

Introduction

Le but de ce travail est l'étude (en vue d'une classification isotopique) des plongements des 1-complexes topologiques compacts (cf. I.1.2.) dans les surfaces orientées compactes. Ce faisant, on aborde plusieurs problèmes de topologie des surfaces avec un nouveau point de vue qui s'avère efficace et qui permet de retrouver simplement et d'étendre des théorèmes d'isotopie connus sur les surfaces.

On appelle ici "plongement" d'un 1-complexe K dans une surface à bord X , une injection continue de K dans l'ouvert des points "intérieurs" de X ; on commence alors par "éliminer la sauvagerie", c'est à dire montrer que lorsqu'on se donne un tel plongement, tout point du 1-complexe plongé possède un voisinage dans X ("carte") homéomorphe à un disque ouvert de $\mathbb{R}^2$, tel que le plongement lu dans cette carte soit "standard". On utilise pour cela des variations sur des théorèmes du type théorème de Schoenflies (cf. chap.II).

On introduit la catégorie des 1-complexes topologiques dont les objets sont les 1-complexes topologiques (compacts) et dont les morphismes sont les homéomorphismes entre 1-complexes. Il lui correspond une catégorie isotopique des 1-complexes obtenue en conservant les mêmes objets, et en remplaçant (pour tout couple (K, K') d'objets) l'espace $\text{Hom}(K, K')$ (qui est égal à $\text{Isom}(K, K')$) par $\pi_0 \text{Hom}(K, K')$. On peut alors donner une représentation combinatoire ("1-complexes combinatoires") de cette dernière catégorie (à équivalence près) : c'est l'objet du chapitre I, où l'on effectue, en outre, un certain nombre de constructions fonctorielles utiles dans la suite.

La catégorie des plongements est alors définie comme la catégorie ayant pour objets les couples (X, K) (X : surface à bord orientée compacte, K : 1-complexe contenu dans l'intérieur de X), et pour morphismes les homéomorphismes orientés (i.e : conservant l'orientation) de surfaces à bord, respectant les 1-complexes plongés. Il lui correspond une catégorie isotopique des plongements obtenue (comme pour les 1-complexes) en remplaçant chaque espace de morphismes par son π_0 . La détermination des composantes connexes de cette catégorie isotopique équivaut à la classification "à congruence près" des plongements que l'on établit alors : deux plongements i_0 et i_1 d'un même 1-complexe K dans deux surfaces à bord X_0 et X_1 (orientées, compactes) seront dits congrus s'il existe un homéomorphisme orienté h de X_0 sur X_1 tel que $h \circ i_0 = i_1$. On trouve une condition nécessaire et suffisante en termes "d'invariants algébriques" des plongements pour que deux plongements soient congrus. Pour cela, on introduit la notion de voisinage tubulaire d'un 1-complexe K : c'est un couple (T, K) formé d'une surface à bord T (orientée, compacte) contenant K , de façon que l'inclusion $K \hookrightarrow T$ soit une équivalence d'homotopie ; on peut alors classifier les voisinages tubulaires à isomorphisme près par des invariants associés au 1-complexe K : ce sont les circularisations (ordre circulaire sur l'ensemble des arcs issus d'un même sommet, et ceci pour tout sommet de K : le 1-complexe K muni d'une circularisation est dit circularisé, on peut alors mettre en évidence (de façon canonique), dans K circularisé, un ensemble de "circuits" en bijection (également canonique) avec $\pi_0 \partial T$). On montre ensuite que pour tout plongement i du 1-complexe K dans une surface à bord X (orientée), il existe un voisinage tubulaire $(T, i(K))$, T contenue dans X ; de plus, un tel voisinage tubulaire est unique (à congruence

près). Pour "décrire" le plongement (à congruence près), il suffit alors, en plus de la description (à l'aide des ordres circulaires) de ce voisinage tubulaire $(T, i(K))$, de dire quelle surface (genre de chaque composante, nombre de composantes du bord) est le complémentaire de l'intérieur de T dans X , et comment elle est recollée sur T ; on trouve ainsi une description purement combinatoire en termes du 1-complexe combinatoire associé à K (cf. chap III).

On étudie alors les plongements cellulaires de 1-complexes dans les surfaces (il s'agit des plongements $K \rightarrow X$ tels que le complémentaire de l'image de K dans X soit réunion disjointe de 2-cellules ouvertes). On caractérise les plongements minimaux (un plongement $K \rightarrow X$ est minimal si le genre de X est minimal parmi les genres des surfaces X' dans lesquelles K est plongeable).

On aborde ensuite une classification plus fine que la congruence : la classification à isotopie (ambiante) près. Si on considère une classe de congruence C de plongements d'un 1-complexe K (fixé) dans une surface à bord X (X fixée, orientée, compacte), et si on note C_0 l'ensemble des classes d'isotopie de plongements éléments de C , alors C_0 est un espace homogène sous le groupe de Teichmüller de X (groupe des classes d'isotopie d'homéomorphismes orientés de X , ce groupe agit "naturellement" (par composition) sur l'ensemble des classes d'isotopie de plongements de K dans X). Pour "connaître" C_0 , il suffit donc de déterminer le stabilisateur d'un de ses éléments. Si K est connexe, on montre que ce stabilisateur est formé des classes d'isotopie d'homéomorphismes orientés h de X , tels que $\pi_1(h)$ (en tant qu'automorphisme extérieur de $\pi_1 X$) est l'identité sur l'image de $\pi_1 K$ dans $\pi_1 X$.

Plus généralement (i.e : lorsque K n'est pas supposé connexe), on montre que deux plongements de K dans X sont isotopes (par isotopie ambiante de X) si et seulement si ils sont congrus (i.e : ont mêmes "invariants combinatoires") et homotopes. Ce dernier énoncé donne une classification effective en termes purement algébriques, puisque les relations de convergence et d'homotopie s'expriment algébriquement.

La démonstration du résultat ci-dessus nécessite un théorème d'isotopie sur les surfaces à bord obtenues par recollement de deux surfaces à bord, théorème qui est démontré (cf. V 4.4) par une méthode "chirurgicale" (utilisant la classification isotopique des plongements des 1-variétés compactes dans les surfaces à bord orientées compactes, classification établie en V.1.4.), qui permet de ramener le problème au cas des surfaces à bord de genre zéro et dont le bord comporte une, deux ou trois composantes : c'est pourquoi, dans le chapitre IV, on donne des démonstrations élémentaires des propriétés isotopiques de ces trois types de surfaces (ce chapitre IV contient peu de résultats nouveaux et figure ici pour que l'exposé soit aussi complet que possible).

Du théorème d'isotopie sur les surfaces "recollées" cité ci-dessus, on déduit de façon évidente les théorèmes connus d'isotopie des surfaces orientées (R. Baer) et des surfaces à bord orientées (D.B.A. Epstein) : la méthode en fournit une nouvelle démonstration. On déduit également quelques corollaires algébriques sur les groupes libres et les sommes amalgamées de groupes libres (cf. V.7.).

Il est possible de donner une représentation en termes purement algébriques de la catégorie isotopique des surfaces à bord orientées, grâce au théorème : Si X est une surface à bord orientée connexe

(compacte) et si $u_1, u_2, \dots, u_n$ sont des lacets de $\pi_1 X$ "autour" des composantes orientées $b_1, b_2, \dots, b_n$ (respectivement) de ∂X , alors le groupe de Teichmüller de X est isomorphe au sous-groupe $\mathcal{G}$ du groupe des automorphismes extérieurs de $\pi_1 X$ constitué par les automorphismes qui transforment tout lacet u_i en le conjugué d'un u_j (W.J. Harvey et C. MacLachlan ont, en effet, démontré récemment la surjectivité de l'homomorphisme canonique (induit par le π_1) qui va du groupe de Teichmüller de X dans $\mathcal{G}$; son injectivité résulte des théorèmes d'isotopie cités ci-dessus).

La catégorie des plongements, introduite plus haut, est le produit 2-fibré de deux catégories (celle des voisinages tubulaires et celle des surfaces à bord orientées) au-dessus d'une troisième (courbes orientées), mais la propriété analogue n'est plus vraie lorsqu'on remplace toutes ces catégories par les catégories isotopiques correspondantes : cela provient essentiellement de ce que le foncteur π_0 ne commute pas aux produits fibrés de groupes topologiques ; le fait est que lorsqu'on remplace (comme on le fait pour construire les catégories isotopiques) les espaces d'homéomorphismes par leurs π_0 , on néglige les π_1 , or il se trouve que ces π_1 jouent un rôle important dans la détermination du π_0 des groupes d'automorphismes de plongements.

On évite de telles difficultés en remplaçant les espaces de morphismes non plus par leurs π_0 , mais par leurs groupoïdes fondamentaux : on obtient ainsi, au lieu des catégories "isotopiques" (ou 0-isotopiques), des 2-catégories 1-isotopiques (ainsi on tient compte des π_0 et des π_1 des espaces d'isomorphismes) ; contrairement à ce qui se passe pour les catégories isotopiques, cette construction de catégories 1-isotopiques

a la propriété de commuter aux produits 2-fibrés de catégories (tout au moins lorsque les π_2 des espaces intervenant sont triviaux, ce qui est le cas ici). On peut donc donner une représentation algébrique (à 2-équivalence près) de la 2-catégorie 1-isotopique des plongements à partir de la représentation des trois 2-catégories 1-isotopiques suivantes : celle des voisinages tubulaires, celle des surfaces à bord orientées, et celle des courbes orientées : c'est l'objet du chapitre VI. C'est ainsi que, par exemple, la 2-catégorie 1-isotopique des surfaces à bord (orientées, compactes) est représentée en associant à chaque surface à bord X les groupoïdes fondamentaux πX et $\pi \partial X$ ainsi que le foncteur naturel $\pi \partial X \rightarrow \pi X$; dans ce cas, le théorème de représentation (cf. VI.6.4) résume sous une forme extrêmement condensée de nombreux résultats de théorie des surfaces dus à R. Baer, J. Nielsen, W. Magnus, D. Epstein, W. Harvey, C. Mac Lachlan, M.E. Hamstrom.

Dans la bibliographie, on a fait figurer un certain nombre de travaux sur les groupes de tresses, en raison de l'importance que ces derniers jouent dans le calcul des groupes de Teichmüller des surfaces à bord ; toute référence à un travail cité en bibliographie est faite sous forme d'un nombre placé entre crochets.

Dans le texte, les références à un énoncé sont faites sous forme d'un chiffre romain désignant le chapitre suivi de nombres désignant le paragraphe ; lorsque la référence concerne un paragraphe du même chapitre, on omet le numéro du dit chapitre.