

CLASSES D'ISOTOPIE DE PLONGEMENTS DE 1-COMPLEXES DANS LES SURFACES

Y. LADEGAILLERIE

(Received 21 January 1983)

§1. INTRODUCTION

ON SAIT depuis longtemps (cf. [1, 3]) que deux plongements homotopes (et non homotopiquement triviaux) de S^1 dans une surface sont isotopes. Ce n'est déjà plus vrai lorsqu'on considère $S^1 \amalg S^1 \dots$. Cependant l'auteur de cet article a montré que lorsqu'on se limite au cas d'une surface à bord X orientée (compacte), deux plongements i_0, i_1 d'une 1-variété V compacte (non supposée connexe) dans X sont isotopes si et seulement si ils sont homotopes et congrus par un homéomorphisme orienté h de X (i.e. $h \circ i_0 = i_1$), ce qui conduit à une classification en termes algébriques et combinatoires (cf. [6, 7]). Dans cet article on montre que le même énoncé est vrai pour des plongements de 1-complexes topologiques compacts quelconques. La démonstration, beaucoup plus délicate dans ce cadre, repose de façon essentielle sur un théorème d'isotopie d'homéomorphismes à l'identité partielle sur les surfaces orientées (énoncé 2.1 ci-dessous) qui n'est pas une conséquence des théorèmes déjà connus depuis longtemps sur l'isotopie des homéomorphismes de surfaces (Baer[2], Epstein[3]); au contraire, sa démonstration est directe et ne fait pas appel à ces théorèmes. En fait, ce Théorème 2.1 est propre aux surfaces orientables, il permet une caractérisation des classes d'isotopie de plongements (et non seulement des homéomorphismes) d'une surface à bord V dans une autre surface à bord V' (V, V' orientées, compactes, mais non homéomorphes en général). Enfin, ce théorème a un certain nombre d'applications intéressantes en algèbre des groupes. L'étude des plongements de 1-complexes dans les surfaces est directement liée à certains problèmes posés par la décomposition de Heegaard des 3-variétés.

§2. ISOTOPIE À L'IDENTITÉ PARTIELLE

2.1 THÉORÈME. *Soit X une surface à bord orientée compacte obtenue par recollement sur une partie commune $\partial^0 T = -\partial^0 \Sigma$ (réunion de composantes connexes) des bords ∂T et $\partial \Sigma$ de deux surfaces à bord orientées: T et Σ . Il existe une famille finie F de courbes simples dans T telle que si h est un homéomorphisme orienté de X qui transforme toute courbe γ de F en courbe homotope à γ dans X , alors h est isotope par isotopie ambiante de X à un homéomorphisme h' de X tel que $h'|_T = id_T$.*

2.2 Remarques. En général, les courbes de F ne sont pas disjointes. On ne suppose pas que $h|_T$ soit un homéomorphisme de T sur T , on ne suppose pas que les homotopies intervenant dans l'hypothèse soient à support contenu dans T , on ne suppose pas X, T, Σ connexes... Tout ceci montre la généralité de ce théorème.

Il est clair, par contre que 2.1 a pour conséquences triviales les théorèmes de Baer et Epstein dans le cas orienté (il suffit de faire $\partial T = \phi$ ou $\Sigma = \phi$; On obtient même pour $\Sigma = \phi$ une forme renforcée du théorème d'Epstein sur les homéomorphismes homotopes à l'identité car la famille F de courbes simples du Théorème 2.1 est finie. La démonstration du §6 permet d'ailleurs d'en calculer le cardinal en fonction du genre de X (si X est connexe) et de $\text{Card } \pi_0 \partial X$.

2.3 Démonstration de 2.1. Nous la ferons au §6, préférant d'abord tirer un certain nombre de conséquences et d'abord:

§3. ISOTOPIE DES PLONGEMENTS DE 1-COMPLEXES DANS LES SURFACES ORIENTÉES

3.1 THÉORÈME. Soient K un 1-complexe topologique compact, X une surface à bord orientée compacte, i_0 et i_1 deux plongements de K dans l'intérieur de X ; il y a équivalence entre a et b : (a) i_0 et i_1 sont isotopes par isotopie ambiante de X (fixe sur ∂X). (b) i_0 et i_1 sont homotopes et congrus par un homéomorphisme orienté h de X (i.e. $h \circ i_0 = i_1$).

3.2 Cette formulation est la plus simple et la plus commode à utiliser, mais, en fait, le Théorème 2.1 permet de montrer que tout homéomorphisme h d'une surface à bord X (orientée, compacte, connexe) dont l'intérieur contient un 1-complexe K (compact, connexe), tel que $\pi_1(h)$ laisse invariante toute classe de conjugaison d'éléments de l'image de $\pi_1(K; x_0) \rightarrow \pi_1(X; x_0)$ est isotope (par isotopie fixe sur ∂X) à un homéomorphisme h' fixe sur K (il suffit de procéder comme en 3.3 ci-dessous en constatant que l'hypothèse sur $\pi_1(h)$ implique encore que h transforme toute courbe simple d'un voisinage tubulaire T de K en une courbe homotope dans X , puisque les classes d'homotopie de courbes simples de T correspondent à certaines classes de conjugaison envisagées ci-dessus).

Comme l'homotopie se traduit en termes de π_1 et comme la congruence s'exprime en termes d'invariants associés au plongement (cf. 7) l'énoncé 3.1. conduit à une expression algébrique du problème de l'isotopie des plongements de 1-complexes dans les surfaces.

3.3 *Démonstration de 3.1.* Il suffit de montrer que b entraîne a . Soit T un voisinage tubulaire de $i_0(K)$ dans X ; T est une surface à bord (orientée, compacte) ainsi que $\Sigma = X \setminus \text{int } T$. Etant donné l'hypothèse d'homotopie entre i_0 et i_1 , l'homéomorphisme h qui réalise la congruence entre i_0 et i_1 transforme toute courbe γ de T en courbe homotope à γ dans X (en effet $i_0: K \rightarrow T$ est une équivalence d'homotopie). On est donc dans les conditions d'application du Théorème 2.1: il existe une isotopie ambiante de X , fixe sur ∂X , transformant h en h' fixe sur T ; cette isotopie transforme i_1 en i_0 .

§4. PLONGEMENTS DE SURFACES À BORD DANS LES SURFACES À BORD

4.1 THÉORÈME. Soient X et X' deux surfaces à bord orientées compactes, i_0 et i_1 deux plongements (i.e. injections continues) de X dans $\text{int } X'$. Alors i_0 et i_1 sont isotopes par isotopie ambiante de X' si et seulement s'ils sont homotopes et congrus par un homéomorphisme orienté h de X' .

4.2 *Démonstration.* Il suffit d'appliquer le Théorème 2.1 à la surface à bord X' qui est le recollement de $T = i_0(X)$ et de $\Sigma = X' \setminus \text{int } T$, et à l'homéomorphisme de congruence h qui (vu l'hypothèse d'homotopie entre i_0 et i_1) transforme toute courbe simple γ de T en courbe homotope dans X' .

§5. EXEMPLE DE COROLLAIRE EN ALGÈBRE DES GROUPES

5.1 THÉORÈME. Soit G un groupe ayant pour générateurs $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g, a_{g+1}, b_{g+1}, \dots, a_{g+h}, b_{g+h}$ et unique relation:

$$[a_1, b_1][a_2, b_2] \dots [a_g, b_g][a_{g+1}, b_{g+1}] \dots [a_{g+h}, b_{g+h}] = 1$$

alors, tout automorphisme φ de G , fixe sur le sous groupe engendré par $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g$ conserve globalement le sous groupe engendré par $a_{g+1}, b_{g+1}, \dots, a_{g+h}, b_{g+h}$.

5.2 *Démonstration.* Nous en donnons seulement le principe pour abréger l'exposé: on considère une surface orientée X de genre $g + h$ (sans bord) qu'une courbe simple découpe en deux surfaces à bord: T de genre g , Σ de genre h ; alors, à isomorphisme près, $\pi_1(T; x)$ est un groupe libre de base $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$, $\pi_1(\Sigma; x)$ est le groupe libre de base $a_{g+1}, b_{g+1}, \dots, a_{g+h}, b_{g+h}$, et $\pi_1(X; x)$ est le groupe G (Van Kampen). A l'automorphisme φ de

G , on fait correspondre un homéomorphisme orienté f de X tel que $\pi_1(f) = \bar{\varphi}$ (classe extérieure de φ) dont on montre, grâce à 2.1, qu'il est isotope à f' fixe sur T , donc $f'(\Sigma) = \Sigma$, d'où la conclusion de 5.1.

§6. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.1

6.1 *Terminologie employée. Rappels et préliminaires.*

6.1.1 Le type d'une surface à bord orientée compacte connexe X est le couple (g, p) où g est le genre de X et p le nombre de composantes connexes du bord ∂X .

6.1.2 Un *collier* sur une composante b du bord d'une surface à bord orientée X est un cylindre orienté $\mathcal{C}$ contenu dans X tel qu'une composante du bord $\partial \mathcal{C}$ soit b .

6.1.3 Une surface à bord de type $(0, 1)$, $(0, 2)$ ou $(0, 3)$ est appelée respectivement disque, cylindre, pantalon.

6.1.4 Si $\mathcal{D}$ est un disque on sait (Alexander) que tout homéomorphisme fixe sur $\partial \mathcal{D}$ est isotope à $id_{\mathcal{D}}$ par isotopie fixe sur $\partial \mathcal{D}$.

6.1.5 Si $\mathcal{C}$ est un cylindre orienté et si $G = Aut(\mathcal{C}; id_{\partial \mathcal{C}})$ désigne le groupe des homéomorphismes (orientés) de $\mathcal{C}$ fixes sur $\partial \mathcal{C}$ il existe une bijection canonique $\varphi : \pi_0(Aut(\mathcal{C}; id_{\partial \mathcal{C}})) \rightarrow \mathbb{Z}$. Un élément h de G sera appelé *twist* de $\mathcal{C}$ d'ordre n où $n = \varphi(\bar{h})$.

6.1.6 Si $\mathcal{P}$ est un pantalon (i.e. type $(0, 3)$), tout homéomorphisme de $\mathcal{P}$ fixe sur $\partial \mathcal{P}$ est isotope à $id_{\mathcal{P}}$ par isotopie *non fixe* sur $\partial \mathcal{P}$. Si $\mathcal{P}$ est orienté, il existe une bijection canonique $\psi : \pi_0(Aut(\mathcal{P}; id_{\partial \mathcal{P}})) \rightarrow \mathbb{Z}^3$, ou encore tout homéomorphisme de $\mathcal{P}$ fixe sur $\partial \mathcal{P}$ est (à isotopie près, fixe sur $\partial \mathcal{P}$) réductible à un homéomorphisme égal à trois twists sur trois cylindres formant un système de colliers sur les trois composantes de $\partial \mathcal{P}$ et égal à l'identité sur le complémentaire de ces colliers dans $\mathcal{P}$.

Toutes ces propriétés sont de type classique, on en trouvera un exposé détaillé dans ([6], Chap. IV).

6.1.7 **THÉORÈME.** Soient i_0 et i_1 deux plongements d'une 1-variété compacte V dans l'intérieur d'une surface à bord orientée compacte X . Alors, i_0 et i_1 sont isotopes par isotopie ambiante (fixe sur ∂X) si et seulement s'ils sont homotopes et congrus par un homéomorphisme orienté h de X (i.e. $h \circ i_0 = i_1$).

Ce théorème a été démontré par l'auteur. On en trouvera une démonstration dans [7].

6.2 Quelques lemmes sur la nullité de certain twists

Souvent, au cours de la démonstration, nous nous trouverons dans la situation décrite dans les Lemmes 6.2.1–6.2.4, ci-dessous. Nous donnons donc trois énoncés auxquels nous pourrions faire systématiquement référence. Les démonstrations étant faciles, on n'en donne que le principe.

6.2.1 **LEMME A.** Soit S une surface à bord orientée de type (g, p) (où $g \geq 2$, $p \geq 0$). S est le recollement de deux surfaces à bord: S_1 de type $(1, 2)$ et S_2 de type $(g - 2, p + 2)$ (cf. Fig. 1). Soit h un homéomorphisme de S qui est l'identité partout sur S_1 à l'exception de deux cylindres $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de S_1 (voir figure); Sur chacun de ces cylindres h est un twist d'ordre n_1 , n_2 (respectivement). Soit γ la courbe représentée sur la figure, alors si $h(\gamma)$ est homotope à γ dans S , on a $n_1 = n_2 = 0$.

Démonstration: immédiat par un calcul d'homologie dans $H_1(S)$ utilisant les cyclés définis par les courbes γ , α_1 et α_2 de la Figure 1.

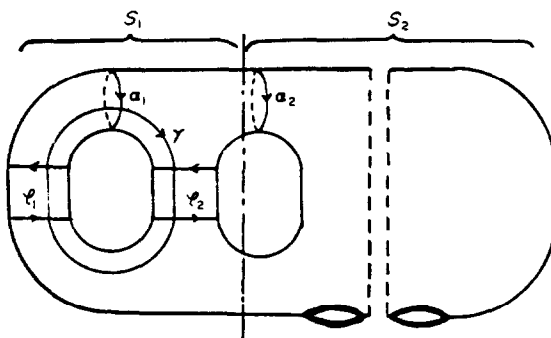


Fig. 1.

6.2.2 LEMME B. Soit S une surface à bord orientée de type (g, p) ($g \geq 3, p \geq 0$). S est le recollement de trois surfaces à bord S_1, S_2, S_3 de types respectifs $(g_1, p_1 + 2), (1, 4), (g_3, p_3 + 2)$ avec $g_1 + g_3 = g - 3, p_1 \geq 0, p_3 \geq 0, p_1 + p_3 = p$ (cf. Fig. 2). Soit h un homéomorphisme de S qui est l'identité partout sur S_2 à l'exception de deux cylindres $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ (voir figure) sur chacun desquels h est un twist (d'ordre n_1, n_2 respectivement). Si γ est la courbe représentée sur la Fig. 2 et si $h(\gamma)$ est homotope à γ dans S , on a $n_1 = n_2 = 0$.

Démonstration. Analogue au lemme A par un calcul d'homologie dans $H_1(S)$ utilisant les cycles définis par les courbes orientées $\gamma, \alpha_1, \alpha_2$ de la Fig. 2.

6.2.3 LEMME C. Soit S une surface à bord orientée de type $(0, p)$ (où $p \geq 4$); S est le recollement de trois surfaces à bord S_1, S_2, S_3 de types respectifs $(0, q), (0, 4), (0, q')$ avec $q + q' = p$ (cf. Fig. 3). Soit h un homéomorphisme de S qui est l'identité partout sur S_2 à l'exception d'un cylindre $\mathcal{C}$ de S_2 (voir figure) sur lequel h est un twist d'ordre n . Soit, d'autre part une surface à bord orientée quelconque Σ , et soit X la surface à bord orientée obtenue par recollement de Σ et de S sur une partie commune de leurs bords. On suppose que Σ n'a aucune composante réduite à un disque. Alors si on suppose que la courbe γ représentée sur la Fig. 3 est telle que $h(\gamma)$ soit homotope à γ dans X , on a nécessairement $n = 0$. N.B.: sur la Fig. 3 on n'a représenté que S , et non Σ . Le bord de S est en trait fort.

Démonstration. On peut supposer que les surfaces, cylindres, courbes et le twist sont standards. Alors on sait de façon classique (cf. [3]) que puisque γ et $\gamma' = h(\gamma)$ sont homotopes dans X , si l'intersection $\gamma \cap \gamma'$ est non vide et composée d'un nombre fini de points en lesquelles les courbes sont transverses, il existe un disque de X dont le bord est

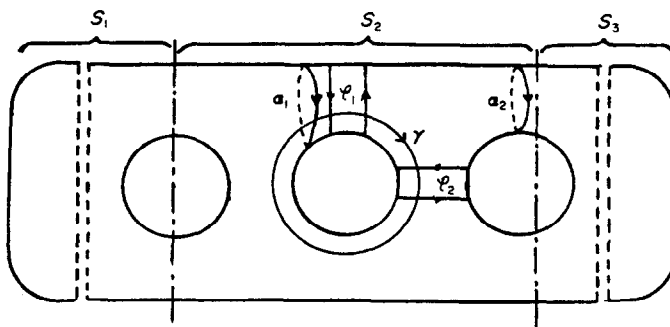


Fig. 2.

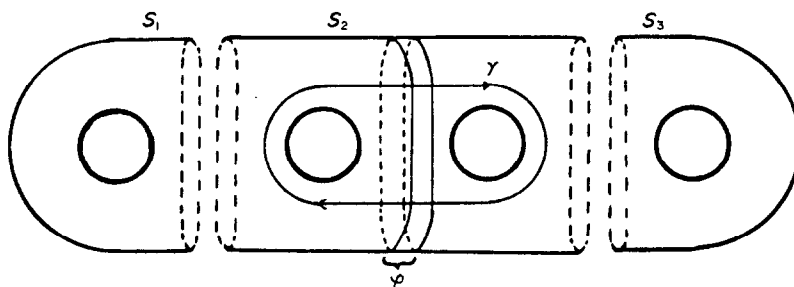


Fig. 3.

formé de la réunion d'un arc de γ et d'un arc de γ' , dont l'intérieur ne rencontre pas $\gamma \cup \gamma'$. Il suffit donc de faire un raisonnement par l'absurde et de constater que si $n \neq 0$, l'intersection $\gamma \cap \gamma'$ est non vide et que, pourtant, il n'existe pas un tel disque dans X : la Fig. 4 ci-dessous représente le cas $n = 2$, on a noté $\gamma' = h(\gamma)$. Parmi les couples de points de $\gamma \cap \gamma'$, seuls (a_1, b_4) , (a_3, a_4) , (a_4, b_1) , (b_3, b_4) sont formés de points consécutifs sur γ et γ' , or les arcs de γ et γ' correspondant ne bordent pas de disques dans X puisqu'il n'y a pas de disques recollés sur les composantes δ et δ' de ∂S .

6.2.4 LEMME D. Soit S une surface à bord orientée de type $(g, 0)$, $(g \geq 3)$. S est le recollement de trois surfaces à bord S_1, S_2, S_3 de types respectifs $(g_1, 2)$, $(1, 4)$, $(g_3, 2)$ avec $g_1 + g_3 = g - 3$. Soit h un homéomorphisme de S qui est l'identité partout sur S_2 à l'exception de trois cylindres $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ de S_2 (cf. Fig. 5) sur chacun desquels h est un twist (d'ordre n_1, n_2, n_3 respectivement). Soit γ la courbe simple de S_2 représentée sur la figure. Alors si $h(\gamma)$ est homotope à γ dans S , on a $n_1 = n_2 = n_3 = 0$.

Démonstration. Par un calcul d'homologie dans $H_1(S)$ utilisant les cycles déterminés par les courbes orientées $\gamma, \alpha_1, \alpha_2$ de la figure, on montre d'abord facilement que $n_3 = 0$, $n_1 + n_2 = 0$. Il reste alors à montrer que $n_2 = 0$, par exemple, et pour cela on emploie la méthode utilisée pour le Lemme 6.2.3.

6.3 Lemme fondamental et définitions

6.3.1 LEMME. Soit X une surface à bord orientée compacte et connexe obtenue par recollement sur une partie commune $\partial^\circ T = -\partial^\circ \Sigma$ (réunion de composantes connexes) des bords ∂T et $\partial \Sigma$ de deux surfaces à bord orientées T et Σ , T connexe, Σ n'ayant aucune composante réduite à un disque. Il existe une famille finie Γ de courbes simples dans T disjointes et une autre famille finie Γ' de courbes simples de T telles que: tout homéomorphisme orienté h de X , fixe sur chaque courbe de Γ et sur ∂T qui transforme toute courbe

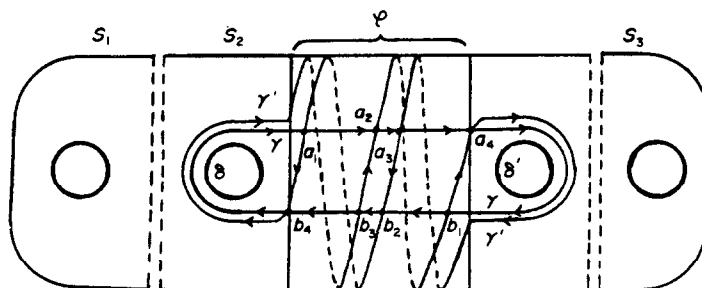


Fig. 4.

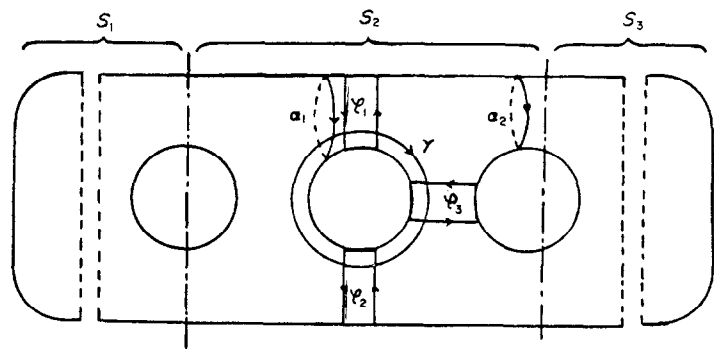


Fig. 5.

γ de Γ' en courbe homotope à γ dans X , est isotope par isotopie ambiante de X fixe en dehors d'un voisinage arbitrairement fixé de T à un homéomorphisme h' de X , h' fixe sur T . La famille Γ sera dite famille adaptée à T , elle sera construite indépendante de Σ (qui peut être vide). La famille Γ' sera dite associée à Γ .

6.3.2 *Démonstration.* Nous allons distinguer plusieurs cas selon le type de T , en commençant par les cas faciles où $\partial T = \phi$:

6.3.2.1 Soit $T \simeq S^2$. Trivial: on prend Γ réduite à un grand cercle de S^2 et $\Gamma' \simeq \phi$. On est ramené à des homéomorphismes de disques.

6.3.2.2 Soit $T \simeq S^1 \times S^1$. On prend Γ réduite à une courbe $c = S^1 \times \{1\}$ et Γ' réduite à $c' = \{1\} \times S^1$.

6.3.2.3 Soit T une surface sans bord de genre $g \geq 2$. On choisit une famille Γ composée de $3g - 3$ courbes: $B_1, \dots, B_{g+1}, C_1, C_2, \dots, C_{2g-4}$ (voir Fig. 6), de façon à découper "canoniquement" T en pantalons:

Comme h est orienté, il conserve chaque composante de la découpe de T selon Γ . Sur chaque pantalon, h est donc réductible à trois twists sur un système de colliers sur le bord. Donc h est réductible par isotopie fixe sur chaque courbe de Γ à une série de $3g-3$ twists sur $3g-3$ cylindres formant un voisinage tubulaire de Γ . Soit Γ' la famille des courbes $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_g$ représentées sur la Fig. 6. Avec les hypothèses de l'énoncé, par application du Lemme A (6.2.1) à γ_1 et γ_g , puis du Lemme D (6.2.4) à $\gamma_2, \dots, \gamma_{g-1}$, on montre que tous les twists sont d'ordre nul.

6.3.2.4 Si T est de type $(0, 1)$, $(0, 2)$ ou $(0, 3)$ (i.e. T est un disque, un cylindre ou un pantalon), il suffit de prendre $\Gamma = \Gamma' = \phi$.

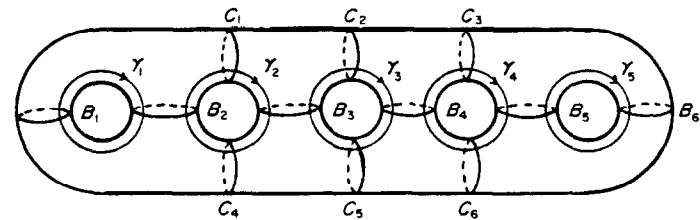


Fig. 6.

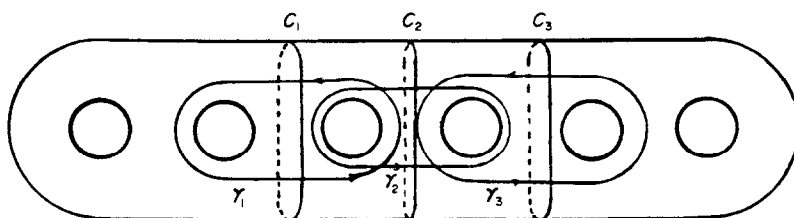


Fig. 7.

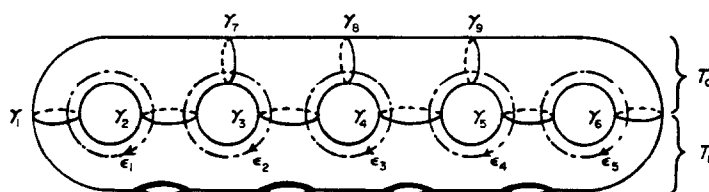


Fig. 8.

6.3.2.5 Si T est de type $(0, p)$ avec $p \geq 4$, on choisit Γ de façon à découper T en pantalons: Γ est constituée de $p-3$ courbes $C_1, C_2, \dots, C_{p-3}$ et $\Gamma' = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{p-3}\}$ (cf. Fig. 7, où on a représenté T lorsque $p = 6$: le bord de T étant en trait fort).

Par un raisonnement analogue à celui de 6.3.2.3 h est réductible à un système de $2p-3$ twists sur $p-3$ cylindres formant un voisinage tubulaire de $C_1, C_2, \dots, C_{p-3}$ d'une part, et sur un système de p colliers sur le bord de T . Ces p derniers twists peuvent être annulés par une isotopie fixe en dehors d'un voisinage de ces colliers. Quant aux autres twists (au nombre de $p-3$), on montre qu'ils sont nuls grâce au Lemme D (6.2.3) appliqué successivement aux courbes $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{p-3}$.

6.3.2.6 Soit T de type (g, p) avec $g \geq 1, p \geq 1$.

On commence par construire une famille Γ_0 de courbes $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{2g-1}$ comme sur la Fig. 8 (on a représenté le cas $g = 5, p = 4$); les courbes $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{g+1}$ découpent T en deux surfaces à bord T_0 et T_1 de types respectifs $(0, g+1)$, $(0, p+g+1)$, et les courbes $\gamma_{g+2}, \dots, \gamma_{2g-1}$ découpent T_0 en pantalons (si $g > 1$).

Soit Γ_1 une famille de courbes adaptée à T_1 (une telle famille existe d'après 6.3.2.4 et 6.3.2.5) et soit $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. On va montrer que Γ est adaptée à T en construisant la famille Γ' correspondante. Soit d'abord Γ'_1 une famille de courbes de T_1 associée à Γ_1 , et soit Γ'_0 la famille des courbes $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_g$ représentées sur la Fig. 8, puis formons $\Gamma' = \Gamma'_0 \cup \Gamma'_1$. Si h est un homéomorphisme orienté de $X = T \cup \Sigma$ fixe sur ∂T et toutes les courbes de Γ et transformant toute courbe de Γ' en courbe homotope dans X , alors par application du Lemme 6.3.1 à la surface T_1 (application possible car T_1 est de type $(0, p + g + 1)$ et ce cas a été étudié en 6.3.2.4 et 6.3.2.5), il existe une première isotopie ambiante fixe en dehors d'un voisinage (ne rencontrant pas $\gamma_{g+2}, \dots, \gamma_{2g-1}$) de T_1 dans X , transformant h en h' fixe sur T_1 . Sur chacun des pantalons qui forment T_0 h' est réductible à trois twists sur trois colliers autour des trois composantes du bord du dit pantalon, donc h' est réductible à $2g - 1$ twists sur des cylindres formant un voisinage tubulaire des courbes de Γ_0 . Il suffit alors de montrer successivement que tous ces twists sont d'ordre nul en appliquant le Lemme A (6.2.1) à ϵ_1 et ϵ_g , et le Lemme B (6.2.2) à $\epsilon_2, \dots, \epsilon_{g-1}$. (Le cas $g = 1$ est légèrement différent car T_0 est un cylindre, donc $h'|T_0$ est un twist nul puisque $h(\epsilon_1)$ est homotope à ϵ_1 .)

6.4 *Remarque.* Les cardinaux respectifs de Γ et Γ' telles qu'elles sont construites dans la démonstration précédente sont résumés dans le tableau:

	$g = p = 0$	$g = 1 \quad p = 0$	$g \geq 2 \quad p = 0$	$g = 1 \quad p \geq 1$	$g \geq 2 \quad p \geq 1$
card Γ	1	1	$3g - 3$	$p + 1$	$3g - 3 + p$
card Γ'	0	1	g	p	$2g - 2 + p$

(On aurait pu prendre Card $\Gamma = 0$, dans le cas de S^2 .)

6.5 On montre maintenant que pour la démonstration de 2.1, on peut se ramener au cas où T est telle que chaque composante de T est recollée dans X sur une surface n'ayant pas de composante réduite à un disque.

En effet, avec les notations et hypothèses de 2.1, soient $T_1, T_2, \dots, T_n$ les composantes de T . Pour $i = 1, 2, \dots, n$ on forme la surface à bord $\Sigma_i = X \setminus \text{int } T_i$, puis $\tilde{T}_i$ obtenue en recollant sur T_i les composantes de Σ_i réduites à un disque; pour tout couple (i, j) on a soit $\tilde{T}_i \cap \tilde{T}_j = \emptyset$, soit $\tilde{T}_i \subset \tilde{T}_j$, soit $\tilde{T}_j \subset \tilde{T}_i$. Soit alors $\hat{T} = \bigcup_{i=1}^n \tilde{T}_i$ et $\hat{T}_1, \hat{T}_2, \dots, \hat{T}_q$ les composantes de $\hat{T}$; alors pour $i = 1, \dots, q$, il existe j tel que $\hat{T}_i = \hat{T}_j$, de plus chaque $\hat{T}_i$ est recollé dans X sur une surface à bord $(X \setminus \text{int } \hat{T}_i)$ qui n'a pas de composante réduite à un disque. Supposons le Théorème 2.1 démontré pour $X, \hat{T}$ et une famille de courbes simples $\hat{F}$ de $\hat{T}$: comme on peut trouver une famille F de courbes simples de T telle que pour toute $\hat{\gamma} \in \hat{F}$, il existe $\gamma \in F$, γ homotope à $\hat{\gamma}$ dans $\hat{T}$, la famille F répond au problème (car $h' | \hat{T} = \text{id}_{\hat{T}} \implies h' | T = \text{id}_T$).

6.6 Il reste à Démontrer 2.1 dans le cas où les composantes $T_1, T_2, \dots, T_n$ de T sont telles que, pour $i = 1, 2, \dots, n$, la surface à bord $\Sigma_i = X \setminus \text{int } T_i$ n'a pas de composantes réduites à un disque. Soit v un voisinage de T dans X , réunion de voisinages disjoints v_i des T_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Pour chaque $i = 1, 2, \dots, n$, en appliquant le Lemme 6.3.1 à X, T_i, Σ_i on en déduit l'existence de deux familles de courbes simples Γ_i et Γ'_i (telles que si h est un homéomorphisme orienté de X , fixe sur chaque courbe de Γ_i et transformant toute courbe de Γ'_i en courbe homotope dans X , alors h est isotope à h' fixe sur T_i par isotopie fixe en dehors de v_i). Soit $\Gamma = \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i$, $\Gamma' = \bigcup_{i=1}^n \Gamma'_i$, $F = \Gamma \cup \Gamma' \cup \pi_0 \partial T$. Soit V la 1-variété formée par la réunion des courbes de Γ et de $\partial^\circ T = \partial T \cap \partial \Sigma$; soit enfin h un homéomorphisme orienté de X transformant toute courbe de F en courbe homotope dans X . Alors l'inclusion canonique i_0 de V dans X et le plongement $h \circ i_0$ sont homotopes et congrus par h ; d'après le Théorème 6.1.7 il existe une isotopie ambiante de X , fixe sur ∂X transformant $h \circ i_0$ en i_0 . Cette isotopie transforme donc h en un homéomorphisme $\tilde{h}$ fixe sur V . Comme $\tilde{h}$ est orienté on en déduit que $\tilde{h}(T_i) = T_i$ pour $i = 1, 2, \dots, n$. Pour chaque composante b de $\partial T \setminus \partial^\circ T$, $\tilde{h}(b)$ est homotope à b , donc $\tilde{h}(b) = b$. On peut faire une isotopie ambiante de X , fixe en dehors d'un voisinage de toutes les composantes b de $\partial T \setminus \partial^\circ T$ de façon à transformer $\tilde{h} | b$ à id_b ; on se ramène ainsi au cas où $\tilde{h}$ est fixe sur ∂T et sur toute courbe de Γ . On applique alors successivement le Lemme 6.3.1 à $X, T_i, \Sigma_i, \Gamma_i, \Gamma'_i$ et $\tilde{h}$ (pour $i = 1, 2, \dots, n$): on en déduit l'existence d'une isotopie ambiante de X fixe en dehors de v transformant $\tilde{h}$ en un homéomorphisme h' tel que $h' | T = \text{id}_T$. *cqfd.*

BIBLIOGRAPHIE

1. R. BAER: Kurventypen auf Flächen. *J. Reine Angew Für Math.* **156** (1927), 231–246.
2. R. BAER: Isotopie von Kurven auf orientierbaren, geschlossenen Flächen und ihr Zusammenhang mit her topologischen Deformation der Flächen. *J. Reine Angew Für Math.* **159** (1928), 101–116.
3. D. B. A. EPSTEIN: Curves on 2-manifolds and isotopies. *Acta. Math.* **115** (1966), 83–107.

4. Y. LADEGAILLERIE: Classification topologique des plongements des 1-complexes compacts dans les surfaces. *C.R.A.S., Série A* **279** (1974), 129–132.
5. Y. LADEGAILLERIE: Un théorème d'isotopie sur les surfaces. *C.R.A.S., Série A* **281** (1975), 195–197.
6. Y. LADEGAILLERIE: Découpes et isotopies de surfaces topologiques. Thèse de Doctorat d'Etat. Montpellier (1976).
7. Y. LADEGAILLERIE: Sur les plongements des 1-variétés dans les surfaces orientables. *Bull. Soc. Math. 2^e série* **107** (1983), 437–443.

*Université des Sciences et Techniques
du Languedoc
Institut de Mathématiques
Place Eugene Bataillon
34060 Montpellier Cédex
France*

APPENDICE

Expression combinatoire de la congruence de plongements

Sans donner les démonstrations (qui sont simples) nous indiquons comment la notion de congruence de plongements de 1-complexes s'exprime combinatoirement (cf. [4, 6], Chap. III):

Si $i: K \rightarrow X$ est un plongement d'un 1-complexe compact K dans l'intérieur d'une surface à bord orientée compacte X , un premier invariant par congruence est une *circularisation* de K , c'est à dire une famille $(\omega_s)_{s \in S}$ d'ordres circulaires ω_s sur les arcs orientés issus d'un sommet s de K , ceci pour tout sommet. Si φ_ω est la permutation de l'ensemble des arcs orientés de K qui, à tout arc a associe $\omega_s(-a)$ (i.e. le suivant de l'arc opposé de a dans l'ordre circulaire ω_s en le sommet s correspondant), les orbites de φ_ω sont appelées ω -circuits de K et leur ensemble noté $C(K, \omega)$. Il existe alors une bijection canonique ψ entre $C(K, \omega)$ et l'ensemble des composantes du bord orienté d'un voisinage tubulaire T de $i(K)$ dans X . Si $\Sigma = X \setminus \text{int } T$, Σ est une surface à bord orientée compacte réunion de composantes Σ_i , ($i \in I$), chaque Σ_i étant de type (g_i, p_i) . On obtient une partition $(C_i)_{i \in I}$ de l'ensemble des ω -circuits c tels que $\psi(c)$ soit dans une même composante Σ_i ; d'où une famille de triplets: $(C_i, g_i, p_i)_{i \in I}$ qui sont les *invariants de recollement*. On peut alors montrer que deux plongements i_0 et i_1 sont congrus par homéomorphisme orienté si et seulement si il leur correspond une même circularisation ω de K et les mêmes invariants de recollement.