L}{\otimes} LS^n M \quad , \tag{4.5.2}$$

donnant lieu à des carrés commutatifs analogues à (4.4.5) et (4.4.6).

Soit M un A-Module filtré, de filtration finie, tel que grM soit plat, et soit

$$E = (0 \longrightarrow L' \longrightarrow L \longrightarrow L'' \longrightarrow 0)$$

une suite exacte de A-Modules filtrés, de filtrations finies, telle que grE soit une suite exacte de A-Modules plats. Alors $E \otimes M$ est une suite exacte de A-Modules filtrés telle que $gr(E \otimes M)$ soit une suite exacte de A-Modules plats, et l'on a la suite exacte de Koszul $(4.3.2)_n$:

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow \wedge^n(L'\otimes M) \longrightarrow \wedge^{n-1}(L'\otimes M)\otimes L\otimes M \longrightarrow \dots\ L'\otimes M\otimes S^{n-1}(L\otimes M) \longrightarrow S^n(L\otimes M)$$

$$\longrightarrow S^n(L''\otimes M) \longrightarrow 0 \quad .$$

D'autre part, tensorisant par S^nM la suite exacte de Koszul relative à E, on a une suite exacte :

$$(**) \qquad 0 \longrightarrow \wedge^n L' \otimes S^n M \longrightarrow \wedge^{n-1}L' \otimes L \otimes S^n M \longrightarrow \dots \longrightarrow L' \otimes S^{n-1}L \otimes S^n M$$

$$\longrightarrow S^n L \otimes S^n M \longrightarrow S^n L'' \otimes S^n M \longrightarrow 0 \ .$$

On vérifie facilement qu'on définit un morphisme de (*) dans (**) en envoyant $S^n(L'' \otimes M)$ dans $S^n L'' \otimes S^n M$ par φ^n (4.4.1) et, pour $p+q = n$, $\Lambda^p(L' \otimes M) \otimes S^q(L \otimes M)$ dans $\Lambda^p L' \otimes S^q L \otimes S^n M$ par la flèche composée de $\psi^p \otimes \varphi^q$ et de la flèche donnée par le produit $S^p M \otimes S^q M \longrightarrow S^n M$. Appliquant cette remarque à "la suite exacte du cône",on obtient, par des raisonnements familiers, pour L, $M \in \mathrm{ob}\, D^-F(A)$ (resp. $D^-G(A)$), des carrés commutatifs de $D^-F(A)$ (resp. $D^-G(A)$) :

$$(4.5.3) \qquad \begin{array}{ccc} LS^n(L[1] \overset{L}{\otimes} M) & \xrightarrow{\sim} & L\Lambda^n(L \overset{L}{\otimes} M)[n] \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi^n} & & \downarrow{\scriptstyle \psi^n[n]} \\ LS^n(L[1] \overset{L}{\otimes} LS^n M) & \xrightarrow{\sim} & L\Lambda^n L[n] \overset{L}{\otimes} LS^n M \end{array} ,$$

où les flèches horizontales sont les isomorphismes définis par (4.3.4).

5. Construction de classes de Chern.

5.1. On conserve les notations et conventions du n° 4. En particulier, $T^\cdot$ désigne l'un des foncteurs S, Λ, Γ. Pour $M \in \mathrm{ob}\, D^-(A)$ (resp. $D^-F(A)$, resp. $D^-G(A)$), on note $\mathrm{Hom}(-,LT\hat{}(M))$ le foncteur contravariant sur $D^-(A)$ (resp. $D^-F(A)$, resp. $D^-G(A)$) défini par

$$(5.1.1) \qquad \mathrm{Hom}(-,LT\hat{}(M)) = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Hom}(-,LT^n(M)) .$$

On note d'autre part $\mathrm{Hom}(-,LT\hat{}(M)[1])$ le foncteur :

$$(5.1.2) \qquad \mathrm{Hom}(-,LT\hat{}(M)[1]) = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Hom}(-,LT^n(M)[n]) .$$

Les foncteurs (5.1.1) et (5.1.2) sont à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens ; pour $L \in \mathrm{ob}\, D^-(A)$ (resp...), un élément $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathrm{Hom}(L,LT\hat{}(M))$ (ou $\mathrm{Hom}(L,LT\hat{}(M))$ sera écrit de préférence sous forme de série formelle $\Sigma\, a_n t^n$. Les flèches canoniques $LT^p(M) \overset{L}{\otimes} LT^q(M) \longrightarrow LT^{p+q}(M)$ (resp. $LT^p(M)[p] \overset{L}{\otimes} LT^q(M)[q] \longrightarrow LT^{p+q}(M)[p+q]$) permettent de munir $\mathrm{Hom}(A,LT\hat{}(M))$ (resp. $\mathrm{Hom}(A,LT\hat{}(M)[1])$) d'une structure d'anneau. Si $M \in \mathrm{ob}\, D^{\mathrm{o}]}(A)$ (resp. $D^{\mathrm{o}]}F(A)$, resp. $D^{\mathrm{o}]}G(A)$), $\mathrm{Hom}(A,LS\hat{}(M))$ et $\mathrm{Hom}(A,L\Gamma\hat{}(M))$ sont commutatifs,

tandis que $\mathrm{Hom}(A, L\Lambda\hat{}(M))$ est anti-commutatif : cela résulte immédiatement de la définition du produit ((I 4.2.3.1), (4.2.8)) et de (I 3.1.3)(l'hypothèse faite sur M permet en effet de se débarrasser de la flèche d'Alexander-Whitney dans la définition du produit). De (4.3.4) et (4.3.5) on déduit des isomorphismes fonctoriels

$$\mathrm{Hom}(L, LS\hat{}(M[1])) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(L, L\Lambda\hat{}(M)[1]) \quad , \tag{5.1.3}$$

$$\mathrm{Hom}(L, L\Lambda\hat{}(M[1])) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(L, L\Gamma\hat{}(M)[1]) \quad , \tag{5.1.4}$$

"compatibles" (en un sens que le lecteur précisera) avec les structures d'anneaux pour $L = A$.

5.2. Soit

$$f : E \longrightarrow E \overset{L}{\otimes} M$$

une flèche de $D(A)$, où M (resp. E) est d'amplitude plate(resp. parfaite) finie (SGA 6 4, 5). Pour $n \in \mathbb{N}$, $LS^n M$ (resp. $LS^n E$) est, d'après (4.2.9) (ou (I 4.2.2.5)) d'amplitude plate (resp. parfaite) finie, donc on peut définir (3.7.4)

$$\mathrm{Tr}(\varphi^n LS^n f) \in \mathrm{Hom}(A, LS^n M) \quad .$$

On pose

$$L_t(f) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Tr}(\varphi^n LS^n f) t^n \in \mathrm{Hom}(A, LS\hat{}(M)) \quad . \tag{5.2.1}$$

On a donc

$$L_t(f) = 1 + \mathrm{Tr}(f)t + \mathrm{Tr}(\varphi^2 LS^2 f)t^2 + \ldots \quad .$$

On pose d'autre part :

$$c_t(f) = L_t(f)^{-1} \in \mathrm{Hom}(A, LS\hat{}(M)) \quad . \tag{5.2.2}$$

La série $L_t(f)$ (resp. $c_t(f)$) s'appelle <u>série</u> L (resp. <u>série caractéristique</u>) de f . Pour $M = A$ et E un A-Module localement facteur direct d'un Module libre de type fini, on retrouve la série L (resp. caractéristique) habituelle,

qui est une série (resp. un polynôme) à coefficients dans $H^0(T,A)$.

Remarque 5.2.3. L'hypothèse que M est d'amplitude plate finie est surtout destinée à simplifier l'exposition. On pourrait s'en débarrasser en remplaçant, dans les définitions (5.1.1) et (5.1.2), $LT^n(M)$ par le pro-objet des tronqués "$\varprojlim_i$" $t_{\leq i}\, LT^nM$ (1.1.2). Nous laissons au lecteur le soin de récrire le présent numéro dans ce cadre plus général.

Le caractère fonctoriel de la trace (3.7.4.1) implique que, si $m : M \to M'$ est une flèche de $D(A)$ avec M' d'amplitude plate finie, on a :

$$L_t((Id_E \overset{L}{\otimes} m)f) = mL_t(f) \quad , \tag{5.2.4}$$

où le second membre désigne l'image de $L_t(t)$ par l'homomorphisme $\mathrm{Hom}(A,LS\hat{}(M)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,LS\hat{}(M'))$ défini par m. En particulier, si l'on a $M \xrightarrow{\sim} L[1]$, où L est d'amplitude plate finie, on peut regarder $L_t(f)$ et $c_t(f)$ comme des éléments de $\mathrm{Hom}(A,L\,\Lambda\hat{}(L)[1])$ via (5.2.4) et l'isomorphisme (5.1.3). Par ailleurs, de l'invariance de la trace par isomorphisme (3.8.11), on déduit que, si $a : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme, on a :

$$L_t((a \overset{L}{\otimes} Id_M)fa^{-1}) = L_t(f) \quad . \tag{5.2.5}$$

5.3. Soit

$$f : E \longrightarrow E \overset{L}{\otimes} M$$

une flèche de $DF(A)$ (resp. $DG(A)$), où E est d'amplitude parfaite finie (3.1) et M d'amplitude plate finie (3.1) et de filtration (resp. graduation) concentrée en degré zéro. On note encore $L_t(f) \in \mathrm{Hom}(A,LS\hat{}(M))$ la série L de la flèche de $D(A)$ déduite de f par oubli de la filtration (resp. graduation).

Théorème 5.3.1. (i) Dans le cas filtré, on a

$$L_t(f) = L_t(gr(f)) \quad .$$

(ii) Dans le cas gradué, on a

$$L_t(f) = \prod_i L_t(k^i f) \quad ,$$

le produit au second membre étant pris dans un ordre arbitraire.

Preuve. (i) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la formule d'additivité des traces (3.7.7), on a :

$$Tr(\varphi^n LS^n f) = \sum_i Tr(gr^i(\varphi^n LSf)) = Tr(gr(\varphi^n LS^n f)) \quad .$$

D'autre part, si l'on identifie $grLS(E)$ (resp. $grLS_{diag}(E \oplus M)$) à $LS(grE)$ (resp. $LS_{diag}(grE \oplus grM)$) par l'isomorphisme canonique, le carré (4.4.5) fournit la relation

$$gr(\varphi \cdot LS(f)) = \varphi \cdot LS(grf) \quad ,$$

d'où l'on tire

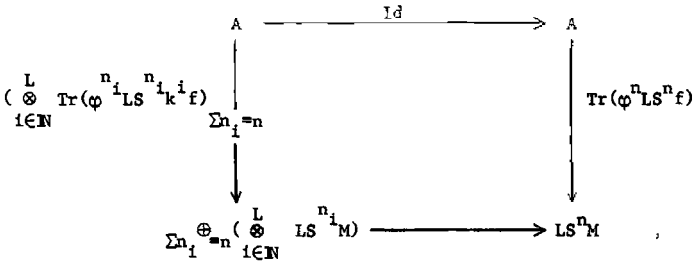
$$Tr(\varphi^n LS^n f) = Tr(\varphi^n LS^n grf) \quad ,$$

ce qui prouve (i).

(ii) Soit $n \in \mathbb{N}$. Choisissant un ordre total sur $\mathbb{N}$, on a, d'après (4.2.7) et (4.4.6), un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\bigoplus_{\sum n_i = n} \left(\overset{L}{\otimes}_{i \in \mathbb{N}} LS^{n_i} k^i E \right) & \xrightarrow{\simeq} & LS^n E \\
\downarrow{\scriptstyle \bigoplus \left(\overset{L}{\otimes} LS^{n_i} k^i f \right)} & & \downarrow{\scriptstyle LS^n f} \\
\bigoplus_{\sum n_i = n} \left(\overset{L}{\otimes}_{i \in \mathbb{N}} LS^{n_i} (k^i E \overset{L}{\otimes} M) \right) & \xrightarrow{\simeq} & LS^n (E \overset{L}{\otimes} M) \\
\downarrow{\scriptstyle \bigoplus \left(\overset{L}{\otimes} \varphi^{n_i} \right)} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi^n} \\
\bigoplus_{\sum n_i = n} \left(\overset{L}{\otimes}_{i \in \mathbb{N}} LS^{n_i} (k^i E) \overset{L}{\otimes} LS^{n_i} M \right) & \longrightarrow & LS^n E \overset{L}{\otimes} LS^n M
\end{array} \quad .$$

Utilisant la multiplicativité de la trace (3.7.8.5), sa fonctorialité (3.7.4.1) et son invariance par isomorphisme (3.8.11.2), on déduit du diagramme précédent un carré commutatif



où la flèche horizontale inférieure est donnée par le produit. En d'autres termes, on a

$$\mathrm{Tr}(\varphi^n LS^n f) = \sum_{\Sigma n_i = n} \left(\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Tr}(\varphi^{n_i} LS^{n_i} k^i f) \right) ,$$

ce qui prouve (ii).

Remarque 5.3.1.1. Le fait que le produit $\prod_i L_t(k^i f)$ soit indépendant de l'ordre des facteurs n'était pas évident a priori (en l'absence d'hypothèse de degré supplémentaire sur M, cf. (5.1)).

Corollaire 5.3.2. Soit, comme en (5.2), $f : E \longrightarrow E \overset{L}{\otimes} M$ une flèche de $D(A)$, où M (resp. E) est d'amplitude plate (resp. parfaite) finie. On a :

$$L_t(f[1]) = c_t(f) ,$$

(d'où $L_t(f[2n]) = L_t(f)$, $c_t(f[2n]) = c_t(f)$ pour $n \in \mathbb{Z}$).

Preuve. D'après (5.2.5), on peut supposer que E est un complexe, borné supérieurement, de Modules plats. Il existe un quasi-isomorphisme $s : E' \longrightarrow E$ et un morphisme $f' : E' \longrightarrow E \otimes M$ tels que $f = f's^{-1}$. Par fonctorialité de la construction du cône, f' et s définissent des morphismes de suites exactes de

complexes

$$(*)\qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & C(E) & \longrightarrow & E[1] & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & C(E') & \longrightarrow & E'[1] & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & E \otimes M & \longrightarrow & C(E) \otimes M & \longrightarrow & E[1] \otimes M & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad ,$$

où $C(X)$ désigne le cône du morphisme identique de X. En d'autres termes, si l'on regarde $C(E)$ (resp. $C(E) \otimes M$) comme objet de $D^{-}F(A)$ via la filtration (concentrée dans $[0,1]$) définie par E (resp. $E \otimes M$), (*) définit une flèche $\underline{f} : C(E) \longrightarrow C(E) \overset{L}{\otimes} M$ de $DF(A)$ telle que $gr(\underline{f}) = f \oplus f[1]$. D'après (5.3) on a :

$$L_t(\underline{f}) = L_t(gr\underline{f}) = L_t(f)L_t(f[1]) \quad .$$

Mais $C(E) = 0$ dans $D(A)$, donc (5.2.5) $L_t(\underline{f}) = 1$, d'où le corollaire.

Corollaire 5.3.3. Sous les hypothèses de (5.3.2), on a :

$$c_t(f) = \Sigma\, (-1)^n Tr(\psi^n L \wedge^n f) t^n \quad ,$$

où $\psi' : L \wedge (E \overset{L}{\otimes} M) \longrightarrow L \wedge S(E,M)$ est la flèche canonique (4.5.2).

Preuve. Posons $c_t(f) = \Sigma\, c^n(f) t^n$. D'après (5.3.2), on a :

$$c^n(f) = Tr(\varphi^n L S^n(f[1])) \quad .$$

Or d'après (4.5.3), on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} LS^n(E)[1]) & \xrightarrow{LS^n(f[1])} & LS^n(E[1] \overset{L}{\otimes} M) & \xrightarrow{\varphi^n} & LS^n(E[1]) \overset{L}{\otimes} LS^n M \\ \downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\ L\Lambda^n E[n] & \xrightarrow{(L\Lambda^n f)[n]} & L\Lambda^n(E \overset{L}{\otimes} M)[n] & \xrightarrow{\psi^n[n]} & L\Lambda^n E \overset{L}{\otimes} LS^n M[n], \end{array}$$

où les flèches verticales sont les isomorphismes canoniques. Vu l'invariance de la trace par isomorphisme (3.8.11.2), on a donc :

$$c^n(f) = \mathrm{Tr}((\psi^n L \wedge^n f)[n]) \quad ,$$

d'où (par additivité des traces) :

$$c^n(f) = (-1)^n \mathrm{Tr}(\psi^n L \wedge {}^n f) \quad ,$$

cqfd.

Remarque 5.3.3. Soit $f : E \longrightarrow E$ une flèche de $D(A)$, où E est parfait. Si l'on disposait de la théorie du déterminant pour les complexes parfaits ([1]), on pourrait démontrer que l'on a

$$(*) \qquad c_t(f) = \det(1-tf) \quad (\in A[[t]]) \quad ,$$

où $c_t(f)$ est défini par la condition de coïncider avec $c_t(f|U)$ sur tout objet U du topos tel que $E|U$ soit d'amplitude parfaite finie. En effet, (*) serait une simple conséquence du caractère local des deux membres et de leur "multiplicativité par rapport aux suites exactes courtes" (compte tenu du fait que l'assertion est triviale dans le cas où E est concentré en degré zéro et facteur direct d'un Module libre de type fini).

5.4. Soit $A \longrightarrow B$ un morphisme d'Anneaux de T, et soit $E \in \mathrm{ob}\, D^-(B)$. Pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand, on a $E[2n] \in \mathrm{ob}\, D^{\circ]}(B)$ ($\overset{\approx}{\longrightarrow} D.(B)$) et la classe d'Atiyah (IV 2.3.6.2)

([1]) Cette théorie est essentiellement bien connue ; elle devait faire l'objet d'un exposé de D. Ferrand dans (SGA 6), mais cet exposé n'a malheureusement pu être rédigé.

$$at_{B/A}(E[2n])\ :\ E[2n] \longrightarrow E[2n] \overset{L}{\otimes} L_{B/A}[1]$$

est définie. Il résulte aussitôt de (IV 2.3.7.3) que la flèche de $D(B)$

$$at_{B/A}(E[2n])\ [-2n]\ :\ E \longrightarrow E \overset{L}{\otimes} L_{B/A}[1]$$

est indépendante de n. On la note $at_{B/A}(E)$; on dit que c'est la classe d'Atiyah de E relative à B/A. Supposant E d'amplitude parfaite finie, et $L_{B/A}$ d'amplitude plate finie (hypothèse en réalité inessentielle, cf. (5.2.3)), on peut poser :

$$L_t(E,B/A) = L_t(at_{B/A}(E)) \in \mathrm{Hom}(B, L\wedge\hat{}(L_{B/A})\ [1]) \tag{5.4.1}$$

$$c_t(E,B/A) = c_t(at_{B/A}(E)) \in \mathrm{Hom}(B, L\wedge\hat{}(L_{B/A})\ [1])\quad ,$$

définition qui est licite d'après (5.1.3) et (5.3.1). On écrira parfois $L_t(E)$, $c_t(E)$ au lieu de $L_t(E,B/A)$, $c_t(E,B/A)$ quand cela ne pourra prêter à confusion. On dit que $L_t(E)$ (resp. $c_t(E)$) est la série L (resp. la classe totale de Chern) de E relative à B/A et à valeurs dans la cohomologie "cotangente" $\mathrm{Hom}(B, L\wedge\hat{}(L_{B/A})[1])$. Le coefficient de t^n dans $c_t(E)$ est noté

$$c^n(E,B/A)\quad (\text{ou } c^n(E)) \in H^n(T, L\wedge^n(L_{B/A}))\quad ,$$

et appelé n-ième classe de Chern.

Théorème 5.5. Soit $E \in \mathrm{ob}\ DF(B)_{parf}$ (resp. $DG(B)_{parf}$) (3.1). On a :

$$L_t(E) = L_t(grE)$$

(resp. $L_t(E) = \prod_i L_t(k^iE)$),

et une formule analogue avec L_t remplacé par c_t.

Preuve. Compte tenu de (5.3), cela va résulter du lemme suivant :

Lemme 5.5.1. Soit $E \in \text{ob } D^-F(B)$ (resp. $D^-G(B)$). Il existe une flèche canonique fonctorielle de $D^-F(B)$ (resp. $D^-G(B)$) :

$$at_{B/A}(E) : E \longrightarrow E \overset{L}{\otimes} L_{B/A}[1] \quad ,$$

telle que $gr(at_{B/A}(E)) = at_{B/A}(grE)$ (resp. $at_{B/A}(E) = \oplus\, at_{B/A}(k^iE)$) .

Preuve. Supposons d'abord $E \in \text{ob } D^{\circ]}F(B)$ (resp. $D^{\circ]}G(B)$). Alors, d'après (1.2.5.5), E correspond par Dold-Puppe à un B-Module simplicial filtré (resp. gradué) M . Soit $P = P_A(B) \longrightarrow B$ la résolution libre standard de B sur A . Regardant M comme un P-Module filtré (resp. gradué) par restriction des scalaires, on a la suite exacte des parties principales :

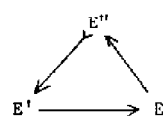
$$(*) \qquad 0 \longrightarrow M \otimes \Omega^1_{P/A} \longrightarrow P^1_{P/A}(M) \longrightarrow M \longrightarrow 0 \quad ,$$

qui est de façon naturelle une suite exacte de P-Modules filtrés (resp. gradués). Dans le cas filtré, gr(*) s'identifie à la suite exacte des parties principales relative à grM , tandis que dans le cas gradué $k^i(*)$ s'identifie à la suite exacte des parties principales relative à k^iM. Utilisant une variante filtrée (resp. graduée) de l'extension des scalaires (I 3.3.4.2) ([1]), on déduit de (*) une flèche de DF(B) (resp. DG(B))

$$at_{B/A}(E) \ : \ E \longrightarrow E \overset{L}{\otimes} L_{B/A}[1]$$

qui a les propriétés énoncées dans le lemme. On vérifie trivialement qu'on a $at_{B/A}(E[n])\,[-n] = at_{B/A}(E)$, ce qui permet de prolonger la définition à $E \in \text{ob } DF(B)$ (resp. DG(B)).

Corollaire 5.5.2. Soit



([1]) Les détails de la construction sont laissés au lecteur.

un triangle distingué de $D(B)$ dont les sommets sont d'amplitude parfaite finie. Alors on a

$$L_t(E) = L_t(E')L_t(E'') \quad .$$

Preuve. On sait que tout triangle distingué de $D(B)$ est isomorphe au triangle défini par une suite exacte courte de $C(B)$. Il existe donc un objet L de $DF^{[0,1]}(B)_{\underline{parf}}$ tel que $F^0L \simeq E$, $F^1L = gr^1L \simeq E'$, $gr^0L \simeq E''$. Vu l'invariance de la série L par isomorphisme, la formule à démontrer résulte donc de (5.5).

Remarque 5.5.3. Supposons l'Anneau B local. Soit $K'(B)$ le groupe de Grothendieck construit sur $D(B)_{\underline{parf}}$ (SGA 6 IV), et notons $\mathrm{Hom}(B, L\,\Lambda^{\wedge}(L_{B/A})[1])^+$ le groupe des séries formelles de $\mathrm{Hom}(B, L\,\Lambda^{\wedge}(L_{B/A})[1])$ de terme constant 1 . Notons d'autre part $rg : K'(B) \longrightarrow H^0(T,\mathbb{Z})$ l'homomorphisme rang (SGA 6 I 6.11). D'après (5.5.2), on a un homomorphisme de groupes abéliens

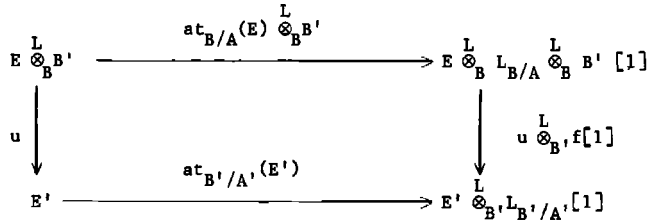
$$(rg, c_t) : K'(B) \longrightarrow H^0(T,\mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}(B, L\,\Lambda^{\wedge}(L_{B/A})[1])^+ .$$

J'ignore malheureusement si c'est un homomorphisme de pré-λ-anneaux (cf. (SGA 6 V)).

Lemme 5.6. Soient

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & B' \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \longrightarrow & A' \end{array}$$

un carré commutatif d'Anneaux de T, $E \in \mathrm{ob}\, D^-(B)$, $E' \in \mathrm{ob}\, D^-(B')$, $u : E \overset{L}{\otimes}_B B' \longrightarrow E'$ une flèche de $D(B')$. On a alors un carré commutatif de $D(B')$:



où $f : B' \overset{L}{\otimes}_B L_{B/A} \longrightarrow L_{B'/A'}$ est la flèche canonique (II 1.2.3.2').

Preuve. C'est une conséquence immédiate de la fonctorialité de l'extension des parties principales. Les détails sont laissés au lecteur.

Corollaire 5.6.1. Dans la situation de (5.6), on suppose que E est d'amplitude parfaite finie, que $L_{B/A}$ et $L_{B'/A'}$ sont d'amplitude plate finie ([1]), et qu'enfin u est un isomorphisme. Alors on a

$$L_t(E',B'/A') = fL_t(E,B/A) \quad ,$$

où $f : \mathrm{Hom}(B, L\wedge\hat{}(L_{B/A})[1]) \longrightarrow \mathrm{Hom}(B', L\wedge\hat{}(L_{B'/A'})[1])$ désigne l'homomorphisme d'anneaux défini par extension des scalaires et composition avec les flèches déduites de la flèche canonique $L_{B/A} \overset{L}{\otimes}_B B' \longrightarrow L_{B'/A'}$.

Preuve. Compte tenu de (5.6), c'est une conséquence de (3.9.3), de la fonctorialité des séries L , et de leur invariance par isomorphisme (5.2.5).

Remarque 5.7. Les hypothèses étant celles de la définition (5.4.1), supposons B local et E concentré en degré 0 et localement libre de rang n . Alors on a :

$$c^i(E,B/A) = 0 \qquad \text{pour} \quad i > n \ .$$

Cela résulte en effet de (5.3.3), puisque $L\wedge^i E = \wedge^i E$, et $\wedge^i E = 0$ pour $i > n$.

([1]) pour simplifier, cf. (5.4), (5.2.3).

5.8. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de topos annelés tel que $L_{X/Y}$ soit d'amplitude plate finie (pour simplifier ...). Pour $E \in \mathrm{ob}\, D(X)_{\underline{parf}}$ on définit

$$L_t(E,X/Y) \quad (\text{resp. } c_t(E,X/Y)) \in \mathrm{Hom}(\underline{O}_X, L\Lambda\hat{}(L_{X/Y})[1])$$

comme la série L (resp. la classe totale de Chern) de E relative à $\underline{O}_X/f^{-1}(\underline{O}_Y)$. L'énoncé de fonctorialité (5.6.1) se traduit "géométriquement" ainsi : soit

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

un carré "commutatif" de topos annelés, avec $L_{X/Y}$ et $L_{X'/Y'}$ d'amplitude plate finie, alors on a

$$g^*L_t(E,X/Y) = L_t(Lg^*E,X'/Y') \quad . \tag{5.8.1}$$

5.9. Les homomorphismes d'augmentation sur H^0 :

$$L\Lambda^n(L_{X/Y}) \longrightarrow \Omega^n_{X/Y} \quad ,$$

étant compatibles aux produits, définissent un homomorphisme d'anneaux :

$$\mathrm{Hom}(\underline{O}_X, L\Lambda\hat{}(L_{X/Y})[1]) \longrightarrow H^*(X,\Omega^\cdot_{X/Y})\hat{} \overset{\mathrm{dfn}}{=} \prod_{n \in \mathbb{N}} H^n(X,\Omega^n_{X/Y}) \quad , \tag{5.9.1}$$

où le second membre est la "cohomologie de Hodge" ordinaire. Pour $E \in \mathrm{ob}\, D(X)_{\underline{parf}}$, notons $c'_t(E,X/Y)$ (ou $c'_t(E)$) l'image de $c_t(E)$ par (5.9.1). Il découle de (5.5.2) que l'on a

$$c'_t(E) = c'_t(E')\, c'_t(E'') \tag{5.9.2}$$

si

$$\begin{array}{ccc} & E'' & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ E' & \longrightarrow & E \end{array}$$

est un triangle distingué dont les sommets sont d'amplitude parfaite finie. D'autre part, (5.8.1) fournit la formule de fonctorialité

$$g^*c'_t(E,X/Y) = c'_t(Lg^*E,X'/Y') \quad . \tag{5.9.3}$$

Enfin, si E est concentré en degré 0 et inversible, on a, d'après (5.7),

$$c'_t(E,X/Y) = 1 + c'^1(E)t \quad , \tag{5.9.4}$$

et, d'après (IV 2.3.7.5), $c'^1(E)$ est l'image de la classe de E dans $\mathrm{Pic}(X) = H^1(X,\mathcal{O}_X^*)$ par l'homomorphisme dérivée logarithmique $f \longmapsto df/f$.

Par spécialisation au cas des schémas, les $c'^n(E)$ fournissent donc une théorie de classes de Chern qui remplit le programme exposé dans l'introduction. On obtiendrait, mutatis mutandis, une théorie analogue en Géométrie Analytique, en partant de l'extension des parties principales "analytique"

$$0 \longrightarrow E \otimes \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow P^1_{X/Y}(E) \longrightarrow E \longrightarrow 0 \quad ,$$

pour $X \longrightarrow Y$ un morphisme d'espaces analytiques, E un complexe de $\underline{\mathcal{O}}_X$-Modules, les parties principales étant prises au sens de [16].

6. Construction de classes de cohomologie locale.

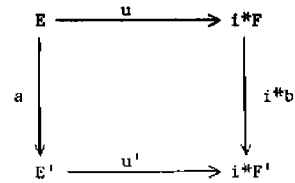
Le formalisme des classes de Chern pour les complexes parfaits développé au n° précédent fournit, comme l'a remarqué Grothendieck, un outil remarquable dans la théorie de Baum-Bott [29]. C'est ce que nous allons expliquer rapidement.

6.1. Soit X un espace topologique, et soit $i : U \longrightarrow X$ l'inclusion d'un ouvert. Notons Y le fermé complémentaire de U . Nous désignerons par

$$\mathrm{Top}^0(i) \tag{6.1.1}$$

la catégorie suivante (comparer (III 4.1.1)) : les objets de $\mathrm{Top}^0(i)$ sont les triplets (E,F,u), où E (resp. F) est un faisceau sur U (resp. X), et $u : E \longrightarrow i^*F$ un morphisme ; une flèche $(E,F,u) \longrightarrow (E',F',u')$ est un couple

de flèches $a : E \longrightarrow E'$, $b : F \longrightarrow F'$ tel que le carré



soit commutatif. On notera souvent $(E \xrightarrow{u} F)$ (ou simplement $(E \longrightarrow F)$) un triplet (E,F,u). Il est immédiat que $\mathrm{Top}^{o}(i)$ est un topos. Nous allons l'utiliser pour donner de la cohomologie à support dans Y une interprétation mieux adaptée que (III4.10.1) à la situation qui nous intéresse. Observons qu'on a, pour tout faisceau F sur Y,

$$\Gamma(\mathrm{Top}^{o}(i),(i^{*}F \xrightarrow{Id} F)) = \Gamma(X,F) \quad ,$$

et, pour tout faisceau E sur U,

$$\Gamma(\mathrm{Top}^{o}(i),(E \longrightarrow e_{X})) = \Gamma(U,E) \quad ,$$

où e_X désigne l'objet final de X. D'autre part, il est immédiat que, si F (resp. E) est un faisceau abélien injectif sur X (resp. U), alors $(i^{*}F \xrightarrow{Id} F)$ (resp. $(E \longrightarrow 0)$) est injectif sur $\mathrm{Top}^{o}(i)$. Il en résulte qu'on a, pour $F \in \mathrm{ob}\, D^{+}(X,\mathbb{Z})$,

$$R\Gamma(\mathrm{Top}^{o}(i),(i^{*}F \xrightarrow{Id} F)) = R\Gamma(X,F) \quad , \tag{6.1.2}$$

et, pour $E \in \mathrm{ob}\, D^{+}(U,\mathbb{Z})$,

$$R\Gamma(\mathrm{Top}^{o}(i),(E \longrightarrow 0)) = R\Gamma(U,E) \quad . \tag{6.1.3}$$

Maintenant, pour tout complexe F de faisceaux abéliens sur Y, on a une suite exacte de complexes de faisceaux abéliens de $\mathrm{Top}^{o}(i)$:

$$0 \longrightarrow (0 \longrightarrow F) \longrightarrow (i^{*}(F) \xrightarrow{Id} F) \longrightarrow (F \longrightarrow 0) \longrightarrow 0 \quad ;$$

supposant F à cohomologie bornée inférieurement, on en déduit, par application

de $R\Gamma(Top^{o}(i),-)$, et tenant compte de (6.1.2) et (6.1.3), un triangle distingué

$$\begin{array}{ccc} & R\Gamma(U,i^*F) & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ R\Gamma(Top^{o}(i),(0 \longrightarrow F)) & \longrightarrow & R\Gamma(X,F) \end{array} ,$$

où la flèche oblique de droite est la restriction. En d'autres termes on a, par définition de $R\Gamma_Y(X,-)$ (cf. (III 4.10.3, 4.10.5)) :

$$R\Gamma_Y(X,F) \quad = \quad R\Gamma(Top^{o}(i),(0 \longrightarrow F)) \quad . \tag{6.1.4}$$

6.2. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas (resp. d'espaces analytiques), et soit $i : U \longrightarrow X$ l'inclusion d'un ouvert de Zariski (resp. d'un ouvert de l'espace topologique sous-jacent). Pour simplifier nous supposerons f lisse, bien qu'il soit sans doute facile de s'affranchir de cette hypothèse. Soit E un $\underline{O}_X$-Module d'amplitude parfaite finie. Donnons-nous sur U une suite exacte

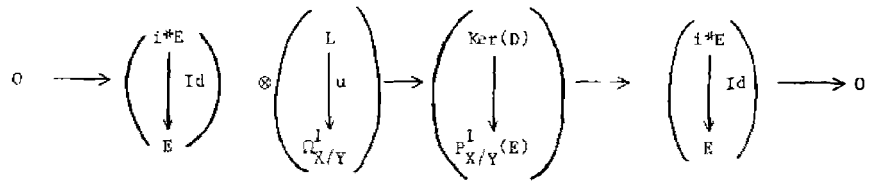
$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{u} \Omega^1_{U/Y} \xrightarrow{v} M \longrightarrow 0 \quad , \qquad (^1)$$

avec M localement libre, et une connexion partielle sur $E|U$ relativement à M au sens de ([29],3), i.e. un splittage de l'image par v de l'extension des parties principales de $E|U$. Ce splittage détermine un diagramme commutatif où les lignes et les colonnes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & (E|U) \otimes L & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(D) & \longrightarrow & E|U & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle Id \otimes u} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Id} & & \\ 0 & \longrightarrow & (E|U) \otimes \Omega^1_{U/Y} & \longrightarrow & P^1_{U/Y}(E|U) & \longrightarrow & E|U & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle Id \otimes v} & & \downarrow{\scriptstyle D} & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & (E|U) \otimes M & \xrightarrow{Id} & (E|U) \otimes M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

(1) dans le cas analytique, les différentielles sont prises au sens de [16].

On peut interpréter la partie supérieure du diagramme comme définissant une extension de Modules sur $\mathrm{Top}^{o}(i)$ annelé par $(\underline{O}_U \xrightarrow{Id} \underline{O}_X)$:



Celle-ci donne une flèche de degré 1 de $D(\mathrm{Top}^{o}(i))$:

$$\text{(6.2.1)} \qquad at(E,D) : E \longrightarrow E \otimes (L \xrightarrow{u} \Omega^1_{X/Y})[1] \quad ,$$

où l'on a écrit E au lieu de $(i^*E \xrightarrow{Id} E)$ pour abréger. Par restriction à X (i.e. image inverse par le morphisme de topos évident $X \longrightarrow \mathrm{Top}^{o}(i)$), $at(E,D)$ induit la classe d'Atiyah ordinaire $at(E) : E \longrightarrow E \otimes \Omega^1_{X/Y}[1]$. Comme $(i^*E \xrightarrow{Id} E)$ est d'amplitude parfaite finie (car image inverse de E par un morphisme de topos évident $\mathrm{Top}^{o}(i) \longrightarrow X$), on déduit de (6.2.1), par la théorie du n° 5, une classe totale de Chern :

$$\text{(6.2.2)} \qquad c_t(E,D) = \sum c^n(E,D)t^n \quad ,$$

$$c^n(E,D) \in H^n(\mathrm{Top}^{o}(i), (\wedge^n L \xrightarrow{\wedge^n u} \Omega^n_{X/Y})) \quad ,$$

induisant, par restriction à X, la classe totale de Chern "ordinaire" $c_t(E) = \sum c^n(E)t^n$, $c^n(E) \in H^n(X,\Omega^n_{X/Y})$, définie à l'aide de la classe d'Atiyah $at(E)$. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_n,\ldots]$, posons

$$\text{(6.2.3)} \qquad P(E,D) = P((c^i(E,D))) \quad .$$

Notons d'autre part $rg(L)$ le rang du $\underline{O}_U$-Module localement libre L . Pour $n > rg(L)$, on a $\wedge^n L = 0$, d'où, d'après (6.1.4),

$$H^n(\mathrm{Top}^{o}(i),(\wedge^n L \longrightarrow \Omega^n_{X/Y})) = H^n_Y(X,\Omega^n_{X/Y}) \quad .$$

Donc, si P est isobare de poids $n > rg(L)$, X_I étant de poids i , on a

$$\text{(6.2.4)} \qquad P(E,D) \in H^n_Y(X,\Omega^n_{X/Y}) \quad .$$

Bien entendu, il résulte des remarques faites plus haut que $P(E,D)$ a pour image $P(E) \overset{dfn}{=} P((c^i(E)))$ par l'homomorphisme canonique $H^n_Y(X,\Omega^n_{X/Y}) \longrightarrow H^n(X,\Omega^n_{X/Y})$.

Problème 6.2.5. Il serait intéressant d'expliciter les classes (6.2.4) en termes du comportement local de (E,D) au voisinage de Y, notamment dans la situation concrète envisagée par Baum-Bott [29], où $E = T_{X/Y}/F$, F un sous-faisceau localement libre de $T_{X/Y} = (\Omega^1_{X/Y})^\vee$, localement facteur direct et stable par crochet sur U, D étant la connexion partielle relativement à $F^\vee$ correspondante. Il y aurait lieu également de transposer les constructions précédentes en cohomologie de De Rham, mais la question paraît difficile.

BIBLIOGRAPHIE

Chapitres I à III

[1] André, M., Méthode Simpliciale en Algèbre Homologique et Algèbre Commutative, Lecture Notes in Mathematics 32, 1967.

[2] André, M., Rapport sur l'homologie des algèbres commutatives, Battelle Institute, 1970.

[3] Artin, M., Grothendieck, A. et Verdier, J.L., Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie, 1963-64, à paraître aux Lectures Notes, cité (SGA 4).

[4] Berthelot, P., Grothendieck, A. et Illusie, L., Théorie globale des intersections et théorème de Riemann-Roch, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie, 1965-66, à paraître aux Lecture Notes, cité (SGA 6).

[5] Bourbaki, N., papiers secrets sur les catégories.

[6] Cartan, H., Puissances divisées, Exp. 7 in Séminaire Cartan 1954-55, Benjamin, 1967.

[7] Cartan, H. et Eilenberg, S., Homological Algebra, Princeton (1956).

[8] Deligne, P., notes secrètes sur les résolutions standard.

[9] Demazure, M., Théorèmes de Hurewicz et Whitehead, Exp. 4 in Séminaire Cartan 1958-59, Benjamin, 1967.

[10] Dold, A. et Puppe, D., Homologie nicht-additiver Funktoren. Anwendungen, Ann. Inst. Fourier, 11 (1961), 201-312.

[11] Gabriel, P. et Zisman, M., Calculus of Fractions and Homotopy Theory, Ergebnisse der Mathematik, Bd 35, Springer-Verlag (1967).

[12] Giraud, J., Méthode de la descente, Bull. Soc. math. France, Mémoire 2, (1964).

[13] Giraud, J., Cohomologie non-abélienne, (Thèse), Springer-Verlag, à paraître.

[14] Godement, R., Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Hermann, (1958).

[15] Grothendieck, A. et Dieudonné, J., Eléments de Géométrie Algébrique, Pub. math. de l'IHES, cité EGA.

[16] Grothendieck, A., Techniques de construction en Géométrie Analytique, VII : Etude locale des morphismes, éléments de calcul infinitésimal, in Séminaire Cartan 1960-61, Benjamin, 1967.

[17] Grothendieck, A., Catégories cofibrées additives et Complexe cotangent relatif, Lecture Notes in Mathematics 79, 1968.

[18] Hakim, M., Schémas relatifs (Thèse), à paraître.

[19] Huber, P.J., Homotopy theory in general categories, Math. Ann. 144, 361-385 (1961).

[20] Kan, D.M., On c. s. s. complexes, Am. J. Math. 79, 449-476 (1957).

[21] Mac-Lane, S., Homology, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd 114, Springer-Verlag (1963).

[22] May, J.P., Simplicial objects in Algebraic Topology, Van Nostrand Mathematical Studies 11, 1967.

[23] Quillen, D.G., Homotopical Algebra, Lecture Notes in Mathematics 43, 1967.

[24] Quillen, D.G., Notes on the homology of commutative rings, Mimeographed Notes, M. I. T., 1968.

[25] Quillen, D.G., On the (co-) homology of commutative rings, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 17 (1970) 65-87.

[26] Roby, N., Lois polynômes et lois formelles en théorie des modules, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 80, 213-348, (1963).

[27] Verdier, J.L., Catégories dérivées, (Thèse), à paraître.

Chapitres IV et V

[28] Atiyah, M.F., Analytic connexions on fibre bundles, Mexico Symposium, 1958.

[29] Baum, P.F. and Bott, R., On the Zeroes of Meromorphic Vector-Fields, Essays on Topology and Related Topics, Mémoires dédiés à Georges de Rham, Springer, 1970, p. 29-47.

[30] Deligne, P., Vraies catégories triangulées, papiers secrets.

[31] Grothendieck, A., La théorie des classes de Chern, Bull. Soc. Math. de France, 86, 1958, p. 137 à 154.

[32] Hartshorne, R., Residues and duality, Lecture Notes in Mathematics, 20, (1966).

INDEX DES NOTATIONS

Ab : catégorie des groupes abéliens

A-Alg (A un Anneau d'un topos) : catégorie des A-Algèbres

A-Alg/B (B une A-Algèbre) : catégorie des A-Algèbres au-dessus de B

A-Alggr IV 1.1.2 227

A-Alggr^{+} IV 1.1.8 229

$at_{B/A}(M)$ IV 2.3.6.2, V 5.5.1 240, 334

C(A) I 1.2.1 6

$C^{o]}(A)$, $C^{[o}(A)$, C.(A), C'(A), n-C(A), $n\text{-}C^{o]}(A)$, etc. I 1.2.1 6

CF(A), CG(A) V 1.1 268

Cosimpl(C), p-Cosimpl(C) I 1.1 1

$c_t(f)$ V 5.2.2 327

$c_t(E,B/A)$, $c^n(E,B/A)$ V 5.4 333

C(u) (I 3.2.2.0) 70

D(A), D.(A), D'(A) (A une catégorie abélienne) I 1.4.5 15

D(A) (A un Anneau d'un topos) : D(A-Mod)

D(X) (X = $(X,\underline{O}_X)$ un topos annelé) : $D(\underline{O}_X)$

D.(T) (T un topos) I 2.3.5 44

D.(A) (A un Anneau simplicial) I 3.1.7 62

D(A-Alg), D(A-Alg/B) I 3.1.7 62

$D(A)_{gr}$ IV 1.2.1 230

DF(A), DG(A) V 1.2 270

DF(A), DG(A) (A un Anneau d'un topos) : DF(A-Mod), DG(A-Mod)

DF(X), DG(X) (X = $X,\underline{O}_X$ un topos annelé) : $DF(\underline{O}_X)$ $DG(\underline{O}_X)$

D*F*(A), D*G*(A) V 1.2.5, V 1.2.6, V 1.2.7, 273, 274

V 1.2.8 275, 276

$DF(A)_{\underline{parf}}$, $DG(A)_{\underline{parf}}$ V 3.1 304

d_n^i (ou d^i) I 1.1 1

$d_{B/A}$ II 1.1.2.5 115

$Der_A(B,M)$ II 1.1.1.2 114

$e(\underline{B})$ III 2.1.4 187

e(j) III 2.1.7 193

$Exal_A(B,M)$ III 1.1.5.1 155

$Exal_A(B,M)_{gr}$ IV 2.4.1 244

$\mathbb{E}xt^i_A(E,F)$ (E, F des Modules sur un Anneau simplicial A) I 3.2.1.12 67

(NB. si A est trivial, on écrit parfois $Ext^i_A(E,F)$ ou $Ext^i(E,F)$ au lieu de $\mathbb{E}xt^i_A(E,F)$)

$Ext^i(X,Y)$ (X, Y des complexes d'une catégorie abélienne A) :

$Hom_{D(A)}(X,Y[i])$

$Ext^i_A(L,M)_{gr}$ IV 1.2.1 230

$Ext^i(Y/X;M,F)$ III 4.10.1 221

Ext^i_{fil} , Ext^i_{grad} V 1.2.3 272

$F_A(M)$ I 1.5.5.2 19

gr V 1.1.1 , V 1.2.1 268, 270

Hom(-,LT^(M)) V 5.1.1 326

Hom(-, LT^(M) [1]) V 5.1.2 326

$\underline{Hom}s(X,Y)$ I 2.3.1.2, I 3.1.1 39, 56

Hot(A) (A une catégorie additive) : catégorie des complexes de A à homotopie près, notée aussi K(A)

Hot.(A) I 1.3.4, I 3.1.2 10, 57

$Hot_A(E,F)$ I 3.1.2.1 58

Hot(A-Alg), Hot(A-Alg/B) I 3.1.2 58

Hotfib(A-Alg/B) I 3.1.8 62

Hotsimpl(C), Hotcosimpl(C) I 1.1.5 4

I_n I 2.3.2 42

k^n IV 1.1.3, V 1.1.1 227, 268

KY (Y un complexe) I 1.3.1, I 1.3.5, I 4.1.2.3 8, 97

K(X,0) I 1.1.2 2

K(A) (A une catégorie additive) : voir Hot(A)

K(A) (A un Anneau d'un topos) : K(A-Mod)

$K(X/Y/Z)$	II 2.1.5.7	138
$K.(u)$, $K.(A)$	III 3.2.1.1, III 3.2.1.2	205, 206
$KF(A)$, $KG(A)$	V 1.2	271
$Kos.(u)$, $Kos'(u)$	I 4.3.1.3	108
$\varinjlim_{i\in L}$ (L un système inductif local)	I 2.2.5.2, I 4.2.1	27, 99
$L_{B/A}$	II 1.2.3.1	123
$L^{\Delta}_{B/A}$	II 1.2.5.1	126
$L_{X/Y}$	II 1.2.7.1	132
$L^{\Delta}_{C/B/A}$	II 2.1.1.4	133
$L_{C/B/A}$	II 2.1.2.1	135
$L_{X/Y/Z}$	II 2.1.5.2	137
$L^{gr}_{B/A}$	IV 2.2.1	236
$L^{\Delta gr}_{B/A}$	IV 2.2.6	238
$L^{gr}_{C/B/A}$	IV 2.3.2	238
$L^{\Delta gr}_{C/B/A}$	IV 2.3.2'	239
$L_t(f)$	V 5.2.1	327
$L_t(E,B/A)$	V 5.4.1	333
$L_t(E,X/Y)$	V 5.8	337
A-Mod (A un Anneau d'un topos) : catégorie des A-Modules		
A-Modgr	IV 1.1.2	227
$A\text{-Modgr}^+$	IV 1.1.8	229
A-Mods	I 3.3.1	82
NX (X un objet (co)simplicial)	I 1.3.1, I 1.3.5,	8, 10
	I 4.1.2.3	97
$P^n_{B/A}$	II 1.1.2.3	115
$P^n_{X/Y}$	II 1.1.4.1	119
$P_A(B)$	I 1.5.5.6	20
$P^{\Delta}_A(B)$	II 1.2.2.1	122
$P^1_{B/A}(M)$	III 1.2.6.2	171

$P_A(B)^{gr}$ IV 1.3.1 233

$P_A(B)^{gr+}$ IV 1.3.2 234

$P_A^{\Delta}(B)^{gr}$, $P_A^{\Delta}(B)^{gr+}$ IV 1.3.3 234

RHom(Y/X;M,F) III 4.10.1 221

$RHom_A(E,F)_{gr}$ IV 1.2.1 230

$S_A(M)$ I 1.5.5.3 19

s_n^i (ou s^i) I 1.1 1

Simpl(C), p-Simpl(C) I 1.1 1

$S_{diag}(L \oplus M)$ V 4.4 323

$t_{[n}$, $t_{n]}$ I 1.4.7, V 1.1.2 16, 269

Top(f) III 4.1.1 214

$u(\underline{M})$ IV 3.1 246

VT.(A) I 3.2.4 82

$\int$ I 1.2.1 6

(T,U). , (U,T)' I 1.5.2 17

[n] : ensemble des entiers 0,...,n

$X^{\sim}$ I 1.2.2 7

$A^{(X)}$ (ou A(X), A_X) I 1.5.5.1 19

A[X] I 1.5.5.4 19

$\overset{\ell}{\otimes}$ I 3.3.2.5, I 3.3.4.2, I 3.3.5.2 86, 90, 93

$B \oplus M$ (Algèbre des nombres duaux) II 1.1.1.3 114

X*u, v*X (X une extension d'Algèbres) III 1.1.3.1, 153

III 1.1.3.5 (NB. mêmes notations pour désigner 154

les images par u, v d'une extension X dans une catégorie

abélienne)

XY ($X \xrightarrow{f} Y$ un morphisme de topos annelés) : Top(f)

γ I 3.2.1.1, I 3.2.1.4 63, 64

$\Gamma_A(M)$ I 4.2.2.6 105

Δ I 1.1 1

$\overline{\Delta}$ I 1.5.1 17

ΔX I 1.1 2

$\Delta(n)$: ensemble simplicial représenté par $[n] \in \text{ob}\,\Delta$

$\wedge_A(M)$ I 4.2.2.6 105

$\wedge S(L,M)$ V 4.5 324

$\pi_o(X)$ I 1.1.4 3

$\pi_n(X,x)$ I 2.1.2 23

σ I 3.2.1.1, I 3.2.1.4 63,64

φ I 3.2.1.6 64

$\varphi^\cdot$ V 4.4.1, V 4.4.4 323, 325

$\underline{\chi}$, χ I 3.2.3.2, I 3.2.3.4 77

$\psi^\cdot$ V 4.5.1, V 4.5.2 325

ω I 3.2.1.6 64

$\omega(\underline{B},f_o,u)$, $\omega(\underline{B},f_o)$ III 2.1.2.3, III 2.1.3.1 186

$\omega(f_o,j,v)$, $\omega(f_o,j)$ III 2.1.7 192

$\omega(B,u_o)$, $\omega(B,M_o)$ IV 3.1.6 248, 249

$\Omega^1_{B/A}$ II 1.1.2.4, IV 2.1 115, 235

$\Omega^1_{X/Y}$ II 1.1.4.1 119

INDEX TERMINOLOGIQUE

Alexander-Whitney (flèche d') I 1.2.2.2 7

Algèbre extérieure (complexe de l') III 3.2.1 205

Algèbre des nombres duaux II 1.1.1.3 114

amplitude plate finie, parfaite finie (complexe filtré (resp. gradué) d') V 3.1 304

Atiyah (classe d') IV 2.3.6.2, IV 2.3.7.2, IV 2.3.7.5, V 5.4 240, 241 243, 333

augmentation d'un objet simplicial (resp. cosimplicial) I 1.1 2

bidualité (flèche de) V 3.5.3 306

calcul de fractions à droite I 1.4.2 11

à gauche I 1.4.2 12

bilatère I 1.4.2 13

caractéristique (série -) V 5.2.2 327

Cartan (isomorphisme cher à -) V 2.3.1.3, V 2.3.1.6, V 2.3.1.8 296

catégorie dérivée simpliciale I 2.3.5 44

chaînes (complexe de -) I 1.2.1, I 1.2.2 6, 7

chemins (objet des -) I 2.3.2 42

Chern (classe totale de -) V 5.4.1 333

(n-ième classe de -) V 5.4 333

cochaînes (complexe de -) I 1.2.1 6

cohomologie relative III 4.10.5 222

"commutatif" (carré - de topos annelés) II 1.1.4.2 119

complexe cotangent II 1.2.3, II 1.2.7 123, 132

complexe cotangent gradué IV 2.2 236

complexe normal (ou normalisé) I 1.3.1 8

complexe simple associé I 1.2.1 6

composition (flèche de -) V 2.3.3, V 2.3.6.5 298, 304

cône I 3.2.1.4, I 3.2.2 64, 70

contraction (flèche de -) V 2.3.2.3 297

cosimplicial, p-cosimplicial (objet -) I 1.1 1

cup-produit (homomorphisme de -) V 3.8.1, V 3.8.2, V 3.8.3 313

cylindre I 2.3.2 42

décalage (isomorphismes de -) I 4.3.2.1, V 4.3.4, 111
V 4.3.5 322

déformation plate III 2.1.3.3, III 2.1.7 187, 192

dégénéré (sous-complexe -) I 1.3.3 9

dégénérescence (flèche (ou opérateur) de -) I 1.1 1

Deligne-Lazard (théorème de -) I 4.2.1.1 99

dérivable à droite, à gauche (foncteur -) I 1.4.4 14

A-dérivation I 4.3.1.1, II 1.1.1 107, 114

A-dérivation graduée IV 2.1 235

dérivé droit, gauche (d'un foncteur) I 1.4.4 14

diagonal (sous-objet -) I 1.1 2

différentielles (Module des - d'une Algèbre) II 1.1.2.4 115

Dold-Puppe (théorème de -) I 1.3.2 9
(transformé de -) I 1.3.1 8, 10

droite (structure - sur $P^n_{B/A}$) II 1.1.2.3 115

dualité triviale (théorème de -) III 4.6 218

Eilenberg-Zilber-Cartier (théorème d') I 1.2.2 7

équivalence d'homotopie I 1.1.5 4

extension d'Algèbres, A-extension d'une A-Algèbre B par un
B-Module III 1.1.1 151

Y-extension d'un Y-topos annelé III 1.1.10 161

face (flèche (ou opérateur) de -) I 1.1 1

faiblement d'intersection complète III 3.3.4 212

faiblement régulier III 3.3.1 210

faisceaux d'homotopie (d'un faisceau simplicial pointé) I 2.1.2 23

faisceau simplicial, - pointé I 2.1.2 23

fibrant (morphisme - de faisceaux simpliciaux) I 2.3.8 48

fibration = morphisme fibrant

fibre (d'un morphisme de Modules sur un Anneau simplicial) I 3.2.2 70

gauche (structure - sur $P^n_{B/A}$) II 1.1.2.3 115

gradué(e) (faisceau - , Module - , Algèbre -) IV 1.1.1, IV 1.1.2 226

(faisceau simplicial - , Anneau simplicial -) IV 1.2.4 232

(A-extension -) IV 2.4 244

(triangle de transitivité -) IV 2.3 238

homomorphisme canonique associé III 2.1.1, III 2.1.6.3, 184, 191

IV 3.1 246

homotopes (flèches -) I 1.1.5 4

homotopie (entre morphismes d'objets simpliciaux) I 1.1.5 3

homotopie rel. à f, f-homotopie I 1.1.6 4

homotopiquement trivial (objet simplicial (resp. cosimplicial)

augmenté -) 17

homotopisme I 1.1.5 4

inductif local (système -) I 2.2.5 27

(T-système -) I 4.2.1 99

injectif (complexe filtré (resp. gradué) de type -) V 1.4.1 279

Kan (faisceau simplicial de -) I 2.3.8 48

Kodaira-Spencer (classe de -) II 2.1.5.7 138

Koszul (complexe de -) I 4.3.1.3, III 3.2.1 108, 205

(épimorphisme de -) III 3.2.2 206

(filtration de -) V 4.1.7 319

(Idéal de -) III 3.2.2 206

(morphisme de -) III 3.2.2 206

(suite exacte de -) I 4.3.1.7 110

libre (A-Module -) I 1.5.5 a) 19

(A-Algèbre -) I 1.5.5.4 19

limite inductive locale I 2.2.5.2, I 4.2.1 27, 99

localement filtrante (catégorie -) I 2.2.5 26

localisation (morphisme de -) II 2.3.2 143

localisée (d'une catégorie) I 1.4.1 11

obstruction canonique III 2.1.3.1, III 2.1.7 186, 192

IV 3.1.6, IV 3.2.14.1 249, 260

parfait (complexe filtré (resp. gradué) -) V 3.1 304

parties principales d'ordre n II 1.1.2.3 115

parties principales (Module des - d'ordre un d'un Module) III 1.2.6 171

(suite exacte des -) III 1.2.6.3 171

plat (complexe filtré (resp. gradué) -) V 2.1.3 286

presque libre (A-Algèbre -) III 1.3.1 178

produit (flèche de -) V 2.3.4.1, V 2.3.6.3 299, 303

quasi-isomorphisme I 1.4.5, I 2.2.1, 14, 25

I 2.3.13.1, I 3.1.7, 53, 62

I 3.2.4, IV 1.2.4, V 1.2 81, 232, 270

régulier (épimorphisme -) III 3.2.2 206

(Idéal -) III 3.2.2 206

(morphisme -) III 3.2.2 206

résolution libre standard I 1.5.5, I 1.5.5.6 19, 20

résolution simpliciale (resp. cosimpliciale) standard I 1.5.2 17

série L (d'un morphisme) V 5.2.1 327

(d'un complexe parfait) V 5.4.1 333

shuffle-map I 1.2.2.1 7

simplicial, p-simplicial (objet -) I 1.1 1

simplicial (Anneau -) I 3.1.1 56

(Module -) I 3.1.1 56

simplicial mixte (objet -) I 1.1 1

simplicial trivial (objet -) I 1.1.2 2

suspension I 3.2.1.4 64

topos d'une flèche de topos III 4.1 214

trace (homomorphisme -) V 3.7.1, V 3.7.3, V 3.7.4 308, 309

transitivité (suite exacte de -, ou triangle de -)
II 2.1.1.4, II 2.1.5.2 133, 137

triangle, - distingué I 3.2.2.4 71

Y-voisinage infinitésimal d'ordre un (d'un Y-topos annelé) III 1.1.10 161

vrais triangles (catégorie des -) I 3.2.4 81

Whitehead (théorème de -) I 2.2.2 25

Lecture Notes in Mathematics

Comprehensive leaflet on request

Vol. 38: R. Berger, R. Kiehl, E. Kunz und H.-J. Nastold, Differentialrechnung in der analytischen Geometrie IV, 134 Seiten. 1967 DM 12,–

Vol. 39: Séminaire de Probabilités I. II, 189 pages. 1967. DM 14,–

Vol. 40: J. Tits, Tabellen zu den einfachen Lie Gruppen und ihren Darstellungen. VI, 53 Seiten. 1967. DM 6.80

Vol. 41: A. Grothendieck, Local Cohomology. VI, 106 pages. 1967. DM 10,–

Vol. 42: J. F. Berglund and K. H. Hofmann, Compact Semitopological Semigroups and Weakly Almost Periodic Functions. VI, 160 pages. 1967. DM 12,–

Vol. 43: D. G. Quillen, Homotopical Algebra VI, 157 pages. 1967. DM 14,–

Vol. 44: K. Urbanik, Lectures on Prediction Theory. IV, 50 pages. 1967. DM 5,80

Vol. 45: A. Wilansky, Topics in Functional Analysis. VI, 102 pages. 1967. DM 9,60

Vol. 46: P. E. Conner, Seminar on Periodic Maps. IV, 116 pages. 1967. DM 10,60

Vol. 47: Reports of the Midwest Category Seminar I. IV, 181 pages. 1967. DM 14,80

Vol. 48: G. de Rham, S. Maumary et M. A. Kervaire, Torsion et Type Simple d'Homotopie. IV, 101 pages. 1967. DM 9,60

Vol. 49: C. Faith, Lectures on Injective Modules and Quotient Rings. XVI, 140 pages. 1967. DM 12,80

Vol. 50: L. Zalcman, Analytic Capacity and Rational Approximation VI, 155 pages. 1968. DM 13.20

Vol. 51: Séminaire de Probabilités II. IV, 199 pages. 1968. DM 14,–

Vol. 52: D. J. Simms, Lie Groups and Quantum Mechanics. IV, 90 pages. 1968. DM 8,–

Vol. 53: J. Cerf, Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension trois ($\Gamma_4 = 0$). XII, 133 pages. 1968. DM 12,–

Vol. 54: G. Shimura, Automorphic Functions and Number Theory. VI, 69 pages. 1968. DM 8,–

Vol. 55: D. Gromoll, W. Klingenberg und W. Meyer, Riemannsche Geometrie im Großen. VI, 287 Seiten. 1968. DM 20,–

Vol. 56: K. Floret und J. Wloka, Einführung in die Theorie der lokalkonvexen Räume. VIII, 194 Seiten. 1968. DM 16,–

Vol. 57: F. Hirzebruch und K. H. Mayer, O(n)-Mannigfaltigkeiten, exotische Sphären und Singularitäten. IV, 132 Seiten. 1968. DM 10,80

Vol. 58: Kuramochi Boundaries of Riemann Surfaces. IV, 102 pages. 1968. DM 9,60

Vol. 59: K. Jänich, Differenzierbare G-Mannigfaltigkeiten. VI, 89 Seiten. 1968. DM 8,–

Vol. 60: Seminar on Differential Equations and Dynamical Systems. Edited by G. S. Jones. VI, 106 pages. 1968. DM 9,60

Vol. 61: Reports of the Midwest Category Seminar II IV, 91 pages 1968. DM 9,60

Vol. 62: Harish-Chandra, Automorphic Forms on Semisimple Lie Groups X, 138 pages. 1968. DM 14,–

Vol. 63: F. Albrecht, Topics in Control Theory. IV, 65 pages. 1968. DM 6,80

Vol. 64: H. Berens, Interpolationsmethoden zur Behandlung von Approximationsprozessen auf Banachräumen. VI, 90 Seiten. 1968. DM 8,–

Vol. 65: D. Kölzow, Differentiation von Maßen. XII, 102 Seiten. 1968. DM 8,–

Vol. 66: D. Ferus, Totale Absolutkrümmung in Differentialgeometrie und -topologie. VI, 85 Seiten. 1968. DM 8,–

Vol. 67: F. Kamber and P. Tondeur, Flat Manifolds. IV, 53 pages. 1968. DM 5,80

Vol. 68: N. Boboc et P. Mustată, Espaces harmoniques associés aux opérateurs différentiels linéaires du second ordre de type elliptique. VI, 95 pages. 1968. DM 8,60

Vol. 69: Seminar über Potentialtheorie. Herausgegeben von H. Bauer. VI, 180 Seiten. 1968. DM 14,80

Vol. 70: Proceedings of the Summer School in Logic. Edited by M. H. Löb. IV, 331 pages. 1968. DM 20,–

Vol. 71: Séminaire Pierre Lelong (Analyse), Année 1967 – 1968. VI, 190 pages. 1968. DM 14,

Vol. 72: The Syntax and Semantics of Infinitary Languages. Edited by J. Barwise. IV, 268 pages. 1968. DM 18,–

Vol. 73: P. E. Conner, Lectures on the Action of a Finite Group. IV, 123 pages. 1968. DM 10,–

Vol. 74: A. Fröhlich, Formal Groups. IV, 140 pages. 1968. DM 12,–

Vol. 75: G. Lumer, Algèbres de fonctions et espaces de Hardy. VI, 80 pages. 1968. DM 8,–

Vol. 76: R. G. Swan, Algebraic K-Theory. IV, 262 pages. 1968. DM 18,–

Vol. 77: P.-A. Meyer, Processus de Markov: la frontière de Martin. IV, 123 pages. 1968. DM 10,–

Vol. 78: H. Herrlich, Topologische Reflexionen und Coreflexionen. XVI, 166 Seiten. 1968. DM 12,–

Vol. 79: A. Grothendieck, Categories Cofibrées Additives et Complexe Cotangent Relatif. IV, 167 pages. 1968. DM 12,–

Vol. 80: Seminar on Triples and Categorical Homology Theory. Edited by B. Eckmann. IV, 398 pages. 1969. DM 20,–

Vol. 81: J.-P. Eckmann et M. Guenin, Méthodes Algebriques en Mécanique Statistique. VI, 131 pages. 1969. DM 12,–

Vol. 82: J. Wloka, Grundräume und verallgemeinerte Funktionen. VIII, 131 Seiten. 1969. DM 12,–

Vol. 83: O. Zariski, An Introduction to the Theory of Algebraic Surfaces. IV, 100 pages. 1969. DM 8,–

Vol. 84: H. Lüneburg, Transitive Erweiterungen endlicher Permutationsgruppen. IV, 119 Seiten. 1969. DM 10.–

Vol. 85: P. Cartier et D. Foata, Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements. IV, 88 pages. 1969. DM 8,–

Vol. 86: Category Theory, Homology Theory and their Applications I. Edited by P. Hilton. VI, 216 pages. 1969. DM 16,–

Vol. 87: M. Tierney, Categorical Constructions in Stable Homotopy Theory. IV, 65 pages. 1969. DM 6,–

Vol. 88: Séminaire de Probabilités III. IV, 229 pages. 1969. DM 18,–

Vol. 89: Probability and Information Theory. Edited by M. Behara, K. Krickeberg and J. Wolfowitz. IV, 256 pages. 1969. DM 18.–

Vol. 90: N. P. Bhatia and O. Hajek, Local Semi-Dynamical Systems. II, 157 pages. 1969. DM 14,–

Vol. 91: N. N. Janenko, Die Zwischenschrittmethode zur Lösung mehrdimensionaler Probleme der mathematischen Physik. VIII, 194 Seiten. 1969. DM 16,80

Vol. 92: Category Theory, Homology Theory and their Applications II. Edited by P. Hilton. V, 308 pages. 1969. DM 20,–

Vol. 93: K. R. Parthasarathy, Multipliers on Locally Compact Groups. III, 54 pages. 1969. DM 5,60

Vol. 94: M. Machover and J. Hirschfeld, Lectures on Non-Standard Analysis. VI, 79 pages. 1969. DM 6,–

Vol. 95: A. S. Troelstra, Principles of Intuitionism II, 111 pages. 1969. DM 10,–

Vol. 96: H.-B. Brinkmann und D. Puppe, Abelsche und exakte Kategorien, Korrespondenzen. V, 141 Seiten. 1969. DM 10,–

Vol. 97: S. U. Chase and M. E. Sweedler, Hopf Algebras and Galois theory II, 133 pages. 1969. DM 10,–

Vol. 98: M. Heins, Hardy Classes on Riemann Surfaces. III, 106 pages. 1969. DM 10,–

Vol. 99: Category Theory, Homology Theory and their Applications III. Edited by P. Hilton. IV, 489 pages. 1969. DM 24,–

Vol. 100: M. Artin and B. Mazur, Etale Homotopy. II, 196 Seiten 1969. DM 12,–

Vol. 101: G. P. Szegö et G. Treccani, Semigruppi di Trasformazioni Multivoche. VI, 177 pages. 1969. DM 14,–

Vol. 102: F. Stummel, Rand- und Eigenwertaufgaben in Sobolewschen Räumen. VIII, 386 Seiten. 1969. DM 20,–

Vol. 103: Lectures in Modern Analysis and Applications I. Edited by C. T. Taam. VII, 162 pages. 1969. DM 12,–

Vol. 104: G. H. Pimbley, Jr., Eigenfunction Branches of Nonlinear Operators and their Bifurcations. II, 128 pages. 1969. DM 10,–

Vol. 105: R. Larsen, The Multiplier Problem. VII, 284 pages. 1969. DM 18,–

Vol. 106: Reports of the Midwest Category Seminar III. Edited by S. Mac Lane. III, 247 pages. 1969. DM 16,–

Vol. 107: A. Peyerimhoff, Lectures on Summability. III, 111 pages. 1969. DM 8,–

Vol. 108: Algebraic K-Theory and its Geometric Applications. Edited by R. M. F. Moss and C. B. Thomas. IV, 86 pages. 1969. DM 6,–

Vol. 109: Conference on the Numerical Solution of Differential Equations. Edited by J. Ll. Morris. VI, 275 pages. 1969. DM 18,–

Vol. 110: The Many Facets of Graph Theory. Edited by G. Chartrand and S. F. Kapoor. VIII, 290 pages. 1969. DM 18,–

Vol. 111: K. H. Mayer, Relationen zwischen charakteristischen Zahlen. III, 99 Seiten. 1969. DM 8,–

Vol. 112: Colloquium on Methods of Optimization. Edited by N. N. Moiseev. IV, 293 pages. 1970. DM 18,–

Vol. 113: R. Wille, Kongruenzklassengeometrien III, 99 Seiten. 1970. DM 8,–

Vol. 114: H. Jacquet and R. P. Langlands, Automorphic Forms on GL (2). VII, 548 pages. 1970. DM 24,–

Vol. 115: K. H. Roggenkamp and V. Huber-Dyson, Lattices over Orders I. XIX, 290 pages. 1970. DM 18,–

Vol. 116: Séminaire Pierre Lelong (Analyse) Année 1969. IV, 195 pages. 1970. DM 14,–

Vol. 117: Y. Meyer, Nombres de Pisot, Nombres de Salem et Analyse Harmonique. 63 pages. 1970. DM 6.–

Vol. 118: Proceedings of the 15th Scandinavian Congress, Oslo 1968. Edited by K. E. Aubert and W. Ljunggren. IV, 162 pages. 1970. DM 12,–

Vol. 119: M. Raynaud, Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes. III, 219 pages. 1970. DM 14,–

Vol. 120: D. Siefkes, Büchi's Monadic Second Order Successor Arithmetic. XII, 130 Seiten. 1970. DM 12,–

Vol. 121: H. S. Bear, Lectures on Gleason Parts. III, 47 pages. 1970 DM 6,–

Vol. 122: H. Zieschang, E. Vogt und H.-D. Coldewey, Flächen und ebene diskontinuierliche Gruppen. VIII, 203 Seiten. 1970. DM 16,–

Vol. 123: A. V. Jategaonkar, Left Principal Ideal Rings. VI, 145 pages. 1970. DM 12,–

Vol. 124: Séminaire de Probabilités IV. Edited by P. A. Meyer. IV, 282 pages. 1970. DM 20,–

Vol. 125: Symposium on Automatic Demonstration. V, 310 pages. 1970 DM 20,–

Vol. 126: P. Schapira, Théorie des Hyperfonctions XI, 157 pages 1970 DM 14,–

Vol. 127: I. Stewart, Lie Algebras IV, 97 pages. 1970. DM 10,–

Vol. 128: M. Takesaki, Tomita's Theory of Modular Hilbert Algebras and its Applications. II, 123 pages. 1970. DM 10,–

Vol. 129: K. H. Hofmann, The Duality of Compact Semigroups and C*-Bigebras. XII, 142 pages. 1970. DM 14,–

Vol. 130: F. Lorenz, Quadratische Formen über Körpern. II, 77 Seiten. 1970. DM 8,–

Vol. 131: A Borel et al., Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups. VII, 321 pages. 1970. DM 22,

Vol. 132: Symposium on Optimization. III, 348 pages. 1970. DM 22,–

Vol. 133: F. Topsøe, Topology and Measure. XIV, 79 pages. 1970. DM 8,–

Vol. 134: L. Smith, Lectures on the Eilenberg-Moore Spectral Sequence. VII, 142 pages. 1970. DM 14,–

Vol. 135: W. Stoll, Value Distribution of Holomorphic Maps into Compact Complex Manifolds. II, 267 pages. 1970. DM 18,–

Vol. 136: M. Karoubi et al., Séminaire Heidelberg-Saarbrücken-Strasbourg sur la K-Théorie. IV, 264 pages. 1970. DM 18,–

Vol. 137: Reports of the Midwest Category Seminar IV. Edited by S. MacLane. III, 139 pages. 1970. DM 12,–

Vol. 138: D. Foata et M. Schützenberger, Théorie Géométrique des Polynômes Eulériens. V, 94 pages. 1970. DM 10,–

Vol. 139: A. Badrikian, Séminaire sur les Fonctions Aléatoires Linéaires et les Mesures Cylindriques VII, 221 pages. 1970. DM 18,–

Vol. 140: Lectures in Modern Analysis and Applications II. Edited by C. T. Taam. VI, 119 pages. 1970. DM 10,–

Vol. 141: G. Jameson, Ordered Linear Spaces. XV, 194 pages. 1970. DM 16,–

Vol. 142: K. W. Roggenkamp, Lattices over Orders II. V, 388 pages. 1970. DM 22,–

Vol. 143: K. W. Gruenberg, Cohomological Topics in Group Theory. XIV, 275 pages. 1970. DM 20,–

Vol. 144: Seminar on Differential Equations and Dynamical Systems, II. Edited by J. A. Yorke. VIII, 268 pages. 1970. DM 20,–

Vol. 145: E. J. Dubuc, Kan Extensions in Enriched Category Theory. XVI, 173 pages. 1970. DM 16,–

Vol. 146: A. B. Altman and S. Kleiman, Introduction to Grothendieck Duality Theory. II, 192 pages. 1970. DM 18,–

Vol. 147: D. E. Dobbs, Cech Cohomological Dimensions for Commutative Rings. VI, 176 pages. 1970. DM 16,–

Vol. 148: R. Azencott, Espaces de Poisson des Groupes Localement Compacts. IX, 141 pages. 1970. DM 14,–

Vol. 149: R. G. Swan and E. G. Evans, K-Theory of Finite Groups and Orders. IV, 237 pages. 1970. DM 20,–

Vol. 150: Heyer, Dualität lokalkompakter Gruppen. XIII, 372 Seiten. 1970. DM 20,–

Vol. 151: M. Demazure et A. Grothendieck, Schémas en Groupes I. (SGA 3). XV, 562 pages. 1970. DM 24,–

Vol. 152: M. Demazure et A. Grothendieck, Schémas en Groupes II. (SGA 3). IX, 654 pages. 1970. DM 24,–

Vol. 153: M. Demazure et A. Grothendieck, Schémas en Groupes III. (SGA 3). VIII, 529 pages. 1970. DM 24,–

Vol. 154: A. Lascoux et M. Berger, Variétés Kählériennes Compactes. VII, 83 pages. 1970. DM 8,–

Vol. 155: Several Complex Variables I, Maryland 1970. Edited by J. Horváth. IV, 214 pages. 1970. DM 18,–

Vol. 156: R. Hartshorne, Ample Subvarieties of Algebraic Varieties. XIV, 256 pages. 1970. DM 20,–

Vol. 157: T. tom Dieck, K. H. Kamps und D. Puppe, Homotopietheorie. VI, 265 Seiten. 1970. DM 20,–

Vol. 158: T. G. Ostrom, Finite Translation Planes. IV. 112 pages. 1970. DM 10,–

Vol. 159: R. Ansorge und R. Hass, Konvergenz von Differenzenverfahren für lineare und nichtlineare Anfangswertaufgaben. VIII, 145 Seiten. 1970. DM 14,–

Vol. 160: L. Sucheston, Constributions to Ergodic Theory and Probability. VII, 277 pages. 1970. DM 20,–

Vol. 161: J. Stasheff, H-Spaces from a Homotopy Point of View. VI, 95 pages. 1970. DM 10,–

Vol. 162: Harish-Chandra and van Dijk, Harmonic Analysis on Reductive p-adic Groups. IV, 125 pages. 1970. DM 12,–

Vol. 163: P. Deligne, Equations Différentielles à Points Singuliers Reguliers. III, 133 pages. 1970. DM 12,–

Vol. 164: J. P. Ferrier, Seminaire sur les Algebres Complètes. II, 69 pages. 1970. DM 8,–

Vol. 165: J. M. Cohen, Stable Homotopy. V, 194 pages. 1970. DM 16,–

Vol. 166: A. J. Silberger, PGL_2 over the p-adics: its Representations, Spherical Functions, and Fourier Analysis. VII, 202 pages. 1970. DM 18,–

Vol. 167: Lavrentiev, Romanov and Vasiliev, Multidimensional Inverse Problems for Differential Equations. V, 59 pages. 1970. DM 10,–

Vol. 168: F. P. Peterson, The Steenrod Algebra and its Applications: A conference to Celebrate N. E. Steenrod's Sixtieth Birthday. VII, 317 pages. 1970. DM 22,–

Vol. 169: M. Raynaud, Anneaux Locaux Henséliens V, 129 pages. 1970. DM 12,–

Vol. 170: Lectures in Modern Analysis and Applications III. Edited by C. T. Taam. VI, 213 pages. 1970. DM 18,–

Vol. 171: Set-Valued Mappings, Selections and Topological Properties of 2^X. Edited by W. M. Fleischman. X, 110 pages. 1970. DM 12,–

Vol. 172: Y.-T. Siu and G. Trautmann, Gap-Sheaves and Extension of Coherent Analytic Subsheaves. V, 172 pages. 1971. DM 16,–

Vol. 173: J. N. Mordeson and B. Vinograde, Structure of Arbitrary Purely Inseparable Extension Fields. IV, 138 pages. 1970. DM 14,–

Vol. 174: B. Iversen, Linear Determinants with Applications to the Picard Scheme of a Family of Algebraic Curves. VI, 69 pages. 1970. DM 8,–

Vol. 175: M. Brelot, On Topologies and Boundaries in Potential Theory. VI, 176 pages. 1971. DM 18,–

Vol. 176: H. Popp, Fundamentalgruppen algebraischer Mannigfaltigkeiten. IV, 154 Seiten. 1970. DM 16,–

Vol. 177: J. Lambek, Torsion Theories, Additive Semantics and Rings of Quotients. VI, 94 pages. 1971. DM 12,–

Vol. 178: Th. Bröcker und T. tom Dieck, Kobordismentheorie. XVI, 191 Seiten. 1970. DM 18,–

Vol. 179: Seminaire Bourbaki – vol. 1968/69. Exposés 347-363. IV. 295 pages. 1971. DM 22,–

Vol. 180: Séminaire Bourbaki – vol. 1969/70. Exposés 364-381. IV, 310 pages. 1971. DM 22,–

Vol. 181: F. DeMeyer and E. Ingraham, Separable Algebras over Commutative Rings. V, 157 pages. 1971. DM 16.–

Lecture Notes in Mathematics Vol. 239
ISBN 978-3-540-05686-7 © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2008

Luc Illusie

Complexe Cotangent et Déformations I

Errata

p. 11, l. 5 : la flèche (1.2.2.2) ne respecte pas les sous-complexes normaux; remplacer le carré supérieur de droite par celui défini par les projections sur les quotients par les sous-complexes dégénérés; ceci fait apparaître un triangle commutatif entre les deux carrés supérieurs, dont le côté horizontal est une équivalence d'homotopie

p. 60, l. −7 : dans le membre de gauche de la formule (∗∗), remplacer $((L \otimes E)\tilde{}$ par $(L \otimes E)\tilde{}, F\tilde{})$

p. 87, l. 9 : remplacer $H_0(A)$ par $H_*(A)$

p. 219, l. −8 : remplacer $0 \longrightarrow M$ par $0 \longleftarrow M$

p. 225, l. −2 : $\underline{End}(M_0)$ au lieu de M_0

p. 227, l. −10 : remplacer "Le foncteur k^n ... formules" par "On a :"

p. 227, l. −8 : dans le membre de gauche, remplacer $k^n(E)$ par $k^n(E \otimes_A A^0)$

p. 231, l. 3 et 5: dans le membre de gauche, remplacer $k^n(E)$ par $k^n(E \otimes^L_A A^0)$; ajouter "Pour E de graduation concentrée en degrés $\geq n$, $k^n(E \otimes^L_A A^0) = k^n(E)$."

p. 231, l. 5 : dans le membre de droite, $F(-n)$ au lieu de $F)(-n)$

p. 246, l. 9 : ajouter π au dessus de la flèche $B \longrightarrow B_0$

p. 247, l. 11 : remplacer la ligne par la suivante :

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow I \oplus J \longrightarrow B \oplus M \xrightarrow{\pi \oplus p} B_0 \oplus M_0 \longrightarrow 0$$

p. 247, l. 12 : remplacer "est" par "est l'extension (3.1.1)"

p. 247, l. 13 : supprimer cette ligne

p. 247, l. 16 : dans le membre de droite, remplacer J par $I \oplus J$

p. 247, l. −6 : remplacer J par $I \oplus J$

p. 247, l. −5 : remplacer "s'identifie à" par "a pour composante de degré 1", "identifie" par "envoie", et J par $I \oplus J$

p. 247, l. −4 : remplacer "à" par "dans", et "l'isomorphisme canonique (1.1.3.1)" par "k^1"

p. 247 : dans le diagramme du bas, supprimer le signe d'isomorphisme et la référence (1.1.3.1); dans la ligne du bas, remplacer J par $I \oplus J$

p. 248, l. 1 : ajouter à la fin de la ligne : "(et où la flèche verticale de droite envoie f sur $Id \oplus f$)"

p. 248, l. 4 : remplacer J par $I \oplus J$

p. 248, l. 9 : après "concentrée en degré un", ajouter "et $L^{\mathrm{gr}}_{C_0/B_0}$ de graduation concentrée en degrés ≥ 1"

p. 259, l. 5 : supprimer ", d'après (1.1.3.1),"

p. 332, l. 9 : ajouter après 5.3.3 : "Supposons A local."