

#### IV - Préliminaires d'Isotopie.

Dans ce chapitre, on établit par des procédés élémentaires quelques propriétés isotopiques des arcs, courbes simples, disques, cylindres et bicouronnes ; ces démonstrations sont placées ici pour que l'exposé soit complet, il y figure peu de résultats originaux.

On veut (surtout) démontrer que si  $X$  est une surface à bord orientée compacte de type  $(0,p)$  ( $p = 1,2,3$ ), alors tout homéomorphisme orienté  $h$  de  $X$  sur elle-même, qui conserve globalement chaque composante de  $\partial X$ , est isotope à  $\text{id}_X$ . Ces trois types de surfaces à bord sont les seuls ayant cette propriété, mais il se trouve qu'une surface à bord quelconque (orientable, compacte !) peut être découpée le long de courbes disjointes de façon à n'obtenir que des surfaces à bord de type  $(0,p)$ ,  $p = 1,2$  ou  $3$ . Cela permettra d'utiliser des techniques chirurgicales pour démontrer les théorèmes d'isotopie qui font l'objet du chapitre V.

##### 1. Le groupe des homéomorphismes du disque.

Nous utiliserons très souvent le théorème suivant, du à Alexander (cf. [2]), aussi nous en rappelons brièvement la démonstration (qui est élémentaire) :

1.1. Théorème (Alexander) : Soit  $D$  un disque, le groupe  $\text{Aut}(D ; \text{id}_{\partial D})$  des homéomorphismes de  $D$  fixes sur  $\partial D$  est contractile.

Démonstration : On peut supposer sans restriction que  $D = B(0;1)$ .

Soit  $h \in \text{Aut}(D ; \text{id}_{\partial D})$ , et soit  $H$  l'homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  sur lui-même obtenu en prolongeant  $h$  par l'identité sur  $\mathbb{R}^2 \setminus D$ . Pour  $\lambda \in I$ , on définit l'homéomorphisme  $H_\lambda$  de  $\mathbb{R}^2$  sur lui-même par  $H_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$ , et  $H_\lambda(x) = \lambda H\left(\frac{x}{\lambda}\right)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$ , et tout  $\lambda \in ]0,1]$ . Notons  $h_\lambda = H_\lambda|_D$ ,

alors l'application de  $\text{Aut}(D ; \text{id}_{\partial D}) \times I$  dans  $\text{Aut}(D ; \text{id}_{\partial D})$ , qui à tout  $(h, \lambda)$  associe  $h_\lambda$ , est une contraction de  $\text{Aut}(D ; \text{id}_{\partial D})$  sur  $\text{id}_D$ . En fait cette démonstration implique également :

1.2. Corollaire : Si  $D$  est un disque et  $x$  un point de  $\text{int } D$ , le groupe  $\text{Aut}(D ; x ; \text{id}_{\partial D})$  des homéomorphismes de  $D$  fixes sur  $\partial D \cup \{x\}$  est contractile.

Remarque : la démonstration de 1.1. s'applique sans difficulté au groupe des homéomorphismes d'un cône, fixes sur la base du cône.

1.3. Etant donné un homéomorphisme  $h$  de  $S^1$ , on appellera prolongement radial de  $h$  à  $B(0;1)$ , l'homéomorphisme  $\tilde{h}$  de  $B(0;1)$  sur lui-même défini par  $\tilde{h}(x) = \|x\| h(\frac{x}{\|x\|})$  pour  $x \in B(0;1) \setminus \{0\}$ , et par  $\tilde{h}(0) = 0$  ( $\|x\|$  désigne la norme Euclidienne de  $x$ ).

Proposition : Soit  $D$  un disque. Le groupe  $\text{Aut}^+ D$  des homéomorphismes orientés de  $D$  a le type d'homotopie de  $S^1$ . Plus précisément, l'inclusion de  $S^1$  dans  $\text{Aut}^+ B(0;1)$  (qui à tout  $z \in S^1$  associe le prolongement radial à  $B(0;1)$  de la translation par  $z$  dans  $S^1$ ) est une équivalence d'homotopie.

Démonstration :

On suppose dans la suite que  $D = B(0;1)$  (si ce n'est pas le cas on s'y ramène par homéomorphisme). On définit un homéomorphisme  $\varphi$  :

$$\text{Aut}^+ D \xrightarrow{\varphi} \text{Aut}(D; \text{id}_{\partial D}) \times \text{Aut}^+ S^1$$

en associant à tout  $H \in \text{Aut}^+ D$ ,  $\varphi(H) = (\tilde{h}^{-1} \circ H, h)$  où  $h = H|_{\partial D}$ , et  $\tilde{h}$  est le prolongement radial de  $h$ . (Un inverse de  $\varphi$  est l'application qui au couple  $(G, g)$  associe  $\tilde{g} \circ G$ , où  $\tilde{g}$  est l'extension radiale de  $g$ ).

La proposition résulte du fait que  $\text{Aut}(D; \text{id}_{\partial D})$  est contractile (cf. 1.1.) et de ce que l'inclusion naturelle de  $S^1$  dans  $\text{Aut}^+ S^1$  est une équivalence d'homotopie (cf. I.1.5.3.).

1.4. En termes d'isotopie les résultats précédents ont pour conséquences :

1°) tout homéomorphisme orienté d'un disque est isotope à l'identité.

2°) tout homéomorphisme d'un disque fixe sur le bord, est isotope à l'identité par une isotopie fixe sur le bord.

3°) tout homéomorphisme orienté d'un disque, fixe sur un point  $x$  intérieur, est isotope à l'identité par isotopie fixe sur  $x$ .

4°) tout homéomorphisme d'un disque, fixe sur le bord du disque et sur un point  $x$  intérieur, est isotope à l'identité par isotopie fixe sur le bord du disque et sur  $x$ .

Enfin on déduit des théorèmes 1.1., 1.2., 1.3. les groupes d'homotopie suivants (si  $D$  est un disque) :

$\pi_i \text{Aut}(D; \text{id}_{\partial D})$  est trivial pour tout  $i \geq 0$ .

$\pi_i \text{Aut}(D; \text{id}_{\partial D}; x)$  (où  $x \in \text{int } D$ ) est trivial pour tout  $i \geq 0$ .

$\pi_i \text{Aut}^+ D$  est trivial pour  $i \neq 1, i \geq 0$ .

$\pi_1 \text{Aut}^+ D \simeq \mathbb{Z}$ .

## 2. Homotopie et Isotopie d'arcs, de courbes, de plongements.

### 2.1. Isotopie et Isotopie ambiante de plongements.

Etant donné une surface à bord généralisé  $X$  et un 1-complexe topologique compact  $K$ , on dira que deux plongements  $i_0$  et  $i_1$  de  $K$  dans  $X$  sont isotopes s'il existe une application continue  $f$  de  $K \times I$  dans  $X$  telle que pour tout  $t \in I$ , l'application  $f_t : K \rightarrow X$ ,  $x \mapsto f(x, t)$ , soit un plongement de  $K$  dans  $X$ , avec  $f_0 = i_0$  et  $f_1 = i_1$  ;  $(f_t)_{t \in I}$  est alors appelée isotopie (simple) de  $i_0$  à  $i_1$ .

Une isotopie de  $X$  est une application continue :

$$\varphi : X \times I \rightarrow X$$

telle que pour tout  $t \in I$ , l'application  $\varphi_t : X \rightarrow X, x \mapsto \varphi(x, t)$ , soit un homéomorphisme de  $X$ , avec  $\varphi_0 = \text{id}_X$ . On dit que l'isotopie  $\varphi$  est fixe sur un sous-espace  $A$  de  $X$  si pour tout  $t \in I, \varphi_t|_A = \text{id}_A$ .

Le support d'une isotopie  $\varphi$  de  $X$  est le complémentaire dans  $X$  de la plus grande partie sur laquelle  $\varphi$  est fixe.

Deux plongements  $i_0$  et  $i_1$  de  $K$  dans  $X$  sont dits isotopes par isotopie ambiante de  $X$ , s'il existe une isotopie  $\varphi$  de  $X$  telle que  $\varphi_1 \circ i_0 = i_1$  (i.e. : s'il existe un homéomorphisme  $\varphi_1$  de  $X$ ,  $\varphi_1$  isotope à  $\text{id}_X$ , tel que  $\varphi_1 \circ i_0 = i_1$ ) ; noter qu'alors  $\varphi_t \circ i_0 = f_t$  est une isotopie simple de  $i_0$  à  $i_1$ .

## 2.2. Prolongement des isotopies.

Théorème : Soient  $X$  une surface à bord et  $\varphi : \partial X \times I \rightarrow \partial X$  une isotopie de  $\partial X$ , alors  $\varphi$  s'étend en une isotopie  $\tilde{\varphi}$  ( $\tilde{\varphi} : X \times I \rightarrow X$ ) de  $X$ , fixe en dehors d'un système de colliers (cf III.4.2.1.) sur  $\partial X$ .

Démonstration : cela résulte immédiatement du fait (qu'on va démontrer ci-dessous) que toute isotopie de la composante  $S^1 \times \{1\}$  du bord du cylindre standard  $S^1 \times I$  s'étend en une isotopie de  $S^1 \times I$ , fixe sur  $S^1 \times \{0\}$  :

Soit donc  $\varphi : S^1 \times \{1\} \times I \rightarrow S^1 \times \{1\}$  une isotopie de  $S^1 \times \{1\}$  ; alors, pour tout  $\lambda \in I, \varphi_\lambda : S^1 \times \{1\} \rightarrow S^1 \times \{1\}$  qui à  $x \in S^1 \times \{1\}$  associe  $\varphi_\lambda(x) = \varphi(x, \lambda)$  est un homéomorphisme orienté de  $S^1 \times \{1\}$ . On a  $\varphi_0 = \text{id}_{S^1 \times \{1\}}$ . Un point de  $S^1 \times I$  est un couple  $(e^{i\theta}, t), \theta \in \mathbb{R}, t \in I$ .  $\varphi_\lambda$  induit une application continue strictement croissante  $\tilde{\varphi}_\lambda$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $\varphi_\lambda(e^{i\theta}, 1) = (e^{i\tilde{\varphi}_\lambda(\theta)}, 1), (\forall n \in \mathbb{N}) \tilde{\varphi}_\lambda(\theta + 2n\pi) = \tilde{\varphi}_\lambda(\theta) + 2n\pi,$

et telle que  $\tilde{\varphi}_\lambda(0)$  dépende continument de  $\lambda \in I$ . Soit alors :

$\tilde{\Phi}_\lambda(\theta, t) = (1-t)\theta + t \tilde{\varphi}_\lambda(\theta)$  ; pour  $t$  fixé  $\tilde{\Phi}_\lambda(\theta, t)$  est une fonction continue strictement croissante de  $\theta$  telle que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \tilde{\Phi}_\lambda(\theta + 2n\pi, t) = \tilde{\Phi}_\lambda(\theta, t) + 2n\pi$ . Alors l'application  $\tilde{\Phi}_\lambda$  définie par  $\tilde{\Phi}_\lambda(e^{i\theta}, t) = (e^{i\tilde{\Phi}_\lambda(\theta, t)}, t)$  est un homéomorphisme de  $S^1 \times I$  fixe sur  $S^1 \times \{0\}$ , coïncidant avec  $\varphi_\lambda$  sur  $S^1 \times \{1\}$ , dépendant continument du paramètre  $\lambda \in I$  et tel que  $\tilde{\Phi}_0 = \text{id}_{S^1 \times I}$  : c'est une isotopie de  $S^1 \times I$  répondant au problème.

On rappelle ci-dessous deux propositions connues et on en donne une brève démonstration due à Epstein [32].

**2.3 Proposition :** Soient  $X$  une surface à bord et deux plongements homotopes  $i_0$  et  $i_1$  de  $S^1$  dans  $X$ . On note  $\gamma_0 = i_0(S^1)$ ,  $\gamma_1 = i_1(S^1)$  et on suppose que les courbes simples  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  ne se rencontrent qu'en un nombre fini de points d'intersection, en lesquelles elles sont topologiquement transverses, alors si  $\gamma_0 \cap \gamma_1 \neq \emptyset$  :

1°) Il existe un disque  $D$  de  $X$  dont la frontière est réunion d'un arc de  $\gamma_0$  et d'un arc de  $\gamma_1$ , l'intérieur de ce disque ne contenant aucun point de  $\gamma_0$  ou  $\gamma_1$ .

2°) Il existe une isotopie ambiante de  $X$  fixe sur  $\partial X$ , transformant  $i_0$  en  $i'_0$ , tel que si  $\gamma'_0 = i'_0(S^1)$  on ait :  $\gamma'_0 \cap \gamma_1 = \emptyset$ .

Démonstration : on démontre d'abord le lemme :

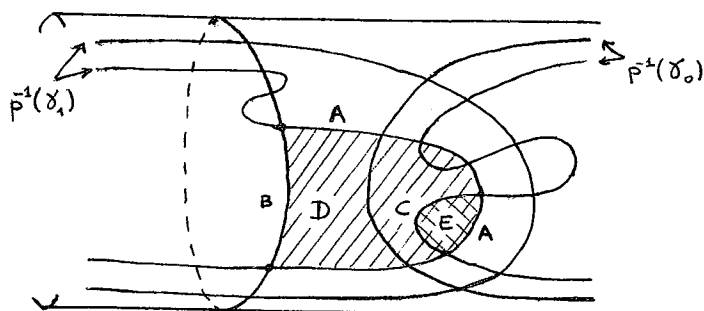
**2.3.1. lemme :** Soient  $X$  une surface à bord, et  $p : X' \rightarrow X$  un revêtement de  $X$ ,  $X'$  non compact. Soit  $D$  un disque de  $X'$  tel que  $p|_{\partial D}$  soit injective, alors  $p|_D$  est injective.

Preuve [32]: en remontant  $D$  au revêtement universel de  $X'$  on constate qu'on peut supposer sans perte de généralité que  $X'$  est le revêtement universel de  $X$ . Soient  $x, y \in D$  avec  $p(x) = p(y)$ . On suppose  $x \neq y$  et on va trouver une contradiction : Soit  $\tau : X' \rightarrow X'$  un automorphisme du revêtement  $X' \xrightarrow{p} X$  tel que  $\tau(x) = y$ ;  $D \cup \tau(D)$  est compact et connexe. Puisque  $\partial D \cap \tau(\partial D) = \emptyset$ , on vérifie de suite que  $D \cup \tau(D)$  est une sous-variété à bord de  $X'$ . La frontière de cette sous-variété est soit  $D$ , soit  $\tau(\partial D)$  (Cela ne peut être  $\partial D \cup \tau(\partial D)$ , puisque  $\partial D$  est homotope à un point dans  $D \cup \tau(D)$ ). Donc, on a soit  $\tau(D) \subset D$ , soit  $D \subset \tau(D)$ . On peut supposer sans restriction que  $\tau(D) \subset \text{int } D$ . Alors  $\tau^k(D) \subset \tau^{k-1}(D)$  pour tout  $k$ , mais  $\text{int } D \cap p^{-1}(p(\partial D))$  ne possède qu'un nombre fini de composantes : d'où la contradiction.

2.3.2. démonstration de la proposition 2.3. (cf. toujours [32]).

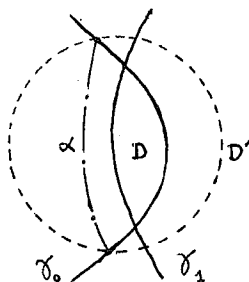
Soit  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  un revêtement de  $X$  ayant un groupe fondamental engendré par  $\tilde{i}_0 : S^1 \rightarrow \tilde{X}$ , un relèvement de  $i_0$ . Alors  $\tilde{X}$  est orientable et  $\text{int } \tilde{X}$  est homéomorphe au cylindre ouvert  $S^1 \times \mathbb{R}$ . Soit une homotopie de  $i_0$  à  $i_1$ , son relèvement à  $\tilde{X}$  définit une homotopie du relèvement  $\tilde{i}_0$  de  $i_0$  à un relèvement  $\tilde{i}_1$  de  $i_1$ . Les courbes  $\tilde{i}_0(S^1)$  et  $\tilde{i}_1(S^1)$  séparent toutes les deux  $\tilde{X}$ , sinon elles seraient homotopes à zéro.

Puisque  $\gamma_0 \cap \gamma_1 \neq \emptyset$  il existe un arc  $A$  dans  $p^{-1}(\gamma_1)$  tel que  $A \cap \tilde{i}_0(S^1) = \partial A$ . (Pour voir cela, examiner séparément les cas  $\tilde{i}_1(S^1) \cap \tilde{i}_0(S^1) = \emptyset$  et  $\tilde{i}_1(S^1) \cap \tilde{i}_0(S^1) \neq \emptyset$ , ne pas oublier que les composantes de  $p^{-1}(\gamma_1)$  ne sont pas forcément des cercles).



Alors  $A$  avec un arc  $B$  de  $\tilde{i}_0(S^1)$  borde un disque  $D$  de  $\tilde{X}$ . Toutes les composantes de  $D \cap p^{-1}(\gamma_1)$  sont des arcs avec extrémités sur  $B$  : sans perte de généralité on peut remplacer  $A$  par un de ces arcs et on peut le choisir tel que  $\text{int } D \cap p^{-1}(\gamma_1) = \emptyset$ . De la même façon on trouve un arc  $C$  dans  $p^{-1}(\gamma_0)$  tel, qu'avec un sous arc de  $A$ , il borde un disque  $E \subset D$  de façon que  $\text{int } E$  ne rencontre ni  $p^{-1}(\gamma_0)$ , ni  $p^{-1}(\gamma_1)$ . Donc  $\gamma_0 \cap \gamma_1$  n'est pas réduit à un point puisqu'il contient  $p(\partial A)$ . On sait que  $p|_{\partial E}$  est injective, il résulte du lemme 2.1.1. que  $p|_E$  est aussi injective et cela démontre la première assertion de la proposition 2.3.

2.3.3. On considère maintenant le disque  $D$  mis en évidence par le 1°) de 2.3., on peut trouver un disque  $D'$ ,  $D' \subset \text{int } X$ , un peu plus grand que  $D$ , ( $D \subset \text{int } D'$ ) et ne rencontrant pas d'autres points de  $\gamma_0 \cap \gamma_1$  que les deux points qui sont sur  $\partial D$ .



On le choisit, de plus, de façon que  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  soient deux arcs de  $D'$  vérifiant  $\partial\gamma_i = \gamma_i \cap \partial D'$  (pour  $i = 0, 1$ ). Soit alors un arc  $\alpha$  de  $D'$  tel que  $\partial\alpha = \alpha \cap \partial D' = \partial\gamma_0$  et  $\alpha \cap \gamma_1 = \emptyset$ . Par le corollaire II 2.1.2. au théorème de Schoenflies on peut trouver un homéomorphisme  $h$  de  $D'$  sur  $D'$ , fixe sur  $\partial D'$ , envoyant  $\gamma_0 \cap D$  sur  $\alpha$ . Alors, d'après le théorème d'Alexander (cf. 1.1., 1.4)  $h$  est isotope à  $\text{id}_D$ , par une isotopie fixe sur  $\partial D'$ . L'isotopie inverse (i.e. de l'identité vers  $h$ ), étendue par l'identité sur  $X \setminus D'$  est une isotopie ambiante de  $X$  transformant  $\gamma_0 \cap D$  en  $\alpha$ , de plus elle est fixe sur  $\partial X$ . Cette opération permet de réduire  $\text{Card}(\gamma_0 \cap \gamma_1)$ ; en l'itérant pour tous les disques mis en évidence (successivement) par l'application du 1°), on finit par obtenir  $\gamma'_0$  telle que  $\gamma'_0 \cap \gamma_1 = \emptyset$ .

2.4. Proposition : Soit  $X$  une surface à bord. Soient deux injections continues  $i_0$  et  $i_1$  de  $I$  dans  $X$  d'images respectives  $A$  et  $B$ , arcs ayant même origine, même extrémité et tels que  $\partial X \cap A = \partial X \cap B = \partial A = \partial B$ . On suppose  $i_0$  et  $i_1$  homotopes à extrémités fixes ; alors il existe une isotopie ambiante de  $X$  fixe sur  $\partial X$  transformant  $i_0$  en  $i_1$ .

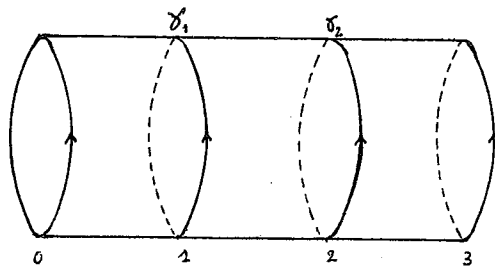
Démonstration (cf. [32]) : on peut supposer (cf. II 3.2.3) que  $A \cap B$  est formé d'un nombre fini de points d'intersection en lesquels  $A$  et  $B$  sont topologiquement transversaux. Alors la proposition découle immédiatement (en utilisant la méthode du paragraphe 2.3.3 ci-dessus) de ce qu'il existe un disque  $D$  de  $X$  dont la frontière est réunion d'un arc de  $A$  et d'un arc de  $B$  et dont l'intérieur ne rencontre pas  $A \cup B$ . En effet, on considère le revêtement universel  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  de  $X$  et on remarque que chaque composante de  $p^{-1}(A)$ , ainsi que chaque composante

de  $p^{-1}(B)$  sépare  $\tilde{X}$ . On applique alors le même raisonnement qu'en 2.3.2.

### 3. Etude des plongements de $S^1$ dans les surfaces.

3.1. Lemme : Soient deux plongements  $i_1$  et  $i_2$  de  $S^1$  dans le cylindre  $S^1 \times [0,3]$  tels que  $\gamma_1 = i_1(S^1) = S^1 \times \{1\}$  et  $\gamma_2 = i_2(S^1) = S^1 \times \{2\}$ , on suppose de plus que pour  $j = 1, 2$ , l'homéomorphisme  $i_j$  de  $S^1$  sur  $S^1 \times \{j\}$  est orienté ( $S^1$  et  $S^1 \times \{j\}$  étant munies chacune de l'orientation standard). Alors il existe une isotopie de  $S^1 \times [0,3]$ , fixe sur le bord, transformant  $i_1$  en  $i_2$  (i.e. :  $i_1$  et  $i_2$  sont isotopes par isotopie ambiante de  $S^1 \times [0,3]$ , fixe sur le bord).

Démonstration :



On note  $\mathcal{C} = S^1 \times [0,3]$ . Soit  $g$  l'homéomorphisme orienté de  $[0,3]$  défini par :

$$g(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{t+3}{2} & \text{si } 1 \leq t \leq 3. \end{cases}$$

Soit d'abord l'isotopie  $\varphi : \mathcal{C} \times I \rightarrow \mathcal{C}$ , de  $\mathcal{C}$ , définie par :

$$\varphi(z, t, \lambda) \in S^1 \times [0,3] \times I : \varphi(z, t, \lambda) = (z, (1-\lambda)t + \lambda g(t)).$$

Cette première isotopie transforme  $i_1$  en  $\varphi_1 \circ i_1 = i_1'$  d'image  $\gamma_2$ . Il existe alors un homéomorphisme orienté  $h$  de  $\gamma_2$  sur  $\gamma_2$  tel

que  $h \circ i_1 = i_2$  (i.e. :  $h = i_2 \circ (i_1^{-1}|_{Y_2})$ ). D'après I.1.5.1,  $h$  est isotope à  $\text{id}_{Y_2}$ . Soit donc  $h_\lambda$  ( $\lambda \in I$ ) une isotopie de  $\text{id}_{Y_2}$  à  $h$  (i.e. :  $h_\lambda$  est une famille d'homéomorphismes orientés de  $Y_2$ , dépendant continûment de  $\lambda$ , telle que  $h_0 = \text{id}_{Y_2}$ ,  $h_1 = h$ ). Soit maintenant un prolongement  $H_\lambda$  (théorème 2.2.) de cette isotopie, aux cylindres  $S^1 \times [0,2]$  d'une part et  $S^1 \times [2,3]$  d'autre part, en une isotopie de  $\mathcal{C}$ , fixe sur  $\partial \mathcal{C}$ . Alors l'isotopie  $H_\lambda \circ \varphi_\lambda$  ( $\lambda \in I$ ) transforme  $i_1$  en  $i_2$ , elle est fixe sur  $\partial \mathcal{C}$ .

3.2. On va maintenant démontrer par une nouvelle méthode utilisant le théorème de classification III 3.4.3. le résultat connu suivant (qu'on utilisera fréquemment) ; cf. [32] :

Proposition : Soit  $i_0$  un plongement de  $S^1$  dans une surface  $X$  à bord orientée. Si  $i$  est homotope à une constante alors  $\gamma$  borde un disque dans  $X$ .

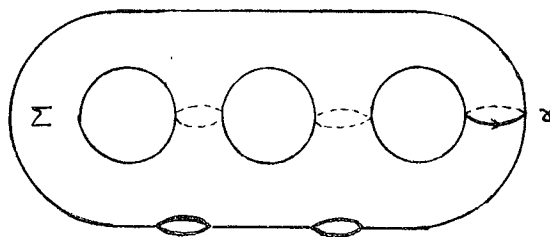
Démonstration : Il est clair qu'on peut supposer  $X$  connexe. Le théorème III 3.4.3 de classification permet d'examiner les différentes classes de plongements (à congruence près) de  $S^1$ . L'ensemble de ces classes est en bijection avec le systèmes d'invariants sur  $S^1$ . Comme une circularisation de  $S^1$  est vide, un système d'invariants est la donnée d'une famille  $\mathfrak{F} = \{(E_\lambda, g_\lambda, p_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$  où  $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  est une partition de l'ensemble  $\{a, a'\}$  des circuits de  $S^1$  (on note  $a$  l'arc de  $S^1$  obtenu en munissant  $S^1$  de l'orientation standard, on note  $a' = \sigma(a)$ ), où  $g_\lambda$  et  $p_\lambda$  sont des entiers,  $g_\lambda \geq 0$ ,  $p_\lambda \geq \text{Card } E_\lambda$ .

Il n'existe que deux partitions de  $\{a, a'\}$  qu'on va examiner successivement :

1°) partition  $\{a, a'\}$ , auquel cas le système d'invariants est de la forme

$(\{a, a'\}, g, p)$ , où  $g \geq 0$ ,  $p \geq 2$ . D'après III.3.4.3. la découpe  $\Sigma(X, \gamma)$  de  $X$  suivant  $\gamma$  est une surface de type  $(g, p)$  et on obtient  $X$  (à homéomorphisme canonique près) en recollant  $\Sigma(X, \gamma)$  sur  $\gamma$  par deux composantes de son bord (l'une est la rive gauche, l'autre la rive droite, de  $\gamma$  dans  $X$ ).

$g = 2, p = 4 :$

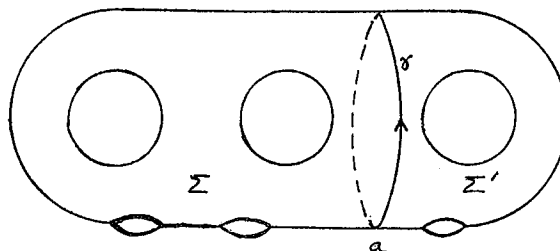


Dans  $H_1(X)$  le 1-cycle défini par  $\gamma$  fait partie d'une base d'homologie, il est non nul et  $\gamma$ , n'étant pas homologue à zéro, ne peut être homotope à un point.

2°) partition  $\{a\} \sqcup \{a'\}$ , auquel cas le système d'invariants est de la forme  $\{(\{a\}, g, p), (\{a'\}, g', p')\}$ . D'après III.3.4.3. la découpe  $\Sigma(X, \gamma)$  de  $X$  suivant  $\gamma$  est réunion disjointe de deux surfaces  $\Sigma$  (de type  $(g, p)$ ) et  $\Sigma'$  (de type  $(g', p')$ ). Une composante de  $\partial \Sigma$  (resp.  $\partial \Sigma'$ ) est la rive gauche (resp. droite) de  $\gamma$  dans  $X$ . On obtient  $X$  (à homéomorphisme canonique près) en recollant  $\Sigma(X, \gamma)$  sur  $\gamma$ , à l'aide des projections canoniques des rives sur  $\gamma$ .

$g = 2, p = 3$

$g' = 1, p' = 2$



Un calcul simple d'homologie montre que, puisque  $\gamma$  est homologue à 0, l'un au moins des entiers  $p, p'$  est égal à 1. On supposera donc dans la suite :  $p = 1$ . En appliquant le théorème de Van Kampen, si  $x \in \gamma$ ,  $\pi_1(X; x)$  est la somme amalgamée sous  $\mathbb{Z}$  des groupes libres  $\pi_1(\Sigma; x)$  et  $\pi_1(\Sigma'; x)$  définis par générateurs et relations par :

$$\pi_1(\Sigma; x) = \{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, c_0; c_0[a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] = 1\}$$

$$\pi_1(\Sigma'; x) = \{a'_1, b'_1, \dots, a'_g, b'_g, c'_0, c'_1, \dots, c'_{p'-1}; c'_0 c'_1 \dots c'_{p'-1} [a'_1, b'_1] \dots [a'_{g'}, b'_{g'}] = 1\}$$

Les homomorphismes  $\varphi, \varphi'$  de  $\mathbb{Z}$  dans  $\pi_1(\Sigma; x), \pi_1(\Sigma'; x)$  respectivement, étant définis par :  $\varphi(1) = c_0^{-1}$ ,  $\varphi'(1) = c'_0$ . La courbe  $\gamma$  (orientée par  $a$ ) correspond au lacet  $c_0^{-1} = c'_0$  de  $\pi_1(X; x)$ , ce dernier groupe a pour système de générateurs  $\{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, a'_1, b'_1, \dots, a'_{g'}, b'_{g'}, c'_1, c'_2, \dots, c'_{p'-1}\}$  et "pour unique relation" :

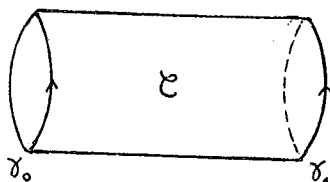
$$c'_1 c'_2 \dots c'_{p'-1} [a'_1, b'_1] \dots [a'_{g'}, b'_{g'}] [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] = 1.$$

Si  $p' > 1$ , ce groupe  $\pi_1(X; x)$  est un groupe libre, et donc l'élément  $c'_0 = c_0^{-1} = [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g]$  n'est égal à 1 que si  $g = 0$ , auquel cas  $\Sigma$  est de type  $(0, 1)$  : c'est donc un disque (bordé par  $\gamma$ ).

Si  $p' = 1$ , le groupe  $\pi_1(X; x)$  n'est plus libre, mais c'est un groupe quadratique de surface, à une relation, dans lequel on sait résoudre le problème des mots et montrer que si  $g$  et  $g'$  sont tous les deux non nuls l'élément  $c'_0 = c_0^{-1} = [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] = ([a'_1, b'_1] \dots [a'_{g'}, b'_{g'}])^{-1}$  est différent de 1. On en déduit que  $g$  (ou  $g'$ ) est nul ce qui entraîne que  $\Sigma$  (ou  $\Sigma'$ ) est un disque bordé par  $\gamma$ .

**3.3. Proposition :** Etant donné deux plongements homotopes  $i_0$  et  $i_1$  de  $S^1$  dans une surface  $X$  à bord orientée, d'images respectives  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  telles que  $\gamma_0 \cap \gamma_1 = \emptyset$ , si on suppose de plus que ni  $\gamma_0$  ni  $\gamma_1$

ne borde un disque de  $X$ , alors il existe un cylindre  $\mathcal{C}$  dans  $X$  tel que  $\partial \mathcal{C} = \gamma_0 \amalg \gamma_1$ , une et une seule des courbes  $\gamma_0, \gamma_1$  (orientée par l'orientation standard de  $S^1$ ) ayant l'orientation induite par  $\mathcal{C}$  sur son bord.



Démonstration : Cette proposition est connue, on en trouvera une démonstration dans [32]. Nous indiquons brièvement ci-dessous comment le théorème de classification III.3.4.3 permet d'en donner une nouvelle démonstration, analogue à la démonstration de la proposition 3.2. :  $i_0$  et  $i_1$  induisent un plongement  $j$  du 1-complexe  $K = S^1 \times \{0,1\}$  (orienté par l'orientation standard de  $S^1$ ) dans  $X$ . Notons  $a, a', b, b'$  les quatre arcs de  $K$ , (avec  $a' = \sigma(a)$ ,  $b' = \sigma(b)$ ,  $a$  étant l'arc  $S^1 \times \{0\}$ ,  $b$  l'arc  $S^1 \times \{1\}$ , orientés par  $S^1$ ). D'après III 3.4.3.  $j$  est congru à un plongement "standard" ayant mêmes invariants. On examine tous les plongements possibles (à congruence près) de  $K$  dans une surface orientée à bord en examinant tous les systèmes d'invariants sur  $K$ . Un tel système étant d'abord la donnée d'une partition de  $F(k, \omega)$ , on considère les 15 partitions de cet ensemble à quatre éléments :  $\{a, a', b, b'\}$ . Elles se répartissent en 9 catégories :

1°) partition  $\{a, a', b, b'\}$  : la découpe  $\Sigma(X, \gamma_0 \cup \gamma_1)$  de  $X$  suivant  $\gamma_0 \cup \gamma_1$  est une surface à bord de type  $(g, p)$ ,  $p \geq 4$ , dont une composante du bord est la rive gauche de  $\gamma_0$  dans  $X$ , une autre est la rive droite

de  $\gamma_0$ , une troisième est la rive gauche de  $\gamma_1$  et une quatrième est la rive droite de  $\gamma_1$ . On vérifie alors que  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  ne sont pas homotopes car non homologues (voir figure ci-dessous, type 1).

2°) partition  $\{a\} \perp\!\!\!\perp \{a', b, b'\}$  (ou, de façon analogue,  $\{a'\} \perp\!\!\!\perp \{a, b, b'\}$ ,  $\{b\} \perp\!\!\!\perp \{a', b, b'\}$ ,  $\{b'\} \perp\!\!\!\perp \{a, a', b\}$ ). Ce type de plongement est schématisé sur la figure ci-dessous type 2,  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  ne sont pas homotopes car non homologues.

3°) partition  $\{a\} \perp\!\!\!\perp \{a'\} \perp\!\!\!\perp \{b, b'\}$  (ou, de façon analogue,  $\{b\} \perp\!\!\!\perp \{b'\} \perp\!\!\!\perp \{a, a'\}$ ). Alors  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  n'appartiennent même pas à la même composante de  $X$ .

4°) partition  $\{a\} \perp\!\!\!\perp \{b\} \perp\!\!\!\perp \{a', b'\}$  (ou encore  $\{a'\} \perp\!\!\!\perp \{b'\} \perp\!\!\!\perp \{a, b\}$ ). Voir schéma ci-dessous type 4,  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  ne peuvent être homotopes (méthode analogue à 3.2. 2°)).

5°) partition  $\{a\} \perp\!\!\!\perp \{b'\} \perp\!\!\!\perp \{a', b\}$  (ou encore  $\{a'\} \perp\!\!\!\perp \{b\} \perp\!\!\!\perp \{a, b'\}$ ).

Voir schéma ci-dessous, type 5. Dans ce cas,  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  ne peuvent être homotopes que si la composante  $\Sigma_{a', b}$  de la découpe  $\Sigma(X, \gamma_0 \cup \gamma_1)$  (correspondant à la classe  $\{a', b\}$  de la partition) est de type  $(0, 2)$ , autrement dit si c'est un cylindre  $\mathcal{C}$ .

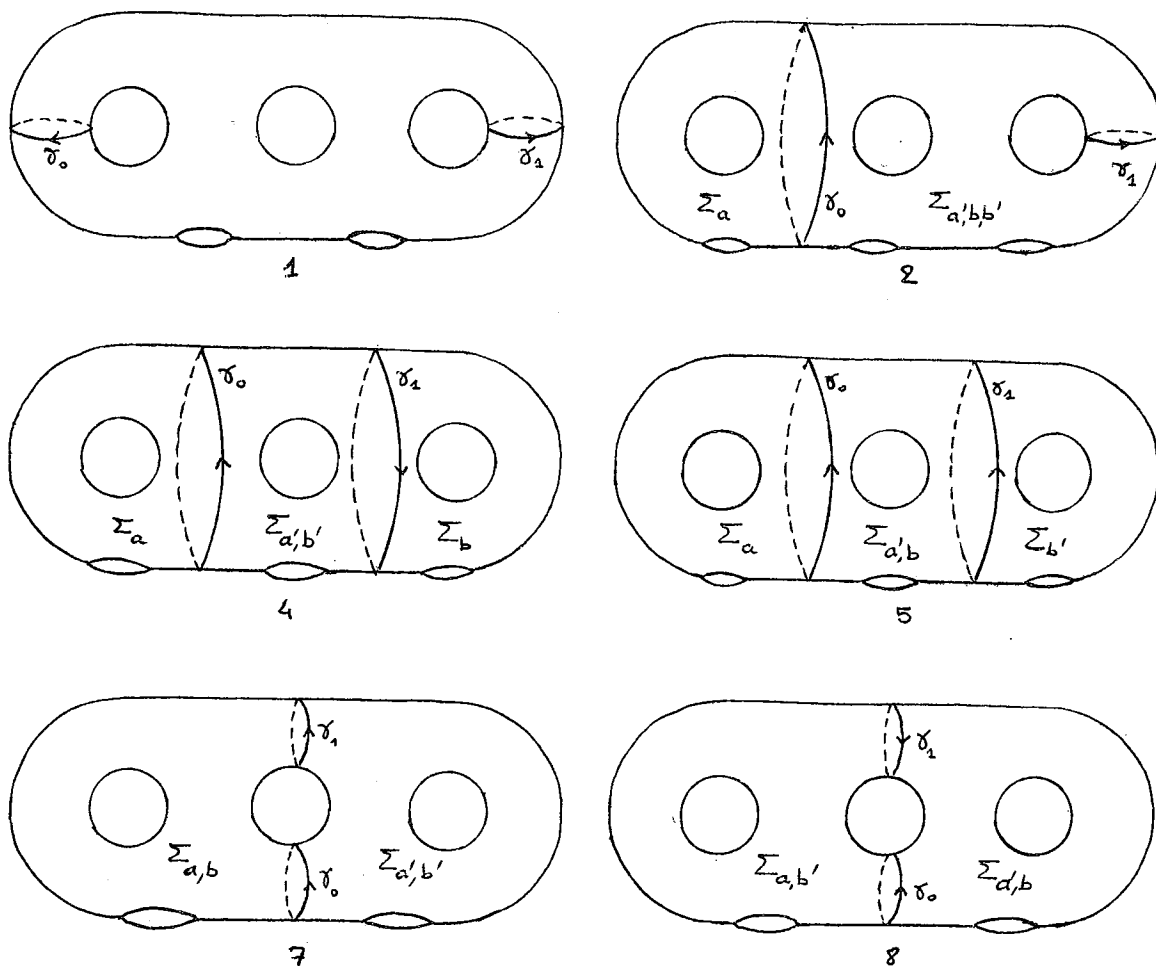
6°) partition  $\{a, a'\} \perp\!\!\!\perp \{b, b'\}$  :  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  n'appartiennent pas à la même composante de  $X$ .

7°) partition  $\{a, b\} \perp\!\!\!\perp \{a', b'\}$ . Voir schéma ci-dessous type 7,  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  ne peuvent être homotopes (ni même homologues).

8°) partition  $\{a, b'\} \perp\!\!\!\perp \{a', b\}$ . Voir schéma ci-dessous type 8. Dans ce cas,  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  ne peuvent être homotopes que si une (au moins) des composantes  $\Sigma_{a, b'}$  et  $\Sigma_{a', b}$  de la découpe  $\Sigma(X, \gamma_0 \cup \gamma_1)$  (correspondant

respectivement aux classes  $\{a, b'\}$  et  $\{a', b\}$  de la partition) est de type  $(0, 2)$ , autrement dit si c'est un cylindre  $\mathcal{C}$ .

9°) partition  $\{a\} \perp \perp \{b\} \perp \perp \{a'\} \perp \perp \{b'\}$  :  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  n'appartiennent pas à la même composante de  $X$ .



3.4. Proposition : On considère le cylindre  $\mathcal{C} = S^1 \times I$ . On note  $i_0$  le plongement standard de  $S^1$  dans  $\mathcal{C}$  défini par  $i_0(x) = (x, \frac{1}{2})$  pour tout  $x \in S^1$  ; on a alors  $i_0(1) = \omega$ , où  $\omega$  désigne le point  $(1, \frac{1}{2})$  de  $\mathcal{C}$ . Soit  $i_1$  un autre plongement de  $S^1$  dans  $\mathcal{C}$ , tel que  $i_1(1) = \omega$  et tel que  $i_0$  et  $i_1$  soient homotopes. Soit  $\mathcal{C}'$  un cylindre  $S^1 \times [\alpha, \beta]$  de  $\mathcal{C}$  avec  $0 < \alpha < \beta < 1$  tel que  $i_1(S^1) \subset \text{int } \mathcal{C}'$ . Il existe une

isotopie ambiante de  $\mathcal{C}$ , de support contenu dans  $\mathcal{C}'$ , fixe sur  $\omega$ , transformant  $i_1$  en  $i_0$ .

Remarque : on pourrait, dès à présent, démontrer un théorème analogue sur l'isotopie des plongements de  $S^1$  dans  $X$  (surface à bord de type quelconque), mais on se limite au cas du cylindre qui nous est utile pour l'instant. Notre but est, en effet, de démontrer un résultat beaucoup plus général sur l'isotopie des plongements de  $K$  dans  $X$ , où  $K$  est un 1-complexe compact quelconque et  $X$  une surface orientée de type quelconque. Pour le cas de  $S^1$ , voit l'article de D.B.A. Epstein : [32].

Démonstration. Notons  $\gamma_0 = i_0(S^1)$ ,  $\gamma_1 = i_1(S^1)$ . Soit  $\mathcal{C}''$  un cylindre de la forme  $S^1 \times [\alpha', \beta']$  contenu dans  $\text{int } \mathcal{C}'$  (i.e. :  $0 < \alpha < \alpha' < \beta' < \beta < 1$ ) et contenant  $\gamma_0, \gamma_1$ . Alors  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  sont des courbes simples orientées (par l'orientation standard de  $S^1$ ) de  $\mathcal{C}''$ .

Par II 3.2.1. on peut supposer, quitte à effectuer une isotopie de  $\mathcal{C}''$  fixe sur  $\partial \mathcal{C}''$ , que  $\gamma_0 \cap \gamma_1$  est formé d'un nombre fini de points d'intersection en lesquels  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  sont topologiquement transversales. Par 2.3. il existe une isotopie ambiante de  $\mathcal{C}''$ , fixe sur  $\partial \mathcal{C}''$ , transformant  $i_1$  en  $i_1'$  de façon que si  $\gamma_1' = i_1'(S^1)$ , alors  $\gamma_0 \cap \gamma_1' = \emptyset$ . Par 3.3.  $\gamma_0 \perp \gamma_1'$  borde un cylindre  $\mathcal{C}'''$  de  $\text{int } \mathcal{C}''$ , avec des orientation incompatibles avec tout orientation de  $\mathcal{C}'''$ . Par le lemme 3.1. il résulte que  $i_1'$  et  $i_0$  sont isotopes par une isotopie ambiante de  $\mathcal{C}''$ , fixe sur  $\partial \mathcal{C}''$ . On vient donc de montrer, au total qu'il existe une isotopie ambiante  $\varphi_t$  de  $\mathcal{C}''$ , fixe sur  $\partial \mathcal{C}''$ , transformant  $i_0$  en  $i_1$  (i.e. :  $\varphi_0 = \text{id}_{\mathcal{C}''}$ ,  $\varphi_1 \circ i_0 = i_1$  ; pour tout  $t \in I$ ,  $\varphi_t$  est un homéomorphisme de  $\mathcal{C}''$ , dépendant continûment de  $t$ ). On prolonge cette isotopie à  $\mathcal{C}$  par l'identité sur  $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}''$  : on désigne cette extension

par  $\tilde{\varphi}_t$ . L'isotopie  $\tilde{\varphi}_t$  n'est peut être pas fixe sur  $\omega$ . Notons  $\omega(t) = \tilde{\varphi}_t(\omega)$ , alors  $\omega(t)$  est un lacet de  $\mathcal{C}''$ , d'origine  $\omega$ , puisque :  
 $\omega(0) = \tilde{\varphi}_0(\omega) = \omega$ ,  $\omega(1) = \tilde{\varphi}_1(\omega) = \tilde{\varphi}_1(i_0(0)) = i_1(0) = \omega$ .

Lemme : il existe une isotopie  $\tilde{\psi}_t$ ,  $t \in I$ , de  $\mathcal{C}$ , fixe en dehors de  $\text{int } \mathcal{C}'$ , telle que :  $\forall t \in I \quad \tilde{\psi}_t(\omega) = \omega(t)$ ,  $\tilde{\psi}_0 = \text{id}_{\mathcal{C}}$ ,  $\tilde{\psi}_1|_{\mathcal{C}''} = \text{id}_{\mathcal{C}''}$ .

Supposons pour l'instant ce lemme démontré, alors l'isotopie  $\xi_t$  de  $\mathcal{C}$  définie par  $\xi_t = \tilde{\psi}_t^{-1} \circ \tilde{\varphi}_t$  ( $t \in I$ ) répond au problème ; en effet :  $\xi_0 = \tilde{\psi}_0^{-1} \circ \tilde{\varphi}_0 = \text{id}_{\mathcal{C}}$ ,  $\xi_t$  est fixe en dehors de  $\text{int } \mathcal{C}'$  puisque  $\tilde{\psi}_t$  et  $\tilde{\varphi}_t$  le sont, on a :

$\xi_t(\omega) = \tilde{\psi}_t^{-1} \circ \tilde{\varphi}_t(\omega) = \tilde{\psi}_t^{-1}(\omega(t)) = \omega$ , enfin :  
 $\xi_1 \circ i_0 = \tilde{\psi}_1^{-1} \circ \tilde{\varphi}_1 \circ i_0 = \tilde{\psi}_1^{-1} \circ i_1 = i_1$ , car  $\tilde{\psi}_1$  est fixe sur  $\mathcal{C}''$  et  $i_1(S^1)$  est contenu dans  $\mathcal{C}''$ .

Il reste à démontrer le lemme :

Pour simplifier, on se ramène (par homéomorphisme) au cas où  $\mathcal{C}''$  est le cylindre  $S^1 \times [0,1]$ ,  $\mathcal{C}'$  le cylindre  $S^1 \times [a,b]$  avec  $a < 0 < 1 < b$ .

Un point de  $\mathcal{C}'$  est un couple  $(e^{i\theta}, h)$  où  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $h \in [a,b]$ . Alors  $\omega(t) = (e^{i\theta(t)}, \frac{1}{2} + \rho(t))$ , où  $\theta(t)$  et  $\rho(t)$  sont deux fonctions continues de  $t \in I$  avec :

$\theta(0) = \rho(0) = 0$ ,  $\theta(1) = 2\pi$ ,  $\rho(1) = 0$ , et  $(\forall t \in I) : -\frac{1}{2} < \rho(t) < \frac{1}{2}$ .

On définit alors  $\psi_t = \tilde{\psi}_t|_{\mathcal{C}''}$  en posant pour tout point  $(e^{i\theta}, h)$  de  $\mathcal{C}''$  :

$$\psi_t(e^{i\theta}, h) = (e^{i(\theta + \theta(t))}, 4(1-h)h\rho(t) + h)$$

On vérifie que  $\psi_t$  est une isotopie de  $\mathcal{C}''$  et qu'on a  $\psi_0 = \psi_1 = \text{id}_{\mathcal{C}''}$ ,

en effet :

$$\psi_0(e^{i\theta}, h) = (e^{i(\theta + \theta(0))}, 4(1-h)h\rho(0) + h) = (e^{i\theta}, h)$$

$$\psi_1(e^{i\theta}, h) = (e^{i(\theta + \theta(1))}, 4(1-h)h\rho(1) + h) = (e^{i(\theta + 2\pi)}, h)$$

On a, pour tout  $t \in I$ ,  $\psi_t(\omega) = \psi_t(1, \frac{1}{2}) = (e^{i\theta(t)}, \rho(t) + \frac{1}{2}) = \omega(t)$ .

La restriction de  $\psi_t$  à  $S^1 \times \{0\}$  (resp.  $S^1 \times \{1\}$ ) induit une isotopie de  $S^1 \times \{0\}$  (resp.  $S^1 \times \{1\}$ ), puisque  $\psi_t(e^{i\theta}, 0) = (e^{i(\theta+\theta(t))}, 0)$  (resp. : puisque  $\psi_t(e^{i\theta}, 1) = (e^{i(\theta+\theta(t))}, 1)$ ), menant de  $\psi_0|_{S^1 \times \{0\}} = \text{id}_{S^1 \times \{0\}}$  (resp. :  $\psi_0|_{S^1 \times \{1\}} = \text{id}_{S^1 \times \{1\}}$ ) à  $\psi_1|_{S^1 \times \{0\}} = \text{id}_{S^1 \times \{0\}}$  (resp. :  $\psi_1|_{S^1 \times \{1\}} = \text{id}_{S^1 \times \{1\}}$ ). Cette isotopie de  $\partial \mathcal{C}''$  s'étend (théorème 2.2.) en une isotopie de  $\mathcal{C}'$  (il suffit de l'étendre aux cylindres  $S^1 \times [a, 0]$ ,  $S^1 \times [1, b]$ ), fixe sur  $\partial \mathcal{C}'$ . On l'étend alors par l'identité sur  $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}'$ , pour obtenir l'isotopie  $\psi_t$  cherchée.

### 3.5. Classes de congruence de plongements de $S^1$ dans le cylindre

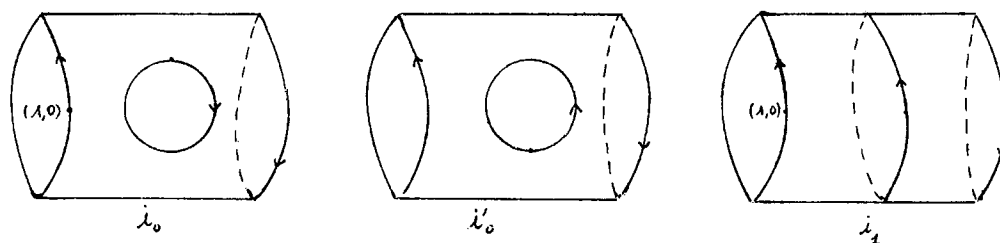
3.5.1 On considère le cylindre  $S^1 \times I$  orienté de façon standard. Si  $z \in S^1$ ,  $z$  est un nombre complexe de module 1 dont on note  $\text{Re}(z)$  la partie réelle,  $\text{Im}(z)$  la partie imaginaire,  $\bar{z}$  le conjugué et  $\theta \in \mathbb{R}$  l'argument :  $\text{Re}(z) = \cos \theta$ ,  $\text{Im}(z) = \sin \theta$ , ( $\theta$  est défini modulo  $2\pi$ ).

On définit trois plongements  $i_0, i'_0, i_1$  de  $S^1$  dans  $S^1 \times I$  par :

$$\forall z \in S^1, i_0(z) = (e^{\frac{i\pi \text{Re}(z)}{4}}, \frac{2+\text{Im}(z)}{4})$$

$$\forall z \in S^1, i'_0(z) = (e^{-\frac{i\pi \text{Re}(z)}{4}}, \frac{2+\text{Im}(z)}{4})$$

$$\forall z \in S^1, i_1(z) = (z, \frac{1}{2})$$



Soit  $a$  l'arc de  $S^1$  constitué par  $S^1$  muni de l'orientation standard et posons  $a' = \sigma(a)$ .

Les invariants des plongements  $i_0, i'_0, i_1$  sont (respectivement) :

$$\mathcal{F}(i_0) = \{(\{a\}, 0, 1), (\{a'\}, 0, 3)\}$$

$$\mathcal{F}(i'_0) = \{(\{a'\}, 0, 1), (\{a\}, 0, 3)\}$$

$$\mathcal{F}(i_1) = \{(\{a\}, 0, 2), (\{a'\}, 0, 2)\}$$

3.5.2. Proposition : Il y a trois classes de congruence de plongements de  $S^1$  dans  $S^1 \times I$  orienté : ce sont les classes de  $i_0, i'_0, i_1$  définies ci-dessus.

Démonstration : D'après le théorème de classification (III.3.4.3.) il suffit d'examiner les systèmes d'invariants sur  $S^1$  qui correspondent à un plongement  $j$  de  $S^1$  dans un cylindre  $\mathcal{C}$ . Un tel système se réduit à une famille  $\mathcal{F}(j) = \{(E_\lambda, g_\lambda, p_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ . On examine d'abord la partition  $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  de l'ensemble  $\{a, a'\}$  des circuits de  $S^1$  (On note  $a$  le circuit constitué par  $S^1$  muni de l'orientation standard, et  $a' = \sigma(a)$ ). Cette partition est l'une des deux partitions possibles de  $\{a, a'\}$ .

1°) partition  $\{a, a'\}$ , alors  $\mathcal{C}$  est obtenu en recollant une surface à bord  $\Sigma$  de type  $(g, p)$  sur un voisinage tubulaire  $T$  de  $j(S^1)$ , une composante de  $\partial\Sigma$  étant recollée sur chaque composante de  $\partial T$ . Soit  $\chi(\Sigma)$  la caractéristique d'Euler Poincaré de  $\Sigma$ , on a  $\chi(\Sigma) = 2 - 2g - p$ . Comme  $\mathcal{C}$  est un cylindre on doit avoir  $p = 4$ , on sait aussi que  $\chi(\mathcal{C}) = 0$ , or si  $X$  est un espace topologique réunion de  $X'$  et  $X''$  on sait que  $\chi(X) = \chi(X') + \chi(X'') - \chi(X' \cap X'')$  et par conséquent  $\chi(\mathcal{C}) = \chi(T) + \chi(\Sigma) = \chi(j(S^1)) + \chi(\Sigma) = \chi(\Sigma)$ . Il en résulte  $\chi(\Sigma) = 0$ , et si  $\tilde{\Sigma}$  est la surface sans bord obtenue en recollant 4 disques sur  $\partial\Sigma$ ,

on obtient  $\chi(\tilde{\Sigma}) = 4$ , ce qui est une contradiction puisque la caractéristique d'Euler Poincaré d'une surface orientable sans bord est inférieure à +2.

2°) partition  $\{a\} \sqcup \{a'\}$ , alors  $\mathcal{F}(j) = \{(\{a\}, g, p), (\{a'\}, g', p')\}$ .

$\mathcal{C}$  est alors obtenu en recollant deux surfaces à bord  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  (de types respectifs  $(g, p)$  et  $(g', p')$ ) sur un cylindre  $T$  voisinage tubulaire de  $j(S^1)$ ,  $\Sigma$  (resp.  $\Sigma'$ ) étant recollée sur la composante de  $\partial T$  correspondant à la rive gauche (resp. : droite) de  $j(S^1)$ . Comme  $\mathcal{C}$  est un cylindre on doit avoir  $p + p' = 4$ , (et nécessairement  $p \geq 1$ ,  $p' \geq 1$ ). D'autre part  $\chi(\mathcal{C}) = \chi(\Sigma) + \chi(\Sigma')$ , or  $\chi(\Sigma) = 2 - 2g - p$  et  $\chi(\Sigma') = 2 - 2g' - p'$ . On en déduit, tenant compte de  $\chi(\mathcal{C}) = 0$ , que

$$0 = 4 - 2(g + g') - (p + p') = -2(g + g'), \text{ d'où } g + g' = 0 \text{ et comme } g \text{ et } g' \text{ sont positifs cela entraîne } g = g' = 0.$$

De la condition  $p + p' = 4$  on en déduit qu'il n'y a que trois possibilités (car  $p \geq 1, p' \geq 1$ ) :  $(p, p') = (3, 1)$ , ou  $(1, 3)$  ou enfin  $(2, 2)$ ., d'où trois systèmes d'invariants possibles seulement :

$$\mathcal{F}_0 = \{(\{a\}, 0, 1), (\{a'\}, 0, 3)\}$$

$$\mathcal{F}'_0 = \{(\{a\}, 0, 3), (\{a'\}, 0, 1)\}$$

$$\mathcal{F}_1 = \{(\{a\}, 0, 2), (\{a'\}, 0, 2)\}$$

Ce sont, respectivement, les systèmes d'invariants de  $i_0, i'_0, i_1$  (cf. 3.5.1.). Par le théorème de classification III 3.4.3., il résulte qu'il n'y a que ces trois classes de plongements.

#### 4. Le groupe des homéomorphismes du cylindre

4.1. Théorème : tout homéomorphisme  $h$  du cylindre  $\mathcal{C} = S^1 \times I$ , fixe sur  $\partial \mathcal{C}$ , est isotope à  $\text{id}_{\mathcal{C}}$  par une isotopie fixe sur la composante  $S^1 \times \{0\}$  de  $\partial \mathcal{C}$ .

Démonstration : Soit donc  $h \in \text{Aut}(\mathcal{C}; \text{id}_{\partial \mathcal{C}})$  et soient  $i_0$  et  $i_1$  les deux injections continues de  $I$  dans  $\mathcal{C}$  définies par :

$$\forall t \in I, i_0(t) = (1, t), i_1 = h \circ i_0.$$

(Ce ne sont pas des "plongements de 1-complexes", au sens où nous l'avons défini en II.1.3. car on n'a pas  $i_0(I) \subset \text{int } \mathcal{C}$ , ni  $i_1(I) \subset \text{int } \mathcal{C}$ , néanmoins, par abus de langage et pour simplifier, on emploiera ci-dessous le terme "plongement" pour les désigner).

Un point de  $S^1$  (cercle orienté de façon standard sur lequel on prend comme origine des arcs le point 1) sera repéré par la mesure d'un angle :  $\theta \in \mathbb{R}$ . Un point de  $S^1 \times I$  sera donc désigné par des "coordonnées"  $(\theta, h)$ ,  $\theta \in \mathbb{R}, h \in I$ .

Le "plongement"  $i_1$  induit une application continue de  $I$  dans  $\mathbb{R} \times I$ , qui à tout  $t$  associe  $(\theta(t), h(t))$ , "coordonnées" du point  $i_1(t)$ . On peut supposer que  $\theta(0) = 0$ , on a de plus  $h(0) = 0, h(1) = 1$ , et  $\theta(1)$  est un multiple de  $2\pi$  :  $\theta(1) = 2\pi n$  pour un certain entier  $n$  qu'on appellera le degré du "plongement". On va effectuer une première isotopie  $\varphi_\lambda, (\lambda \in I)$ , définie par  $\varphi_\lambda(\theta, h) = (\theta - 2\pi n\lambda h, h)$  : il est immédiat que  $\varphi_\lambda$  est un homéomorphisme de  $\mathcal{C}$ , fixe sur  $S^1 \times \{0\}$ , dépendant continûment de  $\lambda$ , et tel que  $\varphi_0 = \text{id}_{\mathcal{C}}, \varphi_1|_{\partial \mathcal{C}} = \text{id}_{\partial \mathcal{C}}$ . Cette isotopie transforme  $i_1$  en  $i'_1 = \varphi_1 \circ i_1$ , ce nouveau "plongement"  $i'_1$  est de degré 0.

lemme : tout "plongement"  $j : I \rightarrow \mathcal{C}$ , tel que  $j(0) = (1, 0), j(1) = (1, 1)$ , et de degré 0, est homotope au plongement standard  $i_0$  par homotopie à extrémités fixes.

En effet : ce plongement induit (par passages aux coordonnées) une application continue  $t \mapsto (\varphi(t), \rho(t)) \in \mathbb{R} \times I, (t \in I)$ , avec  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$  (car le degré est 0),  $\rho(0) = 0, \rho(1) = 1$ .

Une homotopie  $H : I \times I \rightarrow \mathcal{C}$  est définie par :

$H(t, \lambda) = ((1-\lambda)\varphi(t), \lambda t + (1-\lambda)\rho(t))$ . On a bien :

$H(t, 0) = (\varphi(t), \rho(t))$  : coordonnées de  $j(t)$ .

$H(t, 1) = (0, t)$  : coordonnées de  $i_0(t)$ .

De plus pour tout  $\lambda \in I$ ,  $H(0, \lambda) = (0, 0)$ ,  $H(1, \lambda) = (0, 1)$ .

Ceci achève la démonstration du lemme.

On déduit de ce lemme que  $i_1'$ , étant homotope à  $i_0$ , par isotopie à extrémités fixes, et vu la proposition 2.4., il existe une isotopie ambiante de  $\mathcal{C}$ , fixe sur  $\partial\mathcal{C}$ , transformant  $i_1'$  en  $i_0$ .

Au total en effectuant successivement les deux isotopies, on obtient une isotopie ambiante  $\psi_t$ , fixe sur  $S^1 \times \{0\}$ , transformant  $i_1$  en  $i_0$  et telle que  $\psi_1|_{\partial\mathcal{C}} = \text{id}_{\partial\mathcal{C}}$  (i.e :  $\forall t \in I$ ,  $\psi_t \in \text{Aut}(\mathcal{C}; \text{id}_{S^1 \times \{0\}})$ ),  $t \rightarrow \psi_t$  est continue,  $\psi_0 = \text{id}_{\mathcal{C}}$ ,  $\psi_1 \circ i_1 = i_0$ ,  $\psi_1|_{\partial\mathcal{C}} = \text{id}_{\partial\mathcal{C}}$ . Alors cette isotopie transforme  $h$  en  $\psi_1 \circ h = h'$ ;  $h' \in \text{Aut}(\mathcal{C}; \text{id}_{\partial\mathcal{C}})$  et de plus  $h'$  est fixe sur  $\{1\} \times I = i_0(I)$ , puisque, si  $x = (1, t) \in \{1\} \times I$ , alors  $h'(x) = \psi_1(h(x)) = \psi_1 \circ h \circ i_0(t) = \psi_1 \circ i_1(t) = i_0(t) = x$ .

Il nous reste à montrer que  $h'$  est isotope à  $\text{id}_{\mathcal{C}}$  par isotopie de  $\mathcal{C}$  fixe sur  $\partial\mathcal{C} \cup (\{1\} \times I)$ : pour cela, on considère la découpe  $D$  de  $\mathcal{C}$  selon  $\{1\} \times I$ , c'est un disque dont le bord  $\partial D$  est  $p^{-1}(\partial\mathcal{C} \cup (\{1\} \times I))$  (où  $p$  désigne la projection canonique  $p : D \rightarrow \mathcal{C}$ ). Par functorialité de la découpe  $h'$  induit un homéomorphisme  $\tilde{h}'$  de  $D$ , fixe sur  $\partial D$  : il existe alors (théorème 1.1.) une isotopie de  $D$  fixe sur  $\partial D$  transformant  $\tilde{h}'$  en  $\text{id}_D$ ; étant fixe sur  $\partial D$ , cette isotopie passe au quotient par  $p$  et induit une isotopie de  $\mathcal{C}$ , fixe sur  $\partial\mathcal{C} \cup (\{1\} \times I) = p(\partial D)$ , transformant  $h'$  en  $\text{id}_{\mathcal{C}}$ . Ceci achève la démonstration de 4.1.

#### 4.2. Conséquences de ce théorème.

4.2.1 Théorème : Soit  $\mathcal{C}$  un cylindre,  $b_0$  et  $b_1$  les composantes de  $\partial\mathcal{C}$ . Le groupe  $\text{Aut}(\mathcal{C}; \text{id}_{b_0})$  des homéomorphismes de  $\mathcal{C}$ , fixes sur la composante  $b_0$  de  $\partial\mathcal{C}$ , est connexe par arcs.

##### Démonstration :

Soit  $h \in \text{Aut}(\mathcal{C}; \text{id}_{b_0})$  et  $h_1 = h|_{b_1}$ . Alors  $h_1$  est isotope à  $\text{id}_{b_1}$  (cf. I.1.5.). Soit donc une isotopie  $\varphi_t$  de  $\text{id}_{b_1}$  à  $h_1$  (i.e. :  $\varphi_0 = \text{id}_{b_1}$ ,  $\varphi_1 = h_1$ ) et soit  $\tilde{\varphi}_t$  un prolongement de  $\varphi_t$  en une isotopie de  $\mathcal{C}$  fixe sur  $b_0$  (théorème 2.2.), alors l'homéomorphisme  $\tilde{\varphi}_1$  de  $\mathcal{C}$  est un prolongement à  $\mathcal{C}$  de  $h_1$ , fixe sur  $b_0$ , et isotope à  $\text{id}_{\mathcal{C}}$  par isotopie fixe sur  $b_0$ . Soit  $h' = \tilde{\varphi}_1^{-1} \circ h$ ,  $h'$  est fixe sur  $\partial\mathcal{C}$  et donc  $h'$  est isotope à  $\text{id}_{\mathcal{C}}$  par isotopie fixe sur  $b_0$  (cf. 4.1.). Il en résulte que  $h = \tilde{\varphi}_1 \circ h'$  est également isotope à  $\text{id}_{\mathcal{C}}$  par isotopie fixe sur  $b_0$ .

4.2.2. Théorème : Soient  $\mathcal{C}$  un cylindre,  $h$  un homéomorphisme de  $\mathcal{C}$ . Alors  $h$  est isotope à  $\text{id}_{\mathcal{C}}$  si et seulement si  $h$  est orienté et conserve chaque composante de  $\partial\mathcal{C}$ .

##### Démonstration :

Si  $h$  est isotope à  $\text{id}_{\mathcal{C}}$  par une isotopie  $\varphi_t$  (i.e. :  $\varphi_0 = h$ ,  $\varphi_1 = \text{id}_{\mathcal{C}}$ ,  $t \rightarrow \varphi_t$  est une application continue de  $I$  dans  $\text{Aut}(\mathcal{C})$ ) il est clair (par continuité, par rapport à  $t$ , d'applications à valeurs dans un espace discret) que, pour tout  $t \in I$ ,  $\varphi_t$  conserve l'orientation et chaque composante de  $\partial\mathcal{C}$ . C'est donc la réciproque qu'il s'agit de démontrer. Soit donc  $h \in \text{Aut}^+(\mathcal{C})$ , tel que  $\pi_0(h|\partial\mathcal{C}) = \text{id}_{\pi_0\partial\mathcal{C}}$ , et soient :  $h_0 = h|_{b_0}$ ,  $\tilde{h}_0$  un prolongement de  $h_0$  en un homéomorphisme de  $\mathcal{C}$ , fixe

sur  $b_1$  (cf. 2.2.). Alors  $\tilde{h}_0$  est isotope à  $\text{id}_{\mathcal{C}}$  (d'après 4.2.1.), ainsi que  $h' = \tilde{h}_0^{-1} \circ h$  (toujours d'après 4.2.1., en échangeant les rôles de  $b_0$  et  $b_1$ ). Il en résulte que  $h = \tilde{h}_0 \circ h'$  est isotope à  $\text{id}_{\mathcal{C}}$ .

**4.2.3. Théorème :** Soit  $\mathcal{C}$  un cylindre, le groupe  $\pi_0 \text{Aut } \mathcal{C}$  est isomorphe au groupe  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

Démonstration : d'après 4.2.2. deux homéomorphismes de  $\mathcal{C}$  sont isotopes dans  $\text{Aut } \mathcal{C}$  si et seulement si tous les deux conservent (ou ne conservent pas) l'orientation et tous les deux conservent (ou tous les deux ne conservent pas) globalement chaque composante  $b_i$  de  $\partial \mathcal{C}$ . Il est alors clair que l'homomorphisme de  $\pi_0 \text{Aut } \mathcal{C}$  dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  qui à toute classe d'isotopie  $\bar{h}$  de  $\pi_0 \text{Aut } \mathcal{C}$ , (dont un représentant est  $h$ ), associe le couple  $(\bar{i}_h, \bar{j}_h)$ , où  $i_h = 0$  si  $h$  est orienté,  $i_h = 1$  sinon, et  $j_h = 0$  si  $h$  conserve chaque composante de  $\partial \mathcal{C}$ ,  $j_h = 1$  sinon, est un isomorphisme de groupes.

### 4.3. Twists du cylindre.

#### 4.3.1. Twist standard d'ordre $n$ de $S^1 \times I$ .

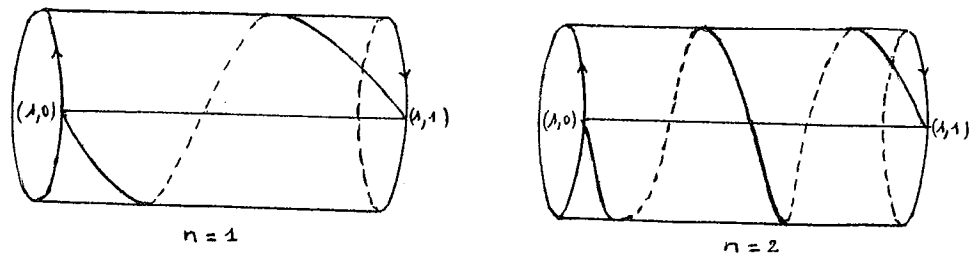
Soit  $C = S^1 \times I$  le cylindre standard (orienté de façon standard...), un point de  $C$  est donc un couple  $(z, h)$  où  $z$  est un nombre complexe de module 1, et  $h \in I$ .

Par définition, le twist standard d'ordre  $n$  de  $C$  est l'homéomorphisme

$\tau_n$  de  $C$  défini pour tout  $(z, h) \in S^1 \times I$  par :

$$\tau_n(z, h) = (ze^{-2i\pi hn}, h)$$

$\tau_n$  est fixe sur  $\partial C$ . Il est clair que  $\tau_n \circ \tau_m = \tau_{n+m}$ .



On a représenté ci-dessus, sur le cylindre  $S^1 \times I$  orienté, le segment  $\{1\} \times I$  et son image par  $\tau_1$  et  $\tau_2$  respectivement.

4.3.2. Théorème : Soit  $\mathcal{C}$  un cylindre orienté quelconque, il existe un isomorphisme canonique entre  $\mathbb{Z}$  et le groupe  $\pi_0 \text{Aut}(\mathcal{C}; \text{id}_{\partial \mathcal{C}})$ .

Démonstration.

1°) On s'intéresse d'abord au cas où  $\mathcal{C} = C = S^1 \times I$ , orienté de façon standard. Notons  $b_0 = S^1 \times \{0\}$ ,  $b_1 = S^1 \times \{1\}$ , les composantes de  $\partial C$ . La projection naturelle  $p$  de  $\text{Aut}(C; \text{id}_{b_0})$  sur  $\text{Aut}^+_{b_1}$  a pour noyau  $\text{Aut}(C; \text{id}_{\partial C})$ , d'où la suite exacte de groupes topologiques :

$$1 \rightarrow \text{Aut}(C; \text{id}_{\partial C}) \rightarrow \text{Aut}(C; \text{id}_{b_0}) \xrightarrow{p} \text{Aut}^+_{b_1} \rightarrow 1$$

Comme  $p$  est une fibration (cf. III 3.1.1.) on peut écrire la suite exacte d'homotopie (compte tenu du fait que  $\pi_0 \text{Aut}(C; \text{id}_{b_0})$  est trivial d'après 4.2.1.) :

$$\pi_1 \text{Aut}^+_{b_1} \xrightarrow{\rho_1} \pi_0 \text{Aut}(C; \text{id}_{\partial C}) \rightarrow 1$$

a) on étudie d'abord la surjection  $\rho_1$ . Par définition de la suite exacte d'homotopie, si  $\gamma$  est un lacet de  $\text{Aut}^+_{b_1}$  d'origine  $\text{id}_{b_1}$ , alors  $\rho_1(\bar{\gamma})$  est obtenu en considérant un arc  $\tilde{\gamma}$  de  $\text{Aut}(C; \text{id}_{b_0})$ , d'origine  $\text{id}_C$ , relèvement de  $\gamma$  (i.e. :  $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ ), puis en prenant pour  $\rho_1(\bar{\gamma})$  la composante connexe par arcs dans  $\text{Aut}(C; \text{id}_{\partial C})$  de l'homéomorphisme  $\tilde{\gamma}(1)$ . Il résulte de I.1.5.4 qu'un lacet générateur de  $\pi_1 \text{Aut}^+_{b_1}$  est

$\gamma_1 : t \rightarrow \varphi_t^1$ , ( $t \in I$ ), où  $\varphi_t^1$  est défini par :

$\forall (z,1) \in b_1$ ,  $\varphi_t^1(z,1) = (ze^{-2i\pi t}, 1)$ . Un relèvement  $\tilde{\gamma}_1$  de  $\gamma_1$

( $\tilde{\gamma}_1 : t \rightarrow \tilde{\varphi}_t^1$ , ( $t \in I$ )) est obtenu en introduisant le prolongement

amorti  $\tilde{\varphi}_t^1$  de  $\varphi_t^1$  défini par :  $\tilde{\varphi}_t^1(z,h) = (ze^{-2i\pi th}, h)$  pour tout

$(z,h) \in S^1 \times I$ . Comme  $\tilde{\varphi}_1^1 = \tau_1$  (twist standard d'ordre 1) on constate que

$\rho_1(\tilde{\gamma}_1)$  est la classe d'isotopie dans  $\text{Aut}(C; \text{id}_{\partial C})$  du twist standard

d'ordre 1. Comme  $\rho_1$  est surjectif et  $\tilde{\gamma}_1$  engendre  $\pi_1 \text{Aut}^+ b_1$ , tout

élément de  $\pi_0 \text{Aut}(C; \text{id}_{\partial C})$  est de la forme  $\rho(\tilde{\gamma}_1^n) = \tau_1^n = \tau_n$  : toute classe

d'isotopie dans  $\text{Aut}(C; \text{id}_{\partial C})$  est la classe d'un twist standard d'ordre

$n \in \mathbb{Z}$ , pour un certain  $n$ .

Remarquons qu'en échangeant le rôle de  $b_0$  et  $b_1$  on obtient une suite exacte :

$$\pi_1 \text{Aut}^+ b_0 \xrightarrow{\rho_0} \pi_0 \text{Aut}(C; \text{id}_{\partial C}) \rightarrow 1$$

et que si  $\gamma_0 : t \rightarrow \varphi_t^0$  ( $t \in I$ ) est le lacet générateur de  $\text{Aut}^+ b_0$  défini

par :  $\forall t \in I$ ,  $\forall (z,0) \in b_0$ ,  $\varphi_t^0(z,0) = (ze^{2i\pi t}, 0)$ , un relèvement de  $\gamma_0$  dans

$\text{Aut}(C; \text{id}_{b_1})$  est l'arc  $\tilde{\gamma}_0 : t \rightarrow \tilde{\varphi}_t^0$ , où  $\tilde{\varphi}_t^0$  est le prolongement amorti de

$\varphi_t^0$  défini par :  $\tilde{\varphi}_t^0(z,h) = (ze^{2i\pi t(1-h)}, h)$  pour tout  $(z,h) \in S^1 \times I$ .

Comme  $\tilde{\varphi}_1^0 = \tau_1$ ,  $\rho_0(\tilde{\gamma}_0)$  est la classe d'isotopie dans  $\text{Aut}(C; \text{id}_{\partial C})$  de  $\tau_1$ .

On a donc le diagramme commutatif :

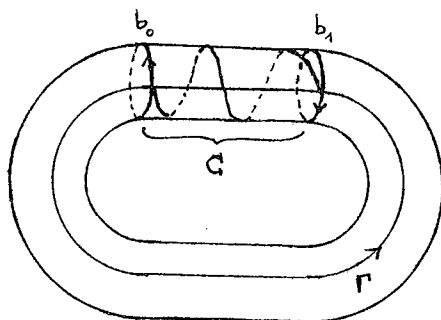
$$\begin{array}{ccccc} & & \pi_1 \text{Aut}^+ b_0 & & \\ \alpha_0 \nearrow & & \searrow \rho_0 & & \\ \mathbb{Z} & & & & \pi_0 \text{Aut}(C; \text{id}_{\partial C}) \rightarrow 1 \\ \alpha_1 \searrow & & \nearrow \rho_1 & & \\ & & \pi_1 \text{Aut}^+ b_1 & & \end{array}$$

où  $\alpha_0(1) = \tilde{\gamma}_0$ ,  $\alpha_1(1) = \tilde{\gamma}_1$ .

b) On va maintenant montrer que  $\rho_1$  est injectif (cela entraîne, vu ci-dessus, que  $\rho_0$  est également injectif). On aura donc obtenu l'isomorphisme

canonique annoncé entre  $\mathbb{Z}$  et  $\pi_0 \text{Aut}(C; \text{id}_{\partial C})$  : cet isomorphisme est canonique car indépendant de la composante  $b_i$  de  $\partial C$  que l'on choisit pour faire la construction ci-dessus,  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  étant canoniques (cf. I.1.5.4).

Pour cela il suffit de montrer que si  $\rho_1(\bar{\gamma}_1^n) = 0$ , alors  $n = 0$  ; mais  $\rho_1(\bar{\gamma}_1^n)$  est la classe d'isotopie de  $\tau_n$ , il suffit donc de montrer que  $\tau_n$  n'est isotope à  $\text{id}_C$  dans  $\text{Aut}(C; \text{id}_{\partial C})$  que si  $n = 0$ . On considère alors le tore orienté  $T$  obtenu en recollant un cylindre standard  $C'$  sur  $C$  (schéma ci-dessous).



Soit  $\Gamma$  la courbe standard représentée sur le schéma (telle que  $\Gamma \cap C = \{1\} \times I$ ). Soit  $\Gamma'$  la courbe constituée par  $b_0$  orienté de façon standard. Alors  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  définissent deux 1-cycles de  $H_1(T)$ , on sait même qu'à eux deux, ils forment une base d'homologie. Puisque  $\tau_n$  est supposé être isotope à  $\text{id}_C$  dans  $\text{Aut}(C; \text{id}_{\partial C})$ , l'homéomorphisme  $h_n$  de  $T$  obtenu en étendant  $\tau_n$  par  $\text{id}_{C'}$  est isotope (et donc homotope) à  $\text{id}_T$ . Il en résulte que  $H_1(h_n)(\Gamma) = \Gamma$ , d'où  $\Gamma + n\Gamma' = \Gamma$ , puis  $n\Gamma' = 0$ , enfin  $n = 0$ .

2°) dans le cas où  $\mathcal{C}$  est un cylindre orienté quelconque il suffit de choisir un homéomorphisme orienté arbitraire entre  $\mathcal{C}$  et  $C = S^1 \times I$ , pour démontrer à partir du 1<sup>er</sup> a) que le diagramme suivant est commutatif

(on note  $d_0$  et  $d_1$  les composantes de  $\partial \mathcal{C}$ ) :

$$\begin{array}{ccccc}
 & \beta_0 & \nearrow & \pi_1 & \text{Aut}^+_{d_0} \\
 \mathbb{Z} & & & & \searrow \lambda_0 \\
 & \beta_1 & \searrow & \pi_1 & \text{Aut}^+_{d_1} \\
 & & & & \nearrow \lambda_1 \\
 & & & \pi_0 & \text{Aut}(\mathcal{C}; \text{id}_{\partial \mathcal{C}}) \rightarrow 1
 \end{array}$$

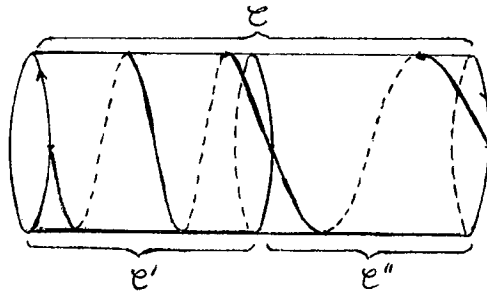
$\lambda_0$  et  $\lambda_1$  étant les homéomorphismes canoniques des suites exactes d'homotopie des fibrations :

$$\text{Aut}(\mathcal{C}; \text{id}_{d_1}) \rightarrow \text{Aut}^+_{d_0} \quad \text{et} \quad \text{Aut}(\mathcal{C}; \text{id}_{d_0}) \rightarrow \text{Aut}^+_{d_1},$$

$\beta_0$  et  $\beta_1$  étant canoniques puisque  $d_0$  et  $d_1$  sont orientés.

4.3.3. Si  $\mathcal{C}$  est un cylindre orienté quelconque, on appellera twist d'ordre  $n$  de  $\mathcal{C}$  tout homéomorphisme  $h$  de  $\mathcal{C}$ , fixe sur  $\partial \mathcal{C}$ , dont la classe d'isotopie dans  $\text{Aut}(\mathcal{C}; \text{id}_{\partial \mathcal{C}})$  a pour image  $n$  dans l'isomorphisme canonique défini ci-dessus entre  $\pi_0 \text{Aut}(\mathcal{C}; \text{id}_{\partial \mathcal{C}})$  et  $\mathbb{Z}$ . Le composé d'un twist d'ordre  $n$  avec un twist d'ordre  $m$  est un twist d'ordre  $n + m$ .

Si  $\mathcal{C}'$  et  $\mathcal{C}''$  sont deux cylindres orientés et si on forme un troisième cylindre orienté  $\mathcal{C}$  en recollant  $\mathcal{C}'$  sur  $\mathcal{C}''$  par un homéomorphisme (inversant l'orientation) d'une composante de  $\partial \mathcal{C}'$  sur une composante  $\alpha$  de  $\partial \mathcal{C}''$ , et si  $h', h''$  sont des twists d'ordres  $n', n''$  respectivement, de  $\mathcal{C}', \mathcal{C}''$ , respectivement, alors le twist  $h = h' \underset{\alpha}{\cup} h''$  de  $\mathcal{C}$  défini par la somme de  $h'$  et  $h''$  est d'ordre  $n' + n''$ .



4.3.4. Remarque. M.E. Hamstrom et E. Dyer ont montré ([48]) un résultat plus complet que 4.2.1, à savoir :

Si  $C$  est un cylindre et  $b_0$  une composante de  $\partial C$ , alors  $\text{Aut}(C; \text{id}_{b_0})$  est contractile ; il en résulte que  $\pi_i \text{Aut}(C; \text{id}_{b_0})$  est trivial pour  $i \geq 0$ . De plus : si on écrit la suite exacte de la fibration

$\text{Aut}(C; \text{id}_{b_0}) \rightarrow \text{Aut}^+ b_1$ , (pour  $i \geq 1$ ) :

$$1 \rightarrow \pi_i \text{Aut}(C; \text{id}_{\partial C}) \rightarrow \pi_i \text{Aut}(C; \text{id}_{b_0}) \rightarrow \pi_i \text{Aut}^+ b_1 \xrightarrow{\psi_i} \pi_{i-1} \text{Aut}(C; \text{id}_{\partial C})$$

pour  $i = 1$ , on a montré que  $\psi_1$  est un isomorphisme, pour  $i > 1$  on a

$\pi_i \text{Aut}^+ b_1 = 0$  (cf. I.1.5.4.), il en résulte que dans tous les cas ( $i \geq 1$ ),

on a  $\pi_i \text{Aut}(C; \text{id}_{\partial C}) \simeq \pi_i \text{Aut}(C; \text{id}_{b_0})$  et donc :

$\pi_i \text{Aut}(C; \text{id}_{\partial C})$  est trivial pour  $i \geq 1$ .

## 5. Le groupe des homéomorphismes de la bicouronne.

5.1. Théorème : Soit  $\mathcal{B}$  une bicouronne (surface à bord de type  $(0,3)$  ; cf. II.1.1.). Tout homéomorphisme  $h$  de  $\mathcal{B}$ , fixe sur  $\partial \mathcal{B}$ , est isotope à l'identité.

N.B : l'isotopie annoncée peut n'être pas fixe sur  $\partial \mathcal{B}$ , ce sera d'ailleurs souvent ainsi dans les cas que nous aurons à considérer dans la suite.

Démonstration : On suppose (sans perte de généralité) que  $\mathcal{B}$  est la surface à bord  $(S^1 \times I) \setminus \text{int } D$  où  $D$  est le disque de  $S^1 \times I$  :

$\{(e^{i\theta}, h), \frac{\pi - \epsilon}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \epsilon, \frac{1}{2} - \epsilon \leq h \leq \frac{1}{2} + \epsilon\}$ ,  $\epsilon$  étant un nombre réel :  $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ . L'orientation standard de  $S^1 \times I$  induit une orientation de  $\mathcal{B}$ .

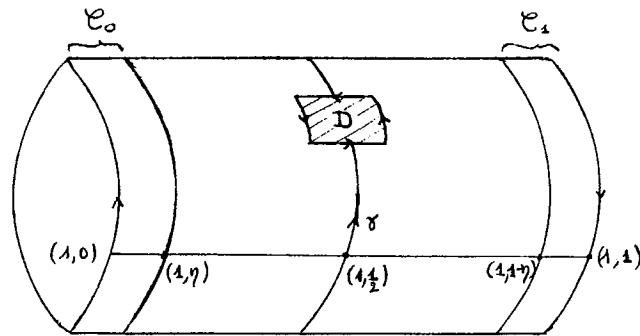
Soit  $i_0$  le plongement standard de  $I$  dans  $\mathcal{B}$  défini par :

$\forall t \in I, i_0(t) = (1, t)$ . Soit donc  $h \in \text{Aut}(\mathcal{B}; \text{id}_{\partial \mathcal{B}})$  et  $i_1 = h \circ i_0$ ,

soit  $\gamma$  l'arc "médian" de  $\mathcal{B}$  égal à  $\mathcal{B} \cap (S^1 \times \{\frac{1}{2}\})$ , orienté par  $S^1$ . Soit

$\mathcal{C}_0$  le cylindre orienté  $S^1 \times [0, \eta]$  (contenu dans  $\mathcal{B}$ ) et  $\mathcal{C}_1$  le cylindre

orienté  $S^1 \times [1-\eta, 1]$  (également contenu dans  $\mathcal{B}$ ) où  $\eta$  est un nombre réel,  $0 < \eta < \frac{1}{2}$ , suffisamment petit pour chacun des deux cylindres  $\mathcal{C}_0$  et  $\mathcal{C}_1$  ne rencontre ni  $D$ , ni  $\gamma$ , ni  $h(\gamma)$ . (Cela est possible par compacité de  $h(\gamma)$  qui est, de plus, contenu dans  $\text{int } \mathcal{B}$ .)



1°) On commence par démontrer :

lemme : Il existe une isotopie de  $\mathcal{C}_0$  et une isotopie de  $\mathcal{C}_1$ , fixes sur  $S^1 \times \{0\}$  et  $S^1 \times \{1\}$  (respectivement), transformant  $h$  en  $g \in \text{Aut}(\mathcal{B}; \text{id}_{\partial \mathcal{B}})$  tel que, si  $j_1 = g \circ i_0$ , alors  $j_1$  soit homotope à  $i_0$  par homotopie à extrémités fixes dans  $\mathcal{B} \setminus \partial D$ .

Démonstration : Pour cela soit  $\mathcal{B}'$  le cylindre compactifié de  $\mathcal{B} \setminus \partial D$  par un point  $\omega$  et soit  $p$  la projection canonique :  $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ .

On a :  $\mathcal{B} \setminus \partial D = \mathcal{B}' \setminus \{\omega\}$ ,  $p(\partial D) = \omega$ ,  $p|_{\mathcal{B} \setminus \partial D} = \text{id}_{\mathcal{B} \setminus \partial D}$ . Alors,  $h$  passe au quotient par  $p$  et induit un homéomorphisme orienté  $h' : \mathcal{B}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}'$ , tel que  $h'(\omega) = \omega$ ,  $h'|_{\mathcal{B}' \setminus \{\omega\}} = h|_{\mathcal{B} \setminus \partial D}$ ; de plus,  $h'$  est isotope à  $\text{id}_{\mathcal{B}'}$  dans  $\text{Aut } \mathcal{B}'$  (cf. 4.2.2.) puisque  $h'$  est fixe sur  $\partial \mathcal{B}'$ . Notons  $i'_1 = h' \circ i_0$ , alors  $i'_1(I) = i_1(I)$  puisque tous les deux sont contenus dans  $\mathcal{B} \setminus \partial D$ . Soit  $\gamma'$  la courbe  $p(\gamma)$ , alors  $h'(\gamma')$  est homotope à  $\gamma'$ , et comme on peut se ramener au cas standard de la proposition 3.4., il existe une isotopie de  $\mathcal{B}'$ , fixe sur  $\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1$  et sur  $\omega$ , transformant

$h'(\gamma')$  en  $\gamma'$ . (i.e. : transformant  $h' \circ \gamma' : S^1 \rightarrow \mathcal{B}'$  en  $\gamma' : S^1 \rightarrow \mathcal{B}'$ ). Cette isotopie transforme  $h'$  en  $\tilde{h}'$  fixe sur  $\gamma'$ . Notons  $\tilde{i}'_1 = \tilde{h}' \circ i_0$ , alors  $\tilde{i}'_1$  est isotope à  $i'_1$  par isotopie de  $\mathcal{B}'$ , fixe sur  $\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1$  et sur  $\omega$ . Si  $\mathcal{D}_0$  est le cylindre orienté  $p((S^1 \times [0, \frac{1}{2}]) \cap \mathcal{B})$  et  $\mathcal{D}_1$  le cylindre orienté  $p((S^1 \times [\frac{1}{2}, 1]) \cap \mathcal{B})$ , alors  $\tilde{h}'|_{\mathcal{D}_0}$  est un twist d'ordre  $n_0$  de  $\mathcal{D}_0$ ,  $\tilde{h}'|_{\mathcal{D}_1}$  est un twist d'ordre  $n_1$  de  $\mathcal{D}_1$ . Soit une isotopie de  $\mathcal{C}_0$ , fixe sur  $S^1 \times \{\eta\}$ , transformant  $\text{id}_{\mathcal{C}_0}$  en un twist d'ordre  $-n_0$  de  $\mathcal{C}_0$ , et soit une isotopie de  $\mathcal{C}_1$ , fixe sur  $S^1 \times \{1-\eta\}$ , transformant  $\text{id}_{\mathcal{C}_1}$  en un twist d'ordre  $-n_1$  de  $\mathcal{C}_1$  : Ces deux isotopies transforment  $h$  en  $g$ ,  $h'$  en  $g'$ ,  $\tilde{h}'$  en  $\tilde{g}'$ , ( $g$  (resp. :  $g'$ ,  $\tilde{g}'$ ) ne diffère de  $h$  (resp. :  $h'$ ,  $\tilde{h}'$ ) que sur  $\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1$ ). Il résulte de 4.3.3. que  $\tilde{g}'|_{\mathcal{D}_0}$  (resp. :  $\tilde{g}'|_{\mathcal{D}_1}$ ) est un twist d'ordre 0 de  $\mathcal{D}_0$  (resp.  $\mathcal{D}_1$ ), et que par conséquent  $\tilde{g}'$  est isotope à  $\text{id}_{\mathcal{B}'}$  par une isotopie fixe sur  $\partial\mathcal{B}' \cup \gamma'$ . On en déduit que si on note  $j_1 = g \circ i_0$ ,  $j'_1 = g' \circ i_0$ ,  $\tilde{j}'_1 = \tilde{g}' \circ i_0$ , alors  $\tilde{j}'_1$  est isotope à  $i_0$  par isotopie ambiante de  $\mathcal{B}'$ , fixe sur  $\partial\mathcal{B}' \cup \gamma'$ , et par conséquent (comme  $\tilde{j}'_1$  est isotope à  $j'_1$  par isotopie ambiante de  $\mathcal{B}'$ , fixe sur  $\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1$  et sur  $\omega$ ), que  $j'_1$  est isotope à  $i_0$  par isotopie ambiante de  $\mathcal{B}'$ , fixe sur  $\partial\mathcal{B}' \cup \{\omega\}$ . Donc  $j'_1$  et  $i_0$  sont homotopes à extrémités fixes dans  $\mathcal{B}' \setminus \{\omega\}$  ; cette homotopie a une image compacte contenue dans  $\mathcal{B}' \setminus \{\omega\} = \mathcal{B} \setminus \partial\mathcal{D}$ , et il s'ensuit que  $j_1$  et  $i_0$  sont homotopes à extrémités fixes dans  $\mathcal{B} \setminus \partial\mathcal{D}$ . Ceci achève la démonstration du lemme.

2°) Suite de la démonstration du théorème 5.1.

Alors, (2.4.),  $j_1$  est isotope à  $i_0$  par une isotopie de  $\mathcal{B}$ , fixe sur  $\partial\mathcal{B}$  ; cette isotopie transforme  $g$  en  $f \in \text{Aut}(\mathcal{B}; \text{id}_{\partial\mathcal{B}})$ ,  $f$  fixe sur  $a_0 = i_0(I)$ . Soient  $\Sigma$  la découpe de  $\mathcal{B}$  suivant  $a_0$ , et  $q$  la projection canonique :

$\Sigma \rightarrow \mathcal{B}$ ;  $\Sigma$  est un cylindre orienté dont le bord  $\partial\Sigma$  est réunion des deux composantes  $q^{-1}(\partial D)$  et  $q^{-1}((S^1 \times \{0,1\}) \cup a_0)$ . Par functorialité,  $f$  induit un homéomorphisme  $\hat{f}$  de  $\Sigma$ , fixe sur  $\partial\Sigma$ . Il existe donc (cf. 4.2.1.) une isotopie de  $\Sigma$ , fixe sur la composante  $q^{-1}((S^1 \times \{0,1\}) \cup a_0)$  de  $\partial\Sigma$ , transformant  $\hat{f}$  en  $\text{id}_\Sigma$ . Cette isotopie passe au quotient par  $q$  et induit une isotopie de  $\mathcal{B}$ , fixe sur  $(S^1 \times \{0,1\}) \cup a_0$ , mais peut être pas sur  $\partial D$ , transformant  $f$  en  $\text{id}_\mathcal{B}$ . Ceci achève la démonstration du théorème 5.1.

**5.2. Corollaire :** Soit  $\mathcal{B}$  une bicouronne, tout homéomorphisme  $h$  de  $\mathcal{B}$ , tel que  $\pi_0(h|_{\partial\mathcal{B}}) = \text{id}_{\pi_0\partial\mathcal{B}}$  est isotope à l'identité.

Démonstration : Soient  $b_1, b_2, b_3$  les composantes de  $\partial\mathcal{B}$ ,  $h_1, h_2, h_3$  les restrictions de  $h$  à  $b_1, b_2, b_3$  respectivement. Soit  $(C_1, C_2, C_3)$  un système de colliers sur  $\partial\mathcal{B}$  (cf. 2.2.) : chaque  $C_i$  est un cylindre de  $\mathcal{B}$ , les composantes de  $\partial C_i$  étant  $b_i$  et  $b'_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). On étend chaque  $h_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) en un homéomorphisme  $\tilde{h}_i$  de  $C_i$  fixe sur  $b'_i$  (prolongement amorti cf. III 3.1.1), puis on étend cet homéomorphisme  $\tilde{h}_1 \sqcup \tilde{h}_2 \sqcup \tilde{h}_3$  de  $C_1 \sqcup C_2 \sqcup C_3$  en homéomorphisme  $\tilde{h}$  de  $\mathcal{B}$  en le prolongeant par  $\text{id}_{\mathcal{B} \setminus C_1 \sqcup C_2 \sqcup C_3}$ . On a alors  $\tilde{h}|_{\partial\mathcal{B}} = h|_{\partial\mathcal{B}}$  par construction. Il est clair que  $\tilde{h}$  est isotope à  $\text{id}_\mathcal{B}$  par une isotopie fixe en dehors de  $C_1 \sqcup C_2 \sqcup C_3 \setminus b'_1 \sqcup b'_2 \sqcup b'_3$  (grâce à 4.2.1.). Comme  $g = \tilde{h}^{-1} \circ h$  est fixe sur  $\partial\mathcal{B}$ , il résulte de 5.1 que  $g$  est isotope à  $\text{id}_\mathcal{B}$ , et par conséquent  $h = \tilde{h} \circ g$  est isotope à  $\text{id}_\mathcal{B}$ .

**5.3. Théorème :** Soit  $\mathcal{B}$  une bicouronne orientée, il existe un isomorphisme canonique entre  $\mathbb{Z}^3$  et le groupe  $\pi_0 \text{Aut}(\mathcal{B}; \text{id}_{\partial\mathcal{B}})$ .

Démonstration : Soient  $b_1, b_2, b_3$  les composantes de  $\partial\mathcal{B}$ , et  $(C_1, C_2, C_3)$  un système de colliers sur  $\mathcal{B}$  : chaque  $C_i$  est un cylindre orienté (de  $\mathcal{B}$ ) dont une composante du bord  $\partial C_i$  est  $b_i$ , l'autre  $b'_i$  (pour  $i = 1, 2, 3$ ). On notera  $\mathcal{B}'$  la surface à bord orientée adhérence dans  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{B} \setminus C_1 \sqcup C_2 \sqcup C_3$ , on a  $\partial\mathcal{B}' = (-b'_1) \sqcup (-b'_2) \sqcup (-b'_3)$  (les signes - indiquant que l'orientation induite sur  $b'_i$  par  $\partial\mathcal{B}'$  est l'inverse de celle induite par  $C_i$ ). On note  $\text{Aut}'\mathcal{B}$  le groupe des homéomorphismes orientés  $h$  de  $\mathcal{B}$  tels que  $\pi_0(h|\partial\mathcal{B}) = \text{id}_{\pi_0\partial\mathcal{B}}$  (i.e. :  $h$  conserve globalement chaque composante de  $\partial\mathcal{B}$ ). On a un homomorphisme naturel :  $\varphi : \prod_{i=1}^3 \text{Aut}(C_i; \text{id}_{b'_i}) \rightarrow \text{Aut}'\mathcal{B}$ , à savoir celui qui à tout triplet  $(h_1, h_2, h_3)$  associe l'homéomorphisme  $\varphi(h_1, h_2, h_3) = h$  de  $\mathcal{B}$  défini par :  $\forall i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $h|_{C_i} = h_i$ , et  $h|_{\mathcal{B}'} = \text{id}_{\mathcal{B}'}$ .

On a un diagramme commutatif ( $\psi$  est la restriction de  $\varphi$ ) :

$$\begin{array}{ccccc}
 1 \rightarrow \prod_{i=1}^3 \text{Aut}(C_i; \text{id}_{\partial C_i}) & \hookrightarrow & \prod_{i=1}^3 \text{Aut}(C_i; \text{id}_{b'_i}) & \xrightarrow{p} & \prod_{i=1}^3 \text{Aut}^+_{b'_i} \rightarrow 1 \\
 \downarrow \psi & & \downarrow \varphi & \nearrow q & \\
 1 \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{B}; \text{id}_{\partial\mathcal{B}}) & \hookrightarrow & \text{Aut}'\mathcal{B} & & 
 \end{array}$$

Les deux lignes sont des suites exactes. (On a noté  $p = p_1 \times p_2 \times p_3$ , où pour  $i = 1, 2, 3$ ,  $p_i$  est la projection naturelle

$\text{Aut}(C_i; \text{id}_{b'_i}) \rightarrow \text{Aut}^+_{b'_i}$ ;  $q$  est également la projection naturelle obtenue par restriction d'un homéomorphisme de  $\mathcal{B}$  à  $\partial\mathcal{B}$ ). On sait (cf. III 3.1.1.)

qui pour  $i = 1, 2, 3$  il existe une section locale de  $p_i$  au voisinage de  $\text{id}_{b'_i}$ , on en déduit par composition par  $\varphi$ , qu'il existe une section locale de  $q$  au voisinage de  $\prod_{i=1}^3 \text{id}_{b'_i}$ , et il en résulte que  $q$  est une fibration. On peut alors écrire les deux suites exactes d'homotopie pour les fibrations  $p$  et  $q$ , et tenant compte du fait que, pour  $i = 1, 2, 3$ ,  $\pi_0 \text{Aut}(C_i; \text{id}_{b'_i}) = 1$

(d'après 4.2.1.) et que  $\pi_0 \text{Aut } \mathcal{B}' = 1$  (d'après 5.2.), on obtient par fonctorialité le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \prod_{i=1}^3 (\pi_0 \text{Aut}(C_i; \text{id}_{\partial C_i})) & & \\
 & \nearrow \rho & \downarrow \pi_0 \psi & \searrow & \\
 \prod_{i=1}^3 (\pi_1 \text{Aut}^+ b_i) & & \pi_0 \text{Aut}(\mathcal{B}; \text{id}_{\partial \mathcal{B}}) & & 1 \\
 & \searrow R & \nearrow & & \\
 & & & & 
 \end{array}$$

Les deux lignes sont des suites exactes,  $\rho$  est l'isomorphisme produit (pour  $i = 1, 2, 3$ ) des trois isomorphismes canoniques

$\rho_i : \pi_1 \text{Aut}^+ b_i \xrightarrow{\sim} \pi_0 \text{Aut}(C_i; \text{id}_{\partial C_i})$ ;  $R$  est l'homomorphisme canonique provenant de la suite exacte d'homotopie de la fibration  $q$ . De plus on a

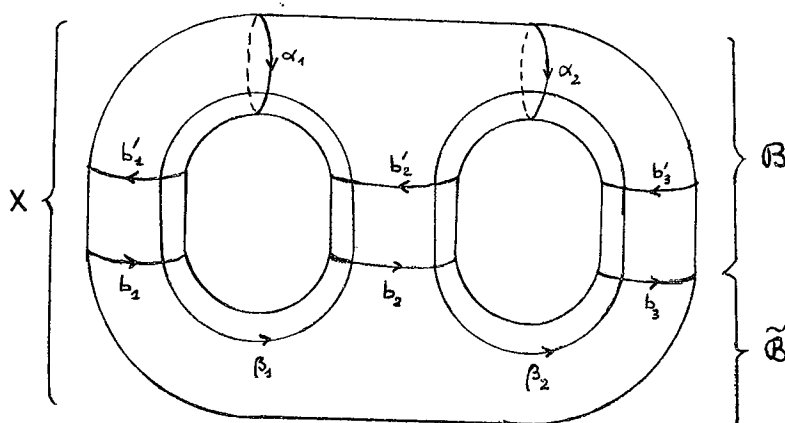
un isomorphisme canonique  $\alpha : \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^3 (\pi_1 \text{Aut}^+ b_i)$ , c'est le produit pour  $i = 1, 2, 3$ , des isomorphismes canoniques  $\alpha_i = \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1 \text{Aut}^+ b_i$

(cf. I.1.5.1.). On obtient ainsi un homomorphisme canonique  $R \circ \alpha$  de  $\mathbb{Z}^3$  dans  $\pi_0 \text{Aut}(\mathcal{B}; \text{id}_{\partial \mathcal{B}})$ . On sait par le diagramme ci-dessus qu'il est surjectif, il reste à démontrer son injectivité.

Or, comme  $R \circ \alpha = (\pi_0 \psi) \circ \rho \circ \alpha$ , de l'étude de  $\rho$  il résulte que  $R \circ \alpha$  est l'homomorphisme qui à tout triplet  $(n_1, n_2, n_3)$  de  $\mathbb{Z}^3$  associe la classe d'isotopie dans  $\text{Aut}(\mathcal{B}; \text{id}_{\partial \mathcal{B}})$  d'un homomorphisme  $h_{n_1, n_2, n_3}$  dont la restriction à chaque  $C_i$  est un twist d'ordre  $n_i$  de  $C_i$  (pour  $i = 1, 2, 3$ ), et dont la restriction à  $\mathcal{B}'$  est  $\text{id}_{\mathcal{B}'}$ . Pour montrer que  $R \circ \alpha$  est injectif, il suffit donc de montrer que si cet homomorphisme est isotope à l'identité de  $\mathcal{B}$  dans  $\text{Aut}(\mathcal{B}; \text{id}_{\partial \mathcal{B}})$ , alors

$$n_1 = n_2 = n_3 = 0.$$

Supposons donc que  $g = h_{n_1, n_2, n_3}$  est isotope à  $\text{id}_{\mathcal{B}}$  dans  $\text{Aut}(\mathcal{B}; \text{id}_{\partial \mathcal{B}})$ . Recollons sur  $\mathcal{B}$  une autre bicouronne orientée  $\tilde{\mathcal{B}}$  pour obtenir une surface  $X$  orientée de type  $(2, 0)$  (cf. figure ci-dessous).



Alors  $g$ , prolongé par  $\text{id}_{\tilde{B}}$  définit un homéomorphisme  $f$  de  $X$  qui, vu l'hypothèse sur  $g$ , est isotope à  $\text{id}_X$ . L'isomorphisme  $H_1(f)$  de  $H_1(X)$  doit donc être l'identité. Considérons les 1-cycles de  $H_1(X)$  définis par les courbes orientées  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, b_2$  (voir figure ci-dessus) et désignons chacun d'eux par le même symbole que la courbe correspondante. Les 1-cycles  $\{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\}$  forment une base d'homologie et  $b_2 = \alpha_2 - \alpha_1$ . On a :

$$H_1(f)(\beta_1) = \beta_1 + n_1 \alpha_1 - n_2 b_2 = \beta_1 + n_1 \alpha_1 - n_2 (\alpha_2 - \alpha_1) = \beta_1 + (n_1 + n_2) \alpha_1 - n_2 \alpha_2.$$

$$H_1(f)(\beta_2) = \beta_2 + n_3 \alpha_2 + n_2 b_2 = \beta_2 + n_3 \alpha_2 + n_2 (\alpha_2 - \alpha_1) = \beta_2 + (n_2 + n_3) \alpha_2 - n_2 \alpha_1.$$

De  $H_1(f)(\beta_1) = \beta_1$ , on déduit  $(n_1 + n_2) \alpha_1 - n_2 \alpha_2 = 0$ , d'où  $n_1 = n_2 = 0$ .

De  $H_1(f)(\beta_2) = \beta_2$ , on déduit  $(n_2 + n_3) \alpha_2 - n_2 \alpha_1 = 0$ , d'où  $n_2 = n_3 = 0$ .

Ceci achève la démonstration du théorème 5.3.

## 6. Cas des surfaces à bord généralisé.

On examine maintenant le cas d'une surface à bord généralisé  $X$  (orientée, compacte, connexe) de type  $(0, p, q)$ . (Rappelons qu'on note  $\partial X$  le bord vrai et  $\partial' X$  le bord généralisé, on a donc  $\text{Card } \partial X = p, \text{Card } \partial' X = p + q$ ). Les résultats précédents "s'étendent" sans difficultés à de telles surfaces de types  $(0, 1, 1), (0, 1, 2), (0, 2, 1)$ .

Plus précisément :

- Si  $X$  est de type  $(0,1,1)$  tout homéomorphisme orienté de  $X$ , fixe sur  $\partial'X$ , est isotope à  $\text{id}_X$  par isotopie de  $X$  fixe sur  $\partial'X$ . (C'est le théorème d'Alexander : 1.1.).
  - Si  $X$  est de type  $(0,1,2)$ , tout homéomorphisme orienté de  $X$  fixe sur  $\partial'X$  est isotope à  $\text{id}_X$  par isotopie de  $X$  fixe sur  $\partial'X \setminus \partial X$  (et peut être pas sur  $\partial X$ ). On en déduit qu'il existe un isomorphisme canonique :  $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \pi_0 \text{Aut}(X; \text{id}_{\partial'X})$  et que tout homéomorphisme de  $X$ , fixe sur  $\partial'X$ , est isotope dans  $\text{Aut}(X; \text{id}_{\partial'X})$  à un homéomorphisme égal à un twist sur un collier autour de  $\partial X$ , et à l'identité sur le complémentaire de ce collier.
  - Si  $X$  est de type  $(0,2,1)$ , tout homéomorphisme orienté de  $X$ , fixe sur  $\partial'X$ , est isotope à  $\text{id}_X$  par une isotopie fixe sur  $\partial'X \setminus \partial X$  (et peut être pas sur  $\partial X$ ). On en déduit qu'il existe un isomorphisme canonique :  $\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\sim} \pi_0 \text{Aut}(X; \text{id}_{\partial'X})$  et que tout homéomorphisme de  $X$ , fixe sur  $\partial'X$ , est isotope dans  $\text{Aut}(X; \text{id}_{\partial'X})$  à un homéomorphisme égal à deux twists sur deux colliers autour des composantes de  $\partial X$  et à l'identité ailleurs.
-