Lecture Notes in Mathematics

A collection of informal reports and seminars
Edited by A. Dold, Heidelberg and B. Eckmann, Zürich

265

Neantro Saavedra Rivano

Universidad Católica de Valparaíso
Valparaíso, Chile

Catégories Tannakiennes



Springer-Verlag
Berlin · Heidelberg · New York 1972

AMS Subject Classifications (1970): Primary: 14A20, 18D10, 18F99, 20G05
Secondary: 14F99, 14G13, 16A24, 20G15, 20J99

ISBN 3-540-05844-3 Springer-Verlag Berlin · Heidelberg · New York
ISBN 0-387-05844-3 Springer-Verlag New York · Heidelberg · Berlin

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically those of translation, reprinting, re-use of illustrations, broadcasting, reproduction by photocopying machine or similar means, and storage in data banks.

Under § 54 of the German Copyright Law where copies are made for other than private use, a fee is payable to the publisher, the amount of the fee to be determined by agreement with the publisher.

© by Springer-Verlag Berlin · Heidelberg 1972. Library of Congress Catalog Card Number 72-80033. Printed in Germany.

Offsetdruck: Julius Beltz, Hemsbach

A Antoinette

TABLE DES MATIERES

Introduction..... p. 5

Chapitre I : ⊗-catégories..... 11

§ 0. Généralités..... 12
§ 1. Contraintes pour une loi ⊗ 16
§ 2. Compatibilités entre contraintes..... 27
§ 3. Les objets Hom , Moh 51
§ 4. ⊗-foncteurs..... 60
§ 5. ⊗-catégories rigides..... 78
§ 6. Algèbres et cogèbres..... 83

Chapitre II : Représentations linéaires de schémas en groupes affines.. 87

Introduction..... 89
§ 1. Compléments d'algèbre linéaire..... 90
§ 2. La catégorie Comod(B) , B étant une A-cogèbre..... 110
§ 3. Représentations linéaires de schémas en groupes affines... 140
§ 4. Représentations de groupes (suite) : cas d'un corps..... 152
Appendice : cas d'un schéma de base général..... 158

Chapitre III : Dualité de Tannaka..... 161

Introduction..... 162
§ 1. Catégories ind-tannakiennes..... 163
§ 2. Gerbes tannakiennes ; le théorème de structure..... 174
§ 3. Catégories tannakiennes sur un corps..... 185

Chapitre IV : Graduations et filtrations..... 207

§ 1. Graduations..... 208
§ 2. Filtrations..... 213

Chapitre V : Polarisations des catégories tannakiennes sur $\mathbb{R}$ 239

Introduction..... 240
§ 0. Rappels de théorie des groupes..... 241
§ 1. Catégories tannakiennes à lien réductif connexe..... 249

§ 2. Polarisations : cas homogène..... 257
§ 3. Polarisations : cas gradué..... 293

Chapitre VI : Exemples tirés de la géométrie algébrique..... 305

§ 1. Systèmes locaux et modules stratifiés..... 307
§ 2. Structure de Hodge..... 321
§ 3. F-cristaux..... 331
§ 4. Motifs..... 351
Appendice : Conjectures en géométrie algébrique..... 380

Bibliographie..... 407

Index terminologique..... 412

INTRODUCTION

1. Une catégorie tannakienne sur un corps k est une $\otimes$-catégorie ACU (voir le chap. I, qui présente de façon systématique le langage des $\otimes$-catégories, constamment utilisé dans ce travail) k-linéaire abélienne $\underline{C}$, possédant des objets $\underline{Hom}$ relativement à la loi $\otimes$, et telle qu'il existe une extension de corps k'/k et un $\otimes$-foncteur ACU k-linéaire sur $\underline{C}$ à valeurs dans les k'-vectoriels de rang fini, $\omega : \underline{C} \longrightarrow \underline{Modf}(k')$ qui soit fidèle et exact. Plus généralement, si S est un k-schéma, un foncteur fibre sur $\underline{C}$ à valeurs dans S est un $\otimes$-foncteur ACU k-linéaire sur $\underline{C}$ à valeurs dans les $\underline{O}_S$-modules localement libres de rang fini, $\omega : \underline{C} \longrightarrow \underline{Loclib}(S)$, qui soit exact, considéré comme à valeurs $\underline{Qcoh}(S)$ (si $S \neq \emptyset$, il est alors fidèle). Des exemples de catégories tannakiennes et de foncteurs fibre apparaissent de façon naturelle en Géométrie Algébrique et en Géométrie Analytique, ils sont fournis notamment par la considération de motifs sur un corps (exemple qui a motivé cette théorie), modules stratifiés sur un schéma sur un corps, structures de Hodge, familles analytiques de structures de Hodge, systèmes locaux en vectoriels de rang fini sur un topos, etc. (voir chap. VI).

Dans ce travail, on interprète les catégories tannakiennes au moyen de la théorie des schémas en groupes, on les classifie et on étudie des structures supplémentaires sur une catégorie tannakienne, notamment les filtrations des foncteurs fibre et les polarisations des catégories tannakiennes sur des sous-corps du corps des nombres réels. En fait, on développe une théorie plus générale, dans laquelle le corps k est remplacé par un anneau (commutatif) A. Les outils essentiels pour ce faire sont le formalisme pour l'algèbre homologique non commutative introduit par J. Giraud (Cohomologie non abélienne, Springer-Verlag 1971) et la théorie des schémas en groupes réductifs.

2. Soit $\underline{C}$ une catégorie tannakienne sur un corps k possédant un foncteur fibre à valeurs dans k (une telle $\underline{C}$ est appelée neutre) et choisissons un tel

foncteur fibre, $\omega : \underline{C} \longrightarrow \underline{Modf}(k)$ ($\underline{C}$ est donc, neutralisée). Pour toute k-algèbre A , on note ω_A le foncteur $\underline{C} \longrightarrow \underline{Mod}(A)$ défini par $\omega_A(X) = A \otimes_k \omega(X)$.

Théorème 1. 1) Le foncteur $A \longmapsto \underline{Aut}^{\otimes}(\omega_A)$ est représentable par un k-schéma en groupes affine $G = \underline{Aut}^{\otimes}(\omega_A)$.

2) Le $\otimes$-foncteur ACU évident $\underline{C} \longrightarrow \underline{Rep}_o(G)$ est une équivalence de catégories.

Ici $\underline{Rep}_o(G)$ dénote la $\otimes$-catégorie des k-vectoriels V de rang fini munis d'une action algébrique du k-groupe G , i.e. d'un morphisme de foncteurs $G \longrightarrow \underline{Aut}(V)$. Le théorème donne un dictionnaire entre catégories tannakiennes neutralisées sur k et k-groupes affines. Pour compléter le cas neutre, il reste à déterminer la catégorie des foncteurs fibre sur $\underline{C}$ à valeurs dans un k-schéma S . Pour ceci, à tout foncteur fibre $\nu : \underline{C} \longrightarrow \underline{Loclib}(S)$ on associe le foncteur $\underline{Isom}^{\otimes}(\omega_S, \nu)$, on a alors

Théorème 2. 1) $\underline{Isom}^{\otimes}(\omega_S, \nu)$ est représentable par un S-schéma affine sur S qui, muni de l'action à droite évidente de $G_S = \underline{Aut}^{\otimes}(\omega_S)$, est un G_S-torseur à droite pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte (fpqc) sur $\underline{Sch}_{/S}$.

2) Le foncteur $\nu \longmapsto \underline{Isom}^{\otimes}(\omega_S, \nu)$ établit une équivalence de catégories entre la catégorie des foncteurs fibre sur $\underline{C}$ à valeurs dans S et celle des G_S-torseurs à droite sur S pour la topologie fpqc .

En particulier, deux foncteurs fibre ν , $\nu' : \underline{C} \longrightarrow \underline{Loclib}(S)$ sont localement isomorphes (en tant que $\otimes$-foncteurs) pour la topologie fpqc. On peut aussi interpréter ce théorème de la façon suivante : soit $FIB(\underline{C})$ la catégorie fibrée au-dessus de $\underline{Sch}_{/k}$ des foncteurs fibre sur $\underline{C}$ à valeurs dans un k-schéma variable ; alors, le choix d'un $\omega : \underline{C} \longrightarrow \underline{Modf}(k)$ détermine une équivalence de $FIB(\underline{C})$ avec la gerbe des G_S-torseurs à droite pour la topologie fpqc (S étant un k-schéma variable).

De façon générale, si $\underline{C}$ est une catégorie tannakienne sur k (non nécessairement neutre), posons $\mathcal{G} = FIB(\underline{C})$. On a alors

Théorème 3. 1) $\mathcal{G}$ est une gerbe sur $\underline{Sch}_{/k}$ munie de la topologie fpqc, localement liée par un schéma en groupes affine (voir Giraud, loc.cit.).

2) Le $\otimes$-foncteur ACU évident $\underline{C} \longrightarrow \underline{Rep}_o(\mathcal{G})$ est une équivalence de catégories.

Ici $\underline{Rep}_o(\mathcal{G})$ dénote la $\otimes$-catégorie des foncteurs cartésiens $\mathcal{G} \longrightarrow LOCLIB(k)$, où $LOCLIB(k)$ est le champ sur $\underline{Sch}_{/k}$ des $\underline{O}_S$-modules localement libres de rang fini (S étant un k-schéma variable). Une gerbe $\mathcal{G}$ possédant la propriété décrite dans 1) sera appelée tannakienne. Si $\mathcal{G}$ est une telle gerbe, la $\otimes$-catégorie ACU $\underline{Rep}_o(\mathcal{G})$ est une catégorie tannakienne, et on a un morphisme de gerbes

$$\mathcal{G} \longrightarrow FIB(\underline{Rep}_o(\mathcal{G})) \quad .$$

Celui-ci est une équivalence si le lien de $\mathcal{G}$ est représenté par un groupe, ou bien s'il est algébrique, i.e. localement représenté par un groupe de type fini. Dans ce dernier cas, on dit que $\mathcal{G}$ est algébrique et si $\mathcal{G} = FIB(\underline{C})$, on dit aussi que $\underline{C}$ est algébrique. On trouve donc un dictionnaire entre les catégories tannakiennes algébriques sur k et les gerbes tannakiennes algébriques sur k muni de la topologie fpqc . De plus, une catégorie tannakienne algébrique possède un foncteur fibre à valeurs dans une extension finie de k .

3. Soit $\underline{C}$ une catégorie tannakienne sur un sous-corps K de $\mathbb{R}$. Il y a lieu de définir sur $\underline{C}$ des structures de positivité, appelées polarisations. On voit aussitôt qu'on peut se restreindre à étudier une variante homogène de cette notion (il y a aussi une variante graduée), et sur des catégories tannakiennes algébriques sur $\mathbb{R}$. Donnons d'abord une définition préliminaire : si $\underline{C}$ est une catégorie tannakienne (supposée dorénavant algébrique sur $\mathbb{R}$) et V un objet de $\underline{C}$, une forme bilinéaire non dégénérée $\varphi : V \otimes V \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée une forme de Weil si

sa parité ε_φ (i.e. l'unique automorphisme de V vérifiant $\varphi(y,x) = \varphi(x,\varepsilon_\varphi y)$) est dans le centre de $End(V)$ et si pour tout endomorphisme non nul u de V on a $Tr(uu^\varphi) > 0$, où u^φ est l'adjoint de u. Deux formes de Weil $\varphi : V \otimes V \longrightarrow \mathbb{R}$, $\psi : W \otimes W \longrightarrow \mathbb{R}$ sont <u>compatibles</u> si $\varphi \otimes \psi$ est une forme de Weil sur $V \oplus W$. Soit maintenant $\varepsilon \in Z(\mathbb{R})$ ($Z = \underline{Aut}^{\otimes}(id_{\underline{C}})$ est le centre du lien de la gerbe $FIB(\underline{C})$; c'est donc un $\mathbb{R}$-groupe algébrique commutatif). Une <u>ε-polarisation</u> π de $\underline{C}$ consiste en la donnée pour chaque objet V de $\underline{C}$ d'un ensemble non vide $\pi(V)$ des formes de Weil $V \otimes V \longrightarrow \mathbb{R}$ de parité ε_V vérifiant

a) Si V, W sont des objets de $\underline{C}$ et si $\varphi \in \pi(V)$, $\psi \in \pi(W)$, alors $\varphi \oplus \psi \in \pi(V \oplus W)$, $\varphi \otimes \psi \in \pi(V \otimes W)$.

b) Si V est un objet de $\underline{C}$ et si φ, ψ sont des formes de Weil compatibles sur V de parité ε_V, alors $\varphi \in \pi(V) \Leftrightarrow \psi \in \pi(V)$.

L'existence d'une polarisation entraîne que le lien L de $\underline{C}$ est réductif et que le $\mathbb{R}$-groupe Z est compact.

Une 1-polarisation est appelée polarisation <u>symétrique</u>. Voici un exemple typique de polarisation : soit G un $\mathbb{R}$-groupe algébrique affine, $C \in G(\mathbb{R})$ tel que C^2 soit central et que $int(C)$ soit une involution de Cartan de G (i.e. que la forme G_C de G qu'elle définit soit une forme compacte). Alors, si pour chaque G-module V on note $\pi_C(V)$ l'ensemble des applications bilinéaires G-invariantes $\varphi : V \otimes V \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que la forme bilinéaire φ_C soit symétrique définie positive (où $\varphi_C(x,y) = \varphi(x,Cy)$), π_C est une C^2-polarisation de $\underline{Rep}_o(G)$. Que c ci est l'exemple typique résulte de

<u>Théorème</u> 4. <u>Soit G un $\mathbb{R}$-groupe algébrique qui est soit abélien, soit connexe. Alors, $\underline{Rep}_o(G)$ possède une polarisation si et seulement si G est réductif et est une forme tordue intérieure de sa forme compacte et dans ce cas toute polarisation est de la forme π_C où $C \in G(\mathbb{R})$ est uniquement déterminé à conjugaison près.</u>

Il résulte de ce théorème que si $\underline{C}$ est une catégorie tannakienne dont le

lien est abélien ou connexe, et qui est munie d'une polarisation symétrique, $\underline{C}$ est neutre et possède même un foncteur fibre $\omega : \underline{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Modf}}(\mathbb{R})$ unique à isomorphisme près tel que $\underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega)$ soit un $\mathbb{R}$-groupe compact ; de plus, si V est un objet de $\underline{C}$ une forme $\varphi : V \otimes V \longrightarrow \mathbb{R}$ appartient à $\pi(V)$ si et seulement si $\omega(\varphi)$ est symétrique définie positive.

4. La théorie générale développée dans les cinq premiers chapitres et esquissée plus haut, est illustrée dans le chapitre VI par quelques exemples. On remarquera que pratiquement tous les exemples proviennent de la considération de diverses théories de cohomologie pour les variétés projectives lisses sur un corps donné, et donnent lieu à des catégories tannakiennes sur des corps de caractéristique zéro. L'exemple de ce type qui est "universel" est donné par la catégorie des motifs ; ce n'est pas un vrai exemple, puisque la construction de la catégorie des motifs en tant que catégorie tannakienne dépend des conjectures "standard" pour les cycles algébriques. Un appendice est consacré à la présentation de ces conjectures ainsi que celles de Hodge et de Tate ; on y rappelle aussi des définitions concernant les cycles algébriques et les théories de cohomologie.

—— o ——

J'exprime ma reconnaissance profonde à A. GROTHENDIECK, qui m'a introduit à ce sujet. Ses conseils et suggestions constants m'ont été indispensables pour mener à bien ce travail, et je lui dois en outre une grande partie de ma formation de mathématicien. Je remercie aussi P. BERTHELOT et P. DELIGNE pour l'aide et les conseils qu'ils m'ont généreusement apportés pendant mon travail.

La Ford Foundation et le Centre National de la Recherche Scientifique, grâce à leur soutien financier, m'ont permis de préparer ce travail dont la plus grande partie a été faite à l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques pendant les deux années et demi dernières. Je remercie tout particulièrement Monsieur L. MOTCHANE et Mademoiselle A. ROLLAND et leur successeur Monsieur N.H. KUIPER ainsi que le personnel de l'I.H.E.S. pour le très bon accueil qu'ils m'ont toujours réservé.

Chapitre I : ⊗-CATEGORIES

§ 0. Généralités.

0.1. ⊗-catégories

0.2. Exemples.

§ 1. Contraintes pour une loi ⊗ .

1.1. Contraintes d'associativité

1.2. Contraintes de commutativité

1.3. Contraintes d'unité

1.4. Contrainte opposée et symétrique d'une contrainte

1.5. Exemples.

§ 2. Compatibilités entre contraintes.

2.1. Associativité et commutativité

2.2. Associativité et unité

2.3. Commutativité et unité

2.4. Associativité, commutativité et unité

2.5. Objets inversibles.

§ 3. Les objets Hom , Moh .

3.1. Généralités

3.2. Hom et contraintes

3.3. Hom et contraintes (suite) : morphismes canoniques.

§ 4. ⊗-foncteurs.

4.1. Définitions

4.2. Compatibilités avec des contraintes

4.3. Comportement pour les Hom

4.4. ⊗-équivalences ; transport de structure

4.5. ⊗-catégories fibrées.

§ 5. ⊗-catégories rigides.

5.1. ⊗-catégories rigides

5.2. ⊗-foncteurs rigides.

§ 6. Algèbres et cogèbres.

6.1. Algèbres et cogèbres dans une ⊗-catégorie

6.2. Modules et comodules dans une ⊗-catégorie.

6.3. Remarque.

§ 0. GENERALITES

0.1. ⊗-catégories.

0.1.1. Si $\underline{C}$ est une catégorie, un foncteur $\underline{C} \times \underline{C} \longrightarrow \underline{C}$ sera appelé une ⊗-structure sur $\underline{C}$, ou encore une loi ⊗ sur $\underline{C}$. Une ⊗-catégorie est une catégorie $\underline{C}$ munie d'une ⊗-structure qu'on notera $\otimes_{\underline{C}}$, ou simplement $\otimes$, si aucune confusion n'est possible ; à des objets X, Y de $\underline{C}$, on associe donc un objet $X \otimes Y$ de $\underline{C}$, qui dépend fonctoriellement de (X,Y).

0.1.2. Soit A un anneau commutatif unifère. Rappelons qu'une catégorie A-linéaire est une catégorie $\underline{C}$ munie d'une structure de A-module sur les $\mathrm{Hom}(X,Y)$ $(X,Y \in \mathrm{ob}\ \underline{C})$ qui dépend fonctoriellement de (X,Y). Une ⊗-structure A-linéaire sur une catégorie A-linéaire est un foncteur A-bilinéaire $\underline{C} \times \underline{C} \longrightarrow \underline{C}$. Une ⊗-catégorie A-linéaire est une catégorie A-linéaire munie d'une ⊗-structure A-linéaire.

0.1.3. Soit X un objet d'une ⊗-catégorie $\underline{C}$. On dira que X est 0-régulier (resp. 1-régulier, resp. 2-régulier) à gauche si le foncteur $Y \longmapsto Y \otimes X$ de $\underline{C}$ dans $\underline{C}$ est fidèle (resp. pleinement fidèle, resp. une équivalence de catégories). On définit de même la notion d'objet n-régulier à droite $(n = 0,1,2)$. Un objet de $\underline{C}$ est dit n-régulier $(n = 0,1,2)$ s'il est n-régulier à gauche et à droite.

0.1.4. Si $\underline{C}$ est une ⊗-catégorie, ayant $\otimes_{\underline{C}}$ comme ⊗-structure, la ⊗-catégorie opposée de $\underline{C}$ est la catégorie $\underline{C}^{o}$ munie de la ⊗-structure

$$\otimes_{\underline{C}^{o}} = \otimes^{o}_{\underline{C}} : \underline{C}^{o} \times \underline{C}^{o} \longrightarrow \underline{C}^{o} \quad .$$

On notera encore $\underline{C}^{o}$ cette ⊗-catégorie. La ⊗-catégorie symétrique de $\underline{C}$, notée $\underline{C}^{sym}$, est la catégorie $\underline{C}$ munie de la ⊗-structure

$$\underline{C} \times \underline{C} \xrightarrow{\sigma} \underline{C} \times \underline{C} \xrightarrow{\otimes_{\underline{C}}} \underline{C} \quad ,$$

où σ est la symétrie canonique de $\underline{C}$, $\sigma(X,Y) = (Y,X)$.

On vérifie aussitôt les égalités

$$(\underline{C}^{o})^{o} = \underline{C}$$

(0.1.4.1) $$(\underline{C}^{o})^{sym} = (\underline{C}^{sym})^{o}$$

$$(\underline{C}^{sym})^{sym} = \underline{C} \quad .$$

0.2. Exemples.

0.2.1. Soit $\underline{C}$ une catégorie dans laquelle le produit des couples d'objets existe, et pour tout tel couple (X,Y), choisissons un produit $(X \times Y, p_X, p_Y)$. On définit alors une $\otimes$-structure sur $\underline{C}$ en posant pour des objets X,Y

$$X \otimes Y = X \times Y ,$$

pour des flèches $f : X \longrightarrow X'$, $g : Y \longrightarrow Y'$,

$$f \otimes g = f \times g .$$

Dans cette $\otimes$-catégorie, un objet est n-régulier ($n = 0,1,2$) si et seulement s'il est n-régulier à gauche (resp. à droite). On vérifie sans difficulté les assertions suivantes.

0.2.1.1. Un objet X de $\underline{C}$ est 0-régulier si et seulement s'il est "couvrant", c'est-à-dire, si quel que soit l'objet Y de $\underline{C}$, $p_Y : Y \times X \longrightarrow Y$ est un épimorphisme.

0.2.1.2. Un objet X de $\underline{C}$ est 1-régulier si et seulement s'il est 2-régulier, ou encore, s'il est un objet final de $\underline{C}$.

0.2.2. $\underline{C} = \underline{\mathrm{Mod}}(A)$ la catégorie des modules sur un anneau commutatif unifère A. Le produit tensoriel de A-modules définit une loi $\otimes$ sur $\underline{C}$. De même que dans l'exemple précédent, un objet X de $\underline{C}$ est n-régulier ($n = 0,1,2$) si et seulement s'il est n-régulier à gauche (resp. à droite). Prouvons qu'un A-module L est 2-régulier si et seulement s'il est projectif de rang 1.

0.2.2.1. Si L est projectif de rang 1, et $\check{L}$ désigne le A-module $\mathrm{Hom}_A(L,A)$, on

a des isomorphismes canoniques

$$\check{L} \otimes L \simeq A$$

$$L \otimes \check{L} \simeq A \ ,$$

il en résulte, par associativité du produit tensoriel de A-modules, que le foncteur $X \longmapsto X \otimes \check{L}$ est un quasi-inverse du foncteur $X \longmapsto X \otimes L$.

0.2.2.2. Supposons L 2-régulier ; ceci signifie que le foncteur

$$\underline{\mathrm{Mod}}(A) \longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}}(A) \qquad X \longmapsto X \underset{A}{\otimes} L$$

est une équivalence de catégories abéliennes. Il en résulte en particulier que L est projectif de type fini. En effet, L est image de A par l'équivalence précédente, et la propriété pour un A-module d'être projectif de type fini se conserve par équivalence : c'est clair pour projectif, et pour type fini on remarque qu'un A-module M est de type fini si et seulement si pour tout système inductif filtrant (N_α) , dans lequel les morphismes de transition sont des monomorphismes, le morphisme canonique

$$\varinjlim \mathrm{Hom}(M, N_\alpha) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, \varinjlim N_\alpha)$$

est un isomorphisme.

Enfin, L est de rang 1 , parce qu'il existe un A-module L' et un isomorphisme $L' \otimes L \simeq A$ (le foncteur $X \longmapsto X \otimes L$ est essentiellement surjectif).

0.2.3. Soit G un groupe commutatif d'un topos I , et soit $\underline{C}$ la catégorie des G-torseurs (GIRAUD [1], chap. III). Le produit contracté (loc.cit.) de torseurs définit une $\otimes$-structure sur $\underline{C}$. Dans cette $\otimes$-catégorie, tous les objets sont 2-réguliers.

0.2.4. Soit π_1 un groupe (de $\underline{\mathrm{Ens}}$), π_2 un π_1-module abélien. On construit une catégorie $\underline{C}$ dont les objets sont les éléments de π_1 , tous les morphismes étant des automorphismes, et pour $s \in \pi_1$ on a

$$\mathrm{Aut}_{\underline{C}}(s) = \{s\} \times \pi_2 \ .$$

La composition dans $\underline{C}$ provient de l'addition dans π_2 . On définit sur $\underline{C}$ une loi

$\otimes$ de la façon suivante : si s_1 , $s_2 \in \pi_1$, on pose

$$s_1 \otimes s_2 = s_1 s_2 \quad ;$$

si (s_1,u_1) , (s_2,u_2) sont des morphismes $(u_1,u_2 \in \pi_2)$, on pose

$$(s_1,u_1) \otimes (s_2,u_2) = (s_1 s_2, u_1 + s_1.u_2) \quad .$$

Il est immédiat que dans cette $\otimes$-catégorie tous les objets sont 2-réguliers ; cela provient de ce que π_1 est un groupe et de ce que l'ensemble des flèches de $\underline{C}$, muni de l'opération induite par la loi $\otimes$ en est aussi un, à savoir le produit semi-direct $\pi_1 . \pi_2$.

0.2.5. Soit H un espace topologique, et soit $\underline{H}$ la catégorie ayant H comme ensemble d'objets, et dont l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\underline{H}}(h_1,h_2)$ $(h_1,h_2 \in H)$ est celui des classes de chemins de h_1 à h_2 modulo homotopie, la composition étant la composition de classes de chemins. Il est clair que la catégorie $\underline{H}$ dépend fonctoriellement de H , c'est-à-dire qu'à une application continue $f : H \longrightarrow H'$ on attache un foncteur $\underline{f} : \underline{H} \longrightarrow \underline{H}'$, tel que si $f'' = f' \circ f$, on ait $\underline{f''} = \underline{f'} \circ \underline{f}$, et $\underline{id_H} = id_{\underline{H}}$. En outre, si $f,g : H \longrightarrow H'$, chaque homotopie Φ de f dans g définit une transformation naturelle $\underline{\Phi} : \underline{f} \longrightarrow \underline{g}$, des homotopies homotopes induisant la même transformation naturelle.

Remarquons enfin que le foncteur $\underline{\mathrm{Top}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Cat}}$ qu'on vient de construire commute avec les produits, c'est-à-dire que le foncteur canonique

$$\underline{H \times H'} \longrightarrow \underline{H} \times \underline{H}'$$

est un isomorphisme de catégories.

En particulier, chaque application continue $H \times H \longrightarrow H$ détermine une $\otimes$-structure sur la catégorie $\underline{H}$.

0.2.6. Voici un cas particulier de l'exemple 0.2.5. Soit (X,x_o) un espace pointé. On prend pour H l'espace $\Omega(X,x_o)$ des lacets de X en x_o (avec la topologie compacte ouverte), muni de l'opération de composition des lacets. On trouve donc la

$\otimes$-catégorie ayant comme objets les lacets de X en x_o, comme morphismes les homotopies entre ces lacets (à homotopie près). La loi $\otimes$ provient de la composition des lacets.

§ 1. CONTRAINTES POUR UNE LOI $\otimes$

1.1. Contraintes d'associativité.

1.1.1. Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie. Une contrainte d'associativité pour $\underline{C}$ est un isomorphisme fonctoriel φ

$$\varphi_{X,Y,Z} : X \otimes (Y \otimes Z) \xrightarrow{\sim} (X \otimes Y) \otimes Z$$

tel que pour des objets X,Y,Z,T le diagramme suivant soit commutatif ("axiome du pentagone")

(1.1.1.1.)

$$\begin{array}{ccc}
 & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes T) & \\
{\scriptstyle \varphi_{X,Y,Z\otimes T}}\nearrow & & \searrow{\scriptstyle \varphi_{X\otimes Y,Z,T}} \\
X \otimes (Y \otimes (Z \otimes T)) & & ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes T \\
\downarrow{\scriptstyle id_X \otimes \varphi_{Y,Z,T}} & & \uparrow{\scriptstyle \varphi_{X,Y,Z} \otimes id_T} \\
X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes T) & \xrightarrow[\varphi_{X,Y\otimes Z,T}]{} & (X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes T
\end{array}$$

On appellera $\otimes$-catégorie associative une $\otimes$-catégorie qui est munie d'une contrainte d'associativité.

1.1.2. L'axiome du pentagone assure, d'après MAC LANE [1], 3.1 (voir aussi BENABOU [1], Appendice I, § 5 et KELLY-MAC LANE [1]) la "cohérence" de la contrainte d'associativité φ. Voici une façon commode en pratique d'exprimer cette cohérence :

Si on s'est donné une contrainte d'associativité φ, on peut construire

a) Une loi associant à chaque famille $(X_i)_{i\in I}$ d'objets de $\underline{C}$ indexée par un ensemble fini totalement ordonné non vide $(I,<)$ un objet de $\underline{C}$ dépendant fonctoriellement des X_i $(i \in I)$, noté

$$\bigotimes_{I,<} X_i \ ,$$

telle que si (X) est la famille réduite à un seul objet on a

$$\otimes\,(X) = X$$

b) Pour deux telles familles $(X_i)_{i\in I_1}$, $(X_i)_{i\in I_2}$ un isomorphisme fonctoriel en les X_i

$$\varphi : (\underset{I_1,<}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I_2,<}{\otimes} X_i) \longrightarrow \underset{I,<}{\otimes} X_i ,$$

(où $I = I_1 \amalg I_2$ est muni de l'ordre $<$ qui induit les ordres donnés sur I_1 , I_2 et pour lequel $I_1 < I_2$), tel que pour $X , Y , Z \in \text{ob } \underline{C}$, l'isomorphisme

$$X \otimes (Y \otimes Z) \xrightarrow{\sim} (X \otimes Y) \otimes Z$$

qu'on en déduit soit $\varphi_{X,Y,Z}$.

De plus, une telle loi généralisée est unique dans le sens suivant : si $(\otimes,\varphi)$, $(\otimes',\varphi')$ sont deux lois comme dans a), b), il existe un unique système d'isomorphismes

$$\alpha : \underset{I,<}{\otimes} X_i \simeq \underset{I,<}{\otimes'} X_i$$

compatible avec φ , φ' et telle que si (X) est la famille réduite à un élément, α soit l'identité de X .

1.1.3. Le groupe $\text{Aut}(\otimes)$ des automorphismes du foncteur $\otimes : \underline{C} \times \underline{C} \longrightarrow \underline{C}$ agit à gauche sur l'ensemble $\text{Assoc}(\underline{C},\otimes)$ des contraintes d'associativité pour $\underline{C}$ de la façon suivante : si $\varphi \in \text{Assoc}(\underline{C},\otimes)$, $c \in \text{Aut}(\otimes)$, alors ${}^c\varphi$ est défini par la commutativité du diagramme

(1.1.2.1)

$$\begin{array}{ccc}
X \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{\varphi_{X,Y,Z}} & (X \otimes Y) \otimes Z \\
{\scriptstyle id_X \otimes c_{Y,Z}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c_{X,Y} \otimes id_Z} \\
X \otimes (Y \otimes Z) & & (X \otimes Y) \otimes Z \\
{\scriptstyle c_{X,Y\otimes Z}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c_{X\otimes Y,Z}} \\
X \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow[{}^c\varphi_{X,Y,Z}]{} & (X \otimes Y) \otimes Z
\end{array}$$

On dira que deux éléments de $\text{Assoc}(\underline{C},\otimes)$ sont <u>cohomologues</u> s'ils sont dans la même orbite pour l'action de $\text{Aut}(\otimes)$.

1.2. <u>Contraintes de commutativité</u>.

1.2.1. Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie. Une <u>contrainte de commutativité</u> pour $\underline{C}$ est un iso-

morphisme fonctoriel ψ

$$\psi_{X,Y} : X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X$$

tel qu'on ait

(1.2.1.1) $$\psi_{Y,X} \circ \psi_{X,Y} = id_{X \otimes Y}$$

Une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte de commutativité est appelée une $\otimes$-catégorie commutative.

1.2.2. Ici encore, le groupe $Aut(\otimes)$ opère sur l'ensemble $Comm(\underline{C},\otimes)$ des contraintes de commutativité pour $\underline{C}$. Si $\psi \in Comm(\underline{C},\otimes)$, $c \in Aut(\otimes)$, ${}^c\psi$ est défini par le diagramme commutatif suivant :

(1.2.2.1)

$$\begin{array}{ccc} X \otimes Y & \xrightarrow{\psi_{X,Y}} & Y \otimes X \\ {\scriptstyle c_{X,Y}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c_{Y,X}} \\ X \otimes Y & \xrightarrow[{}^c\psi_{X,Y}]{} & Y \otimes X \end{array}$$

Deux contraintes de commutativité pour $\underline{C}$ sont dites cohomologues si elles sont dans la même orbite pour l'action de $Aut(\otimes)$.

1.2.3. Si $\underline{C}$ est une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte de commutativité ψ , X un objet de $\underline{C}$, on appelle symétrie canonique de $X \otimes X$ l'automorphisme d'ordre 2

$$\psi_X = \psi_{X,X} : X \otimes X \xrightarrow{\sim} X \otimes X \ .$$

On dit que la contrainte de commutativité ψ est stricte si les symétries canoniques sont des identités; $\underline{C}$ est encore appelée une $\otimes$-catégorie strictement commutative.

1.3. Contraintes d'unité.

1.3.1. Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie. Une contrainte d'unité pour $\underline{C}$ (ou plus simplement une unité pour $\underline{C}$) est un triple $(\underline{1},g,d)$, où $\underline{1} \in ob\ \underline{C}$, et g , d , sont des isomorphismes fonctoriels

$$g_X : X \xrightarrow{\sim} \underline{1} \otimes X$$

$$d_X : X \xrightarrow{\sim} X \otimes \underline{1}$$

vérifiant la condition

(1.3.1.1) $$g_{\underline{1}} = d_{\underline{1}} \quad .$$

On notera encore d l'isomorphisme $g_{\underline{1}} = d_{\underline{1}}$. On peut remarquer que l'objet $\underline{1}$ est 2-régulier (0.1.3).

Si X est un objet de $\underline{C}$, on posera par définition

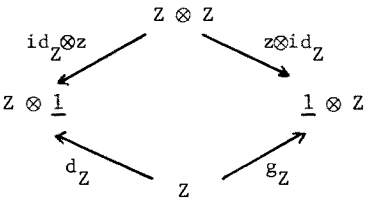
$$\Gamma(X) = \mathrm{Hom}(\underline{1},X) \quad .$$

1.3.1.1. Soit X un objet de $\underline{C}$; la naturalité de g , d appliquée respectivement aux morphismes g_X , d_X , donne les formules

(1.3.1.2) $$g_{X\otimes\underline{1}} = g_X \otimes \mathrm{id}_{\underline{1}}$$
$$d_{\underline{1}\otimes X} = \mathrm{id}_{\underline{1}} \otimes d_X$$

1.3.1.2. Voici une autre conséquence de la naturalité de g , d . Soit (Z,z) un couple constitué d'un objet Z de $\underline{C}$ et d'un isomorphisme $z : Z \xrightarrow{\sim} \underline{1}$. Alors le diagramme suivant

(1.3.1.3)

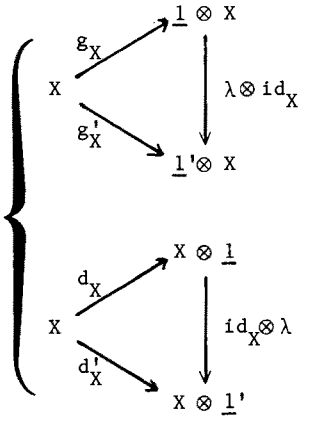


est commutatif. En effet, on se ramène aussitôt au cas du couple $(\underline{1},\mathrm{id}_{\underline{1}})$, où cela résulte de (1.3.1.1).

1.3.1.3. Remarque. On peut définir une unité à gauche (resp. à droite) pour $\underline{C}$, comme un couple $(\underline{1},g)$ (resp.$(\underline{1},d)$). Ces notions ne seront pas utiles dans la suite de ce travail, aussi se bornera-t-on aux unités bilatères définies plus haut.

1.3.1.4. Soient $(\underline{1},g,d)$, $(\underline{1}',g',d')$ des unités sur $\underline{C}$. On appelle morphisme de $(\underline{1},g,d)$ dans $(\underline{1}',g',d')$ un morphisme $\lambda : \underline{1} \longrightarrow \underline{1}'$ rendant commutatifs les diagrammes

(1.3.1.4)



(X ∈ ob C)

En faisant $X = \underline{1}$, on voit que λ est un isomorphisme, et que pour $(\underline{1},g,d)$, $(\underline{1}',g',d')$ donnés, il y a au plus un tel λ . En d'autres termes, la catégorie $\underline{\mathrm{Unit}}(\underline{C})$ des unités pour la $\otimes$-catégorie $\underline{C}$, est un groupoïde rigide.

1.3.2. Voici des variantes de la notion d'unité pour une $\otimes$-catégorie $\underline{C}$. Si $\underline{1} \in \mathrm{ob}\ \underline{C}$, on dit que $\underline{1}$ est un <u>objet unité</u> de $\underline{C}$ s'il est 2-régulier (0.1.3) et s'il existe un isomorphisme $\underline{1} \simeq \underline{1} \otimes \underline{1}$. Un couple $(\underline{1},d)$ où $d : \underline{1} \xrightarrow{\sim} \underline{1} \otimes \underline{1}$ est un tel isomorphisme, sera appelé une <u>unité réduite</u> pour $\underline{C}$. La $\otimes$-catégorie $\underline{C}$ est dite <u>unifère</u> si elle possède un objet unité. Il est clair que si $(\underline{1},g,d)$ est une unité pour $\underline{C}$, $(\underline{1},d_{\underline{1}})$ est une unité réduite.

1.3.2.1. La notion d'objet unité présente un intérêt, surtout si $\underline{C}$ peut être munie d'une contrainte d'associativité. Dans ce cas, $\underline{C}$ est unifère si et seulement s'il existe un objet 2-régulier dans $\underline{C}$, et de plus deux objets unité sont isomorphes. Prouvons d'abord la première assertion : si X est un objet 2-régulier, il existe un objet $\underline{1}$ et un isomorphisme $\underline{1} \otimes X \xrightarrow{\sim} X$. On vérifie aussitôt à l'aide d'une contrainte d'associativité φ , que $\underline{1}$ est un objet unité de $\underline{C}$. Soient maintenant $\underline{1}$, $\underline{1}'$ des objets unité de $\underline{C}$; pour trouver un isomorphisme $\underline{1} \xrightarrow{\sim} \underline{1}'$, il suffit de trouver un isomorphisme $\underline{1} \otimes (\underline{1} \otimes \underline{1}') \xrightarrow{\sim} \underline{1} \otimes (\underline{1}' \otimes \underline{1}')$, et ici on a

$$1 \otimes (\underline{1} \otimes \underline{1}') \xrightarrow{\varphi} (\underline{1} \otimes \underline{1}) \otimes \underline{1}' \xrightarrow{d \otimes id} \underline{1} \otimes \underline{1}' \xrightarrow{id \otimes d'} \underline{1} \otimes (\underline{1}' \otimes \underline{1}') \quad .$$

On développera davantage cette situation en 2.2.

1.3.2.2. Soient $(\underline{1},d)$, $(\underline{1}',d')$ des unités réduites pour $\underline{C}$. Un morphisme de $(\underline{1},d)$ dans $(\underline{1}',d')$ est un isomorphisme $\lambda : \underline{1} \xrightarrow{\sim} \underline{1}'$ rendant commutatif le carré

(1.3.2.1)
$$\begin{array}{ccc} \underline{1} & \xrightarrow{d} & \underline{1} \otimes \underline{1} \\ {\scriptstyle\lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\lambda \otimes \lambda} \\ \underline{1}' & \xrightarrow{d'} & \underline{1}' \otimes \underline{1}' \end{array}$$

On obtient ainsi une catégorie $\underline{\text{Unréd}}(\underline{C})$. De plus, la correspondance qui à une unité $(\underline{1},g,d)$ pour $\underline{C}$ associe l'unité réduite $(\underline{1},d_{\underline{1}})$ définit un foncteur pleinement fidèle

(1.3.2.2)
$$\underline{\text{Unit}}(\underline{C}) \longrightarrow \underline{\text{Unréd}}(\underline{C}) \ .$$

Celui-ci n'est pas en général une équivalence de catégories (voir exemples).

1.3.3. On s'intéresse dans ce numéro au monoïde des endomorphismes d'un objet unité.

1.3.3.1. *Soit $\underline{1}$ un objet unité de $\underline{C}$; alors, le monoïde $\mathrm{End}(\underline{1})$ est commutatif.*

En effet, il suffit de prouver que $\mathrm{End}(\underline{1} \otimes \underline{1})$ est commutatif, et puisque $\underline{1}$ est 2-régulier, tout endomorphisme ϵ de $\underline{1} \otimes \underline{1}$ peut s'exprimer

$$\epsilon = u \otimes \mathrm{id}_{\underline{1}} = \mathrm{id}_{\underline{1}} \otimes v \ ,$$

où u , $v \in \mathrm{End}(\underline{1})$. Si ϵ' est un autre endomorphisme, on a

$$\epsilon' = u' \otimes \mathrm{id}_{\underline{1}} = \mathrm{id}_{\underline{1}} \otimes v' \ ,$$

d'où

$$\epsilon\epsilon' = (u \otimes \mathrm{id}_{\underline{1}})(\mathrm{id}_{\underline{1}} \otimes v') = (\mathrm{id}_{\underline{1}} \otimes v')(u \otimes \mathrm{id}_{\underline{1}})$$
$$= \epsilon'\epsilon \ .$$

1.3.3.2. Soient $\underline{1}$, $\underline{1}'$ des objets unité de $\underline{C}$, et supposons qu'ils sont isomorphes. Chaque isomorphisme $\underline{1} \xrightarrow{\sim} \underline{1}'$ définit un isomorphisme de monoïdes

$$\mathrm{End}(\underline{1}) \simeq \mathrm{End}(\underline{1}') \ .$$

Il résulte de ce qui précède que l'isomorphisme de monoïdes obtenu ainsi est indépendant du choix de l'isomorphisme $\underline{1} \xrightarrow{\sim} \underline{1}'$.

En particulier, si $\underline{C}$ est une $\otimes$-catégorie unifère dont les objets unité sont deux à deux isomorphes (c'est le cas si $\underline{C}$ peut être muni d'une contrainte d'associativité), on peut définir sans ambiguité le monoïde des endomorphismes de l'objet unité, qu'on notera

(1.3.3.1) $$\mathrm{End}(\underline{1}_{\underline{C}}) \quad .$$

1.3.3.3. Soit $(\underline{1},g,d)$ une unité pour $\underline{C}$ (1.3.1) ; on définit deux opérations ρ , ρ' de $\mathrm{End}(\underline{1})$ dans le foncteur identique de $\underline{C}$, i.e. des morphismes de monoïde

$$\rho \ , \ \rho' \ : \ \mathrm{End}(\underline{1}) \longrightarrow \mathrm{End}(\mathrm{id}_{\underline{C}}) \quad ,$$

ou encore pout tout $u \in \mathrm{End}(\underline{1})$, $X \in \mathrm{ob}\ \underline{C}$, des morphismes

$$\rho_X(u) \ , \ \rho'_X(u) \ : \ X \longrightarrow X \quad ,$$

fonctoriels en X et vérifiant les formules suivantes pour u , $v \in \mathrm{End}(\underline{1})$

(1.3.3.2) $$\begin{cases} \rho_X(uv) = \rho_X(u)\ \rho_X(v) \\ \rho'_X(uv) = \rho'_X(u)\ \rho'_X(v) \\ \rho_X(\mathrm{id}_{\underline{1}}) = \rho'_X(\mathrm{id}_{\underline{1}}) = \mathrm{id}_X \end{cases} .$$

On les définit par les diagrammes commutatifs suivants

(1.3.3.3)
$$\begin{cases} \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\rho_X(u)} & X \\ {\scriptstyle g_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_X} \\ \underline{1} \otimes X & \xrightarrow{u \otimes \mathrm{id}_X} & \underline{1} \otimes X \end{array} \\ \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\rho'_X(u)} & X \\ {\scriptstyle d_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_X} \\ X \otimes \underline{1} & \xrightarrow{\mathrm{id}_X \otimes u} & X \otimes \underline{1} \end{array} \end{cases}$$

Il est immédiat que $\rho_X(u)$, $\rho'_X(u)$ sont naturels en X , et qu'on a (1.3.3.2). La

naturalité de d entraîne qu'on a, si $u \in End(\underline{1})$

$$\rho_{\underline{1}}(u) = \rho'_{\underline{1}}(u) = u \quad . \tag{1.3.3.4}$$

On peut enfin remarquer que le monoïde $End(id_{\underline{C}})$ est commutatif (pour toute catégorie $\underline{C}$), et qu'en particulier ρ_X et ρ'_X commutent pour $X \in ob\ \underline{C}$.

1.4. Contrainte opposée et contrainte symétrique d'une contrainte.

Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie. On lui a associé dans 0.1.4 sa $\otimes$-catégorie opposée $\underline{C}^o$. Si φ est une contrainte d'associativité pour $\underline{C}$, on définit une contrainte d'associativité φ^o pour $\underline{C}^o$ par la formule

$$\varphi^o_{X,Y,Z} = (\varphi_{X,Y,Z})^{-1} \tag{1.4.1}$$

L'axiome du pentagone (1.1.1.1) est trivialement vérifié pour φ^o, vu qu'il l'est pour φ. Dans le même esprit on définira les contraintes de commutativité ou unité opposées à une contrainte de commutativité ou unité pour $\underline{C}$.

On peut aussi parler de contrainte symétrique d'une contrainte. Par exemple, la contrainte d'associativité symétrique de φ, φ^{sym} est définie par

$$(\varphi^{sym})_{X,Y,Z} = (\varphi_{Z,Y,X})^{-1} \quad . \tag{1.4.2}$$

Au lecteur de vérifier que lorsqu'on écrit (1.1.1.1) dans $\underline{C}^{sym}$ pour X,Y,Z,T, on obtient ce même diagramme dans $\underline{C}$ et pour T,Z,Y,X (dans cet ordre), modulo une rotation de 180° autour de l'axe vertical.

Bien entendu, on a des formules du genre

$$\begin{aligned} (\varphi^o)^o &= \varphi \\ (\varphi^o)^{sym} &= (\varphi^{sym})^o \\ (\varphi^{sym})^{sym} &= \varphi \end{aligned} \quad . \tag{1.4.3}$$

En outre, si φ, φ' sont des contraintes d'associativité pour $\underline{C}$, φ est cohomologue à φ' si et seulement si φ^o (resp. φ^{sym}) est cohomologue à φ'^o (resp. φ'^{sym}). Même énoncé pour les contraintes de commutativité.

1.5. Exemples.

1.5.1. Associativité.

Dans tous les exemples donnés au § 0 on dispose de contraintes d'associativité "naturelles", sauf dans 0.2.5. Pour 0.2.1, c'est l'isomorphisme

$$X \times (Y \times Z) \xrightarrow{\sim} (X \times Y) \times Z$$

qui envoie $(x,(y,z))$ dans $((x,y),z)$, pour $x \in X(T)$, $y \in Y(T)$, $z \in Z(T)$, $T \in \text{ob } \underline{C}$. Pour 0.2.2 l'isomorphisme d'associativité "naturel"

$$\varphi_{X,Y,Z} : X \otimes (Y \otimes Z) \longrightarrow (X \otimes Y) \otimes Z$$

est donné par

$$\varphi(x \otimes (y \otimes z)) = (x \otimes y) \otimes z \ .$$

L'isomorphisme d'associativité dans 0.2.3. est défini aussi de façon naturelle. Il provient de l'isomorphisme d'associativité correspondant à 0.2.1 (pour $\underline{C}$ le topos $\underline{T}$) par un passage au quotient.

Etudions maintenant des cas spéciaux.

1.5.1.1. Prenons à nouveau l'exemple 0.2.2. On va déterminer toutes les contraintes d'associativité. On commence par remarquer que les morphismes de trifoncteurs $\varphi_{X,Y,Z} : X \otimes (Y \otimes Z) \longrightarrow (X \otimes Y) \otimes Z$ sont en correspondance biunivoque avec les éléments de l'anneau A de base, la correspondance étant celle qui à $a \in A$ associe φ^a défini par

$$\varphi^a_{X,Y,Z}(x \otimes (y \otimes z)) = a((x \otimes y) \otimes z) \ .$$

En appliquant ceci au diagramme (1.1.1.1), on voit que la seule valeur de a tel que φ^a soit une contrainte d'associativité est $a = 1$, donc dans ce cas, il existe exactement une contrainte d'associativité.

1.5.1.2. Pour 0.2.4 , il y a une contrainte d'associativité évidente, à savoir l'identité. On va voir qu'il y en a d'autres. Se donner un morphisme de trifoncteurs φ revient dans ce cas à se donner une application $f : \pi_1^3 \longrightarrow \pi_2$, la relation entre

f et φ étant $\circ$

$$\varphi_{s_1,s_2,s_3} = (s_1 s_2 s_3 \ , \ f(s_1,s_2,s_3)) \ .$$

Lorsqu'on écrit la commutativité du diagramme (1.1.1.1) en utilisant cette relation, on trouve

$$s_1 f(s_2,s_3,s_4) - f(s_1 s_2,s_3,s_4) + f(s_1,s_2 s_3,s_4)$$
$$- f(s_1,s_2,s_3 s_4) + f(s_1,s_2,s_3) = 0 \ ,$$

où l'on a posé $X = s_1$, $Y = s_2$, $Z = s_3$, $T = s_4$. Autrement dit, $f : \pi_1^3 \longrightarrow \pi_2$ définit une contrainte d'associativité si et seulement si f est une 3-cochaîne de π_1 à valeurs dans le π_1-module π_2 (SERRE [1],VII § 3). On explicite de même (1.1.2.1) pour démontrer que des 3-cocycles f , f' déterminent des contraintes d'associativité cohomologues (1.1.2) si et seulement si f , f' sont des cocycles cohomologues. On trouve donc, dans ce cas, que le groupe des contraintes d'associativité, pour l'opération induite par la composition des automorphismes du foncteur $(s_1,s_2,s_3) \longrightarrow s_1 s_2 s_3$, est isomorphe au groupe $C^3(\pi_1,\pi_2)$ des 3-cocycles de π_1 à valeurs dans π_2 . De même, le groupe des contraintes d'associativité modulo cohomologie est isomorphe au groupe $H^3(\pi_1,\pi_2)$.

1.5.1.3. Soit H un espace topologique muni d'une loi $H \times H \longrightarrow H$. D'après 0.2.5 une homotopie Φ

$$H \times H \times H \quad \underset{\Phi \ \Downarrow}{\overset{A}{\underset{B}{\rightrightarrows}}} \quad H \ ,$$

où $A(h_1,h_2,h_3) = h_1(h_2 h_3)$, $B(h_1,h_2,h_3) = (h_1 h_2)\, h_3$, détermine un morphisme fonctoriel φ

$$\varphi_{X,Y,Z} : X \otimes (Y \otimes Z) \longrightarrow (X \otimes Y) \otimes Z \ .$$

Il faut toutefois des conditions additionnelles sur Φ pour que φ vérifie l'axiome du pentagone. Ces conditions sont remplies par exemple dans le cas particulier 0.2.6 .

1.5.2. Commutativité.

Dans les exemples 0.2.1 , 0.2.2 , 0.2.3 , on dispose de contraintes de

commutativité naturelles. Dans 0.2.4, on vérifie aussitôt qu'il existe des contraintes de commutativité si et seulement si π_1 est abélien et opère trivialement dans π_2. Dans ce cas, le groupe des contraintes de commutativité (pour la composition), est isomorphe canoniquement au groupe $Ant^2(\pi_1,\pi_2)$ des fonctions antisymétriques $\pi_1^2 \longrightarrow \pi_2$. Le groupe $Aut(\otimes)$, lui, s'identifie au groupe $C^2(\pi_1,\pi_2)$ des fonctions $\pi_1^2 \longrightarrow \pi_2$. Modulo ces identifications, $C^2(\pi_1,\pi_2)$ opère dans $Ant^2(\pi_1,\pi_2)$ par la règle

$$^c g = g + ant(c)$$

où, si $c \in C(\pi_1,\pi_2)$, on a pour x, $y \in \pi_1$

$$ant(c)(x,y) = c(y,x) - c(x,y) .$$

Il en résulte que le groupe des classes de cohomologie de contraintes de commutativité pour $\underline{C}$ s'identifie à $Ant^2(\pi_1,\pi_2)/ant(C^2(\pi_1,\pi_2))$.

1.5.3. Unités.

1.5.3.1. Dans l'exemple 0.2.1, les objets unité sont les objets finaux de la catégorie $\underline{C}$. La catégorie $\underline{Unit}(\underline{C})$ est, soit vide, soit équivalente à la catégorie triviale n'ayant qu'un morphisme $*$. Le foncteur (1.3.2.2) est un isomorphisme de catégories.

1.5.3.2. Dans les exemples 0.2.2, 0.2.3, il y a des objets unité naturels, à savoir respectivement le A-module A et le G-torseur trivial G. La catégorie $\underline{Unit}(\underline{C})$ est dans ces deux cas équivalente à $*$, et le foncteur (1.3.2.2) est un isomorphisme de catégories.

1.5.3.3. L'exemple 0.2.4 est instructif. La donnée d'une unité (1.3.1) revient à celle d'un couple (γ,δ) de fonction $\pi_1 \longrightarrow \pi_2$ vérifiant

(1.5.3.1) $$\gamma(1) = \delta(1) \quad ;$$

celle d'un morphisme entre les unités correspondant à (γ,δ), (γ',δ') revient à donner $\lambda \in \pi_2$ vérifiant

$$\gamma'(s) - \gamma(s) = \lambda$$

$$\delta'(s) - \delta(s) = s\lambda .$$

Donc, dans ce cas, le groupoïde $\underline{\mathrm{Unit}}(\underline{C})$ n'est pas connexe.

Si on calcule, pour $s \in \pi_1$, $u \in \pi_2$, les automorphismes de s , $\rho_s(u)$, $\rho'_s(u)$, on obtient

$$\rho_s(u) = (s,u)$$
$$\rho'_s(u) = (s,s.u) \quad , \tag{1.5.3.2}$$

ce qui montre qu'en général $\rho \neq \rho'$.

1.5.3.4. Dans l'exemple 0.2.6 on dispose d'une unité naturelle, qui provient du lacet trivial. Remarquer que dans cet exemple, on a

$$\mathrm{End}(\underline{1}) = \mathrm{Aut}(\underline{1}) = \pi_2(X,x_o) \quad ,$$

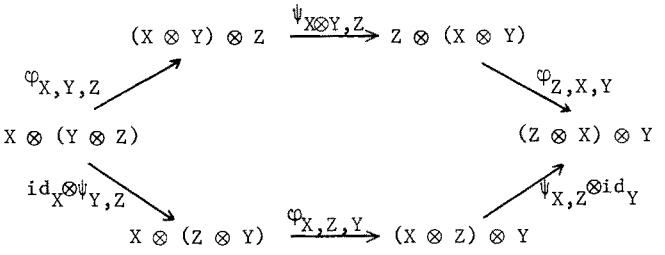
et 1.3.4 nous dit que le π_2 d'un espace topologique est abélien.

§ 2. COMPATIBILITES ENTRE CONTRAINTES

2.1. Associativité et commutativité.

2.1.1. Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie. On dira qu'une contrainte d'associativité φ et une contrainte de commutativité ψ pour $\underline{C}$ sont <u>compatibles</u>, si pour des objets X , Y , Z de $\underline{C}$, le diagramme suivant est commutatif ("axiome de l'hexagone")

(2.1.1.1)



Un couple (φ,ψ) comme ci-dessus sera appelé une <u>contrainte mixte</u> d'associativité-commutativité, ou plus simplement une <u>contrainte</u> AC pour la $\otimes$-catégorie $\underline{C}$. Une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte AC sera appelée une $\otimes$-<u>catégorie</u> AC . Elle est dite <u>stricte</u> si ψ l'est (1.2.1).

2.1.2. L'axiome du pentagone et de l'hexagone assurent la cohérence de la contrainte AC (MAC LANE [1], 4.2). Voici comment on peut exprimer cette cohérence :

Si on s'est donné une contrainte AC (φ,ψ) on peut construire

a) une loi associant à chaque famille (X_i) d'objets de $\underline{C}$ indexée par un ensemble fini non vide I un objet de $\underline{C}$ qui dépend fonctoriellement des X_i et de I (pour des bijections $I \longrightarrow I'$ d'ensembles finis), noté

$$\bigotimes_I X_i ,$$

telle que si (X) est la famille réduite à un objet, on a

$$\otimes(X) = X$$

b) Pour deux telles familles $(X_i)_{i\in I_1}$, $(X_i)_{i\in I_2}$, un isomorphisme (fonctoriel en les X_i)

$$(\bigotimes_{I_1} X_i) \otimes (\bigotimes_{I_2} X_i) \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{I_1 \amalg I_2} X_i$$

tel que pour $X,Y,Z \in \mathrm{ob}\ \underline{C}$, les isomorphismes

$$X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X$$

$$X \otimes (Y \otimes Z) \xrightarrow{\sim} (X \otimes Y) \otimes Z$$

qu'on en déduit sont respectivement $\psi_{X,Y}$, $\varphi_{X,Y,Z}$.

On a bien entendu, l'unicité d'une telle loi a), b) comme dans 1.1.2.

2.1.3. Le groupe $\mathrm{Aut}(\otimes)$ opère à gauche sur l'ensemble $\mathrm{AComm}(\underline{C},\otimes)$ des contraintes AC . Si (φ,ψ) est une telle contrainte, $c \in \mathrm{Aut}(\otimes)$, on a

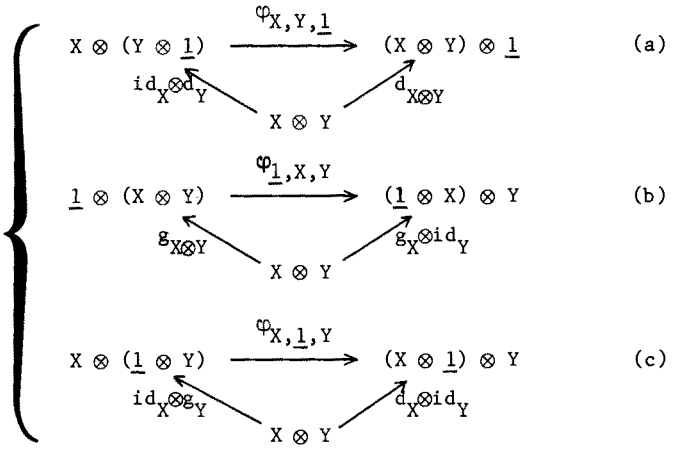
$$(2.1.3.1) \qquad {}^c(\varphi,\psi) = ({}^c\varphi, {}^c\psi) ,$$

où ${}^c\varphi$, ${}^c\psi$, ont été définis dans 1.1.3, 1.2.2 . Bien entendu, il faut vérifier que si on remplace (φ,ψ) par $({}^c\varphi, {}^c\psi)$, le diagramme (2.1.1.1) est encore commutatif, ce qui n'est pas difficile. Enfin, les éléments de $\mathrm{AComm}(\underline{C},\otimes)$ conjugués sous l'action de $\mathrm{Aut}(\otimes)$ sont dits cohomologues.

2.2. Associativité et unité.

2.2.1. Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie. On dit qu'une contrainte d'associativité φ et une contrainte d'unité $(\underline{1},g,d)$ pour $\underline{C}$ sont compatibles, si pour tout couple (X,Y) d'objets de $\underline{C}$ les triangles suivants

(2.2.1.1)



sont commutatifs.

Un couple $(\varphi,(\underline{1},g,d))$ comme ci-dessus sera appelé une contrainte mixte d'associativité-unité, ou plus simplement une contrainte AU pour la $\otimes$-catégorie $\underline{C}$. Une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte AU sera appelée une $\otimes$-catégorie AU.

2.2.2. De façon analogue à 1.1.2, 2.1.2, on peut construire de façon unique (à isomorphisme unique près) si on s'est donné une contrainte AU

a) Une loi associant à chaque famille $(X_i)_{i\in I}$ d'objets de $\underline{C}$ indexée par un ensemble fini totalement ordonné $(I,<)$ un objet qui dépend fonctoriellement des X_i, noté

$$\bigotimes_{I,<} X_i$$

telle que si $I = \emptyset$,

$$\bigotimes_{\emptyset} X_i = \underline{1},$$

et que si (X) est la famille réduite à un seul objet

$$\otimes(X) = X .$$

b) Pour deux telles familles $(X_i)_{i\in I_1}$, $(X_i)_{i\in I_2}$, un isomorphisme

fonctoriel en les X_i

$$(\underset{I_1,<}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I_2,<}{\otimes} X_i) \xrightarrow{\sim} \underset{I,<}{\otimes} X_i$$

(où $I = I_1 \amalg I_2$ est muni de l'ordre $<$ induisant les ordres donnés sur I_1 , I_2 et pour lequel $I_1 < I_2$), tel que si $X, Y, Z \in \text{ob } \underline{C}$, les isomorphismes

$$X \xrightarrow{\sim} X \otimes \underline{1}$$

$$X \xrightarrow{\sim} \underline{1} \otimes X$$

$$X \otimes (Y \otimes Z) \xrightarrow{\sim} (X \otimes Y) \otimes Z$$

qu'on en déduit soit respectivement d_X , g_X , $\varphi_{X,Y,Z}$.

2.2.3. Les conditions (2.2.1.1) ne sont pas les conditions minimales de cohérence pour une contrainte AU . Par exemple, la commutativité des deux premiers triangles dans (2.2.1.1) pour tout couple (X,Y) d'objets de $\underline{C}$, entraîne celle du troisième triangle. Démontrons d'abord sa commutativité pour $Y = \underline{1}$. Appliquant la naturalité de d au morphisme $d_X : X \longrightarrow X \otimes \underline{1}$ on a un carré commutatif

(2.2.3.1)

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{d_X} & X \otimes \underline{1} \\ {\scriptstyle d_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_X \otimes id_{\underline{1}}} \\ X \otimes \underline{1} & \xrightarrow[d_{X \otimes \underline{1}}]{} & (X \otimes \underline{1}) \otimes \underline{1} \ , \end{array}$$

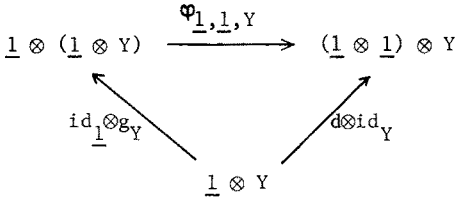
d'où grâce à (2.2.1.1),(a), pour $Y = \underline{1}$, le triangle commutatif cherché

(2.2.3.2)

$$\begin{array}{ccc} X \otimes (\underline{1} \otimes \underline{1}) & \xrightarrow{\varphi} & (X \otimes \underline{1}) \otimes \underline{1} \\ & {\scriptstyle id_X \otimes g_Y} \nwarrow \quad \nearrow {\scriptstyle d \otimes id_Y} & \\ & X \otimes \underline{1} & \end{array}$$

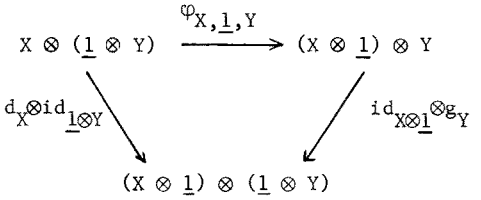
Le cas $X = \underline{1}$ est traité de façon analogue, et on obtient un triangle commutatif

(2.2.3.3)



Pour le cas général, considérons d'abord le morphisme $d_X \otimes g_Y : (X \otimes \underline{1}) \otimes (\underline{1} \otimes Y) \longrightarrow X \otimes Y$. C'est un isomorphisme, d'où la commutativité de (2.2.1.1),(c), est ramenée à celle du triangle

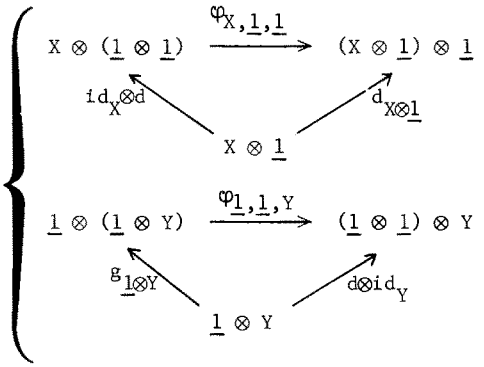
(2.2.3.4)



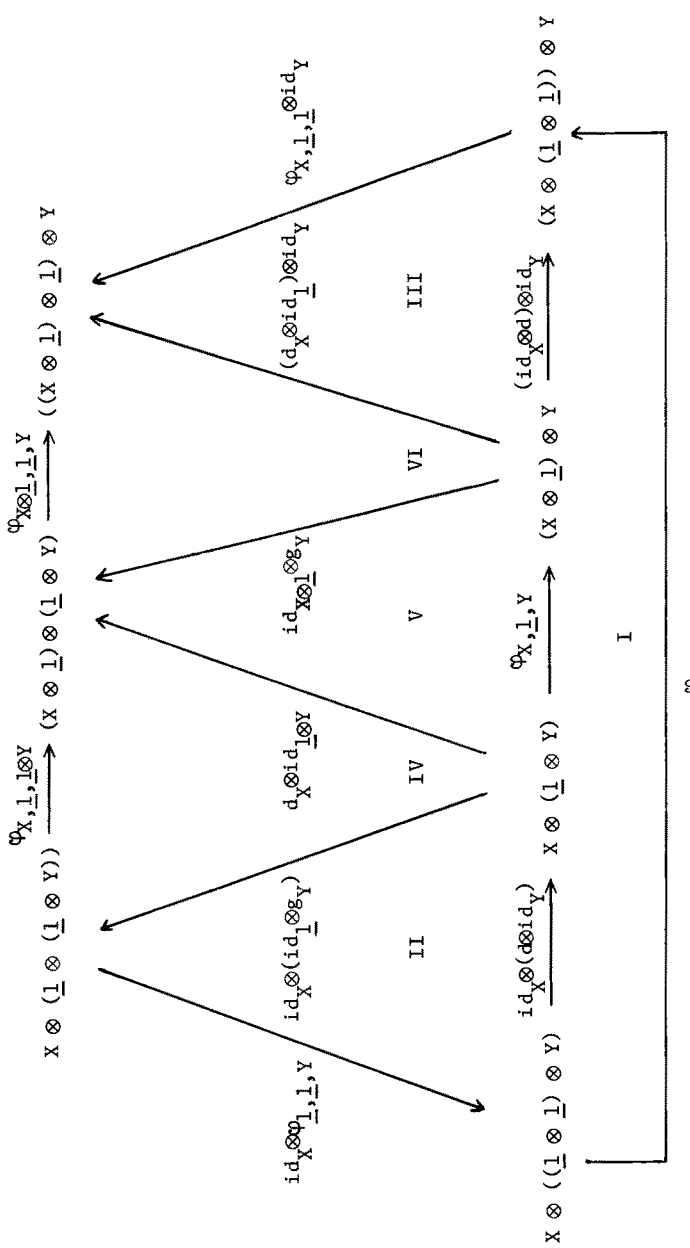
Enfin, la commutativité de (2.2.3.4) est une conséquence de la discussion du diagramme (2.2.3.5) page 32 , dont (2.2.3.4) est la région V . La commutativité du pentagone extérieur suit de (1.1.1.1), celle de I de la naturalité de φ , celle de II, III de la commutativité de (2.2.3.3), (2.2.3.2) respectivement. Enfin la commutativité des carrés constitués par IV, V et par V, VI suit de la naturalité de φ . D'où la commutativité de (2.2.3.5) et en particulier de (2.2.3.4).

2.2.3.1. On peut remarquer que pour démontrer la commutativité de (2.2.1.1),(c), on n'a utilisé que la commutativité des diagrammes.

(2.2.3.6)



(2.2.3.5)


X ⊗ ((1̲ ⊗ 1̲) ⊗ Y)
X ⊗ (1̲ ⊗ (1̲ ⊗ Y))
(X ⊗ 1̲) ⊗ (1̲ ⊗ Y)
((X ⊗ 1̲) ⊗ 1̲) ⊗ Y
(X ⊗ 1̲) ⊗ Y
X ⊗ (1̲ ⊗ Y)
(X ⊗ (1̲ ⊗ 1̲)) ⊗ Y
φX,1̲,1̲⊗Y
φX⊗1̲,1̲,Y
φX,1̲,1⊗id_Y
φX,1⊗1̲,Y
id_X⊗φ1̲,1̲,Y
id_X⊗(id_1̲⊗g_Y)
d_X⊗id_1̲⊗Y
id_X⊗1̲⊗g_Y
(d_X⊗id_1̲)⊗id_Y
(id_X⊗d)⊗id_Y
I
II
III
IV
V
VI

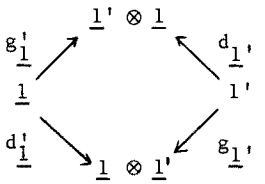
On peut démontrer par ailleurs que la commutativité de (2.2.3.6) entraîne celle de (2.2.1.1) (a), (b) ; la démonstration est semblable à celle faite en 2.2.3. Ainsi, (2.2.3.6) est la condition minimale de compatibilité (voir aussi KELLY [1]).

2.2.4. Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte d'associativité φ . On note $\underline{\mathrm{Unass}}_{\varphi}(\underline{C})$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Unit}}(\underline{C})$ (1.3.1.4) dont les objets sont les unités pour $\underline{C}$, qui sont compatibles avec φ .

2.2.4.1. Proposition. Le groupoïde rigide $\underline{\mathrm{Unass}}_{\varphi}(\underline{C})$ est trivial, i.e. deux objets quelconques x,y de $\underline{\mathrm{Unass}}_{\varphi}(\underline{C})$ sont isomorphes et de plus, $\mathrm{Hom}(x,y) = *$.

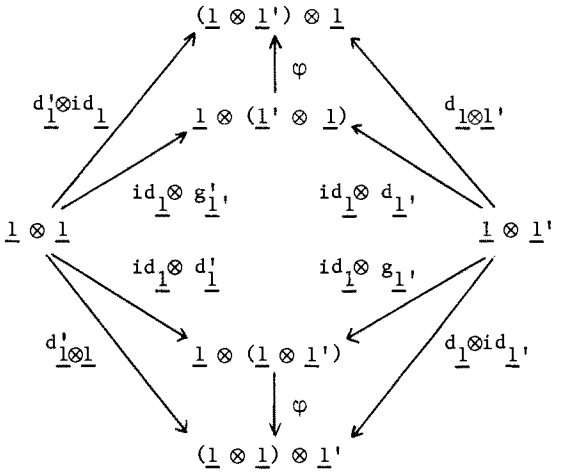
2.2.4.2. Preuve. Il suffit de prouver la première assertion, compte tenu de 1.3.1.4. Soient $(\underline{1},g,d)$, $(\underline{1}',g',d')$ des unités pour $\underline{C}$, compatibles avec φ . Prouvons d'abord la commutativité du carré

(2.2.4.1)



Après multiplication à gauche par $\underline{1}$, ce diagramme devient la région centrale de

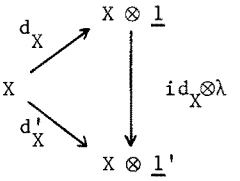
(2.2.4.2)



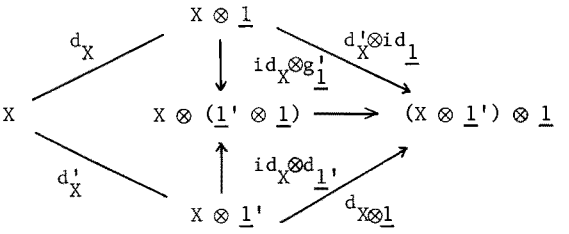
sa commutativité découle de celle des triangles extérieurs et du circuit périphérique, elle-même conséquence de (2.2.1.1) et de (2.2.3.1).

On dispose maintenant d'un isomorphisme $\lambda : \underline{1} \xrightarrow{\sim} \underline{1}'$ donné par (2.2.4.1). Je vais prouver que c'est un morphisme de $(\underline{1},g,d)$ dans $(\underline{1}',g',d')$. Il suffit de prouver que pour $X \in \mathrm{ob}\ \underline{C}$, le triangle

(2.2.4.3)



est commutatif, la preuve de l'assertion analogue pour g_X , g'_X étant semblable. Ce triangle est la région gauche du diagramme



,

dont la commutativité découle de celle de ses 2 triangles droits et du circuit périphérique, elle même conséquence de (2.2.1.1) et de la naturalité de d .

2.2.5. Conservons les hypothèses de 2.2.4. Rappelons (voir 1.3.2) que $\underline{\mathrm{Unréd}}(\underline{C})$ dénote la catégorie des couples $(\underline{1},d)$ d'un objet unité et d'un isomorphisme $d : \underline{1} \xrightarrow{\sim} \underline{1} \otimes \underline{1}$. On a également un foncteur

(2.2.5.1) $$\underline{\mathrm{Unass}}_{\varphi}(\underline{C}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Unréd}}(\underline{C}) \quad .$$

2.2.5.1. Proposition. Ce foncteur est un isomorphisme de catégories. En particulier, pour tout objet $\underline{1}$ de $\underline{C}$, l'ensemble des structures d'unité pour $\underline{C}$ sur $\underline{1}$ est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des isomorphismes $\underline{1} \xrightarrow{\sim} \underline{1} \otimes \underline{1}$.

2.2.5.2. Preuve. Il s'agit d'associer à chaque unité réduite $(\underline{1},d_o)$ une unité $(\underline{1},g,d)$. Si X est un objet de $\underline{C}$, il existe un couple (Z,z) où $Z \in \mathrm{ob}\ \underline{C}$ et

z est un isomorphisme $z : X \xrightarrow{\sim} Z \otimes \underline{1}$, puisque $\underline{1}$ est 2-régulier . On définit d_X comme l'isomorphisme $X \longrightarrow X \otimes \underline{1}$ rendant commutatif le diagramme

(2.2.5.2)

$$\begin{array}{ccccc} X & & \xrightarrow{\quad d_X \quad} & & X \otimes \underline{1} \\ {\scriptstyle z}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle z \otimes id_{\underline{1}}} \\ Z \otimes \underline{1} & \xrightarrow[id_Z \otimes d_o]{} & Z \otimes (\underline{1} \otimes \underline{1}) & \xrightarrow[\varphi_{Z,\underline{1},\underline{1}}]{} & (Z \otimes \underline{1}) \otimes \underline{1} \end{array} .$$

Il est facile de voir que d_X ne dépend pas du couple (Z,z) choisi, et que les d_X sont naturels en X . Cela provient de ce que $\underline{1}$ étant 2-régulier, en particulier le foncteur $Z \longrightarrow Z \otimes \underline{1}$ est pleinement fidèle. On définit de même les $g_X : X \longrightarrow \underline{1} \otimes X$. Pour l'instant, on ne sait même pas si $(\underline{1},g,d)$ est une unité. Il faudrait démontrer que $g_{\underline{1}} = d_{\underline{1}}$. En fait, on démontrera d'abord la commutativité des diagrammes (2.2.1.1). Il suffit de démontrer la commutativité du premier. Si pour Y on a choisi un couple (Z,z) avec $z : Y \longrightarrow Z \otimes \underline{1}$, pour $X \otimes Y$ on prendra le couple (T,t), où $T = X \otimes Z$, et où t est défini par

$$t : X \otimes Y \xrightarrow{id_X \otimes z} X \otimes (Z \otimes \underline{1}) \xrightarrow{\varphi_{X,Z,\underline{1}}} (X \otimes Z) \otimes \underline{1}$$

La commutativité cherchée résulte du diagramme (2.2.5.3) page 36 . Dans ce diagramme les régions I, II sont commutatives par naturalité de φ , III par définition, et IV par l'axiome du pentagone (1.1.1.1) . D'où la commutativité de (2.2.5.3). On obtient le premier diagramme de (2.2.1.1) en composant le long du bord.

On va démontrer maintenant que

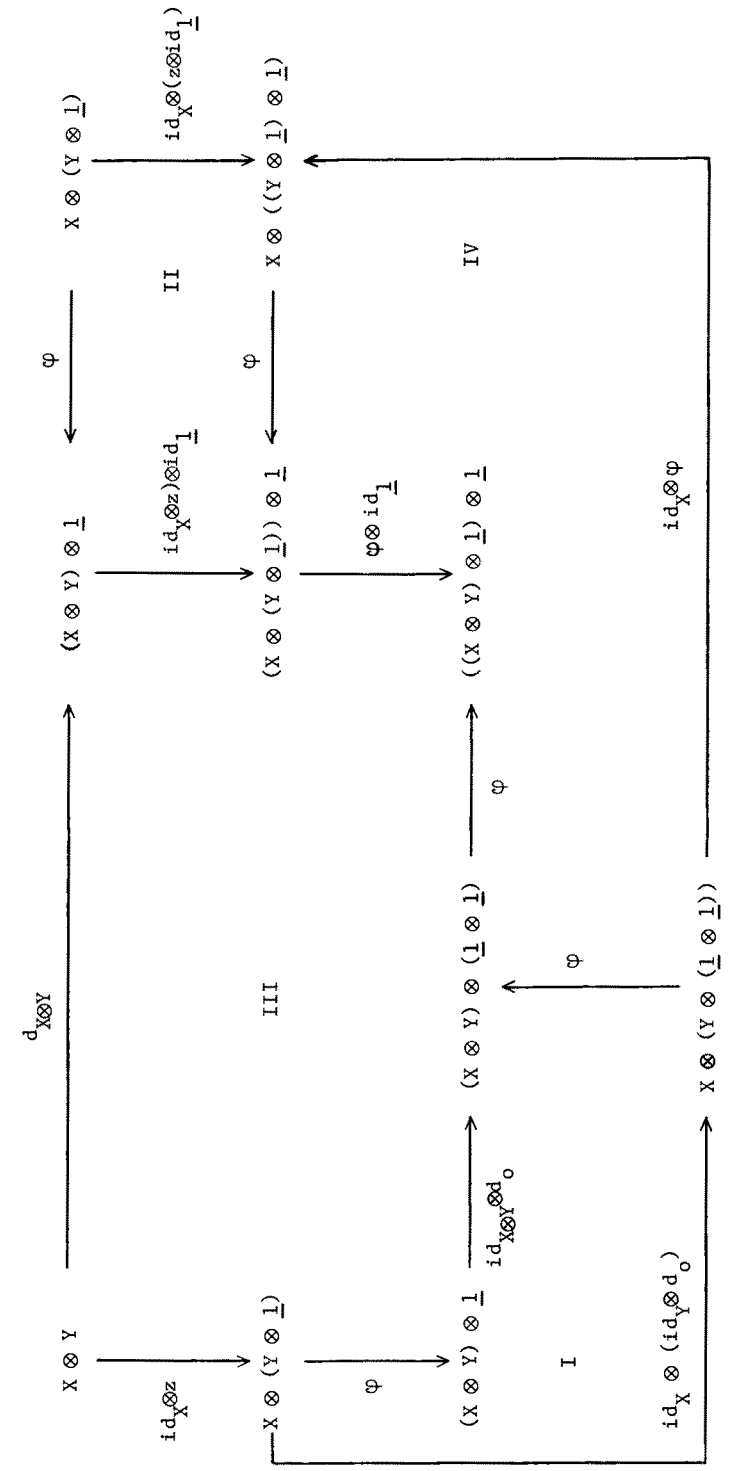
(2.2.5.4) $$d_{\underline{1}} = d_o \quad ,$$

ce qui, compte tenu de la formule analogue qu'on en déduit par symétrie :

$$g_{\underline{1}} = d_o \quad ,$$

entraîne que $(\underline{1},g,d)$ est un objet de $\underline{\mathrm{Unass}}_{\varphi}(\underline{C})$. Pour cela, on considère le couple $(\underline{1} \otimes \underline{1}, id_{\underline{1} \otimes \underline{1}})$, d'où un diagramme commutatif

(2.2.5.3)


X ⊗ Y
X ⊗ (Y ⊗ 1)
(X ⊗ Y) ⊗ 1
(X ⊗ (Y ⊗ 1)) ⊗ 1
((X ⊗ Y) ⊗ 1) ⊗ 1
(X ⊗ Y) ⊗ (1 ⊗ 1)
X ⊗ (Y ⊗ (1 ⊗ 1))
X ⊗ ((Y ⊗ 1) ⊗ 1)
X ⊗ (Y ⊗ 1)
I
II
III
IV
φ
φ
φ
φ
φ ⊗ id1
id_X ⊗ φ
id_X ⊗ z
id_X ⊗ (z ⊗ id_1)
(id_X ⊗ z) ⊗ id_1
id_X ⊗ (id_Y ⊗ d_o)
id_{X⊗Y} ⊗ d_o
d_{X⊗Y}

$$\begin{array}{ccccc} \underline{1}\otimes\underline{1} & & \xrightarrow{\quad d_{\underline{1}\otimes\underline{1}} \quad} & & (\underline{1}\otimes\underline{1})\otimes\underline{1} \\ \| & & & & \| \\ \underline{1}\otimes\underline{1} & \xrightarrow[id_{\underline{1}}\otimes d_o]{} & \underline{1}\otimes(\underline{1}\otimes\underline{1}) & \xrightarrow[\varphi]{} & (\underline{1}\otimes\underline{1})\otimes\underline{1} \end{array} \quad .$$

En combinant ceci avec (2.2.1.1),(c),

$$id_{\underline{1}} \otimes d_o = id_{\underline{1}} \otimes d_{\underline{1}} \quad ,$$

d'où par 2-régularité de $\underline{1}$, l'égalité voulue. Il est clair que si $\lambda : (\underline{1},d_o) \longrightarrow (\underline{1}',d_o')$ est un morphisme d'unités réduites, λ est un morphisme entre les unités correspondantes qu'on vient de construire. Le fait que ce foncteur soit inverse du foncteur (2.2.5.1) est une conséquence immédiate de (2.2.3.6) et (2.2.5.4).

2.2.5.3. Remarque. Ce qu'on vient de prouver signifie que si $\underline{C}$ est une $\otimes$-catégorie associative (1.1.1), $\underline{C}$ possède une unité compatible avec sa contrainte d'associativité si et seulement s'il possède un objet unité. De plus, le choix d'une telle unité $(1,g,d)$ revient au choix de l'objet $\underline{1}$ et de l'isomorphisme $g_{\underline{1}} = d_{\underline{1}} : \underline{1} \xrightarrow{\sim} \underline{1}\otimes\underline{1}$, et ces unités sont canoniquement isomorphes entre elles.

On se permettra d'appeler aussi $\otimes$-catégorie AU une $\otimes$-catégorie associative possédant un objet unité (voir 2.2.1).

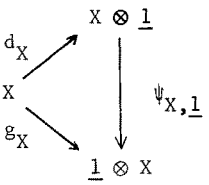
2.2.6. Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie munie d'une unité $(\underline{1},g,d)$, et supposons qu'il existe une contrainte d'associativité φ qui lui soit compatible. On vérifie facilement alors, à l'aide de (2.2.1.1) les formules suivantes (voir 1.3.3.3), où $u \in End(\underline{1})$, $X,Y \in ob(\underline{C})$

$$(2.2.6.1) \qquad \begin{cases} \rho_{X\otimes Y}(u) = \rho_X(u) \otimes id_Y \\ \rho'_{X\otimes Y}(u) = id_X \otimes \rho'_Y(u) \\ \rho'_X(u)\otimes id_Y = id_X \otimes \rho_Y(u) \end{cases} .$$

2.3. Commutativité et unité.

Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie. On dira qu'une contrainte de commutativité ψ et une contrainte d'unité $(\underline{1},g,d)$ pour $\underline{C}$ sont compatibles, si pour tout $X \in \text{ob } \underline{C}$, le triangle

(2.3.1)



est commutatif.

On a en particulier

(2.3.2) $$\psi_{\underline{1},\underline{1}} = id_{\underline{1}\otimes\underline{1}} \quad .$$

Un couple $(\psi,(\underline{1},g,d))$ comme ci-dessus sera appelé une contrainte mixte de commutativité-unité, ou plus simplement une contrainte CU pour la $\otimes$-catégorie $\underline{C}$. Une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte CU sera appelée une $\otimes$-catégorie CU. Rappelons que dans 1.3.3.3. on a défini des morphismes de monoïde

$$\rho,\rho' : \text{End}(\underline{1}) \longrightarrow \text{End}(id_{\underline{C}}) \quad .$$

On démontre facilement, à l'aide de (2.3.1)

(2.3.3) $$\rho = \rho' \quad .$$

2.4. Associativité, commutativité et unité.

2.4.1. Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie. On dira qu'une contrainte d'associativité φ, une contrainte de commutativité ψ et une contrainte d'unité $(\underline{1},g,d)$ pour $\underline{C}$ sont compatibles, si elles sont compatibles deux à deux, au sens défini dans 2.1.1, 2.2.1, et 2.3.

Un triple $(\varphi,\psi,(\underline{1},g,d))$ comme ci-dessus sera appelé une contrainte mixte

d'associativité-commutativité-unité, ou plus simplement une contrainte ACU pour la $\otimes$-catégorie $\underline{C}$. Une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte ACU sera appelée une $\otimes$-catégorie ACU. Elle est dite stricte si ψ l'est (1.2.1).

Les conditions précédentes entraînent la cohérence de ces contraintes entre elles (MAC LANE [1], 5.1). En exprimant ceci comme 1.1.2, 2.1.2, 2.2.2, ceci signifie qu'à chaque famille $(X_i)_{i\in I}$ d'objets de $\underline{C}$ indexée par un ensemble fini I on peut attacher un objet de $\underline{C}$ dépendant fonctoriellement des X_i , noté $\underset{I}{\otimes} X_i$ tel qu'on ait

$$\underset{\emptyset}{\otimes} X_i = \underline{1}$$

$$\otimes(X) = X$$

et que pour deux telles familles $(X_i)_{I_1}$, $(X)_{I_2}$, on a un isomorphisme canonique

$$(\underset{I_1}{\otimes} X_i) \otimes (\underset{I_2}{\otimes} X_i) \longrightarrow \underset{I_1 \amalg I_2}{\otimes} X_i$$

vérifiant des conditions analogues à celles de 2.1.2 et 2.2.2.

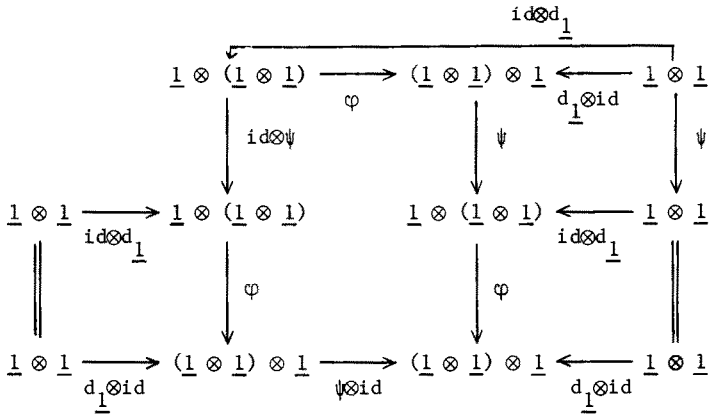
2.4.2. On va démontrer ici que les conditions de compatibilité de 2.4.1 sont surabondantes (voir aussi KELLY [1]).

2.4.1. Proposition. Soient $\varphi,\psi,(\underline{1},g,d)$ des contraintes d'associativité, commutativité, unité pour une $\otimes$-catégorie $\underline{C}$. Si φ est compatible avec ψ et avec $(\underline{1},g,d)$ séparément, alors ψ est compatible avec $(\underline{1},g,d)$.

Démonstration. On va procéder en deux étapes. On montre d'abord que $\psi_{\underline{1},\underline{1}} = id_{\underline{1}\otimes\underline{1}}$, puis que cette égalité suffit à garantir la compatibilité cherchée.

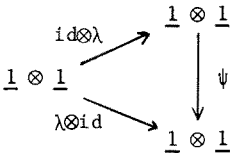
2.4.2.2. Considérons le diagramme suivant :

(2.4.2.1)

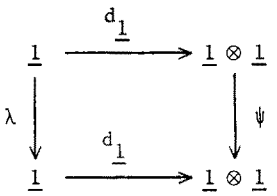


L'hexagone central de ce diagramme est commutatif en vertu de l'axiome de l'hexagone (2.1.1.1). Les autres régions de ce diagramme sont aussi commutatives, soit par naturalité de ψ, soit en appliquant la commutativité des diagrammes (2.2.3.6) et les formules (1.3.1.2). On en conclut en particulier que le circuit extérieur de (2.4.2.1) est commutatif. Si on écrit ce circuit, on obtient

(2.4.2.2)



où λ est défini par la commutativité du diagramme

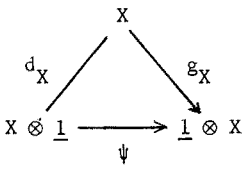


.

De (2.4.2.2) on obtient, par naturalité de ψ,

$$\psi_{1,1} = id_{1\otimes 1} \quad .$$

2.4.2.3. Soit X un objet de $\underline{C}$, on doit démontrer la commutativité du triangle



Pour cela, soit x un isomorphisme $x : X \xrightarrow{\sim} X \otimes \underline{1}$. On va construire d_X, g_X à partir de x , en utilisant le procédé de 2.2.5.2. On aboutit ainsi à partir du triangle précédent au diagramme (2.4.2.3) page 42 , où x' est par définition l'isomorphisme

$$x' : X \xrightarrow{x} X \otimes \underline{1} \xrightarrow{\psi} \underline{1} \otimes X \quad .$$

Dans ce diagramme les régions I, II, sont commutatives par naturalité de ψ , les régions III, IV, par définition de x' , les régions V, VI par (2.2.5.2), et enfin le circuit extérieur est commutatif à cause de la commutativité du diagramme suivant, pour X,Y,Z des objets de $\underline{C}$, compte tenu de 2.1.2.

$$\begin{array}{ccc} X \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{\varphi} & (X \otimes Y) \otimes Z \\ \downarrow{\scriptstyle id_X \otimes \psi} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ X \otimes (Z \otimes Y) & & Z \otimes (X \otimes Y) \\ \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \downarrow{\scriptstyle id_Z \otimes \psi} \\ (Z \otimes Y) \otimes X & \xleftarrow[\varphi]{} & Z \otimes (Y \otimes X) \end{array} \quad ,$$

et de ce que $\psi_{\underline{1},\underline{1}} = id_{\underline{1}\otimes\underline{1}}$.

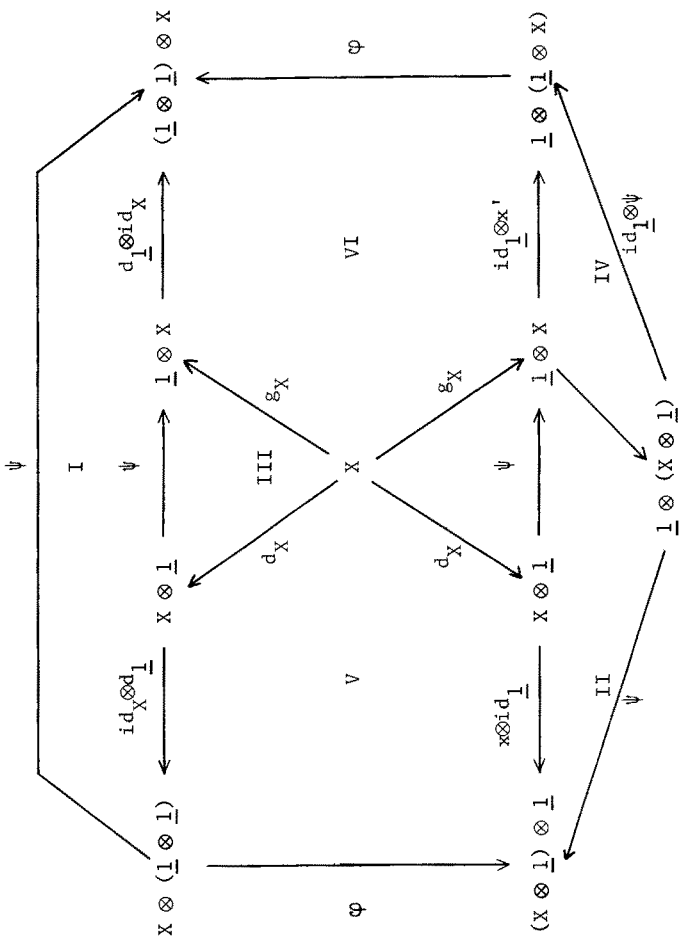
2.4.3. Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie AC (2.1.1). Compte tenu de 2.2.5.3, pour qu'il y existe une contrainte ACU induisant la contrainte AC donnée sur $\underline{C}$, il faut et il suffit qu'il y ait un objet unité dans $\underline{C}$. Si $\underline{1}$ est un objet unité, $\psi_{\underline{1},\underline{1}} = id_{\underline{1}\otimes\underline{1}}$ et le choix d'un isomorphisme $d_o : \underline{1} \xrightarrow{\sim} \underline{1} \otimes \underline{1}$ détermine une unique unité $(\underline{1},g,d)$ compatible avec la contrainte AC donnée et telle que $d_o = d_{\underline{1}} = g_{\underline{1}}$.

On se permettra aussi d'appeler $\otimes$-catégorie ACU une $\otimes$-catégorie AC possédant un objet unité (i.e. qui soit unifère, voir 1.3.2).

2.5. Objets inversibles.

2.5.0. Si $\underline{C}$ est une $\otimes$-catégorie associative, on dira qu'un objet X de $\underline{C}$ est inversible s'il est 2-régulier. Cette terminologie provient du fait suivant, de vérification facile : X est 2-régulier si et seulement s'il existe un objet X' tel que

(2.4.2.3)


X ⊗ (1̄ ⊗ 1̄)
Φ
(X ⊗ 1̄) ⊗ 1̄
1̄ ⊗ (X ⊗ 1̄)
1̄ ⊗ (1̄ ⊗ X)
Ψ
I
Ψ
X ⊗ 1̄ ⊗ 1̄
$i\,d_{\bar{1}}\otimes p_X$
X ⊗ 1̄ ⊗ 1̄
$p_X\otimes id_{\bar{1}}$
X ⊗ 1̄ ⊗ 1̄
V
$x\otimes id_{\bar{1}}$
1̄ ⊗ X ⊗ 1̄
II
Ψ
1̄ ⊗ (X ⊗ 1̄)
$id_{\bar{1}}\otimes\Psi$
IV
g_X
III
X
g_X
p_X
p_X
Ψ
VI
$id_{\bar{1}}\otimes x'$
1̄ ⊗ X ⊗ 1̄
VI
Φ
1̄ ⊗ (1̄ ⊗ X)

$X \otimes X'$ et $X' \otimes X$ soient des objets unité (1.3.2).

Dans ce qui suit, $\underline{C}$ désigne une $\otimes$-catégorie ACU (ceci pour simplifier, certains des développements suivants étant possibles sans s'être donné une contrainte de commutativité pour $\underline{C}$).

2.5.1. Notons $\mathrm{Pic}(\underline{C})$ l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets inversibles. On voit facilement, à l'aide de la contrainte d'associativité, que si X , Y sont des objets inversibles de $\underline{C}$, alors $X \otimes Y$ aussi. Il en résulte que la loi $\otimes$ induit sur $\mathrm{Pic}(\underline{C})$ une loi de groupe commutatif, l'élément unité étant la classe des objets unité.

2.5.2. Soit X un objet inversible de $\underline{C}$. Rappelons que dans 1.3.3.3 on a défini des morphismes de monoïde

$$\rho_X, \rho'_X : \mathrm{End}(\underline{1}_{\underline{C}}) \longrightarrow \mathrm{End}(X)$$

et que par 2.3,

$$\rho_X = \rho'_X \ .$$

En outre, la définition de ρ_X montre que c'est un isomorphisme, parce que X est inversible. On notera τ^X son inverse

(2.5.2.1) $$\tau^X : \mathrm{End}(X) \longrightarrow \mathrm{End}(\underline{1}_{\underline{C}}) \ .$$

Ici $\mathrm{End}(\underline{1}_{\underline{C}})$ dénote le monoïde des endomorphismes d'un objet unité (voir 1.3.3.2).

2.5.2.1. On obtient ainsi un système transitif d'isomorphismes canoniques

(2.5.2.2) $$\mathrm{End}(X) \simeq \mathrm{End}(Y)$$

où X , Y sont des objets inversibles.

L'application

$$\mathrm{End}(X) \times \mathrm{End}(Y) \longrightarrow \mathrm{End}(X \otimes Y) \qquad (f,g) \longmapsto f \otimes g$$

s'identifie à la composition

$$\mathrm{End}(\underline{1}_{\underline{C}}) \times \mathrm{End}(\underline{1}_{\underline{C}}) \longrightarrow \mathrm{End}(\underline{1}_{\underline{C}})$$

comme on le voit aussitôt, à l'aide de (2.2.6.1).

2.5.3. Soit X un objet inversible de $\underline{C}$. La <u>signature</u> $\varepsilon(X)$ de X est par définition l'endomorphisme de $\underline{1}_{\underline{C}}$

$$\varepsilon(X) = \tau^{X\otimes X}(\psi_{X,X}) \quad ; \tag{2.5.3.1}$$

c'est-à-dire qu'il est défini par la commutativité du carré

(2.5.3.2)
$$\begin{array}{ccc} X \otimes X & \xrightarrow{\psi_{X,X}} & X \otimes X \\ \Big\downarrow{\scriptstyle g_{X\otimes X}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle g_{X\otimes X}} \\ \underline{1} \otimes (X \otimes X) & \xrightarrow{\varepsilon(X)\otimes id} & \underline{1} \otimes (X \otimes X) \end{array}$$

Bien entendu, on a par (1.2.1.1)

$$\varepsilon(X)^2 = \mathrm{id}_{\underline{1}} \quad . \tag{2.5.3.3}$$

2.5.3.1. Soient X, Y des objets inversibles ; on va prouver qu'on a

$$\varepsilon(X \otimes Y) = \varepsilon(X)\,\varepsilon(Y) \quad . \tag{2.5.3.4}$$

On remarque pour cela que si A, B, C, D sont des objets de $\underline{C}$, le carré

$$\begin{array}{ccc} (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) & \xrightarrow{\psi_{A\otimes B,\,C\otimes D}} & (C \otimes D) \otimes (A \otimes B) \\ \wr\Big\downarrow & & \wr\Big\downarrow \\ (A \otimes C) \otimes (B \otimes D) & \xrightarrow{\psi_{A,C}\otimes\psi_{B,D}} & (C \otimes A) \otimes (D \otimes B) \end{array}$$

est commutatif (voir 2.1.2), où les flèches verticales sont construites à l'aide de φ, ψ. Si on pose $A = C = X$, $B = D = Y$, les deux flèches verticales coïncident, d'où la formule cherchée.

Enfin, il est clair qu'on a

$$\varepsilon(\underline{1}) = \mathrm{id}_{\underline{1}} \quad . \tag{2.5.3.5}$$

2.5.3.2. La signature induit un morphisme

$$\varepsilon : \mathrm{Pic}(\underline{C}) \longrightarrow {}_2\mathrm{End}(\underline{1}_{\underline{C}}) \tag{2.5.3.6}$$

du groupe $\mathrm{Pic}(\underline{C})$ dans le groupe des endomorphismes d'ordre 2 de l'objet unité.

2.5.4. Un <u>inverse</u> pour un objet inversible X de $\underline{C}$ consiste en la donnée d'un objet X^{-1} et d'un isomorphisme

$$\delta_X : X \otimes X^{-1} \xrightarrow{\sim} \underline{1} .$$

Evidemment, si (X',δ') est un autre inverse pour X, il y a un isomorphisme (unique) $X^{-1} \xrightarrow{\sim} X'$ qui rend commutatif le triangle

$$\begin{array}{ccc} X \otimes X^{-1} & & \\ \big\downarrow \wr & \searrow^{\delta_X} & \\ X \otimes X' & \nearrow_{\delta'} & \underline{1} \end{array}$$

A l'isomorphisme δ_X correspond un isomorphisme $\gamma_X : X^{-1} \otimes X \xrightarrow{\sim} \underline{1}$ rendant commutatif le triangle

$$\begin{array}{ccc} X \otimes X^{-1} & & \\ \big\downarrow \psi_{X,X^{-1}} & \searrow^{\delta_X} & \\ X^{-1} \otimes X & \nearrow_{\gamma} & \underline{1} \end{array} \tag{2.5.4.1}$$

Une façon plus symétrique de procéder, signalée par P. Deligne, est de définir un inverse comme la donnée de X^{-1} et d'un isomorphisme

$$\bigotimes_{\{1,2\}} X_i \xrightarrow{\sim} \underline{1} \tag{2.5.4.2}$$

où $X_1 = X$, $X_2 = X^{-1}$, et où on emploie les notations introduites en 2.1.2.1.

2.5.4.1. La notion d'inverse permet de définir un procédé de contraction : soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'objets de $\underline{C}$ indexée par un ensemble fini I, soient $j, k \in I$ et supposons que X_i soit donné comme inverse de X_j, i.e. que l'on ait un isomorphisme

$$\bigotimes_{\{j,k\}} X \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{\emptyset} X_i .$$

On définit alors un isomorphisme de contraction

$$\bigotimes_{I} X_i \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{I-\{j,k\}} X_i \tag{2.5.4.3}$$

comme le composé

$$\bigotimes_{I} X_i \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{\{j,k\}} X_i \otimes \bigotimes_{I-\{j,k\}} X_i \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{\emptyset} X_i \otimes \bigotimes_{I-\{j,k\}} X_i \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{I-\{j,k\}} X_i \ .$$

2.5.4.2. L'inverse de X dépend de façon contravariante de X . Supposons que (X^{-1},δ_X) , (Y^{-1},δ_Y) sont des inverses pour X , Y respectivement, et soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme. Il existe alors un et un seul morphisme ${}^tf : Y^{-1} \longrightarrow X^{-1}$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X \otimes X^{-1} & \xrightarrow{\delta_X} & \underline{1} & \xleftarrow{\delta_Y} & Y \otimes Y^{-1} \\ & {\scriptstyle f\otimes id_{X^{-1}}} \searrow & & \swarrow {\scriptstyle id_Y \otimes {}^tf} & \\ & & Y \otimes X^{-1} & & \end{array} \tag{2.5.4.5}$$

Si $X = Y$, on obtient un morphisme de monoïdes

$$\mathrm{End}(X) \longrightarrow \mathrm{End}(X^{-1}) \qquad f \longmapsto {}^tf \ .$$

On vérifie facilement que celui-ci n'est autre que l'isomorphisme canonique exhibé en (2.5.2.2).

2.5.4.3. La nature symétrique de la définition (2.5.4.2) d'un inverse, donne un isomorphisme canonique

$$X \simeq (X^{-1})^{-1} \ . \tag{2.5.4.6}$$

2.5.4.4. Si X , Y sont des objets inversibles de $\underline{C}$, on trouve de même, en se servant des propriétés du symbole $\bigotimes_I X_i$ introduit en 2.1.2.1, un isomorphisme canonique

$$(X \otimes Y)^{-1} \simeq X^{-1} \otimes Y^{-1} \ . \tag{2.5.4.7}$$

2.5.4.5. Soit $u \in \mathrm{End}(\underline{1})$; il résulte trivialement de la remarque faite en 2.5.4.2, qu'on a

$$\rho_{X^{-1}}(u) = {}^t(\rho_X(u)) \ . \tag{2.5.4.8}$$

2.5.4.6. Voici enfin comment on peut décrire l'application $\tau^X : \mathrm{End}(X) \longrightarrow \mathrm{End}(\underline{1})$, à l'aide d'un inverse (X^{-1},δ_X). Si $f : X \longrightarrow X$, $\tau^X(f)$ est défini par la commutativité de

(2.5.4.9)

$$\begin{array}{ccc} \underline{1} & \xrightarrow{\tau^X(f)} & \underline{1} \\ {\scriptstyle \delta_X}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \delta_X} \\ X \otimes X^{-1} & \xrightarrow[f\otimes id_{X^{-1}}]{} & X \otimes X^{-1} \end{array} .$$

2.5.5. Soit X^{-1} donné comme inverse de X. On a donc des isomorphismes

(2.5.5.1)

$$\delta_X : X \otimes X^{-1} \xrightarrow{\sim} \underline{1}$$
$$\gamma_X : X^{-1} \otimes X \xrightarrow{\sim} \underline{1}$$

rendant commutatif le diagramme (2.5.4.1). Il est assez naturel de considérer les diagrammes suivants

(2.5.5.2)

$$\begin{array}{ccc} X^{-1} \otimes (X \otimes X^{-1}) & \xrightarrow{\varphi} & (X^{-1} \otimes X) \otimes X^{-1} \\ {\scriptstyle id_{X^{-1}}\otimes\delta_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_X\otimes id_{X^{-1}}} \\ X^{-1} \otimes \underline{1} & & \underline{1} \otimes X^{-1} \\ & {\scriptstyle d_{X^{-1}}}\nwarrow \quad \uparrow X^{-1} \quad \nearrow{\scriptstyle g_{X^{-1}}} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X \otimes (X^{-1} \otimes X) & \xrightarrow{\varphi} & (X \otimes X^{-1}) \otimes X \\ {\scriptstyle id_X\otimes\gamma_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \delta_X\otimes id_X} \\ X \otimes \underline{1} & & \underline{1} \otimes X \\ & {\scriptstyle d_X}\nwarrow \quad \uparrow X \quad \nearrow{\scriptstyle g_X} & \end{array}$$

On s'aperçoit que ces diagrammes ne sont pas commutatifs en général. Comme on le verra en 2.5.5.3, ces diagrammes sont commutatifs si et seulement si $\varepsilon(X) = id_{\underline{1}}$.

2.5.5.1. Toutefois, on peut voir que pour un couple d'isomorphismes (γ_X,δ_X) l'un des pentagones (2.5.5.2) est commutatif si et seulement si l'autre l'est. Pour cela,

on considère le diagramme (2.5.5.3) page 49 dans lequel on retrouve ces diagrammes (à tensorisation par un objet régulier près) comme les régions I, II. La commutativité des régions III, IV et V de ce diagramme découle de la naturalité de φ , celle de VII, VIII et IX de (2.2.1.1), et enfin celle du circuit extérieur découle de (1.3.1.3).

2.5.5.2. Il résulte de ce qui précède, que pour tout isomorphisme $\delta_X : X\otimes X^{-1}\xrightarrow{\sim} \underline{1}$, on peut trouver un isomorphisme (et un seul) $\gamma_X : X^{-1}\otimes X \xrightarrow{\sim} \underline{1}$, tel que les diagrammes (2.5.5.1) soient commutatifs. Ceci suggère la définition suivante, valable pour une $\otimes$-catégorie AU : un <u>inverse</u> AU pour un objet inversible X , est un triple $(X^{-1},\gamma_X,\delta_X)$ avec des isomorphismes γ_X , δ_X vérifiant (2.5.5.1).

On a encore un isomorphisme canonique

$$X \simeq (X^{-1})^{-1} ,$$

mais si X , Y sont des objets inversibles, on a un isomorphisme canonique

$$(X \otimes Y)^{-1} \simeq Y^{-1} \otimes X^{-1} .$$

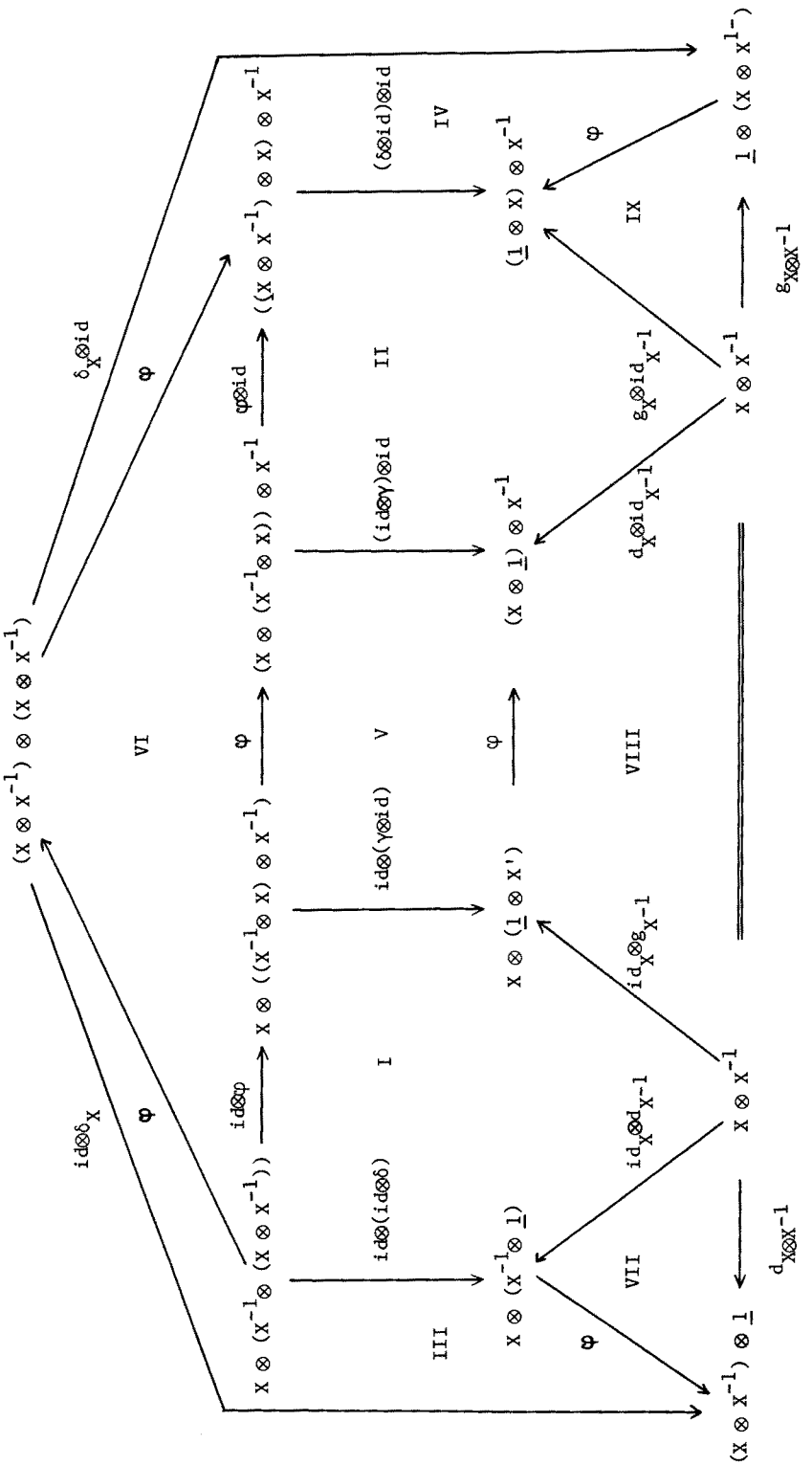
2.5.5.3. Si $\underline{C}$ est ACU et $(X^{-1},\gamma_X,\delta_X)$ est une inverse AU pour X , on n'a pas en général la commutativité de (2.5.4.1). Toutefois, le carré

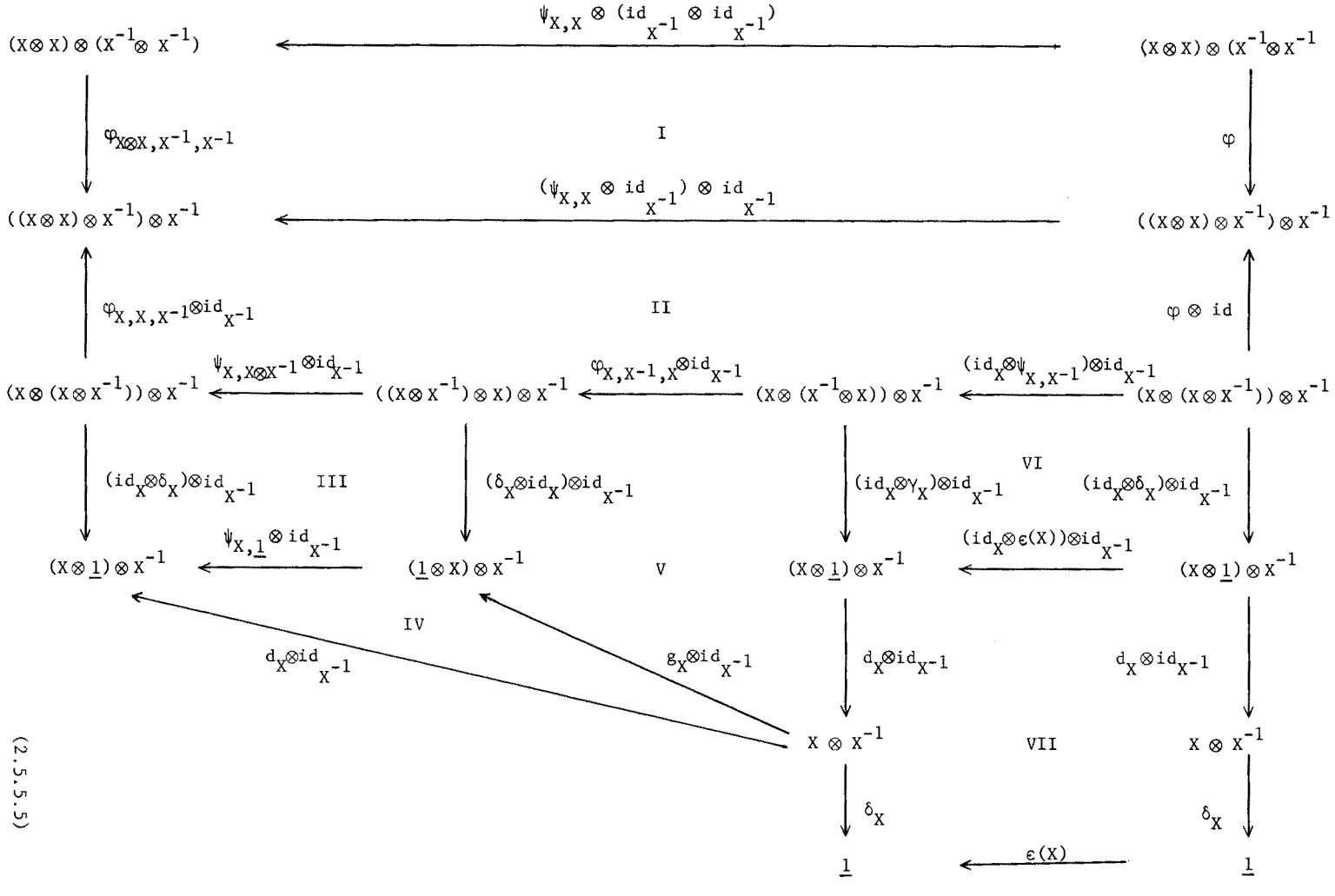
(2.5.5.4)
$$\begin{array}{ccc} X \otimes X^{-1} & \xrightarrow{\psi_{X,X^{-1}}} & X^{-1} \otimes X \\ \downarrow{\scriptstyle \delta_X} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_X} \\ \underline{1} & \xrightarrow[\varepsilon(X)]{} & \underline{1} \end{array} .$$

est commutatif. Pour prouver ceci, on considère le diagramme (2.5.5.5) page 50 , dans lequel on retrouve (2.5.5.4) (à tensorisation par un objet inversible près) comme la région VI. Dans ce diagramme la région I est commutative par fonctorialité de φ ; II par (2.1.1.1) ; III par fonctorialité de ψ ; IV par (2.3.1) ; V par (2.5.5.2) ; VII par la formule ${}^{X}\rho_X = \mathrm{id}$; enfin, le circuit extérieur est commutatif par définition de la signature $\varepsilon(X)$.

2.5.5.4. Il résulte de ceci que les deux définitions possibles d'inverse coïncident si et seulement si $\underline{C}$ est une $\otimes$-catégorie ACU <u>stricte</u> (2.4.1).

(2.5.5.3)


$(X \otimes X^{-1}) \otimes (X \otimes X^{-1})$
$\delta_X \otimes id$
φ
$id \otimes \delta_X$
φ
VI
$X \otimes (X^{-1} \otimes (X \otimes X^{-1}))$
$id \otimes \varphi$
$X \otimes ((X^{-1} \otimes X) \otimes X^{-1})$
φ
$(X \otimes (X^{-1} \otimes X)) \otimes X^{-1}$
$\varphi \otimes id$
$((X \otimes X^{-1}) \otimes X) \otimes X^{-1}$
$id \otimes (id \otimes \delta)$
I
$id \otimes (\gamma \otimes id)$
V
$(id \otimes \gamma) \otimes id$
II
$(\delta \otimes id) \otimes id$
IV
$X \otimes (X^{-1} \otimes \underline{1})$
φ
$X \otimes (\underline{1} \otimes X')$
φ
$(X \otimes \underline{1}) \otimes X^{-1}$
$(\underline{1} \otimes X) \otimes X^{-1}$
III
VII
VIII
IX
$id_X \otimes d_{X^{-1}}$
$id_X \otimes g_{X^{-1}}$
$d_X \otimes id_{X^{-1}}$
$g_X \otimes id_{X^{-1}}$
φ
$(X \otimes X^{-1}) \otimes \underline{1}$
$X \otimes X^{-1}$
$X \otimes X^{-1}$
$\underline{1} \otimes (X \otimes X^{-1})$
$d_{X \otimes X^{-1}}$
$g_{X \otimes X^{-1}}$


$(X\otimes X)\otimes(X^{-1}\otimes X^{-1})$
$\psi_{X,X}\otimes(id_{X^{-1}}\otimes id_{X^{-1}})$
$(X\otimes X)\otimes(X^{-1}\otimes X^{-1}$
$\varphi_{X\otimes X,X^{-1},X^{-1}}$
I
φ
$((X\otimes X)\otimes X^{-1})\otimes X^{-1}$
$(\psi_{X,X}\otimes id_{X^{-1}})\otimes id_{X^{-1}}$
$((X\otimes X)\otimes X^{-1})\otimes X^{-1}$
$\varphi_{X,X,X^{-1}\otimes id_{X^{-1}}}$
II
$\varphi\otimes id$
$(X\otimes(X\otimes X^{-1}))\otimes X^{-1}$
$\psi_{X,X\otimes X^{-1}}\otimes id_{X^{-1}}$
$((X\otimes X^{-1})\otimes X)\otimes X^{-1}$
$\varphi_{X,X^{-1},X\otimes id_{X^{-1}}}$
$(X\otimes(X^{-1}\otimes X))\otimes X^{-1}$
$(id_X\otimes\psi_{X,X^{-1}})\otimes id_{X^{-1}}$
$(X\otimes(X\otimes X^{-1}))\otimes X^{-1}$
$(id_X\otimes\delta_X)\otimes id_{X^{-1}}$
III
$(\delta_X\otimes id_X)\otimes id_{X^{-1}}$
$(id_X\otimes\gamma_X)\otimes id_{X^{-1}}$
VI
$(id_X\otimes\delta_X)\otimes id_{X^{-1}}$
$\psi_{X,\underline{1}}\otimes id_{X^{-1}}$
$(id_X\otimes\varepsilon(X))\otimes id_{X^{-1}}$
$(X\otimes\underline{1})\otimes X^{-1}$
$(\underline{1}\otimes X)\otimes X^{-1}$
V
$(X\otimes\underline{1})\otimes X^{-1}$
$(X\otimes\underline{1})\otimes X^{-1}$
IV
$d_X\otimes id_{X^{-1}}$
$g_X\otimes id_{X^{-1}}$
$d_X\otimes id_{X^{-1}}$
$d_X\otimes id_{X^{-1}}$
$X\otimes X^{-1}$
VII
$X\otimes X^{-1}$
δ_X
δ_X
$\varepsilon(X)$
$\underline{1}$
$\underline{1}$

(2.5.5.5)

§ 3. LES OBJETS Hom , Moh

Dans tout ce paragraphe, $\underline{C}$ désigne une $\otimes$-catégorie.

3.1. Généralités.

3.1.1. Soient X , Y des objets de $\underline{C}$. On dira qu'il existe un objet $\underline{\mathrm{Hom}}$ pour X , Y si le foncteur

$$\underline{C}^{o} \longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}} \qquad Z \longrightarrow \mathrm{Hom}(Z \otimes X , Y)$$

est représentable. Ceci signifie qu'il existe un objet, noté $\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)$, et un morphisme

(3.1.1.1) $$ev_{X,Y} : \underline{\mathrm{Hom}}(X,Y) \otimes X \longrightarrow Y \ ,$$

qui induit pour chaque Z une bijection

(3.1.1.2) $$\mathrm{Hom}(Z,\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(Z \otimes X, Y)$$

$$f \longrightarrow ev_{X,Y} \circ (f \otimes id_X) \ .$$

Bien entendu, le couple $(\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y), ev_{X,Y})$ est uniquement déterminé à isomorphisme unique près.

3.1.1.1. De façon analogue, on dit qu'il existe un objet $\underline{\mathrm{Moh}}$ pour Y,X , si le foncteur

$$\underline{C}^{o} \longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}} \qquad Z \longrightarrow \mathrm{Hom}(X \otimes Z, Y)$$

est représentable. On a donc un couple $(\underline{\mathrm{Moh}}(Y,X), ve_{Y,X})$ constitué par un objet $\underline{\mathrm{Moh}}(Y,X)$ et un morphisme

$$ve_{Y,X} : X \otimes \underline{\mathrm{Moh}}(Y,X) \longrightarrow Y$$

induisant des bijections, pour $Z \in \mathrm{ob}\ \underline{C}$

(3.1.1.3) $$\mathrm{Hom}(Z,\underline{\mathrm{Moh}}(Y,X)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X \otimes Z, Y) \ .$$

Ces notions sont étudiées en détail dans EILENBERG-KELLY [1].

3.1.1.2. On notera qu'il existe un objet $\underline{\mathrm{Moh}}$ pour Y,X dans $\underline{C}$ si et seulement s'il

existe un objet $\underline{Hom}$ pour X,Y dans $\underline{C}^{sym}$ (0.1.4), et que alors, on a un isomorphisme canonique

$$\underline{Hom}_{\underline{C}^{sym}}(X,Y) \simeq \underline{Moh}_{\underline{C}}(X,Y) \ .$$

3.1.2. Soient X , X', Y , Y' des objets de $\underline{C}$, $f : X' \longrightarrow X$, $g : Y \longrightarrow Y'$ des morphismes. Si $\underline{Hom}(X,Y)$ et $\underline{Hom}(X,Y')$ existent, on trouve un et un seul morphisme

$$g_*^X : \underline{Hom}(X,Y) \longrightarrow \underline{Hom}(X,Y') \tag{3.1.2.1}$$

rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \underline{Hom}(X,Y) \otimes X & \xrightarrow{ev_{X,Y}} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle g_*^X \otimes id_X} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \underline{Hom}(X,Y') \otimes X & \xrightarrow{ev_{X,Y'}} & Y' \end{array} \tag{3.1.2.2}$$

De même, si $\underline{Hom}(X',Y)$ et $\underline{Hom}(X,Y)$ existent, il y a un et un seul morphisme

$$f_Y^* : \underline{Hom}(X,Y) \longrightarrow \underline{Hom}(X',Y) \tag{3.1.2.3}$$

rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Hom(X,Y) \otimes X & \xrightarrow{ev_{X,Y}} & Y \\ \uparrow{\scriptstyle id \otimes f} & & \uparrow{\scriptstyle ev_{X',Y}} \\ Hom(X,Y) \otimes X' & \xrightarrow[f_Y^* \otimes id_{X'}]{} & Hom(X',Y) \otimes X' \end{array} \tag{3.1.2.4}$$

Ainsi, si pour tout couple d'objets X , Y de $\underline{C}$, $\underline{Hom}(X,Y)$ existe, on a un foncteur

$$\underline{Hom} : \underline{C}^o \times \underline{C} \longrightarrow \underline{C} \ , \tag{3.1.2.5}$$

uniquement déterminé (à isomorphisme unique près) par la condition que les bijections (3.1.1.2) soient naturelles en X , Y , Z .

3.1.2.1. Bien entendu, des remarques analogues sont valables pour $\underline{Moh}$, par symétrie. On notera cependant que $\underline{Moh}$ dépend de façon covariante de Y , contravariante de X .

3.1.2.2. Supposons que la loi $\otimes$ de $\underline{C}$ soit A-linéaire (0.1.2), et que les objets $\underline{\mathrm{Hom}}$ existent. On voit alors que le foncteur (3.1.2.5) est A-bilinéaire.

3.1.3. Soit X un objet 2-régulier à gauche (0.1.3). Alors, pour tout $Y \in \mathrm{ob}\ \underline{C}$, $\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)$ existe. En effet, il existe un couple (T,t), où $T \in \mathrm{ob}\ \underline{C}$ et t est un isomorphisme $t : T \otimes X \xrightarrow{\sim} Y$. Il suffit de poser

$$\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y) = T$$

$$ev_{X,Y} = t \quad .$$

On en déduit, par symétrie, que si X est 2-régulier à droite, $\underline{\mathrm{Moh}}(Y,X)$ existe quel que soit $Y \in \mathrm{ob}\ \underline{C}$.

3.2. $\underline{\mathrm{Hom}}$ et contraintes.

Dans ce numéro on suppose que dans $\underline{C}$ les $\underline{\mathrm{Hom}}$ existent.

3.2.1. Soit φ une contrainte d'associativité pour $\underline{C}$. On se propose de définir un isomorphisme naturel en Z, X, Y

(3.2.1.1) $$\underline{\mathrm{Hom}}(Z,\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}(Z \otimes X,Y) \quad .$$

Pour définir (3.2.1.1), il suffit de définir des applications bijectives

$$\mathrm{Hom}(T,\underline{\mathrm{Hom}}(Z,\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y))) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(T,\underline{\mathrm{Hom}}(Z \otimes X,Y))$$

naturelles en T, Z, X, Y. Ces applications sont définies par le diagramme qui suit

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}(T,\underline{\mathrm{Hom}}(Z,\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y))) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}(T \otimes Z,\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)) \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \wr \\
 & & \mathrm{Hom}((T \otimes Z) \otimes X,Y) \\
 & & \Big\downarrow \wr \\
\mathrm{Hom}(T,\underline{\mathrm{Hom}}(Z \otimes X,Y) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}(T \otimes (Z \otimes X),Y)
\end{array} \quad ,$$

où l'on utilise φ et les applications (3.1.1.2). On laisse à l'amateur le soin de

vérifier que (3.2.1.1) est la seule flèche qui rend commutatif le diagramme

(3.2.1.2)
$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Hom}}(Z \otimes X, Y) \otimes (Z \otimes X) & \xrightarrow{ev_{Z\otimes X, Y}} & Y \\ \uparrow & & \uparrow \\ \underline{\mathrm{Hom}}(Z, \underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)) \otimes (Z \otimes X) & & \uparrow ev_{X,Y} \\ \downarrow \varphi & & \\ (\underline{\mathrm{Hom}}(Z, \underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)) \otimes Z) \otimes X & \xrightarrow{ev_{Z,\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)} \otimes id_X} & \underline{\mathrm{Hom}}(X,Y) \otimes X \end{array} .$$

Dans le même esprit, on trouve des isomorphismes naturels

(3.2.1.3)
$$\underline{\mathrm{Moh}}(\underline{\mathrm{Moh}}(Y,X),Z) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Moh}}(Y, X \otimes Z)$$

(3.2.1.4)
$$\underline{\mathrm{Hom}}(X, \underline{\mathrm{Moh}}(Y,Z)) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Moh}}(\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y),Z) \quad .$$

3.2.2. Soit ψ une contrainte de commutativité pour $\underline{C}$. On construit un isomorphisme naturel

(3.2.2.1)
$$\psi_Y^X : \underline{\mathrm{Hom}}(X,Y) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Moh}}(Y,X)$$

Pour ceci, il suffit de construire des isomorphismes

$$\mathrm{Hom}(Z, \underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(Z, \underline{\mathrm{Moh}}(Y,X)) \ ,$$

naturels en Z , X , Y . Ceux-ci sont par définition, ceux rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(Z, \underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}(Z, \underline{\mathrm{Moh}}(Y,X)) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \mathrm{Hom}(Z \otimes X, Y) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}(X \otimes Z, Y) \end{array} .$$

On vérifiera encore que la flèche (3.2.2.1) est la seule rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Hom}}(X,Y) \otimes X & \xrightarrow{ev_{X,Y}} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle \psi^Y_X \otimes id_X} & & \downarrow{\scriptstyle ve_{Y,X}} \\ \underline{\mathrm{Moh}}(Y,X) \otimes X & \longrightarrow & X \otimes \underline{\mathrm{Moh}}(Y,X) \end{array} \quad .$$

3.2.2.1. Chaque fois que $\underline{C}$ sera munie d'une contrainte de commutativité, on convien-dra d'éliminer la notation $\underline{\mathrm{Moh}}$. Ceci signifie qu'on posera

$$\underline{\mathrm{Moh}}(Y,X) = \underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)$$

$$ve_{Y,X} = ev_{X,Y} \circ \psi \quad ,$$

de sorte que ψ^Y_X devient l'identité de $\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)$.

3.2.3. Soit $(\underline{1},g,d)$ une unité pour $\underline{C}$ (1.3.1). Composant les bijections (3.1.1.2) et (3.1.1.3) avec celles déduites de g_X , d_X , on obtient des bijections

$$\begin{array}{l} \mathrm{Hom}(\underline{1},\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(X,Y) \\ \mathrm{Hom}(\underline{1},\underline{\mathrm{Moh}}(Y,X)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(X,Y) \end{array} \qquad (3.2.3.1)$$

naturelles en X , Y . Si on utilise la notation introduite en 1.3.1, ceci s'écrit encore

$$\Gamma(\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)) \simeq \Gamma(\underline{\mathrm{Moh}}(Y,X)) \simeq \mathrm{Hom}(X,Y) \qquad (3.2.3.2)$$

On définit aisément des isomorphismes

$$\begin{array}{l} X \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{1},X) \\ X \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Moh}}(X,\underline{1}) \end{array} \qquad (3.2.3.3)$$

caractérisés comme étant les seuls à rendre commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X \otimes \underline{1} & \xleftarrow{d_X} & X & \xrightarrow{g_X} & \underline{1} \otimes X \\ \downarrow\wr & \nearrow{\scriptstyle ev_{\underline{1},X}} & & \nwarrow{\scriptstyle ve_{X,\underline{1}}} & \downarrow\wr \\ \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{1},X) \otimes \underline{1} & & & & \underline{1} \otimes \underline{\mathrm{Moh}}(X,\underline{1}) \end{array} \qquad (3.2.3.4)$$

3.2.3.1. Supposons, pour simplifier, qu'on s'est donné une contrainte de commutativité ψ compatible avec $(\underline{1},g,d)$ (2.3.1). En particulier, la convention 3.2.2.1 s'applique.

Si $X \in \mathrm{ob}\ \underline{C}$, on note

$$\check{X} = \underline{\mathrm{Hom}}(X,\underline{1})$$

$$ev_X = ev_{X,\underline{1}} \quad .$$

L'objet $\check{X}$ dépend de façon contravariante de X ; si $f : X \longrightarrow Y$, ${}^t f : \check{Y} \longrightarrow \check{X}$ est le seul morphisme rendant commutatif le carré

(3.2.3.5)
$$\begin{array}{ccc} \check{Y} \otimes X & \xrightarrow{{}^t f \otimes id_X} & \check{X} \otimes X \\ \downarrow{\scriptstyle id_{\check{Y}} \otimes id_X} & & \downarrow{\scriptstyle ev_X} \\ \check{Y} \otimes Y & \xrightarrow{ev_Y} & \underline{1} \end{array}$$

Si f est un isomorphisme, on posera

$$\check{f} = ({}^t f)^{-1} = {}^t(f^{-1}) \quad ,$$

de sorte qu'on aura un triangle commutatif

(3.2.3.6)
$$\begin{array}{ccc} \check{X} \otimes X & \xrightarrow{\check{f} \otimes f} & \check{Y} \otimes Y \\ & {\scriptstyle ev_X} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle ev_Y} & \\ & \underline{1} & \end{array}$$

3.2.3.2. On définit un morphisme

(3.2.3.7)
$$i_X : X \longrightarrow \check{\check{X}} \quad .$$

C'est le seul morphisme qui rend commutatif le carré

(3.2.3.8)
$$\begin{array}{ccc} X \otimes \check{X} & \xrightarrow{i_X \otimes id_{\check{X}}} & \check{\check{X}} \otimes \check{X} \\ \downarrow{\scriptstyle \psi_{X,\check{X}}} & & \downarrow{\scriptstyle ev_{\check{X}}} \\ \check{X} \otimes X & \xrightarrow{ev_X} & \underline{1} \end{array} \quad ;$$

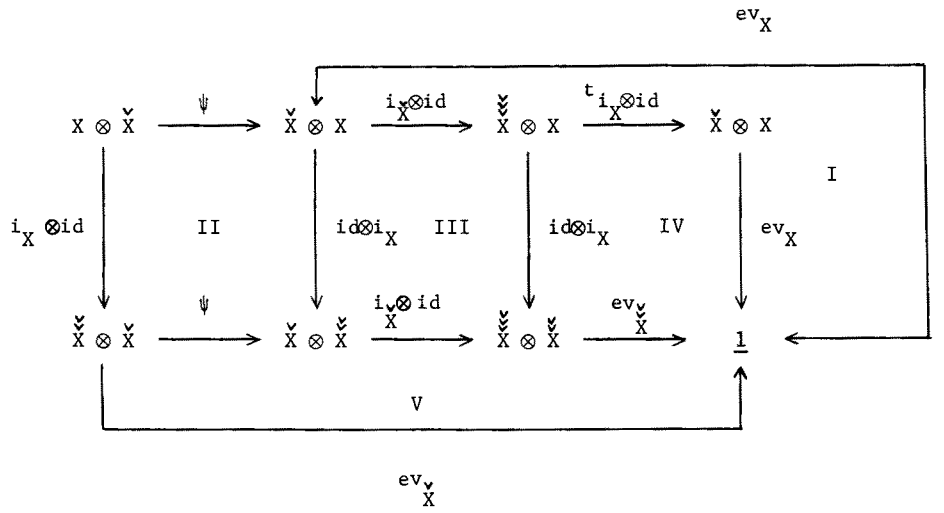
on utilise dans cette définition la propriété universelle qui définit $(\check{X}, ev_X)$.

Prouvons qu'on a la formule

(3.2.3.9)
$$({}^t i_X) \circ i_{\check{X}} = id_{\check{X}} \quad .$$

Cela revient à la commutativité de la région I du diagramme suivant

(3.2.3.10)



dont la commutativité de II résulte de la fonctorialité de Ψ ; celle de III est évidente ; celle de IV résulte de (3.2.3.5) ; celle de V résulte de (3.2.3.8), ainsi que celle du circuit extérieur.

3.2.3.3. Un objet X d'une ⊗-catégorie AU (2.2.1) est dit <u>réflexif</u> si i_X est un isomorphisme.

Supposons que C soit une ⊗-catégorie ACU (2.4.1). Alors, tout objet inversible X est réflexif et on a

$$X \simeq X^{-1}$$

De plus, les notations ${}^t f$ (2.5.4.2 et 3.2.3.1) coïncident.

3.3. Hom et contraintes (suite) : morphismes canoniques.

3.3.0. Dans ce numéro, on suppose que $\underline{C}$ est une $\otimes$-catégorie ACU ; en particulier, la convention 3.2.2.1 s'applique.

3.3.1. On définit, en s'inspirant par exemple de 3.2.1, un morphisme canonique ("composition")

$$\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(Y,Z) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(X,Z) \tag{3.3.1.1}$$

qui est fonctoriel en $X,Y,Z \in \mathrm{ob}\ \underline{C}$. Si $X,Y,Z,T \in \mathrm{ob}\ \underline{C}$, le diagramme suivant

(3.3.1.2)

$$\begin{array}{ccc}
(\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(Y,Z)) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(Z,T) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}(X,Z) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(Z,T) \\
\varphi \big\wr \downarrow & & \\
\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y) \otimes (\underline{\mathrm{Hom}}(Y,Z) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(Z,T)) & & \downarrow \\
\downarrow & & \\
\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(Y,T) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}(X,T)
\end{array}$$

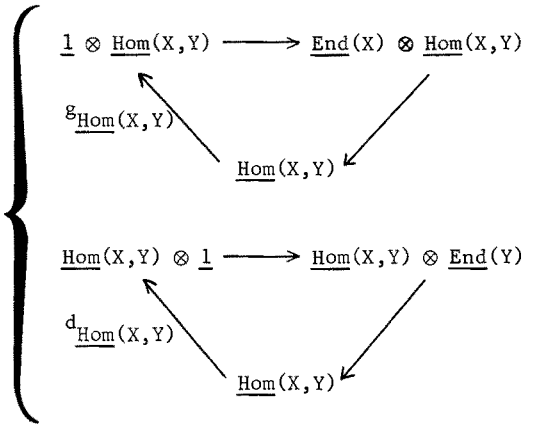
est commutatif ("associativité de la composition").

On définit aussi des morphismes

$$\underline{1} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(X,X) = \underline{\mathrm{End}}(X) \tag{3.3.1.3}$$

qui correspondent par (3.2.3.1) aux identités des objets $X \in \mathrm{ob}\ \underline{C}$. On vérifie encore la commutativité des triangles

(3.3.1.4)



3.3.2. Soient $X,Y,X',Y' \in \text{ob } \underline{C}$. On peut également construire des morphismes

(3.3.2.1) $$\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(X',Y') \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(X \otimes X', Y \otimes X')$$

fonctoriels en X,Y,X',Y' . Une variante de ceci : soient $(X_i)_{i\in I}$ des familles d'objets de $\underline{C}$, indexées par un ensemble fini I . On a alors un morphisme canonique (voir 2.4.2.1 pour les notations)

(3.3.2.2) $$\bigotimes_I \underline{\mathrm{Hom}}(X_i,Y_i) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\bigotimes_I X_i, \bigotimes_I Y_i)$$

fonctoriel en (X_i) , (Y_i) . Dans le cas particulier où les Y_i sont égaux à $\underline{1}$, on a

(3.3.2.3) $$\bigotimes_I \check{X}_i \longrightarrow (\bigotimes_I X_i)^{\check{}} \ .$$

De même, si dans (3.3.2.1) on fait $Y = X' = \underline{1}$, on obtient un morphisme canonique

(3.3.2.4) $$\check{X} \otimes Y \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(X,Y) \ .$$

§ 4. ⊗-FONCTEURS

4.1. Définitions.

4.1.1. Un ⊗-foncteur d'une ⊗-catégorie $\underline{C}$ dans une ⊗-catégorie $\underline{C}'$ est un couple (F,c) d'un foncteur $F : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ et d'un isomorphisme fonctoriel

$$c_{X,Y} : F(X) \otimes F(Y) \longrightarrow F(X \otimes Y) \quad .$$

On dit que (F,c) est un ⊗-foncteur strict, si pour tout X , $Y \in$ ob $\underline{C}$, on a $F(X \otimes Y) = F(X) \otimes F(Y)$ et si de plus $c_{X,Y} = id_{F(X \otimes Y)}$. Si (F,c) , (G,d) sont des ⊗-foncteurs de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$, un ⊗-morphisme de (F,c) dans (G,d) est un morphisme fonctoriel $\lambda : F \longrightarrow G$ rendant commutatif, pour $X,Y \in$ ob $\underline{C}$, le carré

(4.1.1.1)
$$\begin{array}{ccc} F(X) \otimes F(Y) & \xrightarrow{c_{X,Y}} & F(X \otimes Y) \\ \downarrow{\scriptstyle \lambda_X \otimes \lambda_Y} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_{X \otimes Y}} \\ G(X) \otimes G(Y) & \xrightarrow[d_{X,Y}]{} & G(X \otimes Y) \end{array}$$

Les ⊗-morphismes se composent de façon évidente et on obtient ainsi une catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\underline{C},\underline{C}')$. On omettra souvent dans l'écriture d'un ⊗-foncteur (F,c) l'isomorphisme c . L'ensemble $\mathrm{Hom}((F,c),(G,d))$ des ⊗-morphismes de F dans G sera aussi noté $\mathrm{Hom}^{\otimes}(F,G)$. Il est clair comment on définit le ⊗-foncteur opposé, ou symétrique d'un ⊗-foncteur. On obtient ainsi des isomorphismes de catégories

(4.1.1.2)
$$\varphi \longrightarrow \varphi^{o} \quad : \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\underline{C},\underline{C}')^{o} \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{C}^{o},\underline{C}'^{o})$$
$$\varphi \longrightarrow \varphi^{\mathrm{sym}} : \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\underline{C},\underline{C}') \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{C}^{\mathrm{sym}},\underline{C}'^{\mathrm{sym}}) \ .$$

4.1.2. Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$, $\underline{C}''$ des ⊗-catégories, $(F,c) : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$, $(F',c') : \underline{C}' \longrightarrow \underline{C}''$. On définit un ⊗-foncteur $(F'',c'') : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}''$, appelé ⊗-foncteur composé de (F,c) et (F',c') , en posant

$$F'' = F' \circ F$$
$$c'' = (F' * c) \circ (c' * (F \times F)) \ ,$$

c'est-à-dire que pour des objets X , Y de $\underline{C}$, $c''_{X,Y}$ est défini par le triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} F'F(X) \otimes F'F(Y) & \xrightarrow{c'_{FX,FY}} & F'(FX \otimes FY) \\ & \searrow^{c''_{X,Y}} & \downarrow{\scriptstyle F'(c_{X,Y})} \\ & & F'F(X \otimes Y) \end{array} .$$

En outre, si $(G,d) : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$, $(G',d') : \underline{C}' \longrightarrow \underline{C}''$ sont aussi des $\otimes$-foncteurs, $\lambda : F \longrightarrow G$, $\lambda' : F' \longrightarrow G'$ des $\otimes$-morphismes, $\lambda' * \lambda : F'F \longrightarrow G'G$ est un $\otimes$-morphisme. On dispose en somme d'une 2-catégorie $\otimes$-$\underline{\underline{\mathrm{Cat}}}$, ayant comme objets les $\otimes$-catégories, et comme catégories de morphismes les catégories $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\underline{C},\underline{C}')$.

4.1.3. Si $\underline{C}$, $\underline{C}'$ sont des $\otimes$-catégories A-linéaires (0.1.2), un $\otimes$-foncteur $(F,c) : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ est dit A-linéaire s'il en est ainsi du foncteur F . On note $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}_{A}(\underline{C},\underline{C}')$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\underline{C},\underline{C}')$ dont les objets sont les $\otimes$-foncteurs A-linéaires. La 2-catégorie ainsi obtenue est notée $\otimes$-$\underline{\underline{\mathrm{Cat}}}_{A}$.

4.1.4. Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie. Une contrainte de commutativité ψ pour $\underline{C}$ (1.2.1) détermine un $\otimes$-foncteur

$$(\mathrm{id}_{\underline{C}},\psi) : \underline{C}^{\mathrm{sym}} \longrightarrow \underline{C} .$$

La condition (1.2.1.1) se traduit par la formule

$$(\mathrm{id}_{\underline{C}},\psi) \circ (\mathrm{id}_{\underline{C}},\psi)^{\mathrm{sym}} = \mathrm{id}_{(\underline{C},\otimes)} . \tag{4.1.4.1}$$

Réciproquement, un $\otimes$-foncteur $\underline{C}^{\mathrm{sym}} \longrightarrow \underline{C}$ ayant l'identité comme foncteur sousjacent, et vérifiant (4.1.4.1), détermine une contrainte de commutativité pour $\underline{C}$.

4.2. Compatibilités avec des contraintes.

4.2.1. Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$ des $\otimes$-catégories, munies de contraintes d'associativité φ , φ'

(1.1.1). On dit qu'un $\otimes$-foncteur $(F,c) : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ est compatible avec φ , φ' , si pour tout X , Y , $Z \in \mathrm{ob}\ \underline{C}$, le diagramme

(4.2.1.1)

$$\begin{array}{ccccc} FX \otimes (FY \otimes FZ) & \xrightarrow{id \otimes c_{Y,Z}} & FX \otimes F(Y \otimes Z) & \xrightarrow{c_{X,Y\otimes Z}} & F(X \otimes (Y \otimes Z)) \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi'} & & & & \downarrow{\scriptstyle F\varphi} \\ (FX \otimes FY) \otimes FZ & \xrightarrow[c_{X,Y}\otimes id]{} & F(X \otimes Y) \otimes FZ & \xrightarrow[c_{X\otimes Y,Z}]{} & F((X \otimes Y) \otimes Z) \end{array}$$

est commutatif.

On dit encore que F est un $\otimes$-foncteur associatif. La sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\underline{C},\underline{C}')$ dont les objets sont les $\otimes$-foncteurs associatifs est notée $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,A}(\underline{C},\underline{C}')$.

4.2.1.1. On peut remarquer que deux contraintes d'associativité φ , φ' sur $\underline{C}$, sont cohomologues (1.1.3) si et seulement s'il existe un $\otimes$-foncteur $(\underline{C},\varphi) \longrightarrow (\underline{C},\varphi')$ compatible avec ces contraintes et ayant $\mathrm{id}_{\underline{C}}$ comme foncteur sous-jacent.

4.2.1.2. Soient φ , ψ des contraintes d'associativité et commutativité pour $\underline{C}$. Si φ et ψ sont compatibles (2.1.1), le $\otimes$-foncteur $\underline{C}^{sym} \longrightarrow \underline{C}$ construit dans 4.1.4 est compatible avec φ^{sym} , φ . La réciproque est fausse.

4.2.2. Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$ des $\otimes$-catégories, munies de contraintes de commutativité ψ , ψ' . On dit qu'un $\otimes$-foncteur $(F,c) : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ est compatible avec ces contraintes si le diagramme suivant est commutatif

(4.2.2.1)

$$\begin{array}{ccc} FX \otimes FY & \xrightarrow{c_{X,Y}} & F(X \otimes Y) \\ \downarrow{\scriptstyle \psi'_{FX,FY}} & & \downarrow{\scriptstyle F(\psi_{X,Y})} \\ FY \otimes FX & \xrightarrow{c_{Y,X}} & F(Y \otimes X) \end{array}$$

pour tout $X,Y \in \mathrm{ob}\ \underline{C}$. On dit encore que F est un $\otimes$-foncteur commutatif. La sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\underline{C},\underline{C}')$ dont les objets sont les $\otimes$-foncteurs commutatifs est notée $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,C}(\underline{C},\underline{C}')$.

4.2.2.1. On remarquera enfin que deux contraintes de commutativité ψ , ψ' sur $\underline{C}$ sont cohomologues (1.2.2) si et seulement s'il existe un $\otimes$-foncteur $(\underline{C},\psi) \longrightarrow (\underline{C},\psi')$ compatible avec ces contraintes et ayant $id_{\underline{C}}$ comme foncteur sous-jacent.

4.2.3. Si $(\underline{1},g,d)$, $(\underline{1}',g',d')$ sont des unités (1.3.1.1) pour des $\otimes$-catégories $\underline{C}$, $\underline{C}'$, on dira qu'un $\otimes$-foncteur $(F,c) : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ est <u>compatible</u> avec ces unités s'il existe un morphisme $a_F : \underline{1}' \longrightarrow F(\underline{1})$, rendant commutatifs les diagrammes

(4.2.3.1)

$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{F(g_X)} & F(\underline{1} \otimes X) \\ {\scriptstyle g'_{FX}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c_{\underline{1},X}} \\ \underline{1}' \otimes FX & \xrightarrow[a_F \otimes id_{FX}]{} & F(\underline{1}) \otimes FX \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{F(d_X)} & F(X \otimes \underline{1}) \\ {\scriptstyle d'_{FX}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c_{X,\underline{1}}} \\ F(X) \otimes \underline{1}' & \xrightarrow[id_{FX} \otimes a_F]{} & F(X) \otimes F(\underline{1}) \end{array}$$

On dit aussi que F est un $\otimes$-foncteur <u>unifère</u>. On vérifie aisément alors que a_F est unique et est un isomorphisme. On fera attention que (F,c) n'est pas alors nécessairement compatible avec d'autres unités de $\underline{C}$, $\underline{C}'$. Voir par exemple 1.5.3.3, où il faut prendre le $\otimes$-foncteur identique de $\underline{C}$.

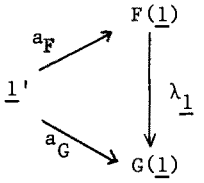
Soient F,G des $\otimes$-foncteurs unifères de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$, définissant donc des isomorphismes

$$a_F : \underline{1}' \longrightarrow F(\underline{1})$$

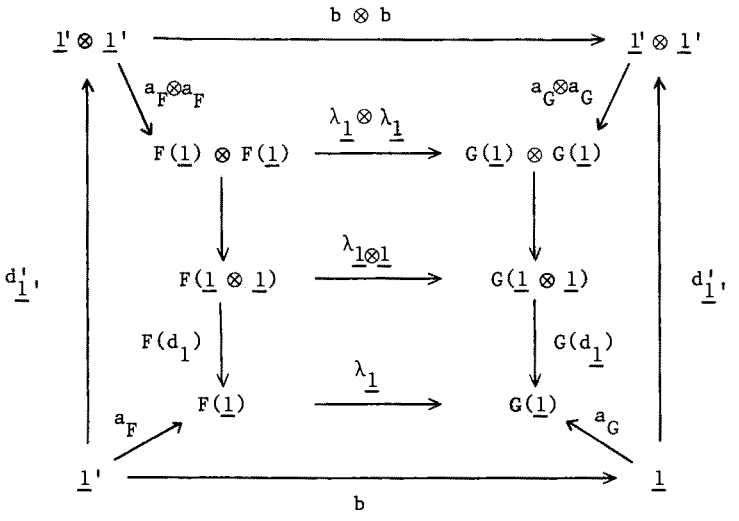
$$a_G : \underline{1}' \longrightarrow G(\underline{1}) \quad .$$

On dit alors qu'un $\otimes$-morphisme $\lambda : F \longrightarrow G$ est <u>unifère</u> si le triangle

(4.2.3.2)



est commutatif. Il revient au même de demander que λ_1 soit un isomorphisme. En effet, si $b = a_G^{-1} \circ \lambda_1 \circ a_F$, le diagramme suivant



est commutatif, comme on le voit en analysant ses six régions intérieures. La commutativité du circuit périphérique donne

$$b^2 = b \quad ,$$

d'où λ_1 est un isomorphisme $\Leftrightarrow$ b est un isomorphisme $\Leftrightarrow b = id_{1'} \Leftrightarrow$ (4.2.3.2) est commutatif.

L'ensemble des $\otimes$-morphismes unifères de F dans G sera noté $\mathrm{Hom}^{\otimes,\underline{1}}(F,G)$. La sous-catégorie de $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\underline{C},\underline{C}')$ ayant comme objets les $\otimes$-foncteurs unifères, comme morphismes les $\otimes$-morphismes unifères, sera notée $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\underline{1}}(\underline{C},\underline{C}')$.

4.2.3.1. Avec les hypothèses de 4.2.3, on obtient des applications

(4.2.3.2) $\qquad \Gamma(X) \longrightarrow \Gamma(F(X)) \quad ,$

naturelles en X , où $\Gamma(X) = \mathrm{Hom}(\underline{1},X)$ (1.3.6).

On a de même un morphisme de monoïdes

$$F : \mathrm{End}(\underline{1}) \longrightarrow \mathrm{End}(\underline{1}') .$$

4.2.3.1. Enfin, si X est un objet de $\underline{C}$, $u \in \mathrm{End}(\underline{1})$, on vérifie aussitôt les formules

$$\text{(4.2.3.3)} \qquad \begin{aligned} F(\rho_X(u)) &= \rho_{F(X)}(Fu) \\ F(\rho'_X(u)) &= \rho'_{F(X)}(Fu) \end{aligned}$$

où ρ , ρ' , ont été définis dans 1.3.3.3.

4.2.4. On a des notions de compatibilité analogues aux précédentes lorsqu'on a affaire à des contraintes mixtes AC , AU , etc. sur les $\otimes$-catégories envisagées. Pour simplifier, bornons-nous au cas ACU. Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$ des $\otimes$-catégories ACU (2.4.1), et (F,c) un $\otimes$-foncteur $\underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$. On dit que F est <u>compatible</u> avec les contraintes ACU , ou encore qu'il est un $\otimes$-<u>foncteur</u> ACU s'il est un $\otimes$-foncteur associatif, commutatif et unifère. On note $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\mathrm{ACU}}(\underline{C},\underline{C}')$ la sous-catégorie de $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\underline{C},\underline{C}')$ ayant comme objets les $\otimes$-foncteurs ACU , comme morphismes les $\otimes$-morphismes unifères.

Si $F : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ est un $\otimes$-foncteur AC , on vérifie facilement que F est ACU (i.e., unifère) si et seulement s'il envoie un objet unité de $\underline{C}$ sur un objet unité de $\underline{C}'$ (voir 1.3.2).

4.2.4.1. Soit $(F,c) : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ un $\otimes$-foncteur ACU . Si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'objets de $\underline{C}$ indexée par un ensemble fini I , c donne lieu à un isomorphisme canonique (voir 2.4.2.1 pour les notations)

$$\text{(4.2.4.1)} \qquad F(\bigotimes_I X_i) \simeq \bigotimes_I F(X_i) .$$

Supposons en particulier que X_i soit donné comme inverse de X_j (2.5.1) , au moyen d'un isomorphisme

$$\bigotimes_{\{i,j\}} X_k \longrightarrow \bigotimes_{\emptyset} X_k \quad .$$

Utilisant (4.2.4.1), on voit que $F(X_i)$ est canoniquement donné comme inverse de $F(X_j)$

$$\bigotimes_{\{i,j\}} F(X_k) \longrightarrow \bigotimes_{\emptyset} F(X_k) \quad .$$

On voit facilement par ailleurs que F respecte la signature (2.5.3) dans le sens que, si X est un objet inversible de $\underline{C}$, alors on a

$$\varepsilon(F(X)) = F(\varepsilon(X)) \quad , \tag{4.2.4.2}$$

où le F du second membre dénote le morphisme de monoïdes $F : End(\underline{1}) \longrightarrow End(\underline{1}')$.

4.2.4.2. On voit ainsi que F induit un morphisme de groupes (voir 2.5.1)

$$Pic(F) : Pic(\underline{C}) \longrightarrow Pic(\underline{C}')$$

tel que le carré

(4.2.4.3)
$$\begin{array}{ccc} Pic(\underline{C}) & \xrightarrow{Pic(F)} & Pic(\underline{C}') \\ \varepsilon \downarrow & & \downarrow \varepsilon \\ End(\underline{1}) & \xrightarrow{F} & End(\underline{1}') \end{array}$$

est commutatif.

4.3. Comportement pour les Hom .

4.3.1. Soient (F,c) un $\otimes$-foncteur d'une $\otimes$-catégorie $\underline{C}$ dans une $\otimes$-catégorie $\underline{C}'$, X , Y des objets de $\underline{C}$, et supposons qu'il existe des objets $\underline{Hom}$ pour X , Y et pour FX , FY . Il existe alors un et un seul morphisme

$$F_{X,Y} : F(\underline{Hom}(X,Y)) \longrightarrow \underline{Hom}(FX,FY) \tag{4.3.1.1}$$

rendant commutatif le carré

(4.3.1.2)
$$\begin{array}{ccc} F(\underline{Hom}(X,Y)) \otimes FX & \xrightarrow{F_{X,Y}\otimes id} & \underline{Hom}(FX,FY) \otimes FX \\ \downarrow{\scriptstyle c} & & \downarrow{\scriptstyle ev_{FX,FY}} \\ F(\underline{Hom}(X,Y) \otimes X) & \xrightarrow[F(ev_{X,Y})]{} & FY \end{array} .$$

Si les $\underline{Hom}$ existent dans $\underline{C}$ et $\underline{C}'$, les morphismes (4.3.1.1) sont naturels en X, Y. Des remarques semblables sont valides pour $\underline{Moh}$.

Supposons que les $\underline{Hom}$ existent dans $\underline{C}$ et dans $\underline{C}'$; on dit que F est compatible avec les $\underline{Hom}$ si pour tout $X,Y \in \text{ob } \underline{C}$, le morphisme (4.3.1.1) est un isomorphisme.

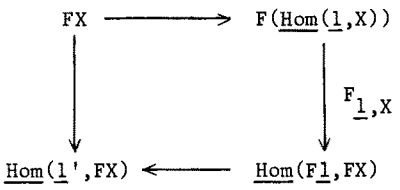
4.3.2. Avec les notations précédentes, supposons $\underline{C}$, $\underline{C}'$ munies de contraintes d'associativité φ, φ', et que F soit un $\otimes$-foncteur associatif. On a alors un diagramme commutatif :

(4.3.2.1)
$$\begin{array}{ccc} F(\underline{Hom}(Z,\underline{Hom}(X,Y))) & \longrightarrow & F(\underline{Hom}(Z \otimes X,Y)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{Hom}(FZ,F(\underline{Hom}(X,Y))) & & \underline{Hom}(F(Z \otimes X),FY) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{Hom}(FZ,\underline{Hom}(FX,FY)) & \longrightarrow & \underline{Hom}(FZ \otimes FX,FY) \end{array} ,$$

où les flèches horizontales sont les flèches (3.2.1.1), les flèches verticales étant déduites de (4.3.1.1).

De même, si $(\underline{1},g,d)$, $(\underline{1}',g',d')$ sont des unités pour $\underline{C}$, $\underline{C}'$, avec lesquelles F est compatible, on a des diagrammes commutatifs

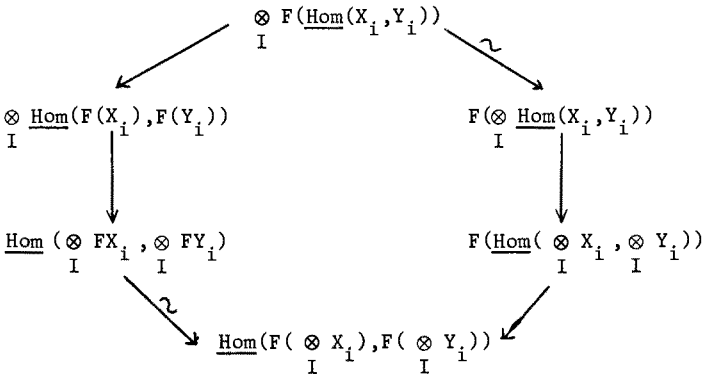
(4.3.2.2)



où on utilise les morphismes (3.2.3.3) ainsi que l'isomorphisme $a_F : \underline{1}' \longrightarrow F(\underline{1})$ de 4.2.3.

4.3.3. Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$ des $\otimes$-catégories ACU , (F,c) un $\otimes$-foncteur ACU . Si $(X_i)_{i\in I}$, $(Y_i)_{i\in I}$ sont des familles finies d'objets de $\underline{C}$, on a un diagramme commutatif

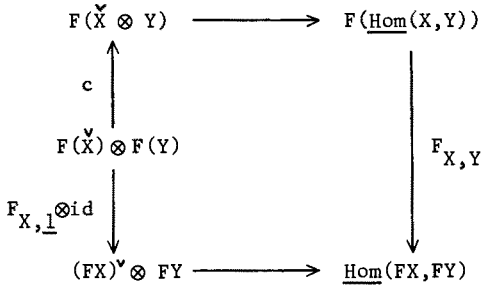
(4.3.3.1)



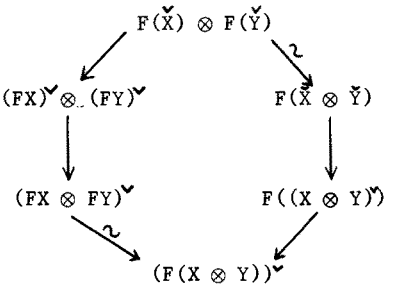
où les morphismes qui apparaissent ont été définis en (3.3.2.2), (4.2.4.1) et (4.3.1.1).

En particulier, si $X,Y \in \mathrm{ob}\ \underline{C}$, on a les diagrammes commutatifs

(4.3.3.2)



4.3.3.3.



4.4. ⊗-équivalences ; transport de structure.

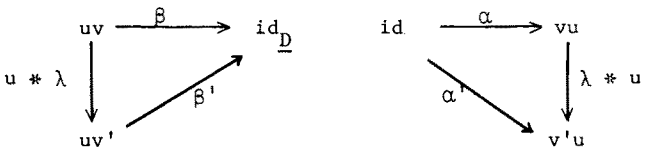
4.4.1. Un quadruple de ⊗-équivalence d'une ⊗-catégorie $\underline{C}$ dans une ⊗-catégorie $\underline{D}$ $(\bar{u},\bar{v},\alpha,\beta)$, est constitué de ⊗-foncteurs $\bar{u} = (u,c) : \underline{C} \longrightarrow \underline{D}$, $\bar{v} = (v,d) : \underline{D} \longrightarrow \underline{C}$, et de ⊗-isomorphismes $\alpha : id_{\underline{C}} \xrightarrow{\sim} \bar{v}\bar{u}$, $\beta : \bar{u}\bar{v} \xrightarrow{\sim} id_{\underline{D}}$, vérifiant les relations habituelles

$$(v * \beta)(\alpha * v) = id_v$$
$$(\beta * u)(u * \alpha) = id_u \quad . \tag{4.4.1.1}$$

On dit qu'un ⊗-foncteur $\bar{u} : \underline{C} \longrightarrow \underline{D}$ définit une ⊗-équivalence (ou plus simplement, est une ⊗-équivalence), s'il peut être mis dans un quadruple de ⊗-équivalence $(\bar{u},\bar{v},\alpha,\beta)$.

Les foncteurs $\bar{u}$ et $\bar{v}$ se déterminent mutuellement à isomorphisme unique près : si $(\bar{u},\bar{v},\alpha,\beta)$, $(\bar{u},\bar{v}',\alpha',\beta')$ sont des quadruples d'équivalence, il existe un et un seul ⊗-isomorphisme $\lambda : v \longrightarrow v'$ rendant commutatifs les triangles

(4.4.1.2)



4.4.2. Proposition. Soit $\bar{u} = (u,c) : \underline{C} \longrightarrow \underline{D}$ un ⊗-foncteur. Alors $\bar{u}$ est une

⊗-équivalence si et seulement si u est une équivalence de catégories.

4.4.2.1. Preuve. De façon plus précise, soit (u,v,α,β) un quadruple d'équivalence (au sens usuel) contenant u. Alors v est sous-jacent à un et un seul ⊗-foncteur $\bar{v} = (v,d)$ tel que $(\bar{u},\bar{v},\alpha,\beta)$ soit un quadruple de ⊗-équivalence. En effet, $\beta : \bar{u}\,\bar{v} \longrightarrow id_{\underline{D}}$ devant être un ⊗-morphisme, on voit que si $X',Y' \in ob\ \underline{D}$, $d_{X',Y'} : v(X') \otimes v(Y') \longrightarrow v(X' \otimes Y')$ est la seule flèche rendant commutatif le diagramme

(4.4.2.1)
$$\begin{array}{ccc} u(v(X') \otimes v(Y')) & \xrightarrow{u(d_{X',Y'})} & uv(X' \otimes Y') \\ \uparrow{\scriptstyle c_{vX',vY'}} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_{X' \otimes Y'}} \\ uv(X') \otimes uv(Y') & \xrightarrow[\beta_{X'} \otimes \beta_{Y'}]{} & X' \otimes Y' \end{array}$$

Il est clair que $d_{X',Y'}$ est naturel en X',Y', et (4.4.2.1) ci-dessus montre que β est un ⊗-morphisme. Il reste à prouver que α est un ⊗-morphisme : cela résulte de

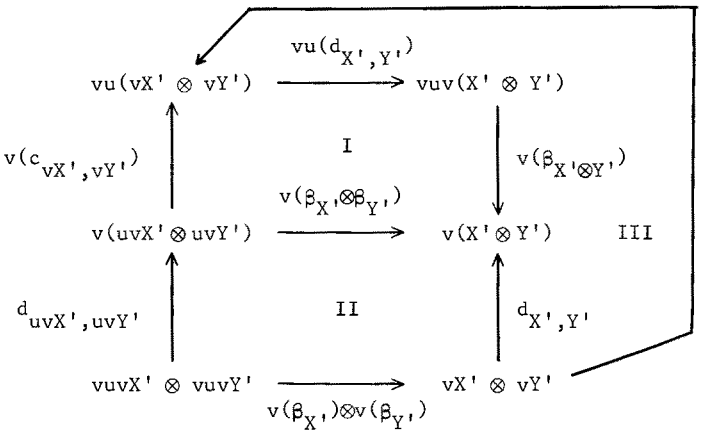
4.4.2.2. Lemme. Soient $u : \underline{C} \longrightarrow \underline{D}$, $\bar{v} : \underline{D} \longrightarrow \underline{C}$ des ⊗-foncteurs, $\alpha : id_{\underline{C}} \longrightarrow vu$ $\beta : uv \longrightarrow id_{\underline{D}}$ des isomorphismes vérifiant (4.4.1.1). Alors α est un ⊗-isomorphisme si et seulement si β est un ⊗-isomorphisme.

L'énoncé étant évidemment symétrique, il suffit de prouver que si α est un ⊗-morphisme, il en est de même de β, en d'autres termes, que pour $X',Y' \in ob\ \underline{D}$, le diagramme

(4.4.2.2)
$$\begin{array}{ccccc} uvX' \otimes uv\,Y' & \xrightarrow{c_{vX',vY'}} & u(vX' \otimes vY') & \xrightarrow{u(d_{X',Y'})} & uv(X' \otimes Y') \\ {\scriptstyle \beta_{X'} \otimes \beta_{Y'}}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \beta_{X' \otimes Y'}} \\ X' \otimes Y' & & = & & X' \otimes Y' \end{array}$$

est commutatif. Cela résulte de

(4.4.2.3)



où la région I est l'image par v de (4.4.2.2). La commutativité de II résulte de la naturalité de d ; celle de III , de la naturalité de α ainsi que de l'égalité $v(\beta_{X'\otimes Y'}) = \alpha^{-1}_{v(X'\otimes Y')}$, qui découle de (4.4.1.1) ; enfin, la commutativité du circuit extérieur découle de ce que α est un $\otimes$-morphisme, et de l'égalité $v(\beta_{X'}) \otimes v(\beta_{Y'}) = \alpha^{-1}_{vX'} \otimes \alpha^{-1}_{vY'}$.

4.4.3. Soit $F = (F,c) : \underline{C}' \longrightarrow \underline{C}$ un $\otimes$-foncteur avec F pleinement fidèle, et soit φ (resp. ψ) une contrainte d'associativité (resp. de commutativité) sur $\underline{C}$. Le diagramme (4.2.1.1) (resp. 4.2.2.1) montre qu'il existe sur $\underline{C}'$ une et une seule contrainte d'associativité (resp. de commutativité) compatible avec $\bar{F}$ et φ (resp. ψ). On appellera cette contrainte <u>induite par</u> $\bar{F}$, et on la notera $\bar{F}^*(\psi)$ (resp. $\bar{F}^*(\psi)$). On a une propriété évidente de transitivité pour des $\otimes$-foncteurs pleinement fidèles $\underline{C}'' \xrightarrow{\bar{F}'} \underline{C}' \xrightarrow{\bar{F}} \underline{C}$.

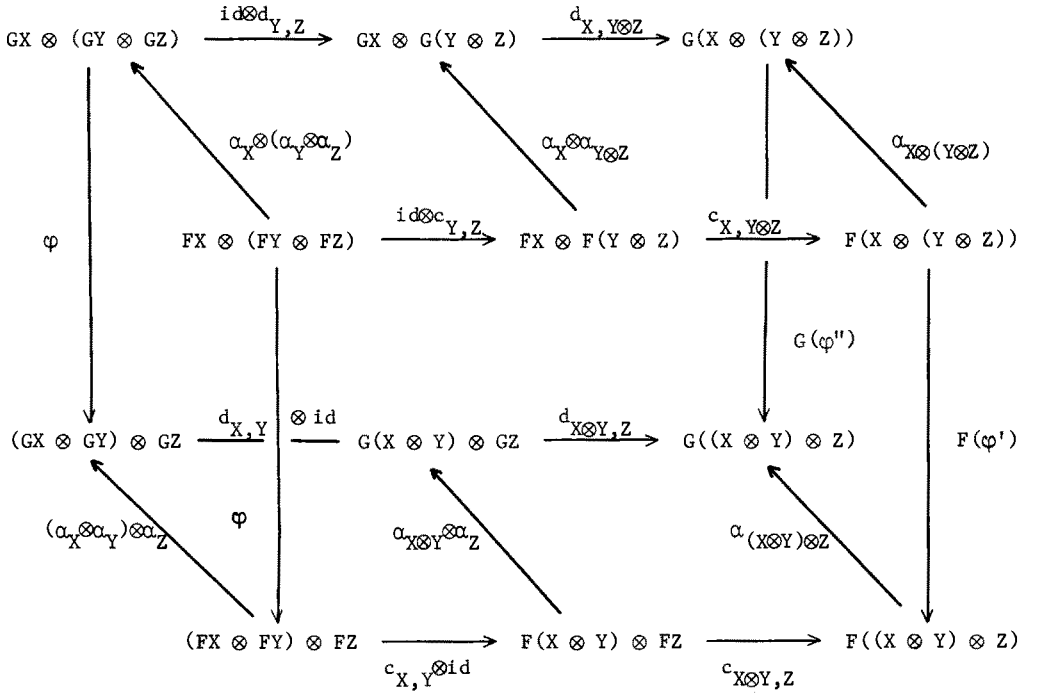
4.4.3.1. <u>Lemme</u>. <u>Soit</u> $\bar{F} : \underline{C}' \longrightarrow \underline{C}$ <u>un $\otimes$-foncteur pleinement fidèle</u>, φ (resp. ψ) <u>une contrainte d'associativité</u> (resp. de commutativité) <u>pour</u> $\underline{C}$. <u>Alors</u>, $\bar{F}^*(\varphi)$ (resp. $\bar{F}^*(\psi)$) <u>ne dépend que de la classe de $\otimes$-isomorphisme de</u> $\bar{F}$.

On fera la démonstration pour l'associativité, celle pour la commutativité étant analogue. Soit $\alpha : (F,c) \longrightarrow (G,d)$ un $\otimes$-isomorphisme et posons

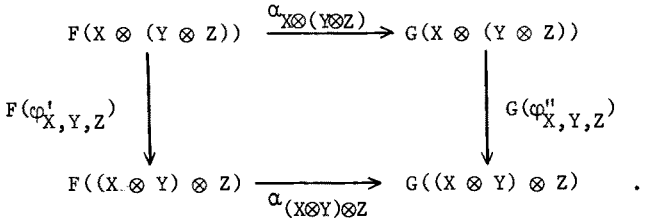
$$\varphi' = \bar{F}^*(\varphi)$$

$$\varphi'' = \bar{G}^*(\varphi) \quad .$$

Si $X,Y,Z \in \text{ob } \underline{C}'$, on a le diagramme



d'où la commutativité de



d'où par naturalité de α

$$\varphi' = \varphi'' \quad .$$

4.4.3.2. Proposition. Soit $\bar{u} : \underline{C} \longrightarrow \underline{D}$ une $\otimes$-équivalence. L'application

$$\bar{u}^* : \mathrm{Assoc}(\underline{D}) \longrightarrow \mathrm{Assoc}(\underline{C}) \quad (\text{resp. } \mathrm{Comm}(\underline{D}) \longrightarrow \mathrm{Comm}(\underline{C}))$$

est une bijection (voir 1.2.2, 1.1.3 pour les notations). Si $(\bar{u},\bar{v},\alpha,\beta)$ est un quadruple d'équivalence, $\bar{v}^*$ est une inverse pour $\bar{u}^*$.

4.4.4. On peut énoncer et démontrer des propositions analogues relatives au comportement d'une $\otimes$-équivalence pour des contraintes d'unité. Contentons-nous de dire que si $u : \underline{C} \longrightarrow \underline{D}$ est une $\otimes$-équivalence, u induit une équivalence de catégories de la catégorie des objets unité (1.3.2) de $\underline{C}$ dans celle des objets unité de $\underline{D}$.

4.4.5. Soit $u : \underline{C} \longrightarrow \underline{D}$ un foncteur, (u,v,α,β) un quadruple d'équivalence pour u. Alors si on a une loi $\otimes$ sur $\underline{C}$, il existe une loi $\otimes$ sur $\underline{D}$ telle que u, v soient sous-jacents à des $\otimes$-foncteurs $\bar{u}$, $\bar{v}$, et que α, β soient des $\otimes$-morphismes. On dira qu'on obtient cette loi sur $\underline{D}$ par transport au moyen de (u,v,α,β). Si $X',Y' \in \mathrm{ob}\,\underline{D}$, on posera

$$X' \otimes Y' = u(vX' \otimes vY') . \tag{4.4.5.1}$$

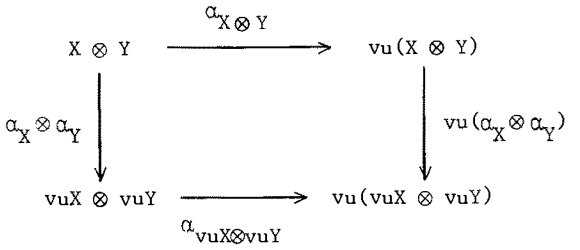
On prolonge u, v en des $\otimes$-foncteurs $\bar{u} = (u,\alpha)$, $\bar{v} = (v,d)$, en posant pour X, $Y \in \mathrm{ob}\,\underline{C}$

$$\begin{aligned} c_{X,Y} &= u(\alpha_X^{-1} \otimes \alpha_Y^{-1}) \\ d_{X',Y'} &= \alpha_{vX' \otimes vY'} \end{aligned} \tag{4.4.5.2}$$

D'après 4.4.2.2, il suffit de vérifier que α est un $\otimes$-morphisme ; c'est-à-dire que pour $X,Y \in \mathrm{ob}\,\underline{C}$ il faut démontrer la commutativité de

$$\begin{array}{ccccc} X \otimes Y & & = & & X \otimes Y \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_X \otimes \alpha_Y} & & & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{X \otimes Y}} \\ vuX \otimes vuY & \xrightarrow[d_{uX,uY}]{} & v(uX \otimes uY) & \xrightarrow{v(c_{X,Y})} & vu(X \otimes Y) \end{array} ,$$

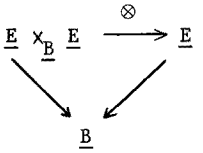
ou encore, en explicitant grâce à (4.4.5.1) et (4.4.5.2)



Celle-ci est conséquence de la naturalité de α .

4.5. $\otimes$-catégories fibrées.

4.5.1. Soit $\underline{E} \xrightarrow{p} \underline{B}$ une catégorie au-dessus de $\underline{B}$. Une loi $\otimes$ pour $\underline{E}$ relativement à $\underline{B}$ (en bref, pour $\underline{E}/\underline{B}$) est un $\underline{B}$-foncteur $\underline{E} \times_{\underline{B}} \underline{E} \longrightarrow \underline{E}$, c'est-à-dire un foncteur $\otimes$ rendant commutatif le triangle



Rappelons que le produit fibré $\underline{E} \times_{\underline{B}} \underline{E}$ est la sous-catégorie de $\underline{E} \times \underline{E}$ ayant comme flèches les couples $(f,g) \in F\ell\underline{E} \times F\ell\underline{E}$ avec $p(f) = p(g)$.

4.5.1.1. On étend de façon évidente la notion de contrainte d'associativité, commutativité, unité pour une $\underline{B}$-$\otimes$-catégorie (c'est-à-dire un triple $(\underline{E},p,\otimes)$) , de même que les compatibilités entre ces contraintes. Ainsi par exemple, une unité pour une $\otimes$-catégorie $\underline{E}/\underline{B}$ est un triple $(\underline{1},g,d)$, où $\underline{1}$ est une section de $\underline{E}/\underline{B}$ (c'est-à dire un foncteur $\underline{B} \xrightarrow{\underline{1}} \underline{E}$ avec $p\underline{1} = id_{\underline{B}}$) , et g , d sont des isomorphismes fonctoriels

$$g_X : X \longrightarrow \underline{1}(p(X)) \otimes X$$

(4.5.1.1)

$$d_X : X \longrightarrow X \otimes \underline{1}(p(X))$$

vérifiant pour $b \in \text{ob } \underline{B}$

(4.5.1.2) $$g_{\underline{1}(b)} = d_{\underline{1}(b)}$$

4.5.2. A une $\underline{B}$-$\otimes$-catégorie $\underline{E}/\underline{B}$ on peut associer des $\otimes$-catégories de diverses façons.

4.5.2.1. Soit $b \in \text{ob } \underline{B}$. Alors la fibre $\underline{E}_b$ est la sous-catégorie pleine de $\underline{E}$ ayant comme flèches celles de $\underline{E}$ se projettant sur id_b . Il est clair que $\underline{E}_b$ hérite une loi $\otimes$ de $\underline{E}$. De même, une contrainte sur $\underline{E}/\underline{B}$ induit une contrainte analogue sur $\underline{E}_b$, et les compatibilités entre contraintes sont préservées par le passage aux fibres.

4.5.2.2. Ce qui précède est un cas particulier d'une construction plus générale, bien qu'aussi évidente : si $\underline{B}' \longrightarrow \underline{B}$ est un foncteur, et $\underline{E}$ une $\underline{B}$-$\otimes$-catégorie, le produit fibré $\underline{E}' = \underline{E} \times_{\underline{B}} B'$ est de façon naturelle une $\underline{B}'$-$\otimes$-catégorie. On a des propriétés évidentes de transitivité, et des remarques sur les contraintes comme dans 4.5.2.1. Si $b' \in \text{ob } \underline{B}'$ a b comme image dans $\underline{B}$, on a un isomorphisme de $\otimes$-catégories

$$\underline{E}'_{b'} \simeq \underline{E}_b \quad .$$

4.5.2.3. Si $\underline{B}' \longrightarrow \underline{B}$ est un foncteur et $\underline{E}/\underline{B}$ une B-$\otimes$-catégorie, la catégorie $\underline{\text{Hom}}_{\underline{B}}(\underline{B}',\underline{E})$ est canoniquement une $\otimes$-catégorie. Si u, v sont des $\underline{B}$-foncteurs $\underline{B}' \longrightarrow \underline{E}$, et $b' \in \text{ob } \underline{B}'$, on pose

$$u \otimes v(b') = u(b') \otimes v(b') \quad .$$

En particulier on notera

$$\underline{\Gamma}(\underline{E}/\underline{B}) = \underline{\text{Hom}}_{\underline{B}}(\underline{B},\underline{E}) \quad .$$

On a un isomorphisme de $\otimes$-catégories

$$\underline{\text{Hom}}_{\underline{B}}(\underline{B}',\underline{E}) \simeq \underline{\Gamma}(\underline{E} \times_{\underline{B}} \underline{B}') \quad .$$

Des contraintes pour la loi $\otimes$ de $\underline{E}/\underline{B}$ donnent lieu à des contraintes analogues pour les $\otimes$-catégories $\underline{\text{Hom}}_{\underline{B}}(\underline{B}',\underline{E})$ et les compatibilités entre ces contraintes sont préservées.

4.5.3. On définit les $\underline{B}$-$\otimes$-foncteurs entre des $\underline{B}$-$\otimes$-catégories de façon évidente, ainsi que les diverses compatibilités avec des contraintes. Ainsi, on parlera par exemple de $\underline{B}$-$\otimes$-foncteurs ACU entre des $\underline{B}$-$\otimes$-catégories ACU (4.2.4).

Si $F, G : \underline{E} \longrightarrow \underline{E}'$ sont des $\underline{B}$-$\otimes$-foncteurs, un $\underline{B}$-$\otimes$-morphisme $F \longrightarrow G$ est un $\underline{B}$-morphisme $F \longrightarrow G$ induisant dans les fibres des $\otimes$-morphismes. Si F, G sont unifères (4.2.3), le $\underline{B}$-$\otimes$-morphisme est unifère s'il en est ainsi des $\otimes$-morphismes induits dans les fibres.

4.5.4. Soit $\underline{O}_{\underline{B}} : \underline{B}^{o} \longrightarrow \underline{Ann}$ un foncteur en anneaux (commutatifs unifères). Une $\underline{B}$-catégorie $\underline{O}_{\underline{B}}$-linéaire (ou encore $\underline{B}$-linéaire) est une $\underline{B}$-catégorie $\underline{E} \xrightarrow{p} \underline{B}$ munie de la structure supplémentaire suivante :

a) si $x \in \mathrm{ob}\, \underline{E}_b$, $y \in \mathrm{ob}\, \underline{E}_{b'}$, $f : b \longrightarrow b'$, l'ensemble

$$\mathrm{Hom}_f(x,y) = \{u : x \longrightarrow y \;/\; p(u) = f\}$$

est muni d'une loi de groupe abélien, fonctorielle en x, y.

b) Si $b \in \mathrm{ob}\, \underline{B}$, $\underline{E}_b$ est munie d'une structure de catégorie $\underline{O}_{\underline{B}}(b)$-linéaire, telle que, avec les notations de a), si $a' \in \underline{O}_{\underline{B}}(b')$, on a, si $u \in \mathrm{Hom}_f(x,y)$

$$a' . u = u . [\underline{O}_{\underline{B}}(f)(a')] \quad . \tag{4.5.4.1}$$

On définit de façon évidente la notion de B-foncteur $\underline{O}_{\underline{B}}$-linéaire (ou encore $\underline{B}$-linéaire) entre des $\underline{B}$-catégories $\underline{B}$-linéaires.

Une $\underline{B}$-$\otimes$-catégorie $\underline{B}$-linéaire est une $\underline{B}$-$\otimes$-catégorie $\underline{E}$ munie d'une structure $\underline{B}$-linéaire, telle que le B-foncteur $\otimes : \underline{E} \times_{\underline{B}} \underline{E} \longrightarrow \underline{E}$ soit $\underline{B}$-bilinéaire.

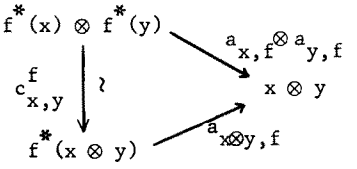
4.5.5. Une $\underline{B}$-$\otimes$-catégorie fibrée est une $\underline{B}$-$\otimes$-catégorie $\underline{E}/\underline{B}$ qui est fibrée au-dessus de $\underline{B}$ (SGA 1,IV) et telle que le $\underline{B}$-foncteur $\otimes : \underline{E} \times_{\underline{B}} \underline{E} \longrightarrow \underline{E}$ soit cartésien (loc.cit.) Les définitions de diverses contraintes pour une $\underline{B}$-$\otimes$-catégorie fibrée restent inchangées, avec la seule restriction que dans la définition d'une contrainte d'unité donnée dans 4.5.1.1 on exigera que la section $\underline{1}$ de $\underline{E}/\underline{B}$ soit cartésienne.

4.5.5.1. Soit $\underline{E}/\underline{B}$ une $\underline{B}$-$\otimes$-catégorie fibrée. Si $f : b' \longrightarrow b$ est un morphisme dans $\underline{B}$, choisissons un foncteur image inverse par f, $f^* : \underline{E}_b \longrightarrow \underline{E}_{b'}$; ceci implique également le choix, pour chaque $x \in \mathrm{ob}\ \underline{E}_b$, d'un morphisme cartésien

$$a_{x,f} : f^*x \longrightarrow x \quad .$$

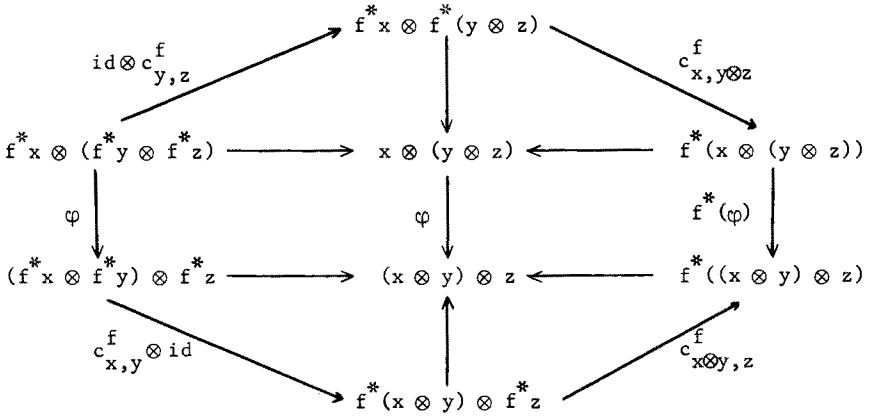
Ceci dit, le foncteur f^* est sous-jacent à un $\otimes$-foncteur $(f^*, c^f) : \underline{E}_b \longrightarrow \underline{E}_{b'}$, où c^f est uniquement déterminé par la commutativité des triangles

(4.5.5.1)



où $x, y \in \mathrm{ob}\ \underline{E}_b$. L'existence et l'unicité de $c^f_{x,y}$ ainsi que le fait d'être un isomorphisme, proviennent de ce que $\otimes$ est un foncteur cartésien.

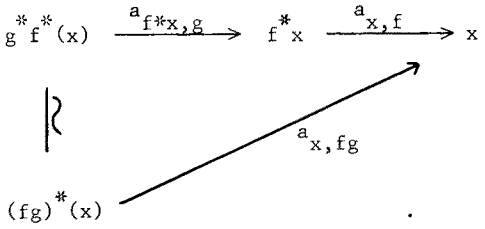
Si $\underline{E}/\underline{B}$ est munie d'une contrainte d'associativité (resp. commutativité, unité), le $\otimes$-foncteur $(f^*, c^f) : \underline{E}_b \longrightarrow \underline{E}_{b'}$ est compatible avec les contraintes induites (4.5.2.1). La preuve de cette assertion pour l'associativité par exemple, est donnéepar le diagramme



,

dont la commutativité résulte de la naturalité de l'associativité φ, et de la définition de c^f.

4.5.5.2. Si $g : b'' \longrightarrow b'$ est un autre morphisme dans $\underline{B}$, $g^* : \underline{E}_{b'} \longrightarrow \underline{E}_{b''}$ un foncteur image inverse pour g, $(fg)^* : \underline{E}_b \longrightarrow \underline{E}_{b''}$ un foncteur image inverse pour fg, on a un isomorphisme fonctoriel $(fg)^* \longrightarrow g^*f^*$, unique à rendre commutatifs les diagrammes



On vérifie aussitôt que c'est un $\otimes$-isomorphisme $((fg)^*, c^{fg}) \simeq (g^*, c^g).(f^*, c^f)$.

4.5.5.3. Supposons que les Hom existent dans les catégories fibre $\underline{E}_b$ (4.1.1). On dit que les Hom sont cartésiens dans $\underline{E}/\underline{B}$ si les foncteurs image inverse sont compatibles avec les Hom, au sens de 4.3.1.

§ 5. $\otimes$-CATEGORIES RIGIDES

5.1. $\otimes$-catégories rigides.

5.1.1. Une $\otimes$-catégorie ACU $\underline{C}$ est dite rigide si elle possède des objets Hom (3.1.1), si les morphismes canoniques (3.3.2.1)

$$\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(X',Y') \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(X \otimes X', Y \otimes Y') \tag{5.1.1.1}$$

sont des isomorphismes $(X,X',Y,Y' \in \mathrm{ob}\ \underline{C})$, et si tous ses objets sont réflexifs (3.2.3.3), i.e. le morphisme canonique

$$i_X : X \longrightarrow \overset{\vee\vee}{X} \tag{5.1.1.2}$$

est un isomorphisme $(X \in \mathrm{ob}\ \underline{C})$.

On a en particulier des isomorphismes canoniques

(5.1.1.3)
$$\begin{cases} \underline{\mathrm{Hom}}(X,Y) \simeq \check{X} \otimes Y \\ (\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y))^{\check{}} \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\check{Y},\check{X}) \end{cases}$$

5.1.2. De (5.1.1.3) on tire pour tout objet X de $\underline{C}$ un morphisme canonique

(5.1.2.1)
$$\tau_X : \underline{1} \longrightarrow X \otimes \check{X} \ ,$$

qui correspond au morphisme identique de X, par la bijection (3.2.3.1)

$$\mathrm{Hom}(X,Y) \simeq \mathrm{Hom}(\underline{1},\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)) \ .$$

Si Y est un autre objet de $\underline{C}$, on notera $\tau_{X,Y}$ le morphisme $\mathrm{id}_Y \otimes \tau_X$

(5.1.2.2)
$$\tau_{X,Y} : Y \longrightarrow Y \otimes X \otimes \check{X}$$

5.1.2.1. On vérifie aisément qu'on a un triangle commutatif

(5.1.2.3)
$$\begin{array}{ccc} \check{X} & \xrightarrow{\mathrm{id}_{\check{X}} \otimes \tau_X} & \check{X} \otimes X \otimes \check{X} \\ & \searrow^{\mathrm{id}_{\check{X}}} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_X \otimes \mathrm{id}_{\check{X}}} \\ & & \check{X} \end{array} \ ,$$

i.e.

(5.1.2.4)
$$(\mathrm{ev}_X \otimes \mathrm{id}_{\check{X}}) \circ \tau_{X,\check{X}} = \mathrm{id}_{\check{X}} \ .$$

5.1.2.2. La formule précédente permet de calculer l'application inverse de la bijection

$$\alpha : \mathrm{Hom}(Y,\check{X}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(Y \otimes X,\underline{1})$$

$$f \longmapsto \mathrm{ev}_X \circ (f \otimes \mathrm{id}_X) \ .$$

C'est l'application

$$\beta : \mathrm{Hom}(Y \otimes X,\underline{1}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Y,\check{X})$$

qui à $\mu : Y \otimes X \longrightarrow \underline{1}$ associe

$$\beta(\mu) = (\mu \otimes \mathrm{id}_{\check{X}}) \circ \tau_{X,Y} \ ;$$

il suffit de vérifier qu'on a pour tout $Y \in \mathrm{ob}\ \underline{C}$, tout $f : Y \longrightarrow \check{X}$, $\beta\alpha(f) = f$, ou encore que cette formule est valide pour $Y = \check{X}$, $f = \mathrm{id}_{\check{X}}$, auquel cas c'est (5.1.2.3).

5.1.3. Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie rigide ; si X , $Y \in \mathrm{ob}\,\underline{C}$, on a par (5.1.1.1) un isomorphisme canonique

$$\check{X} \otimes \check{Y} \xrightarrow{\sim} (X \otimes Y)^{\check{}} \quad , \tag{5.1.3.1}$$

qui est fonctoriel en X , Y . Il peut s'interpréter comme définissant un $\otimes$-foncteur $X \longmapsto \check{X}$

$$\underline{C}^{o} \longrightarrow \underline{C} \quad , \tag{5.1.3.2}$$

où $\underline{C}^{o}$ dénote la $\otimes$-catégorie ACU opposée à $\underline{C}$ (0.1.4, 1.4). On vérifie aussitôt que ce $\otimes$-foncteur est ACU , et que c'est une $\otimes$-équivalence (4.5.1), comme il résulte des isomorphismes $i_X : X \xrightarrow{\sim} \check{\check{X}}$.

5.1.4. Soit $X \in \mathrm{ob}\,\underline{C}$, où $\underline{C}$ est une $\otimes$-catégorie rigide. Grâce à l'isomorphisme $\check{X} \otimes X \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(X,X)$, le morphisme ev_X donne lieu à un morphisme

$$\underline{\mathrm{Hom}}(X,X) \longrightarrow \underline{1} \quad ,$$

d'où une application,

$$\mathrm{Tr}_X : \mathrm{End}(X) \longrightarrow \mathrm{End}(\underline{1}) \quad . \tag{5.1.4.1}$$

Si $f \in \mathrm{End}(X)$, l'endomorphisme de $\underline{1}$, $\mathrm{Tr}_X(f)$ sera appelé la <u>trace</u> de f . Par définition, le <u>rang</u> de X , $\mathrm{rg}(X)$, est la trace de id_X

$$\mathrm{rg}(X) = \mathrm{Tr}_X(\mathrm{id}_X) \tag{5.1.4.2}$$

Soient X , X' des objets de $\underline{C}$, $f \in \mathrm{End}(X)$, $f' \in \mathrm{End}(X')$, $u \in \mathrm{End}(\underline{1})$. On vérifie aussitôt

$$\begin{cases} \mathrm{Tr}_{X\otimes X'}(f \otimes f') = \mathrm{Tr}_X(f)\ \mathrm{Tr}_{X'}(f') \\ \mathrm{Tr}_{\underline{1}}(u) = u \end{cases} \tag{5.1.4.3}$$

En particulier,

$$\begin{cases} \mathrm{rg}(X \otimes X') = \mathrm{rg}(X)\ \mathrm{rg}(X') \\ \mathrm{rg}(\underline{1}) = \mathrm{id}_{\underline{1}} \end{cases} \tag{5.1.4.4}$$

5.2. $\otimes$-foncteurs rigides.

5.2.1. Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$ des $\otimes$-catégories rigides. On appelle $\otimes$-foncteur rigide de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$ un $\otimes$-foncteur ACU $\underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$.

5.2.2. Proposition. Si $F : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ est un $\otimes$-foncteur rigide, il est compatible avec les objets Hom (4.3.1), i.e., les morphismes canoniques (4.3.1.1)

$$F_{X,Y} : F(\underline{Hom}(X,Y)) \longrightarrow \underline{Hom}(FX,FY)$$

sont des isomorphismes.

5.2.2.1. Preuve. Il suffit évidemment de prouver que si $X \in ob\ \underline{C}$, le morphisme canonique

$$F_X : F(\check{X}) \longrightarrow (FX)^{\check{}}$$

est un isomorphisme, et même de prouver que F_X possède un inverse à droite : en effet, on vérifie facilement que le transposé de F_X s'identifie à $F_{\check{X}}$, et si u est inverse à droite de F_X

$$u \circ F_X = id ,$$

${}^t u$ est un inverse à gauche de $F_{\check{X}}$

$$F_{\check{X}} \circ {}^t u = id ;$$

il suffit de remarquer que tout objet de $\underline{C}$ est de la forme $\check{X}$.

Soit $ev : \check{X} \otimes X \longrightarrow \underline{1}$ le morphisme d'évaluation ev_X et notons

$$ev' : F(\check{X}) \otimes F(X) \longrightarrow \underline{1}'$$

le morphisme qu'on obtient par application du $\otimes$-foncteur F . De même, on a un morphisme

$$\tau' : \underline{1}' \longrightarrow F(X) \otimes F(\check{X})$$

obtenu par application de F à $\tau_X : \underline{1} \longrightarrow X \otimes \check{X}$. Si $Y \in ob\ \underline{C}'$, on notera τ'_Y le morphisme $id_Y \otimes \tau'$

$$\tau'_Y : Y \longrightarrow Y \otimes F(X) \otimes F(\check{X}) \quad .$$

Si on applique F à la formule (5.1.2.4), on obtient

$$(ev' \otimes id_{F(\check{X})}) \circ \tau'_{F(\check{X})} = id_{F(\check{X})} .$$

Revenons maintenant au morphisme F_X. Il correspond à la transformation naturelle ($Y \in ob\ \underline{C}$)

$$\mathrm{Hom}(Y, F(\check{X})) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Y \otimes F(X), \underline{1}')$$

$$f \longmapsto ev' \circ (f \otimes id_{F(X)}) .$$

La formule précédente équivaut à dire que la transformation naturelle allant dans le sens inverse

$$\mu \longmapsto (\mu \otimes id_{F(\check{X})}) \circ \tau'_Y$$

en est une inverse à gauche ; ceci finit la démonstration.

5.2.2.2. Remarque. Ce qui vient d'être prouvé, peut se résumer en disant que la $\otimes$-équivalence (5.1.3.2)

$$\underline{C}^o \longrightarrow \underline{C}$$

dépend fonctoriellement de $\underline{C}$.

5.2.3. Proposition. Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$ des $\otimes$-catégories rigides, $F, G : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ des $\otimes$-foncteurs rigides. Alors, tout $\otimes$-morphisme unifère $F \longrightarrow G$ est un isomorphisme.

5.2.3.1. Preuve. Si $u : F \longrightarrow G$, on vérifie facilement que la transformation naturelle $v : G \longrightarrow F$ définie par le diagramme commutatif

(5.2.3.1)
$$\begin{array}{ccc} F(\check{X}) & \xrightarrow{u_{\check{X}}} & G(\check{X}) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ F(X)^{\check{}} & \xrightarrow[t(v_X)]{} & G(X)^{\check{}} \end{array} \qquad (X \in ob\ \underline{C})$$

est une inverse pour u.

5.2.4. Soit $F : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ un $\otimes$-foncteur rigide entre des $\otimes$-catégories rigides ; il induit un morphisme de monoïdes, noté encore F

$$F : End(\underline{1}) \longrightarrow End(\underline{1}') .$$

On a les formules suivantes, où $X \in ob\ \underline{C}$, $f \in End(X)$

$$(5.2.4.1) \qquad \begin{cases} Tr_{F(X)}F(f)) = F(Tr_X(f)) \\ rg(F(X)) = F(rg(X)) \end{cases}$$

§ 6. ALGEBRES ET COGEBRES

On donne ici, de façon assez rapide, quelques définitions fondamentales.

6.1. Algèbres et cogèbres dans une $\otimes$-catégorie.

On se place, pour simplifier, dans une $\otimes$-catégorie ACU $\underline{C}$.

6.1.1. Une algèbre de $\underline{C}$ est un objet $A \in ob\ \underline{C}$, muni d'un morphisme $m_A : A \otimes A \longrightarrow A$, appelé multiplication. Un morphisme d'une algèbre (A,m_A) dans une algèbre (B,m_B) est un morphisme $f : A \longrightarrow B$ rendant commutatif le carré

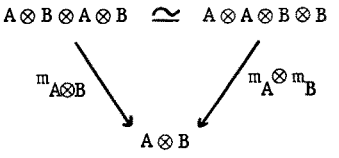
(6.1.1.1)

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{f \otimes f} & B \otimes B \\ \downarrow{\scriptstyle m_A} & & \downarrow{\scriptstyle m_B} \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array} .$$

Si A est une algèbre, l'algèbre opposée de A , notée A^o , est celle ayant A comme objet sous-jacent, et ayant comme multiplication

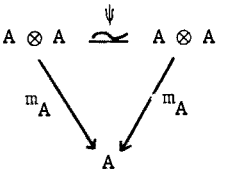
$$m_{A^o} = m_A \circ \psi_{A,A} .$$

Si A , B sont des algèbres, l'algèbre produit tensoriel, notée $A \otimes B$, est celle ayant $A \otimes B$ comme objet sous-jacent, sa multiplication étant définie par

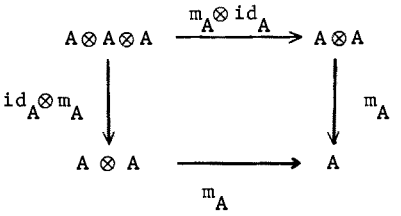


6.1.1.1. Une cogèbre de $\underline{C}$ est par définition une algèbre de la $\otimes$-catégorie opposée $\underline{C}^{o}$ (0.1.4).

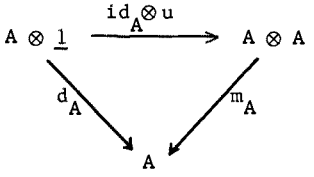
6.1.2. Une algèbre A est commutative si le triangle

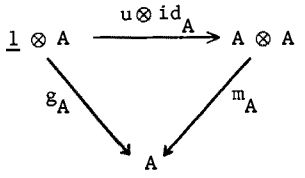


est commutatif, associative si le carré



est commutatif. Si A est associative, elle est unifère, s'il existe un morphisme $u : \underline{1} \longrightarrow A$ rendant commutatifs les triangles





Ce morphisme est alors unique, et s'appelle l'unité de A .

6.1.2.1. Voici un exemple d'algèbre associative, unifère : si $\underline{C}$ est une $\otimes$-catégorie rigide, $X \in \text{ob } \underline{C}$, $\underline{End}(X)$ est de façon naturelle une algèbre unifère (voir 3.3).

6.1.2.2. Si A est une cogèbre, on dit que A est coassociative (resp. cocommutative, counifère) si l'algèbre correspondante de $\underline{C}^{o}$ est associative (resp. commutative,

unifère). Si A est coünifère, le morphisme $u : A \longrightarrow \underline{1}$ s'appelle la <u>coünité</u> de A.

6.1.3. On appelle <u>bigèbre</u> de $\underline{C}$ un objet $B \in \text{ob } \underline{C}$ muni de structures m_A, μ_A d'algèbre et de cogèbre, compatibles entre elles, i.e. telles que m_A soit un morphisme de cogèbres, ou de façon équivalente, μ_A un morphisme d'algèbres.

6.1.4. Si F est un $\otimes$-foncteur ACU, $F : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$, F transforme, dans un sens évident, une algèbre en une algèbre et respecte les propriétés d'associativité, etc.

6.2. <u>Modules dans une $\otimes$-catégorie</u>.

$\underline{C}$ est toujours une $\otimes$-catégorie ACU.

6.2.1. Si A est une algèbre de $\underline{C}$, un A-<u>module</u> à gauche de $\underline{C}$ est un objet M de $\underline{C}$, muni d'un morphisme $\sigma_M : A \otimes M \longrightarrow M$, rendant commutatif le carré

(6.2.1.1)

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes M & \xrightarrow{m_A \otimes id_M} & A \otimes M \\ \downarrow{\scriptstyle id_A \otimes \sigma_M} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_M} \\ A \otimes M & \xrightarrow[\sigma_M]{} & M \end{array}$$

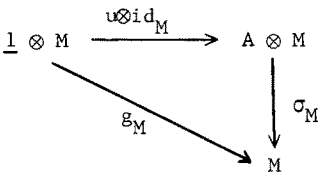
Un morphisme d'un A-module (M,σ_M) dans un A-module (N,σ_N) est un morphisme $f : M \longrightarrow N$ rendant commutatif le carré

(6.2.1.2)

$$\begin{array}{ccc} A \otimes M & \xrightarrow{id_A \otimes f} & A \otimes N \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma_M} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_N} \\ M & \xrightarrow[f]{} & N \end{array}$$

Le produit tensoriel de modules est défini chaque fois que A est commutative. Si A est associative unifère, un A-module M est <u>unifère</u> si le triangle

(6.2.1.3)



est commutatif.

6.2.2. Si A est une cogèbre de C , un A-comodule à gauche de C est un A-module à gauche de C^o . Il est counifère si le module correspondant est unifère (en supposant bien entendu, que A est coassociative et counifère).

6.3. Remarque. L'exemple le plus utilisé dans la suite est celui pour lequel C est la catégorie des A-modules, où A est un anneau (ordinaire) commutatif avec 1 . Bien que dans la présentation précédente, les cogèbres ne se différencient pas beaucoup des algèbres, il n'en est pas du tout ainsi dans "la vie réelle". La raison pour laquelle la plupart des mathématiciens regardent les cogèbres comme des êtres barbares, est que la comultiplication $B \longrightarrow B \otimes_A B$ ne peut pas s'exprimer en apparence de façon aussi simple que la multiplication d'une A-algèbre $m_{A'} : A' \otimes_A A' \longrightarrow A'$, i.e. comme une loi A-bilinéaire $A' \times A' \longrightarrow A'$. J'ai dit en apparence, parce que la comultiplication $B \longrightarrow B \otimes_A B$ peut aussi s'exprimer par une loi bilinéaire

$$\check{B} \times \check{B} \longrightarrow \check{B} ,$$

où $\check{B}$ a un sens différent de celui qu'on lui a donné dans ce chapitre. Ceci est explicité et prouvé dans le § 1 du chapitre II.

Chapitre II : REPRESENTATIONS LINEAIRES DE SCHEMAS EN GROUPES AFFINES

Introduction

§ 1. Compléments d'algèbre linéaire

1.0. Terminologie et notations

1.1. Modules représentables et coreprésentables

1.2. Algèbres représentables et coreprésentables

1.3. Algèbres associées à des foncteurs

1.4. Cas d'un corps K : K-modules représentables et K-vectoriels linéairement compacts

1.5. Extension de l'anneau de base dans les catégories linéaires

§ 2. La catégorie Comod(B), B étant une A-cogèbre

2.0. Préliminaires

2.1. Cogèbres et comodules

2.2. Conditions de finitude ; sous-catégories de définition

2.3. Caractérisation des catégories Comod(B)

2.4. Foncteurs Comod(B) $\longrightarrow$ Mod(A)

2.5. Lois $\otimes$ sur Comod(B)

2.6. Cas d'un anneau régulier de dimension ≤ 1

§ 3. Représentations linéaires de schémas en groupes affines

3.0. Terminologie et notations

3.1. Schémas en monoïdes affines

3.2. Foncteurs fibre sur $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$

3.3. Fonctorialité

3.4. Sous-catégories de définition de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$

§ 4. Représentations de groupes (suite) : cas d'un corps

4.1. La catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_o(G)$

4.2. Foncteurs fibre sur $\underline{\mathrm{Rep}}_o(G)$

4.3. Un dictionnaire

Appendice : cas d'un schéma de base général.

INTRODUCTION

Soient A un anneau commutatif avec unité, G un A-schéma en groupes affine. On note $\underline{Rep}(G)$ la $\otimes$-catégorie ACU des représentations linéaires de G dans des A-modules, $\omega^G : \underline{Rep}(G) \longrightarrow \underline{Mod}(A)$ le $\otimes$-foncteur strict qui consiste en l'oubli de l'action de G.

On démontre ici que le groupe G peut se reconstituer comme étant le groupe des $\otimes$-automorphismes de ω^G (3.1.1), et qu'on a ainsi un "dictionnaire" entre les A-groupes affines G et certaines $\otimes$-catégories au-dessus de $\underline{Mod}(A)$. On peut déterminer quelles sont ces catégories, c'est ce qui est fait en 3.1.4.1.

Il devient rapidement clair que beaucoup de ces résultats sont valables, avec certaines modifications, si le A-schéma affine $G = \mathrm{Spec}(B)$ est seulement muni d'une loi de monoïde ; dans ce cas, la donnée du A-monoïde G revient à celle d'une A-bigèbre B, i.e. d'une A cogèbre B munie d'un morphisme de A-cogèbres $B \otimes_A B \longrightarrow B$ satisfaisant des conditions d'associativité commutativité et unité. En poussant plus loin l'étude, on voit qu'on peut élaborer un dictionnaire entre les A-cogèbres B et certaines catégories au-dessus de $\mathrm{Mod}(A)$; ce sont les catégories $\underline{Comod}(B)$ des B-comodules, munies des foncteurs oubli $\varphi^B : \underline{Comod}(B) \longrightarrow \underline{Mod}(A)$.

Voici l'ordre dans lequel ces questions sont traitées :

Dans le § 1, on donne des compléments d'algèbre linéaire. On prouve notamment un théorème de dualité pour les modules sur un anneau (1.1.2), et on définit le procédé d'extension des scalaires dans les catégories linéaires (1.5).

Dans le § 2, on décrit le dictionnaire

$$B \longleftrightarrow (\underline{Comod}(B), \varphi^B)$$

expliqué ci-dessus, et on classifie les foncteurs (A-linéaires et commutant avec les $\varinjlim$) $\underline{Comod}(B) \longrightarrow \underline{Mod}(A)$ en termes de comodules B-coplats (2.4).

Dans le § 3, on déduit du § 2 les résultats cherchés pour des groupes affines.

En particulier, on classifie les foncteurs " fibre " sur $\underline{Rep}(G)$ par les torseurs sous G pour la topologie fpqc sur A (3.2) résultat qui sera essentiel au chapitre suivant. Dans le § 4, on discute le cas particulier où l'anneau A est un corps k. La catégorie importante dans ce cas est $\underline{Rep}_o(G)$, la $\otimes$-catégorie rigide (I 5.1.1) des G-modules de rang fini sur k.

Enfin, l'Appendice donne des indications sur la façon de généraliser les résultats du chapitre au cas d'un schéma de base.

§ 1. COMPLEMENTS D'ALGEBRE LINEAIRE

1.0. Terminologie et notations.

1.0.1. Dans tout ce qui suit, on fixe un anneau commutatif unifère A. La catégorie des A-algèbres ACU sera notée $\underline{Ann}_{/A}$. Si A' est une telle algèbre, on a un foncteur évident

$$\underline{Ann}_{/A'} \longrightarrow \underline{Ann}_{/A} .$$

1.0.2. Un $\underline{A}$-module M est un foncteur $\underline{Ann}_{/A} \longrightarrow \underline{Ab}$ muni de la donnée sur chaque $M(A')$ ($A' \in$ ob $\underline{Ann}_{/A}$) d'une structure de A'-module, ces données étant compatibles dans le sens suivant : si $\varphi : A' \longrightarrow A''$ est un morphisme de A-algèbres ACU, $M(\varphi) : M(A') \longrightarrow M(A'')$ est un morphisme de A'-modules, i.e.

$$M(\varphi)(a.x) = \varphi(a).M(\varphi)(x)$$

si $a \in A'$, $x \in M(A')$. La notion de morphisme de $\underline{A}$-modules est immédiate, et on obtient ainsi une catégorie $\underline{Mod}(\underline{A})$.

Si M, N sont des $\underline{A}$-modules, leur produit tensoriel $M \otimes_{\underline{A}} N$ est défini par

$$(M \otimes_{\underline{A}} N)(A') = M(A') \otimes_{A'} N(A') ;$$

ainsi $\underline{Mod}(\underline{A})$ est munie d'une $\otimes$-structure ACU, l'objet unité $\underline{A}$ étant défini par

$\underline{A}(A') = A'$, (I 2.4.1). On a en particulier la notion de $\underline{A}$-algèbre (I 6.1) ; dans la suite de ce travail, toutes les $\underline{A}$-algèbres considérées seront associatives unifères.

1.0.3. Si A' est une A-algèbre ACU, et M est un $\underline{A}$-module, on définit un $\underline{A}'$-module $M_{A'}$ par

$$M_{A'} : \underline{\mathrm{Ann}}_{/A'} \longrightarrow \underline{\mathrm{Ann}}_{/A} \xrightarrow{M} \underline{\mathrm{Ab}} \quad ;$$

on obtient ainsi un $\otimes$-foncteur ACU

$$\underline{\mathrm{Mod}}(\underline{A}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}}(\underline{A}') \ .$$

Si A'' est une A'-algèbre, on a une égalité

$$(M_{A'})_{A''} = M_{A''} \ .$$

On peut donc voir la collection des $\otimes$-catégories $\underline{\mathrm{Mod}}(\underline{A}')$ comme définissant une $\otimes$-catégorie cofibrée (I 4.5) au-dessus de $\underline{\mathrm{Ann}}_{/A}$, qu'on notera $\mathrm{MOD}(\underline{A})$.

Remarquons aussi que la $\otimes$-catégorie $\underline{\mathrm{Mod}}(\underline{A})$ possède des objets $\underline{\mathrm{Hom}}$ (I 3.1.1). Si M, N sont des $\underline{A}$-modules, on définit $\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{A}}(M,N)$ par

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{A}}(M,N)(A') = \mathrm{Hom}_{\underline{A}'}(M_{A'}, N_{A'}) \ .$$

En particulier, on a $\check{M} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{A}}(M,\underline{A})$.

1.0.4. Soit $\mathcal{G}$ une A-algèbre ; la catégorie des A-modules munis d'une structure de $\mathcal{G}$-module à gauche unifère sur le $\underline{A}$-module associé (voir 1.1.1 ci-dessous) est notée $\underline{\mathrm{Mod}}[\mathcal{G}]$.

Si B est une A-algèbre (resp. une A-cogèbre), on désigne par $\mathrm{Mod}(B)$ (resp. $\mathrm{Comod}(B)$) la catégorie des B-modules (resp. B-comodules). Dans la suite de ce travail, les A-algèbres sont associatives, unifères et les A-cogèbres coassociatives, counifères ; aussi, sauf mention expresse du contraire, les modules sont des modules à gauche unifères, les comodules sont des comodules à droite counifères.

On a enfin, des foncteurs "oubli"

$$\varphi^{[G]} : \underline{\mathrm{Mod}}[G] \longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}}(A)$$

$$\varphi^{B} : \underline{\mathrm{Mod}}(B) \longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}}(A)$$

$$\varphi^{B} : \underline{\mathrm{Comod}}(B) \longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}}(A) \quad .$$

1.1. Modules représentables et coreprésentables.

1.1.1. On a un $\otimes$-foncteur ACU

(1.1.1.1) $$\underline{\mathrm{Mod}}(A) \longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}}(\underline{A})$$

$$M \longmapsto M \quad ,$$

qui est défini de la façon suivante (voir SGA 4 I 4.6, où ce foncteur est noté W) : si M est un A-module, A' une A-algèbre ACU

$$M(A') = A' \otimes_A M \ .$$

Un $\underline{A}$-module isomorphe à un tel M sera appelé coreprésentable. Si M est un A-module, on aura soin de distinguer entre le A-module (ou le $\underline{A}$-module qui lui est associé) $M^* = \mathrm{Hom}_A(M,A)$, et le $\underline{A}$-module $\underline{\mathrm{Hom}}_A(M,A) = \overset{\vee}{M}$. Un $\underline{A}$-module isomorphe à un tel $\overset{\vee}{M}$ sera appelé représentable.

La proposition suivante n'offre pas de difficulté.

1.1.1.1. Proposition. Le foncteur (1.1.1.1) est pleinement fidèle et commute avec les $\varinjlim$; de plus, une $\varinjlim$ de A-modules coreprésentables est coreprésentable.

1.1.1.2. Les assertions relatives aux $\varinjlim$ résultent de l'existence d'un foncteur $\Gamma : \underline{\mathrm{Mod}}(\underline{A}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}}(A)$, adjoint à droite du foncteur (1.1.1.1) ; par définition, on a pour un $\underline{A}$-module M

$$\Gamma(M) = M(A) \ .$$

1.1.1.3. Soit M un A-module. Alors, d'après 1.1.1.1, le $\underline{A}$-module $\overset{\vee}{M}$ est isomorphe au $\underline{A}$-module

$$A' \longmapsto \mathrm{Hom}_{A'}(M \otimes_A A', A') = \mathrm{Hom}_A(M, A') .$$

Celui-ci, en tant que préfaisceau d'ensembles sur la catégorie des A-schémas affines, est représentable par le fibré vectoriel $\mathbb{V}(M)$ (EGA II 1.7). Ceci justifie la terminologie de $\underline{A}$-module représentable introduite plus haut.

1.1.2. Proposition. Si M est un A-module, alors M est réflexif dans la $\otimes$-catégorie $\mathrm{Mod}(\underline{A})$ (I 3.2.3.3) ; autrement dit, le morphisme canonique de $\underline{A}$-modules $M \longrightarrow \overset{\vee\vee}{M}$ est un isomorphisme.

1.1.2.1. Preuve. Il suffit de démontrer : si M est un A-module, l'application

$$\xi : M \longrightarrow \Gamma(\overset{\vee\vee}{M}) = \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(\overset{\vee}{M}, \underline{A})$$

est bijective. Cette application s'explicite, si $x \in M$, si A' est une A-algèbre et si $\sigma \in \overset{\vee}{M}(A') = \mathrm{Hom}_A(M, A')$, par

$$\xi(x)_{A'}(\sigma) = \sigma(x) .$$

Il s'agit de définir

$$\eta : \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(\overset{\vee}{M}, \underline{A}) \longrightarrow M ,$$

qui soit inverse de ξ. Posons $B = S(M)$, l'algèbre symétrique de M ; c'est une algèbre graduée par $\mathbb{N}$, et l'application A-linéaire canonique $i_M : M \longrightarrow B$ identifie M au sous-module des éléments de degré 1. Si $\alpha \in \mathrm{Hom}_A(\overset{\vee}{M}, \underline{A})$, on voit facilement que l'élément $\alpha_B(i_M)$ de B, est de degré 1 : en effet, écrivons

$$\alpha_B(i_M) = \sum_{r \in \mathbb{N}} b_r ;$$

on dispose de deux morphismes de A-algèbre $B \longrightarrow B[T]$: l'un est le morphisme évident, l'autre est celui qui envoie $b \in B$ de degré n en bT^n. Par naturalité de α, on obtient la formule

$$T \sum_{r\in\mathbb{N}} b_r = \sum_{r\in\mathbb{N}} T^r b_r ,$$

qui montre bien que $\alpha_B(i_M)$ est homogène de degré 1.

Il suffit maintenant de poser

$$\eta(\alpha) = \alpha_B(i_M) ,$$

la vérification des identités $\xi\eta = id$, $\eta\xi = id$ étant triviale.

1.1.2.2. Corollaire. Le foncteur $\underline{Mod}(A)^o \longrightarrow \underline{Mod}(\underline{A})$ qui à M associe $\check{M}$, est pleinement fidèle et commute avec les $\varprojlim$; en particulier, la catégorie $\underline{Mod}(A)$ est anti-équivalente à celle des $\underline{A}$-modules représentables. De plus, une $\varprojlim$ de $\underline{A}$-modules représentables est représentable.

1.1.2.3. Les assertions relatives aux $\varprojlim$ résultent de l'existence d'un foncteur $\Gamma' : \underline{Mod}(\underline{A}) \longrightarrow \underline{Mod}(A)^o$, adjoint à gauche du foncteur décrit en 1.1.2.2 ; par définition, on a pour un $\underline{A}$-module M

$$\Gamma'(M) = \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(M,\underline{A}) = \Gamma(\check{M}) .$$

Le morphisme d'adjonction

(1.1.2.1) $$M \longrightarrow (\Gamma'(M))^{\check{}}$$

est défini pour chaque A-algèbre ACU A' par

$$M(A') \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\Gamma'(M),A')$$

$$x \longmapsto (u \longmapsto u_{A'}(x)) .$$

Le A-module $\Gamma'(M)$ muni du morphisme (1.1.2.1) est une enveloppe représentable de M ; il est caractérisé, à isomorphisme unique près, par la propriété d'induire, pour tout A-module N , une bijection

$$\mathrm{Hom}_A(N,\Gamma'(M)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(M,\check{N}) .$$

1.1.3. Voici quelques commentaires sur ce qui précède : on a défini une catégorie A-linéaire $\underline{\mathrm{Mod}}(\underline{A})$ avec une loi $\otimes$ ACU, dans laquelle il y a des $\underline{\mathrm{Hom}}$ (I 3.1), d'où en particulier un foncteur contravariant $\underline{\mathrm{Mod}}(\underline{A})^{o} \longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}}(\underline{A})$, $M \longrightarrow \check{M}$. Cette catégorie sert de catégorie "ambiante" pour deux sous-catégories pleines $\underline{\mathrm{Modrep}}(\underline{A})$, $\underline{\mathrm{Modcorep}}(\underline{A})$ qui sont respectivement équivalentes à $\underline{\mathrm{Mod}}(A)^{o}$, $\underline{\mathrm{Mod}}(A)$, la dualité entre ces deux dernières étant induite par le foncteur défini plus haut, $M \longrightarrow \check{M}$.

On peut se demander quelle est l'intersection des deux sous-catégories précédentes. La réponse est fournie par

1.1.4. Proposition. Soit M un A-module. Alors, M est représentable et coreprésentable en même temps si et seulement si M est (image par (1.1.1.1) de) un A-module projectif de type fini.

1.1.4.1. Preuve. Il faut démontrer ceci : si M est un A-module, M est projectif de type fini si et seulement si le $\underline{A}$-module M est représentable.

Alors, il est clair que M est représentable si et seulement si $\check{M} = \underline{\mathrm{Hom}}_{A}(M,\underline{A})$ est coreprésentable, si et seulement si quelle que soit A' une A-algèbre, l'application canonique

$$\mathrm{Hom}_{A}(M,A) \otimes A' \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A}(M,A')$$

est bijective. Cette dernière condition équivaut aussi à demander que pour tout A-module N l'application canonique

$$\mathrm{Hom}_{A}(M,A) \otimes N \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A}(M,N)$$

soit bijective, comme on le voit aussitôt en posant $A' = A \oplus N$, où N est un idéal de carré nul et A opère dans N de la façon donnée. Mais cette dernière condition équivaut évidemment à dire que M est projectif de type fini en vertu du résultat bien connu suivant : M est projectif de type fini si et seulement si le

le foncteur $N \longmapsto \mathrm{Hom}(M,N)$ est exact et commute avec les $\varinjlim$ (on trouvera dans I, 0.2.2.2, un argument qui permet de prouver cette assertion).

1.1.5. Soient M,N des $\underline{A}$-modules. Rappelons (I. 3.3.2) qu'on a alors un morphisme canonique

$$\check{M} \otimes_{\underline{A}} \check{N} \longrightarrow (M \otimes_{\underline{A}} N)^{\vee} \tag{1.1.5.1}$$

1.1.5.1. Proposition. Soient M, N des A-modules. Alors, la flèche

$$M \otimes_A N \longrightarrow (\check{M} \otimes_{\underline{A}} \check{N})^{\vee}$$

transposée de (1.1.5.1), est un isomorphisme. De même, si L est un A-module, l'application

$$\mathrm{Hom}_A(L, M \otimes_A N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(\check{M} \otimes_{\underline{A}} \check{N}, \check{L})$$

déduite de (1.1.5.1), est bijective ; en d'autres termes, $M \otimes_A N$ muni de (1.1.5.1) est une enveloppe représentable de $\check{M} \otimes_{\underline{A}} \check{N}$.

1.1.5.2. Preuve. La dernière assertion est une conséquence facile de la première ; il suffit clairement de démontrer : si M,N sont des A-modules, l'application

$$\xi : M \otimes_A N \longrightarrow \Gamma((\check{M} \otimes_{\underline{A}} \check{N})^{\vee}) = \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(\check{M} \otimes_{\underline{A}} \check{N}, \underline{A})$$

est bijective. Explicitons ξ : si $x \in M$, $y \in N$, A' est une A-algèbre et $\sigma \in \check{M}(A') = \mathrm{Hom}_A(M,A')$, $\tau \in \check{N}(A') = \mathrm{Hom}_A(N,A')$, on a

$$\xi(x \otimes y)_{A'}(\sigma \otimes \tau) = \sigma(x)\,\tau(y).$$

Il s'agit de définir

$$\eta : \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(\check{M} \otimes \check{N}, \underline{A}) \longrightarrow M \otimes_A N$$

qui soit inverse de ξ. Posons $B = S(M \oplus N) = S(M) \otimes S(N)$; c'est une A-algèbre bigraduée à degrés positifs, et les applications A-linéaires $j_M : M \longrightarrow M \oplus N \xrightarrow{i_{M \oplus N}} B$, $j_N : N \longrightarrow M \oplus N \xrightarrow{i_{M \oplus N}} B$ identifient M,N respectivement aux éléments homogènes

de bidegré (1,0), (0,1). De même, $j_{M,N} : M \otimes N \longrightarrow B$ défini par

$$j_{M,N}(x \otimes y) = j_M(x)\, j_N(y)$$

identifie $M \otimes N$ au sous-module de B des éléments de B de bidegré (1,1). Si $\alpha \in \mathrm{Hom}(\check{M} \otimes_{\underline{A}} \check{N}, \underline{A})$, on voit comme dans 1.1.2.1 que $\alpha_B(j_M \otimes j_N)$ est de bidegré (1,1) dans B, et s'identifie donc à un élément de $M \otimes N$. On pose

$$\eta(\alpha) = \alpha_B(j_M \otimes j_N)$$

et on vérifie aussitôt les identités $\xi\eta = \mathrm{id}$, $\eta\xi = \mathrm{id}$.

1.1.6. Signalons une autre formule utile : si M, N sont des A-modules, on a un isomorphisme canonique

(1.1.6.1) $$\underline{\mathrm{Hom}}_A(\check{M}, N) \simeq M \otimes N .$$

En effet on a une application canonique

$$M \otimes N \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(\check{M}, N) \quad ;$$

l'assertion peut être prouvée suivant la même méthode que 1.1.2, dont elle est d'ailleurs une généralisation (faire $N = A$). Elle suit aussi de la suite d'isomorphismes canoniques, où L est un A-module

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(L, M \otimes N) &\simeq \mathrm{Hom}((M \otimes N)\check{}, \check{L}) \\
&\simeq \mathrm{Hom}(\check{M} \otimes \check{N}, \check{L}) \\
&\simeq \mathrm{Hom}(\check{M}, \underline{\mathrm{Hom}}(\check{N}, \check{L})) \\
&\simeq \mathrm{Hom}(\check{M}, \underline{\mathrm{Hom}}(L, N)) \\
&\simeq \mathrm{Hom}(L, \underline{\mathrm{Hom}}(\check{M}, N)) .
\end{aligned}$$

1.2. Algèbres représentables et coreprésentables.

1.2.1. Proposition. Le foncteur (1.1.1.1) induit une équivalence de catégories entre la catégorie des A-algèbres et celle des $\underline{A}$-algèbres coreprésentables ; si

$\mathcal{G}$ est une A-algèbre, on a un isomorphisme de catégories $\underline{\mathrm{Mod}}(\mathcal{G}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}}[\mathcal{G}]$ rendant commutatif le triangle

(1.2.1.1)
$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Mod}}(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\sim} & \underline{\mathrm{Mod}}[\mathcal{G}] \\ & {\scriptstyle \varphi^{\mathcal{G}}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \varphi[\mathcal{G}]} & \\ & \underline{\mathrm{Mod}}(A) & \end{array} .$$

1.2.1.1. La preuve est immédiate par 1.1.1.1.

1.2.2. Proposition. Le foncteur $M \longmapsto \check{M}$ (1.1.2.2) induit une antiéquivalence de catégories entre la catégorie des A-cogèbres et celle des A-algèbres représentables ; si B est une A-cogèbre, on a un isomorphisme de catégories $\underline{\mathrm{Comod}}(B) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Mod}}[\check{B}]$ rendant commutatif le triangle

(1.2.2.1)
$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Comod}}(B) & \xrightarrow{\sim} & \underline{\mathrm{Mod}}[B] \\ & {\scriptstyle \varphi^{B}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \varphi[B]} & \\ & \underline{\mathrm{Mod}}(A) & \end{array} .$$

1.2.2.1. La preuve est également immédiate, par 1.1.2.2 et 1.1.5.1. Remarquons que d'après les conventions 1.0.4, les comodules sont des comodules à droite et les modules des modules à gauche.

1.2.2.2. Soit B une A-cogèbre, avec comultiplication

$$\mu : B \longrightarrow B \otimes_A B ;$$

et explicitons la loi d'algèbre de $\check{B}$. Il suffit de le faire pour $\check{B}(A) = \mathrm{Hom}_A(B,A)$. Si $\beta,\beta' : B \longrightarrow A$, $\beta'' = \beta\beta'$ est donné par

(1.2.2.2)
$$\beta'' : B \xrightarrow{\mu} B \otimes_A B \xrightarrow{\beta \otimes \beta'} A \otimes_A A \simeq A$$

Maintenant, soit M un B-comodule, et explicitons la structure de $\check{B}$-module correspondante sur M ; encore une fois, il suffit de donner l'action de $\check{B}(A)$ sur M . Si

$$\sigma : M \longrightarrow M \otimes_A B$$

est la comultiplication de M, et $\beta : B \longrightarrow A$, l'action de β sur M est

(1.2.2.3) $$\beta_M : M \longrightarrow M \otimes_A B \xrightarrow{id\otimes\beta} M \otimes_A A \simeq M \ .$$

1.3. Algèbres associées à des foncteurs.

1.3.1. Soient $F,G : \underline{C} \longrightarrow \underline{Mod}(A)$ des foncteurs, où $\underline{C}$ est une catégorie arbitraire. On définit alors un $\underline{A}$-module $\underline{Hom}(F,G)$ de la façon suivante : si A' est une A-algèbre ACU, et si on note $F_{A'}$, $G_{A'}$ les composés de F, G avec le foncteur évident $\underline{Mod}(A) \longrightarrow \underline{Mod}(A')$, on pose :

$$\underline{Hom}(F,G)(A') = Hom(F_{A'},G_{A'}) \ .$$

Posons

$$\mathfrak{A} = \underline{End}(F) = \underline{Hom}(F,F) \ ;$$

c'est une $\underline{A}$-algèbre, et F induit un foncteur $\underline{C} \longrightarrow \underline{Mod}[\mathfrak{A}]$ rendant commutatif le triangle

$$\begin{array}{ccc} \underline{C} & \longrightarrow & \underline{Mod}[\mathfrak{A}] \\ & {\scriptstyle F}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \varphi^{[\mathfrak{A}]}} & \\ & \underline{Mod}(A) & \end{array} \ .$$

1.3.1.1. Il y a, bien entendu, des variantes de la définition précédente. Les foncteurs F,G peuvent par exemple être à valeurs dans la catégorie $\underline{Mod}(\underline{A})$.

1.3.2. Pour énoncer proprement la proposition suivante, on se place dans le cadre des univers (SGA 4 I). Soit $\underline{U}$ un univers fixé contenant A, et notons $\underline{Projtf}(A)$ la catégorie des A-modules projectifs de type fini.

1.3.2.1. Proposition. *Soit $\underline{C}$ une catégorie $\underline{U}$-petite, $F,G : \underline{C} \longrightarrow \underline{Projtf}(A)$ des foncteurs. Alors le $\underline{A}$-module $\underline{Hom}(F,G)$ est représentable (1.1.1) et $\in \underline{U}$.*

1.3.2.2. Preuve. Tout consiste à remarquer que $\underline{Hom}(F,G)$ est une $\varprojlim$ $\underline{U}$-petite de $\underline{A}$-modules représentables, à savoir les $\underline{Hom}(F(X),G(Y))$ pour $X,Y \in ob\ \underline{C}$ avec des morphismes de transition convenable, et à utiliser 1.1.2.2. De façon précise, on a un diagramme exact de $\underline{A}$-modules

$$\underline{Hom}(F,G) \longrightarrow \prod_{X\in ob\underline{C}} \underline{Hom}(FX,GX) \rightrightarrows \prod_{f:X\to Y} \underline{Hom}(FX,GX), \tag{1.3.2.1}$$

où on laisse au lecteur le soin d'expliciter les flèches.

1.3.2.3. La proposition 1.3.2.1 peut se démontrer sous des hypothèses plus générales sur $\underline{C}$. Par exemple, si F,G commutent avec les $\varinjlim$ et s'il existe un ensemble $\underline{U}$-petit d'objets engendrant $\underline{C}$ par $\varinjlim$.

1.3.3. Restons sous les hypothèses de 1.3.2, et soient $\underline{C}_1,\underline{C}_2$ des catégories $\underline{U}$-petites,

$$F_i,G_i : \underline{C}_i \longrightarrow \underline{Projtf}(A) \qquad i = 1,2.$$

des foncteurs. On note $\underline{C} = \underline{C}_1 \times \underline{C}_2$ et $F,G : \underline{C} \longrightarrow \underline{Projtf}(A)$ les foncteurs définis par

$$F(X,Y) = F_1(X) \otimes_A F_2(Y)$$

$$G(X,Y) = G_1(X) \otimes_A G_2(Y) .$$

On a un morphisme évident de $\underline{A}$-modules

$$\underline{Hom}(F_1,G_1) \otimes_{\underline{A}} \underline{Hom}(F_2,G_2) \longrightarrow \underline{Hom}(F,G) . \tag{1.3.3.1}$$

1.3.3.1. Proposition. Le morphisme (1.3.3.1) fait de $\underline{Hom}(F,G)$ une enveloppe représentable de $\underline{Hom}(F_1,G_1) \otimes_A \underline{Hom}(F_2,G_2)$(voir 1.1.2.3).

1.3.3.2. Preuve. Soient M_i(resp. M) les A-modules qui représentent $\underline{Hom}(F_i,G_i)$ (resp. $\underline{Hom}(F,G)$). Il faut prouver que le morphisme de A-modules

$$M \longrightarrow M_1 \otimes_A M_2$$

induit par (1.3.3.1) est un isomorphisme. Ceci se vérifie facilement

en utilisant la définition de M , M_i donnée par (1.3.2.1).

1.3.3.3. Un cas particulier important est celui pour lequel $\underline{C}_1 = \underline{C}_2$, $F_1 = F_2 = G_1 = G_2$. Il résulte de 1.3.2.1 et 1.3.3.1 que si $\underline{C}$ est une $\otimes$-catégorie ACU $F : \underline{C} \longrightarrow \underline{Projtf}(A)$ un $\otimes$-foncteur ACU (I 2.4, 4.2), et si on note

$$\underline{End}(F) = \check{B} ,$$

on a les données suivantes sur le A-module B :

a) Une loi de A-cogèbre $B \longrightarrow B \otimes_A B$, provenant de la loi de $\underline{A}$-algèbre évidente sur $\underline{End}(F)$.

b) Une loi de A-algèbre ACU $B \otimes_A B \longrightarrow B$, telle que $B \longrightarrow B \otimes_A B$ soit un morphisme de A-algèbres ; celle-ci provient de la loi $\otimes$ ACU sur $\underline{C}$.

Ces données sont équivalentes à celles d'un schéma en monoïdes affine G sur A (voir § 3), muni d'un isomorphisme de A-modules

$$B \simeq Aff(G) .$$

On peut expliciter le foncteur représenté par $G = Spec(B)$: on vérifie sans peine que si A' est une A-algèbre ACU, on a

$$G(A') \simeq \underline{End}^{\otimes,\underline{1}}(F_{A'}) ,$$

ce qui s'écrit encore

$$G \simeq \underline{End}^{\otimes,\underline{1}}(F) . \qquad (1.3.3.2)$$

1.4. Cas d'un corps K : K-Modules représentables et K-vectoriels linéairement compacts.

1.4.0. La lettre K désigne dans la suite de ce numéro un corps. Ce numéro n'est pas indispensable pour la suite, et sa présence a pour but d'expliquer les liens entre le formalisme des $\underline{K}$-modules représentables qu'on vient d'exposer, et des K-vectoriels linéairement compacts. La référence pour ce dernier est l'exposé VII_B de P. GABRIEL

dans SGA 3.

1.4.1. Rappelons qu'un espace vectoriel topologique sur K (K muni de la topologie discrète) est linéairement compact s'il est séparé complet, et s'il possède une base de voisinages de 0 formée de sous-espaces vectoriels de codimension finie. Il revient au même de dire qu'il est une $\varprojlim$ filtrante d'espaces vectoriels discrets de rang fini, les morphismes de transition étant des surjections. Si on note la catégorie obtenue $\underline{\mathrm{Mod.lin.comp}}(K)$, on a un foncteur

$$\underline{\mathrm{Mod}}(K)^{o} \longrightarrow \underline{\mathrm{Mod.lin.comp.}}(K) \tag{1.4.1.1.}$$

qui associe à un vectoriel E sur K, $\mathrm{Hom}(E,K)$ muni de la topologie de la convergence simple. On démontre aisément (loc.cit.) que ce foncteur est une équivalence de catégories. Voici un foncteur quasi-inverse : c'est celui qui associe à un vectoriel linéairement compact E son dual topologique, $\mathrm{Hom.cont.}_K(E,K)$.

1.4.2. On définit un foncteur

$$\underline{\mathrm{Mod.lin.comp.}}(K) \longrightarrow \underline{\mathrm{Mod.rep.}}(K) \tag{1.4.2.1}$$

en associant à un K-vectoriel linéairement compact E, le $\underline{K}$-module $\underline{E}$ défini par

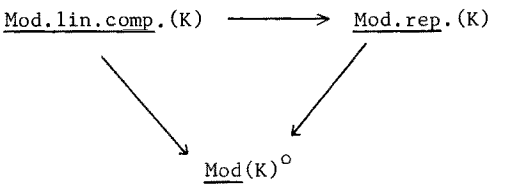
$$\Gamma(A',\underline{E}) = \underline{E} \hat{\otimes}_K A' ,$$

où pour une K-algèbre A', $E \hat{\otimes}_K A'$ désigne le séparé complété de $E \otimes_K A'$ pour la topologie définie par les $E_i \otimes_K A$, $(E_i)_{i\in I}$ étant une base de voisinages de 0 formée de sous-espaces de E de codimension finie. Il est clair que $\underline{E}$ est représentable, en fait il y a un isomorphisme canonique

$$\underline{E} \simeq (\mathrm{Hom.cont.}_K(E,K))^{\vee} . \tag{1.4.2.2}$$

Cela signifie aussi que le triangle

(1.4.2.3)



est commutatif à isomorphisme près. Il en résulte que le foncteur (1.4.2.1) est une équivalence de catégories, puisqu'il en est ainsi des foncteurs $E \longmapsto \mathrm{Hom.cont.}_K(E,K)$, $M \longmapsto \check{M}$.

1.4.3. On rappelle (SGA 3 VII_B) qu'une K-algèbre profinie est une K-algèbre topologique dont le K-vectoriel topologique sous-jacent est linéairement compact. On en déduit aussitôt (loc.cit.), moyennant des sorites sur les produits tensoriels complétés que nous n'avons pas développés, que le foncteur(1.4.1.1) induit une antiéquivalence entre la catégorie des K-cogèbres et celle des K-algèbres profinies. De même, le foncteur (1.4.2.1) induit une équivalence entre la catégorie des K-algèbres profinies et celle des K-algèbres représentables.

On peut démontrer (voir 2.6.3. b) pour une démonstration) qu'une K-algèbre profinie est $\varprojlim$ filtrante de K-algèbres discrètes de rang fini sur K , les morphismes de transition étant des surjections. Il en résulte qu'une K-cogèbre est réunion filtrante de ses sous-cogèbres qui sont de rang fini sur K .

1.4.4. Dans la situation de 1.3.2.1, soient $F,G : \underline{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Modf}}(K)$ des foncteurs d'une catégorie $\underline{U}$-petite $\underline{C}$ dans la catégorie des K-vectoriels de rang fini. Alors, on voit aussitôt que la topologie sur $\mathrm{Hom}(F,G)$, provenant de ce que $\underline{\mathrm{Hom}}(F,G)$ est représentable et d'un foncteur quasi-inverse de (1.4.2.1), est celle de la convergence simple.

1.4.5. Soit B une K-cogèbre, $\check{B} = \mathrm{Hom}_K(B,K)$ la K-algèbre profinie duale. Rappelons qu'un $\check{B}$-module fini est un vectoriel E de rang fini sur K , muni d'un morphisme continu de K-algèbres $\check{B} \longrightarrow \mathrm{End}_K(E)$. Si E est un B-comodule de rang fini (à droite comme toujours), E est de façon naturelle un $\check{B}$-module fini ; en effet, si $\lambda \in \check{B}$, l'action de λ dans E est donnée par

$$E \longrightarrow E \otimes_K B \xrightarrow{id\otimes\lambda} E \otimes_K K \xrightarrow{\sim} E .$$

On obtient ainsi un isomorphisme de catégories

$$\underline{\mathrm{Comodf}}(B) \simeq \underline{\mathrm{Mod}}(\check{B})$$

préservant les foncteurs oubli.

1.5. Extension de l'anneau de base dans les catégories linéaires.

1.5.1. Soit $\underline{C}$ une catégorie A-linéaire (I 0.1.2), où A est comme toujours un anneau commutatif unifère. Si X est un objet de $\underline{C}$, M un A-module, on dira que le produit tensoriel externe de M et X existe si le foncteur $Y \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,\mathrm{Hom}_{\underline{C}}(X,Y))$ est représentable. Dans ce cas on choisira un couple constitué d'un objet $M \otimes_A X$ et d'une application A-linéaire

(1.5.1.1) $$M \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, M \otimes_A X) ,$$

qui représentent ce foncteur, c'est-à-dire que les applications canoniques qu'on en déduit

(1.5.1.2) $$\mathrm{Hom}_{\underline{C}}(M \otimes_A X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(X,Y))$$

soient bijectives.

1.5.1.1. Proposition. Soit $\underline{C}$ une catégorie A-linéaire avec des $\varinjlim$ quelconques. Alors, le produit tensoriel externe d'un objet de $\underline{C}$ avec un A-module existe toujours. Si $\underline{D}$ est également A-linéaire avec des $\varinjlim$, et $F : \underline{C} \longrightarrow \underline{D}$ commute avec les $\varinjlim$, alors F commute avec le produit tensoriel externe.

1.5.1.2. La preuve est immédiate. Précisons le sens de la dernière assertion : si X est un objet de $\underline{C}$, M un A-module, l'application évidente

$$M \longrightarrow \mathrm{Hom}(FX, F(M \otimes_A X))$$

obtenue à partir de (1.5.1.1), correspond grâce à (1.5.1.2) à un morphisme

(1.5.1.3) $$M \otimes_A F(X) \longrightarrow F(M \otimes_A X) \ ;$$

la locution "F commute avec le produit tensoriel externe" signifie que $\forall M$, $\forall X$, le morphisme (1.5.1.3) est un isomorphisme.

1.5.2. Soit $\underline{C}$ une catégorie A-linéaire avec des $\varinjlim$, A' une A-algèbre (commutative unifère comme toujours). On définit une catégorie $\underline{C}_{(A')}$ de la façon suivante : les objets sont les couples (X,μ_X) où X est un objet de $\underline{C}$, $\mu : A' \longrightarrow \mathrm{End}(X)$ un morphisme de A-algèbres (la loi de A-algèbre de End(X) provenant de la structure A-linéaire sur $\underline{C}$) ; les morphismes $(X,\mu_X) \longrightarrow (Y,\mu_Y)$ étant les morphismes $f : X \to Y$ qui commutent avec l'action de A', c'est-à-dire qui pour $a \in A'$ rendent commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle \mu_X(a)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu_Y(a)} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array} \ .$$

Dans l'écriture d'un objet (X,μ_X) de $\underline{C}_{(A')}$ on omettra souvent μ_X.

On remarque que $\underline{C}_{(A')}$ possède une structure A'-linéaire évidente. De plus, on a des foncteurs A-linéaires

(1.5.2.1) $$\underline{C} \underset{j_{A'/A}}{\overset{i_{A'/A}}{\rightleftarrows}} \underline{C}_{(A')}$$

définis par

$$j_{A'/A}(X,\mu_X) = X$$

$$i_{A'/A}(X) = (A' \otimes_A X \ , \ a' \longmapsto \rho(a') \otimes \mathrm{id}_X) \ ,$$

où $\rho(a') : A' \longrightarrow A'$ est la multiplication par a'. On voit aussitôt, par définition du produit tensoriel externe(1.5.1), que $i_{A'/A}$ est adjoint à gauche de $j_{A'/A}$. De même, le foncteur $j_{A'/A}$ est fidèle, conservatif (SGA 4 I 6.1) et commute avec les $\varprojlim$ et les $\varinjlim$.

Si $\underline{C}$ est une catégorie abélienne, il en est de même de $\underline{C}_{(A')}$.

1.5.2.1. Soit B une autre A-algèbre, et notons $B' = A' \otimes_A B$, de sorte qu'on a un carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & B' \end{array} \quad .$$

Si $\underline{C}$ est une catégorie B-linéaire, on peut aussi regarder $\underline{C}$ comme étant une catégorie A-linéaire. Si $X \in \mathrm{ob}\ \underline{C}$, il revient au même de se donner un morphisme de A-algèbres $A' \longrightarrow \mathrm{End}(X)$ ou un morphisme de B-algèbres $B' \longrightarrow \mathrm{End}(X)$. Ceci signifie qu'on a un isomorphisme de catégories A'-linéaires

$$\underline{C}_{(A')} \simeq \underline{C}_{(B')} \tag{1.5.2.2}$$

qui rend commutatif le triangle

$$\begin{array}{ccc} \underline{C}_{(A')} & \xrightarrow{\sim} & \underline{C}_{(B')} \\ & {\scriptstyle j_{A'/A}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle j_{B'/B}} & \\ & \underline{C} & \end{array} \tag{1.5.2.3}$$

De plus, le triangle

$$\begin{array}{ccc} \underline{C}_{(A')} & \xrightarrow{\sim} & \underline{C}_{(B')} \\ & {\scriptstyle i_{A'/A}} \nwarrow \quad \nearrow {\scriptstyle i_{B'/B}} & \\ & \underline{C} & \end{array} \tag{1.5.2.4}$$

est commutatif à isomorphisme canonique près.

1.5.2.2. Soient $\underline{C}$, $\underline{D}$ des catégories A-linéaires avec des $\varinjlim$, $u : \underline{C} \longrightarrow \underline{D}$ un foncteur A-linéaire qui commute avec les $\varinjlim$. On en déduit un foncteur

$$u_{(A')} : \underline{C}_{(A')} \longrightarrow \underline{D}_{(A')} \tag{1.5.2.5}$$

défini par

$$u_{(A')}(X,\mu_X) = (u(X),\ a' \longmapsto u(\mu_X(a'))) \ .$$

Les carrés

(1.5.2.6)

$$\begin{array}{ccc} \underline{C} & \longrightarrow & \underline{D} \\ {\scriptstyle i_{A'/A}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_{A'/A}} \\ \underline{C}_{(A')} & \longrightarrow & \underline{D}_{(A')} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \underline{C} & \longrightarrow & \underline{D} \\ {\scriptstyle j_{A'/A}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle j_{A'/A}} \\ \underline{C}_{(A')} & \longrightarrow & \underline{D}_{(A')} \end{array}$$

sont, respectivement, commutatif à isomorphisme canonique près, commutatif.

1.5.2.2. Soit $\varphi : A \longrightarrow A'$ le morphisme d'anneaux qui définit la structure de A-algèbre sur A' . La catégorie $\underline{C}_{(A')}$ sera aussi notée $\varphi^*\underline{C}$, et les foncteurs $i_{A'/A}$, $j_{A'/A}$ seront aussi notés respectivement φ^* , φ_* :

$$\underline{C} \underset{\varphi_*}{\overset{\varphi^*}{\rightleftarrows}} \varphi^*\underline{C}$$

Si $u : \underline{C} \longrightarrow \underline{D}$ est un foncteur comme dans 1.5.2.1 , le foncteur $u_{(A')}$ sera aussi noté $\varphi^*(u)$. Les carrés commutatifs (1.5.2.6) donnent lieu aux formules

(1.5.2.7)

$$\varphi^* \circ u \simeq \varphi^*(u) \circ \varphi^*$$

$$\varphi_* \circ \varphi^*(u) = u \circ \varphi_* \qquad .$$

1.5.2.4. Si $\underline{C},\underline{D}$ sont des catégories abéliennes A-linéaires, et $u : \underline{C} \longrightarrow \underline{D}$ est fidèle (resp. exact), alors $u_{(A')}$ est également fidèle (resp. exact).

1.5.3. Soient $\underline{C}_i$ $(i \in I)$ des catégories A-linéaires possédant des $\varinjlim$, A' une A-algèbre ACU, et $\underline{D}$ une catégorie A'-linéaire possédant des $\varinjlim$. On s'intéresse aux foncteurs A-multilinéaires

$$u : \prod_{i\in I} \underline{C}_i \longrightarrow \underline{D}$$

commutant avec les $\varinjlim$; la catégorie ayant ces foncteurs pour objets, et comme morphismes les transformations naturelles entre ces foncteurs, sera notée $\underline{\mathrm{Hom}}_{A,\to}(\prod \underline{C}_i, \underline{D})$.

1.5.3.1. Proposition. La famille de foncteurs $i_{A'/A} : \underline{C}_i \longrightarrow \underline{C}_{i_{(A')}}$ induit une équivalence de catégories

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{A',\to}(\prod \underline{C}_{i_{(A')}}, \underline{D}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{A,\to}(\prod \underline{C}_i, \underline{D}) \quad . \tag{1.5.3.1}$$

1.5.3.2. Preuve. Les vérifications sont triviales, comme d'habitude, une fois qu'un foncteur quasi-inverse pour (1.5.3.1) a été défini. On définit le foncteur

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{A,\to}(\prod \underline{C}_i, \underline{D}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{A',\to}(\prod \underline{C}_{i_{(A')}}, \underline{D}) \tag{1.5.3.2}$$

$$u \longmapsto u_{A'}$$

de la façon suivante : si $\underline{X} = (X_i)$ est un objet de $\prod \underline{C}_{i_{(A')}}$, l'objet $u(\underline{X})$ est muni de deux actions de A' qui commutent entre elles, l'une provenant de ce que $\underline{D}$ est A'-linéaire, l'autre de l'action donnée de A' sur $\underline{X}$. On en déduit que l'objet $u(\underline{X})$ de $\underline{D}$. est muni d'une action de la A'-algèbre (via $i_1 : A' \longrightarrow A' \otimes_A A'$) $A'' = A' \otimes_A A'$. D'autre part, la multiplication de A' donne un morphisme de A-algèbres $A'' \longrightarrow A'$. Cela dit, on a

$$u_{A'}(\underline{X}) = u(\underline{X}) \otimes_{A''} A' \quad .$$

Il est clair que $u_{A'}$ est un foncteur A'-multi-linéaire commutant avec les $\varinjlim$, et que cette construction est fonctorielle en u.

1.5.3.3. Si A' est une A-algèbre plate, le foncteur (1.5.3.1) envoie un foncteur exact sur un foncteur exact. En revanche, même si A'/A est fidèlement plate, si $u : \underline{C} \longrightarrow \underline{D}$ est un foncteur comme dans 1.5.3.1, et exact, $u_{A'}$ n'est pas nécessairement exact. Voici deux exemples.

a) Soit k un corps, A' une k-algèbre $\neq 0$, et E un A'-module non plat. Soit $\underline{C} = \underline{\mathrm{Mod}}(k)$, donc $\underline{C}_{(A')} = \underline{\mathrm{Mod}}(A')$, et soit $\underline{D} = \underline{\mathrm{Mod}}(A')$. Le foncteur u est défini par

$$u(M) = E \otimes_k M \quad ;$$

il en résulte que si F est un A'-module

$$u_{A'}(F) = E \otimes_{A'} F$$

b) Soient k'/k une extension finie non séparable de corps, $\mathfrak{U}$ une k-algèbre (non commutative) de rang fini semisimple telle que la k'-algèbre $\mathfrak{U}' = k' \otimes_k \mathfrak{U}$ ne soit pas semisimple, L' un $\mathfrak{U}'$-module à gauche de rang fini sur k' qui ne soit pas injectif. Soit $\underline{C}$ la catégorie des $\mathfrak{U}$-modules à gauche, donc $\underline{C}_{(k')}$ est la catégorie des $\mathfrak{U}'$-modules à gauche, et $\underline{D} = \underline{Mod}(k')$. On a que $\underline{C}$ (resp. $\underline{C}_{(k')}$) est la catégorie des ind-objets (SGA 4 I, 8.2.4) de $\underline{C}_o$ (resp. $\underline{C}'_o$), où $\underline{C}_o$ (resp. $\underline{C}'_o$) est la catégorie des $\mathfrak{U}$-modules (resp. $\mathfrak{U}'$-modules) à gauche de type fini. Il en résulte que la donnée d'un foncteur $\underline{C}'_o \longrightarrow \underline{Mod}(k')$ exact à droite revient à celle d'un foncteur $\underline{C}_{(k')} \longrightarrow \underline{Mod}(k')$ commutant avec les $\varinjlim$. On prend comme foncteur $u : \underline{C} \longrightarrow \underline{D}$, celui induit par le foncteur $u_o : \underline{C}_o \longrightarrow \underline{D}$, $X \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{U}}(X,L')^*$; il est exact parce que u_o l'est. Le foncteur $u_A : \underline{C}_{(k')} \longrightarrow \underline{D}$ est induit par le foncteur $u'_o : \underline{C}'_o \longrightarrow \underline{D}$, $X' \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathfrak{U}'}(X',L')^*$, qui n'est pas exact par hypothèse. Le symbole * dénote le dual pris sur k dans le premier cas, sur k' dans le second cas.

1.5.4. Il résulte de 1.5.3.1 que si $\underline{C}$ est une $\otimes$-catégorie A-linéaire (I 0.1.2) possédant des $\varinjlim$ avec lesquelles la loi $\otimes$ commute, et si A' est une A-algèbre ACU, alors $\underline{C}_{(A')}$ est muni canoniquement d'une loi $\otimes$ A'-linéaire commutant avec les $\varinjlim$. De même les contraintes (de type A,C,U) imposées à la loi $\otimes$ sur $\underline{C}$ donnent lieu à des contraintes analogues pour la loi $\otimes$ sur $\underline{C}_{(A')}$. Enfin, on démontre sans peine l'analogue de 1.5.3.1 pour des $\otimes$-catégories et des $\otimes$-foncteurs multi-linéaires commutant avec les $\varinjlim$.

§ 2. LA CATEGORIE Comod(B), B ETANT UNE A-COGEBRE

2.0. Préliminaires.

2.0.1. On adopte dans tout ce § les notations de 1.0. On notera B une A-cogèbre ; si E est un B-comodule, on notera souvent, pour simplifier

$$E_o = \varphi^B(E)$$

le A-module sous-jacent à E . Rappelons que les cogèbres sont coassociatives counifères, et que les comodules sont counifères et, sauf mention explicite du contraire, des comodules à droite.

2.0.2. Soit A' une A-algèbre, et notons B' la A'-cogèbre $B \otimes_A A'$ obtenue par extension des scalaires. On a alors un isomorphisme de catégories

$$\underline{\mathrm{Comod}}(B)_{(A')} \simeq \underline{\mathrm{Comod}}(B')$$

rendant commutatif le triangle

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Comod}}(B)_{(A')} & \simeq & \underline{\mathrm{Comod}}(B') \\ & {\scriptstyle (\varphi^B)_{(A)}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \varphi^{B'}} & \\ & \underline{\mathrm{Mod}}(A') & \end{array}$$

ceci provient de ce que si E_o est un A-module, il revient au même de mettre sur E_o une structure de B-comodule plus une action de A' par des endomorphismes de B-comodule ou de mettre une loi de A'-module plus une structure de B'-comodule.

2.0.3. Soit E un B-comodule, et notons $\sigma_E : E \longrightarrow E \otimes_A B$ la comultiplication. J.P. Serre a remarqué que σ_E définit un morphisme de B-comodules

$$\sigma_E : E \longrightarrow E_o \otimes_A B_d ,$$

où B_d est le B-comodule à droite B et le produit tensoriel à droite est le produit tensoriel externe dans Comod(B) (1.5.1). Ceci exprime simplement l'un des axiomes de définition d'un comodule. Le morphisme σ_E est, bien entendu, naturel en E.

2.0.4. Soit E un B-comodule. Alors, le diagramme de B-comodules

$$(2.0.4.1) \qquad E \xrightarrow{\sigma} E_o \otimes_A B_d \underset{\sigma\otimes id}{\overset{id\otimes\mu}{\rightrightarrows}} E_o \otimes_A B_o \otimes_A B_d$$

est exact ; en d'autres termes, σ_E identifie E au noyau dans Comod(B) de la flèche $id\otimes\mu - \sigma\otimes id$.

Ceci est conséquence de l'assertion suivante : dans la catégorie Mod(A) , le diagramme

$$E_o \longrightarrow E_o \otimes_A B_o \rightrightarrows E_o \otimes_A B_o \otimes_A B_o .$$

est exact, et E_o est facteur direct dans $E_o \otimes_A B_o$.

Le dernier point est clair, σ_E admet une rétraction canonique, à savoir

$$\epsilon_E : E_o \otimes_A B_o \xrightarrow{id\otimes\epsilon} E_o \otimes_A A \simeq E_o .$$

Comme il est également clair que $(id\otimes\mu)\circ\sigma_E = (\sigma_E\otimes id)\circ\sigma_E$, il reste à savoir que si ces deux flèches égalisent un morphisme de A-modules $f : M \longrightarrow E_o \otimes_A B_o$, f se factorise à travers E_o .

Supposons donc

$$(id \otimes \mu) \circ f = (\sigma \otimes id) \circ f ;$$

composant les deux côtés avec $id \otimes id \otimes \epsilon : E_o \otimes_A B_o \otimes_A B_o \longrightarrow E_o \otimes_A B_o$, on a

$$f = \sigma_E \circ (\epsilon_E \circ f) .$$

2.0.5. La counité $\epsilon : B \longrightarrow A$ induit pour tout B-comodule E , un morphisme de A-modules (1.0.2)

$$(2.0.5.1) \qquad \underline{Hom}_B(E,B_d) \longrightarrow \underline{Hom}_A(E_o,A) = \check{E}_o ,$$

qui est fonctoriel en E . Ce morphisme est un isomorphisme ; exhibons-lui un inverse. Il suffit d'associer à un morphisme de A-modules $\alpha : E_o \longrightarrow A$ un morphisme $E \longrightarrow B$; on pose

$$E \xrightarrow{\sigma_E} E_o \otimes_A B \xrightarrow{\alpha \otimes id} A \otimes_A B \simeq B$$

et on vérifie aussitôt qu'on a bien un inverse.

On a en particulier, un isomorphisme de $\underline{A}$-modules

(2.0.5.2) $$\underline{End}_B(B_d) \simeq \check{B} ,$$

qui est un anti-isomorphisme de $\underline{A}$-algèbres (voir 1.2.2).

2.0.6. Supposons que B soit un A-module plat. Alors, la catégorie $\underline{Comod}(B)$ est abélienne et le foncteur φ^B est exact. En effet, il suffit de vérifier que les noyaux existent et que φ^B commute avec eux : si $u : E \longrightarrow F$ est un morphisme de B-comodules, et G_o désigne le noyau de $u_o : E_o \longrightarrow F_o$, le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & G_o & \longrightarrow & E_o & \longrightarrow & F_o \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_E} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_F} \\ 0 & \longrightarrow & G_o \otimes_A B_o & \longrightarrow & E_o \otimes_A B_o & \longrightarrow & F_o \otimes_A B_o \end{array}$$

où les lignes sont exactes, montre qu'il existe une et une seule flèche $G_o \longrightarrow G_o \otimes_A B_o$ faisant de G_o un B-comodule. C'est le noyau de u.
Réciproquement

1.0.6.1. Théorème. Soient A un anneau, B une A-cogèbre, et supposons que $\varphi^B : \underline{Comod}(B) \longrightarrow \underline{Mod}(A)$ commute avec les noyaux. Alors, B est un A-module plat.

La preuve est une conséquence immédiate du lemme suivant.

2.0.6.2. Lemme. Soit B une A-cogèbre, et soit $0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E''$ une suite exacte de A-modules. Alors $E' \otimes_A B$ s'identifie au noyau de $E \otimes_A B \longrightarrow E'' \otimes_A B$ dans la catégorie $\underline{Comod}(B)$.

Il suffit de remarquer que si M est un B-comodule, E un A-module, l'aug-

mentation $\varepsilon : B \longrightarrow A$ induit un isomorphisme canonique

$$\text{(2.0.6.1)} \qquad \mathrm{Hom}_B(M, E \otimes_A B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(M_o, E) \ .$$

Ceci résulte, soit formellement de 2.0.4, soit de la suite d'isomorphismes ci-dessous

$$\mathrm{Hom}_B(M, E \otimes_A B) \simeq \mathrm{Hom}_{\check{B}}((E \otimes B)^{\check{}}, \check{M}) \simeq \mathrm{Hom}_{\check{B}}(\check{E} \otimes \check{B}, \check{M})$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_{\check{B}}(\check{B}, \mathrm{Hom}(\check{E}, \check{M})$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_A(M_o, E) \ .$$

2.0.7. Soit B une A-cogèbre plate. Nous allons voir que les B-comodules qui sont de type au plus dénombrable en tant que A-modules, constituent un système de générateurs de $\underline{\mathrm{Comod}}(B)$. Il suffit pour cela de prouver que si M est un B-comodule et $m \in M$, il existe un sous-comodule N de M de type dénombrable, et contenant m. Pour cela, écrivons $\sigma_M(m) = \sum_i m_i \otimes b_i$, et soit $N^{(o)}$ le sous-A-module de M engendré par les m_i. La formule $m = \sum m_i \, \varepsilon(b_i)$ montre que $m \in N^{(o)}$. Si maintenant on écrit $\sigma(m_i) = \sum_j m_{ij} \otimes b_{ij}$, et on appelle $N^{(1)}$ le sous-A-module de M engendré par les m_{ij} (i,j), on a $N^{(o)} \subset N^{(1)}$. On continue ainsi de suite, et il est clair que par construction

$$N = \bigcup_{r \geq 0} N(r)$$

est un sous-comodule de M de type dénombrable, contenant m.

2.1. Cogèbres et comodules.

2.1.1. Soit $\underline{D}$ une sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Comod}}(B)$ contenant B_d, et notons $i_{\underline{D}}$ le foncteur d'injection. On définit alors des morphismes de $\underline{A}$-algèbre,

$$\check{B} \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} \underline{\mathrm{End}}(\varphi^B \circ i_{\underline{D}}) \ .$$

Pour la définition de α il suffit de se souvenir de l'isomorphisme de catégories $\underline{\mathrm{Comod}}(B) \simeq \underline{\mathrm{Mod}}[\check{B}]$ (voir 1.2.1) : $\check{B}$ agit sur φ^B par multiplication à gauche. Pour définir β, si $\lambda \in \underline{\mathrm{End}}(\varphi^B \circ i_{\underline{D}})(A')$, où A' est une A-algèbre ACU, on pose

$$\beta(\lambda) = \varepsilon_{A'} \circ \lambda_B ,$$

où $\varepsilon_{A'} : B \otimes_A A' \longrightarrow A'$ est la counité de B étendue à A'. On remarquera que la définition de α ne nécessite pas d'hypothèse sur $\underline{D}$.

Signalons la formule

(2.1.1.1) $$\beta\alpha = id .$$

2.1.1.1. Proposition. Soit $\underline{D}$ une sous-catégorie pleine de $\underline{Comod}(B)$. Alors $\alpha : \overset{v}{B} \longrightarrow \underline{End}(\varphi^B \circ i_{\underline{D}})$ est un isomorphisme dans chacun des cas suivants :

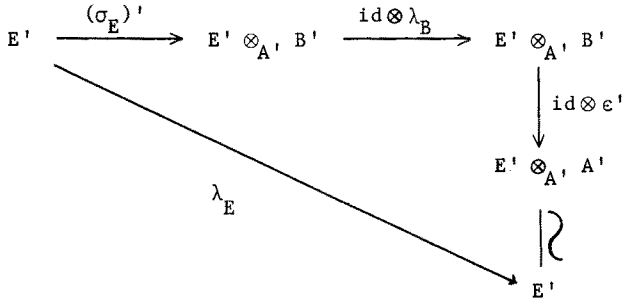
a) $i_{\underline{D}}$ induit une équivalence $\underline{Ind}(\underline{D}) \longrightarrow \underline{Comod}(B)$.

b) $\underline{D}$ contient B et est stable par produit tensoriel externe avec les A-modules E_o, pour $E \in \text{ob } \underline{D}$.

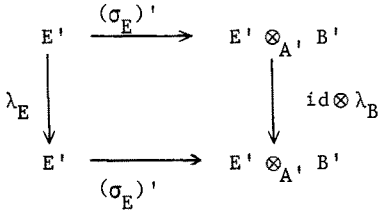
2.1.1.2. Preuve. Il est clair que a) est conséquence de b). Compte tenu de (2.1.1.1), il faut prouver, si $\lambda \in \text{End}((\varphi^B \circ i_{\underline{D}})_{A'})$, qu'on a

$$\alpha\beta(\lambda) = \lambda ,$$

ou encore que pour tout B-comodule E, que le diagramme



est commutatif, où $E' = E \otimes_A A'$, $B' = B \otimes_A A'$. Cela résulte du carré



dont la commutativité provient de 2.0.3, de la naturalité de λ et de l'identification

$$\lambda_{E_o \otimes_A B} = id_{E_o} \otimes \lambda_B \ .$$

Pour ce point on utilise la dernière hypothèse de b).

2.1.1.3. Corollaire. On a des isomorphismes de $\underline{A}$-algèbre :

$$\text{End}(\varphi^B) \simeq \check{B} \simeq (\underline{\text{End}}_B(B_d))^o \simeq \underline{\text{End}}_B(B_g) \ . \tag{2.1.1.2}$$

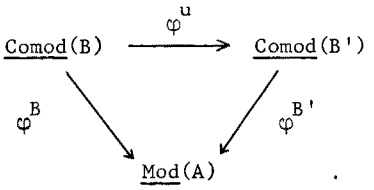
2.1.1.4. Corollaire. Si B est un A-module plat, et si D désigne la sous-catégorie pleine de Comod(B) formée des B-comodules plats en tant que A-modules, on a un isomorphisme de $\underline{A}$-algèbres

$$\check{B} \simeq \underline{\text{End}}(\varphi^B \circ i_{\underline{D}}) \ .$$

2.1.2. Soit $u : B \longrightarrow B'$ un morphisme de A-cogèbres, et soit ${}^t u : \check{B}' \longrightarrow \check{B}$ son transposé, qui est un morphisme de $\underline{A}$-algèbres. Compte tenu de 0.1.2.1, u définit un foncteur

$$\varphi^u : \underline{\text{Comod}}(B) \longrightarrow \underline{\text{Comod}}(B')$$

rendant commutatif le triangle



Voici une autre description de φ^u , en termes de cogèbres : si E est un B-comodule

avec comultiplication $\sigma_E : E \longrightarrow E \otimes_A B$, son image par φ^u a aussi E_o comme A-module sous-jacent et a comme comultiplication

$$E \xrightarrow{\sigma_E} E \otimes_A B \xrightarrow{id\otimes u} E \otimes_A B' .$$

2.1.2.1. Proposition. L'application $u \longmapsto \varphi^u$ induit une bijection de l'ensemble $\mathrm{Hom}(B,B')$ des morphismes de A-cogèbre $B \longrightarrow B'$ sur l'ensemble des foncteurs $\varphi : \underline{\mathrm{Comod}}(B) \longrightarrow \underline{\mathrm{Comod}}(B')$ tels que $\varphi^{B'} \circ \varphi = \varphi^B$.

2.1.2.2. Preuve. Soit $\varphi : \underline{\mathrm{Comod}}(B) \longrightarrow \underline{\mathrm{Comod}}(B')$ tel que $\varphi^{B'} \circ \varphi = \varphi^B$; le foncteur φ induit un morphisme de A-algèbres

$$\underline{\mathrm{End}}(\varphi^{B'}) \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}(\varphi^B) ,$$

ou encore par 2.1.1.3, un morphisme $\check{B}' \longrightarrow \check{B}$. Son transposé $u_\varphi : B \longrightarrow B'$ est un morphisme de A-cogèbres, et on vérifie aussitôt que $\varphi \longmapsto u_\varphi$ est inverse de $u \longmapsto \varphi^u$.

2.1.2.3. Remarque. Si φ est un foncteur comme ci-dessus, il est automatiquement A-linéaire. On rencontre souvent des foncteurs A-linéaires

$$\varphi : \mathrm{Comod}(B) \longrightarrow \underline{\mathrm{Comod}}(B')$$

tels que φ^B et $\varphi^{B'} \circ \varphi$ soient isomorphes, mais pas nécessairement égaux. Dans ce cas, le choix d'un isomorphisme

$$\eta : \varphi^B \xrightarrow{\sim} \varphi^{B'} \circ \varphi$$

définit, en procédant comme avant, un morphisme

$$u = u_{(\varphi,\eta)} : B \longrightarrow B' ,$$

et η se relève en un isomorphisme

$$\tilde{\eta} : \varphi^u \simeq \varphi .$$

En bref, l'énoncé 2.1.2.1 est valable en remplaçant l'ensemble des foncteurs φ tels que $\varphi^{B'} \circ \varphi = \varphi^{B}$ par l'ensemble des classes d'équivalence de couples (φ,η), où (φ,η) et (φ',η') sont équivalents s'il existe un isomorphisme $\nu : \varphi \xrightarrow{\sim} \varphi'$ tel que

$$(\varphi^{B'} * \nu) \circ \eta = \eta' \quad .$$

2.1.3. Rappelons que si $\sigma,\tau : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$ sont des morphismes de $\underline{A}$-algèbre, on définit le $\underline{A}$-module $\underline{\mathrm{Transp}}(\sigma,\tau)$ par

$$\underline{\mathrm{Transp}}(\sigma,\tau)(A') = \{x \in \mathcal{G}'(A') \quad / \quad \forall\, A''/A' \,,$$

$$\forall\, a \in \mathcal{G}(A'') \quad , \quad x\sigma(a) = \tau(a)x\}$$

On pose

$$(2.1.3.2) \qquad \begin{cases} \underline{\mathrm{Cent}}(\sigma) = \underline{\mathrm{Transp}}(\sigma,\sigma) \\ \underline{\mathrm{Cent}}(\mathcal{G}) = \underline{\mathrm{Cent}}(\mathrm{id}_{\mathcal{G}}) \end{cases}$$

Si $u,v : B \longrightarrow B'$ sont des morphismes de A-cogèbre, on a une flèche

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\varphi^{u},\varphi^{v}) \longrightarrow \overset{\vee}{B}$$

qui à un morphisme $\lambda : \varphi^{u} \longrightarrow \varphi^{v}$ associe $\varphi^{B'} * \lambda$, qui s'identifie à un élément de $\overset{\vee}{B}(A)$. On prouve aussitôt

2.1.3.1. Proposition. Le morphisme précédent induit un isomorphisme

$$(2.1.3.3) \qquad \underline{\mathrm{Hom}}(\varphi^{u},\varphi^{v}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Transp}}({}^{t}u,{}^{t}v) \,.$$

2.1.3.2. Corollaire. On a des isomorphismes canoniques

$$(2.1.3.4) \qquad \begin{cases} \underline{\mathrm{End}}(\varphi^{u}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Cent}}({}^{t}u) \\ \underline{\mathrm{End}}(\mathrm{id}_{\underline{\mathrm{Comod}}(B)}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Cent}}(\overset{\vee}{B}) \end{cases}$$

2.2. Conditions de finitude ; sous-catégories de définition.

2.2.1. Dans ce numéro, on suppose que la A-cogèbre B est A-plate.

On appelle sous-catégorie de définition de Comod(B) une sous-catégorie pleine D de Comod(B) telle que le morphisme de 2.1.1.

$$\alpha : \overset{\vee}{B} \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}(\varphi^B \circ i_D)$$

soit un isomorphisme.

2.2.2. Rappelons quelques résultats de J.P. SERRE [4].

2.2.2.1. Lemme. Soit E un B-comodule, F un sous-module de E . Alors, $F' = (\sigma_F)^{-1}(F \otimes_A B)$ est un sous-comodule de E contenu dans F , et tout sous-comodule de E contenu dans F est contenu dans F' .

En effet, F' est l'image inverse du B-comodule $F \otimes_A B_d$ par le morphisme de B-comodules

$$\sigma_E : E \longrightarrow E_o \otimes_A B ,$$

et la formule $(id_E \otimes \varepsilon) \circ \sigma_E = id_E$ montre que $F' \subset F$. La dernière assertion est évidente.

2.2.2.2. Lemme. Supposons A noethérien et soient E un B-comodule, F un sous-module de type fini de E . Alors, il existe un sous-comodule de E contenant F et de type fini en tant que A-module.

En effet, soit E_1 un sous-module de type fini de E tel que $\sigma_E(F) \subset E_1 \otimes_A B$. D'après le lemme 2.2.2.1, il existe un sous-comodule E_1' de E , vérifiant

$$F \subset E_1' \subset E_1 ,$$

ce qui montre que E_1' est de type fini.

2.2.2.3. Corollaire. Si A est noethérien, tout B-comodule est $\varinjlim$ filtrante de

ses sous-comodules de type fini en tant que A-modules.

2.2.3. Il résulte de 2.2.2.3 que si A est noethérien, la catégorie Comod(B) est équivalente à la catégorie des ind-objets (SGA 4 I 8.2.4) de la catégorie Comodtf(B) des B-comodules de type fini en tant que A-modules.

On en conclut, par 2.1.1.1 a).

2.2.3.1. Proposition. Sous les hypothèses précédentes, Comodtf(B) est une sous-catégorie de définition de Comod(B).

Signalons aussi, dans cet ordre d'idées, le résultat suivant de SGA 3 VI_B 11.10.

2.2.3.2. Proposition. Si B est une A-cogèbre qui devient libre après extension fidèlement plate $A \longrightarrow A'$, tout B-comodule est réunion filtrante de ses sous-comodules de type fini en tant que A-modules.

2.2.3.3. Corollaire. Comodtf(B) est une sous-catégorie de définition de Comod(B).

2.2.4. Supposons que A soit un anneau régulier de dimension ≤ 1 , c'est-à-dire un produit fini d'anneaux de Dedekind. Dans ce cas, dire qu'un A-module M est plat, revient à dire que pour chaque idéal premier p de A , le A_p-module M_p est sans torsion ; en particulier, un sous-module d'un A-module plat est plat. Un A-module de type fini est plat si et seulement s'il est projectif.

On notera Com.loc.lib.(B) la sous-catégorie pleine de Comod(B) formée des B-comodules qui en tant que A-modules sont projectifs de type fini. On conclut de ce qui précède et de 2.1.1.1.

2.2.4.1. Proposition. Si A est un anneau régulier de dimension ≤ 1 , Com.loc.lib(B) est une sous-catégorie de définition de Comod(B).

2.2.4.2. Remarque. On aurait pu également démontrer 2.2.4.1 à l'aide du résultat

suivant de SERRE [4] : si B est une A-cogèbre plate, A un anneau de Dedekind, pour tout B-comodule E de type fini sur A , il existe une suite exacte de B-comodules

$$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_o \longrightarrow E \longrightarrow 0 \ ,$$

où P_o , P_1 sont projectifs de type fini sur A .

2.3. Caractérisation des catégories Comod(B).

2.3.0. On fixe un univers $\underline{U}$ dans tout ce numéro. Pour simplifier, on conviendra que catégorie signifie $\underline{U}$-catégorie, catégorie avec $\varinjlim$ signifie $\underline{U}$-catégorie avec $\varinjlim$ $\underline{U}$-petites, anneau signifie anneau appartenant à $\underline{U}$, Mod(A) si A est un anneau signifie la catégorie des A-modules appartenant à $\underline{U}$, etc...

2.3.1. Rappelons quelques résultats et définitions dûs à J. BENABOU [2] . Si $\underline{C}$ est une catégorie, un foncteur $F : \underline{C} \longrightarrow \underline{Ens}$ est borné s'il existe une famille $(X_i)_{i\in I}$ $(I \in \underline{U})$ d'objets de $\underline{C}$ telle que pour tout objet X de $\underline{C}$, tout $x \in F(X)$, il existe $i \in I$, $f : X_i \longrightarrow X$, $y \in F(X_i)$ avec

$$F(f)(y) = x \ .$$

Si $\underline{C}$ possède des $\varprojlim$, un foncteur $F : \underline{C} \longrightarrow \underline{Ens}$ est représentable si et seulement si F commute avec les $\varprojlim$ et est borné. Si $\underline{C}$ est à petits objets (par quoi on entend que l'ensemble de classes d'isomorphisme de sous-objets et l'ensemble de classes d'isomorphisme d'objets quotients de tout objet de $\underline{C}$ appartiennent à $\underline{U}$), une $\varprojlim$ $\underline{U}$-petite de foncteurs bornés est bornée.

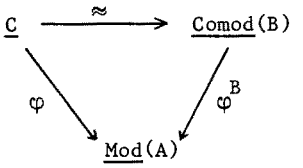
On conclut de ce qui précède, par exemple

a) Si $\underline{C}$ est une catégorie à petits objets avec des $\varprojlim$, $\underline{C}$ possède des $\varinjlim$.

b) Si $\underline{C}$ est une catégorie avec des $\varprojlim$ et des cogénérateurs, un foncteur $F : \underline{C} \longrightarrow \underline{Ens}$ est représentable si et seulement s'il commute avec les $\varprojlim$.

2.3.2. Théorème. Soit $\underline{C}$ une catégorie A-linéaire, $\varphi : \underline{C} \longrightarrow \underline{Mod}(A)$ un foncteur A-linéaire. Alors, il existe une A-cogèbre B et une équivalence de catégories $\underline{C} \xrightarrow{\approx} \underline{Comod}(B)$ rendant commutatif le triangle

(2.3.2.1)



si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

i) $\underline{C}$ est à petits objets, possède des $\varinjlim$ et φ commute avec les $\varinjlim$ et est fidèle.

ii) Pour toute A-algèbre A' , le foncteur $\underline{C} \longrightarrow \underline{Ens}$ qui associe à X , $\mathrm{Hom}_A(\varphi(X),A')$, est borné.

iii) Si on note $B^{A'}$ l'objet représentant le foncteur introduit dans ii) (on applique ici 2.3.1 à la catégorie $\underline{C}^o$) , le morphisme canonique

$$B^A \longrightarrow B^{A'}$$

induit par les applications $\mathrm{Hom}_A(\varphi(X),A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\varphi(X),A')$, définit un isomorphisme

$$A' \otimes_A B^A \xrightarrow{\sim} B^{A'} .$$

iv) Si $X \longrightarrow Y$ est un morphisme de $\underline{C}$ tel que le noyau de $\varphi(X) \longrightarrow \varphi(Y)$ soit un facteur direct dans $\varphi(X)$, φ commute avec le noyau de $X \longrightarrow Y$.

Preuve. La nécessité des conditions i), iv) est triviale, celle de ii), iii) résulte des isomorphismes canoniques (2.0.5.1). La preuve de la suffisance se décompose en plusieurs pas.

2.3.2.1. Construction de la A-cogèbre B .

On pose $B = \varphi(B^A)$; c'est un A-module. Il y a une application A-linéaire

$$\epsilon : B \longrightarrow A \quad ,$$

telle que l'application $f \longmapsto \epsilon \circ \varphi(f)$

$$\mathrm{Hom}_{\underline{C}}(X, B^A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\varphi(X), A)$$

soit une bijection. On déduit aussitôt de ii), iii) que pour tout A-module M, l'application

$$\epsilon_M : M \otimes_A B \longrightarrow M$$

induit des bijections

(2.3.2.2) $$\mathrm{Hom}_{\underline{C}}(X, M \otimes_A B^A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(\varphi(X), M)$$

On définit un morphisme de $\underline{A}$-algèbres

(2.3.2.3) $$\underline{\mathrm{End}}(\varphi) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{End}}_{\underline{C}}(B^A)^{\circ}$$

en associant à un endomorphisme u de $\varphi_{A'}$ (A' une A-algèbre) le seul endomorphisme $\tilde{u}$ de $B^{A'} = A' \otimes_A B$ rendant commutatifs les carrés

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(A' \otimes_A \varphi(X), A') & \xrightarrow{? \circ u_X} & \mathrm{Hom}(A' \otimes_A \varphi(X), A') \\ \big\wr \downarrow & & \big\wr \downarrow \\ \mathrm{Hom}(X, B^{A'}) & \xrightarrow[\tilde{u} \circ ?]{} & \mathrm{Hom}(X, B^{A'}) \end{array}$$

Il est facile de voir que (2.3.2.3) est un isomorphisme de $\underline{A}$-algèbres. De même, on a un isomorphisme de $\underline{A}$-modules

(2.3.2.4) $$\underline{\mathrm{End}}_{\underline{C}}(B^A) \xrightarrow{\sim} \check{B} \qquad u \longmapsto \epsilon \circ \varphi(u)$$

ce qui est une conséquence triviale de (2.3.2.2). Enfin, on a un triangle commutatif d'isomorphismes

(2.3.2.5)

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{End}}(\varphi) & \xrightarrow{\sim} & \underline{\mathrm{End}}_{\underline{C}}(B^A) \\ & \searrow^{\sim} \quad \swarrow_{\sim} & \\ & \check{B} & \end{array} \quad ,$$

où la flèche composée $\underline{End}(\varphi) \longrightarrow \check{B}$ envoie un endomorphisme u de $\varphi_{A'}$ dans $\epsilon_{A'} \circ u_B$.

L'isomorphisme $\underline{End}(\varphi) \xrightarrow{\sim} \check{B}$ montre qu'il y a sur B une structure canonique de A-cogèbre (1.2.2). En outre, on voit sans peine que la counité B est l'application $\epsilon : B \longrightarrow A$.

2.3.2.2. Le foncteur $e : \underline{C} \longrightarrow \underline{Comod}(B)$.

Si X est un objet de $\underline{C}$, $\varphi(X)$ est de façon naturelle un $\underline{End}(\varphi)$-module. L'isomorphisme $\underline{End}(\varphi) \longrightarrow \check{B}$ et la proposition 1.2.2 montrent qu'on a un foncteur e rendant commutatif le triangle

$$\begin{array}{ccc} \underline{C} & \xrightarrow{e} & \underline{Comod}(B) \\ & {\scriptstyle\varphi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\varphi^B} & \\ & \underline{Mod}(A) & \end{array}$$

Soit X encore un objet de $\underline{C}$. Puisque $\varphi(X)$ est de façon naturelle un B-comodule, on dispose d'une application A-linéaire

$$\varphi(X) \longrightarrow \varphi(X) \otimes_A B$$

définissant la loi de comodule. En fait, cette application est l'image par φ d'un morphisme

$$\sigma_X : X \longrightarrow \varphi(X) \otimes_A B^A \quad . \tag{2.3.2.6}$$

Pour obtenir celui-ci, on prend l'image inverse par l'isomorphisme (2.3.2.2) de l'identité de $\varphi(X)$, où on a posé $M = \varphi(X)$.

2.3.2.3. Le foncteur e est pleinement fidèle.

Il est clair que e est fidèle puisque φ l'est. Si X,Y sont des objets de $\underline{C}$, et $f : e(X) \longrightarrow e(Y)$ est un morphisme, montrons qu'il provient d'un morphisme $X \longrightarrow Y$. On vérifie aussitôt que l'application A-linéaire

$$\varphi(X) \xrightarrow{f} \varphi(Y) \longrightarrow \varphi(Y) \otimes_A B$$

est image par φ du morphisme

$$X \xrightarrow{\sigma_X} \varphi(X) \otimes_A B^A \xrightarrow{f \otimes id} \varphi(Y) \otimes_A B^A \quad , \tag{2.3.2.7}$$

et il résulte de la suite (2.0.7)

$$Y \longrightarrow \varphi(Y) \otimes_A B^A \rightrightarrows \varphi(Y) \otimes_A B \otimes_A B^A$$

et de la condition iv) que (2.3.2.7) se factorise par $\sigma_Y : Y \longrightarrow \varphi(Y) \otimes_A B^A$ via un morphisme $X \longrightarrow Y$, dont l'image est f.

2.3.2.4. Le foncteur e est essentiellement surjectif.

Si E est un B-comodule, soit $K(E)$ l'objet de $\underline{C}$ défini par le diagramme exact

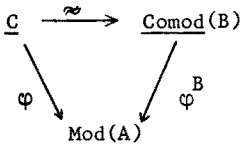
$$K(E) \longrightarrow E \otimes_A B^A \underset{\sigma_E \otimes id}{\overset{id \otimes \mu}{\rightrightarrows}} E \otimes_A B \otimes_A B^A .$$

D'après la condition iv) et 2.0.7, le morphisme canonique

$$e\, K(E) \longrightarrow E$$

est un isomorphisme.

2.3.3. Corollaire. Soit $\underline{C}$ une catégorie abélienne A-linéaire avec des générateurs et des $\varinjlim$, et soit $\varphi : \underline{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}}(A)$ un foncteur A-linéaire exact qui commute avec les $\varinjlim$. Alors, il existe une A-cogèbre B et une équivalence de catégories $\underline{C} \xrightarrow{\approx} \underline{\mathrm{Comod}}(B)$ rendant commutatif le triangle



si et seulement si, avec les notations de 2.3.2, le morphisme canonique $B^A \longrightarrow B^{A'}$ induit un isomorphisme

$$B^A \otimes_A A' \xrightarrow{\sim} B^{A'}.$$

En outre, dans ce cas, la A-cogèbre B, est A-plate.

2.3.3.2. Preuve. Elle est immédiate à partir de 2.3.1, 2.3.2 et de 2.0.6, 2.0.7.

2.3.4. Rappels sur les Ind-objets. Soit $\underline{C}$ une catégorie $\underline{U}$-petite, avec des $\varinjlim$ finies. Si $\underline{\mathrm{Ind}}(\underline{C})$ désigne la catégorie des ind-objets de $\underline{C}$ (SGA 4 I 8.2.4), $\underline{\mathrm{Sex}}(\underline{C}^o,\underline{\mathrm{Ens}})$ la catégorie des foncteurs exacts à gauche $\underline{C}^o \longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}}$, le foncteur

$$\underline{\mathrm{Ind}}(\underline{C}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Sex}}(\underline{C}^o,\underline{\mathrm{Ens}}) \tag{2.3.4.1}$$

qui à un ind-objet (X_i) associe le foncteur $\varinjlim h_{X_i}$

$$Y \longrightarrow \varinjlim_i \mathrm{Hom}(X,X_i)$$

est une équivalence de catégories (SGA 4 I 8.3.3).

2.3.4.1. Si $u : \underline{C} \longrightarrow \underline{D}$ est un foncteur exact à droite, $\underline{C}$, $\underline{D}$ des catégories $\underline{U}$-petites avec des $\varinjlim$ finies, on a un foncteur

$$u^* : \underline{\mathrm{Sex}}(\underline{D}^o,\underline{\mathrm{Ens}}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Sex}}(\underline{C}^o,\underline{\mathrm{Ens}}),$$

obtenu simplement en composant à droite avec u^o. Un calcul facile montre que u^* est adjoint à droite du foncteur

$$\mathrm{Ind}(u) : \underline{\mathrm{Ind}}(\underline{C}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ind}}(\underline{D})$$

qui associe à $(X_i) \longrightarrow (u(X_i))$, lorsqu'on fait les identifications données par (2.3.4.1). Plus généralement : si $I = \varinjlim h_{X_i}$ $(X_i \in \mathrm{ob}\ \underline{C})$ est un foncteur exact à gauche, donc $\mathrm{Ind}(u)(I) = \varinjlim h_{u(X_i)}$, et si F est un foncteur quelconque $\underline{D}^o \longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}}$, on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Ind}(u)(I),F) \simeq \mathrm{Hom}(I,F \circ u^o)$$

$$(\simeq \varprojlim Fu(X_i))$$

Ceci montre que si $u_! : \underline{Hom}(\underline{D}^o,\underline{Ens}) \longrightarrow \underline{Hom}(\underline{C}^o,\underline{Ens})$ est le foncteur considéré dans SGA 4 I 5.1, on a que $u_!(I)$ est exact à gauche, et on obtient un isomorphisme canonique

$$\text{(2.3.4.2)} \qquad \mathrm{Ind}(u)(I) \simeq u_!(I) .$$

En particulier, Ind(u) commute avec les $\varinjlim$ quelconques et si $\underline{C},\underline{D}$ possèdent des $\varprojlim$ finies, et u est exact à gauche, Ind(u) est exact à gauche (SGA 4 I 5.2).

Signalons enfin le carré commutatif

$$\text{(2.3.4.3)} \qquad \begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Ind}}(\underline{C}) & \xrightarrow{\mathrm{Ind}(u)} & \underline{\mathrm{Ind}}(\underline{D}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \underline{C} & \xrightarrow{u} & \underline{D} \end{array} ,$$

où $\underline{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Ind}}(\underline{C})$ correspond via l'équivalence (2.3.4.1) au foncteur $X \longmapsto h_X$.

2.3.4.2. Rappelons (GABRIEL [1], II 4.) qu'un objet X d'une catégorie abélienne $\underline{C}$ est noethérien si toute suite croissante de sous-objets de X est stationnaire ; la catégorie $\underline{C}$ est noethérienne si elle est $\underline{U}$-petite et si tous ses objets sont noethériens ; elle est localement noethérienne si elle possède une famille de générateurs noethériens indexée par un élément de $\underline{U}$, si elle possède des $\varinjlim$ et si les $\varinjlim$ filtrantes sont exactes.

Soit $\underline{C}$ une catégorie abélienne A-linéaire noethérienne. Il est alors facile de voir qu'on a des isomorphismes de catégories

$$\text{(2.3.4.4)} \qquad \underline{\mathrm{Sex}}(\underline{C}^o,\underline{Ens}) \simeq \underline{\mathrm{Sex}}(\underline{C}^o,\underline{Ab}) \simeq \underline{\mathrm{Sex}}_A(\underline{C}^o,\underline{\mathrm{Mod}}(A)) ,$$

où $\underline{\mathrm{Sex}}(\underline{C}^o,\underline{Ab})$ dénote la catégorie des foncteurs exacts à gauche $\underline{C}^o \longrightarrow \underline{Ab}$, $\underline{\mathrm{Sex}}_A(\underline{C}^o,\underline{\mathrm{Mod}}(A))$ celle des foncteurs A-linéaires exacts à gauche $\underline{C}^o \longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}}(A)$.

On prouve alors (GABRIEL [1], II 4. Th. 1) que $\underline{\mathrm{Sex}}_A(\underline{C}^o,\underline{\mathrm{Mod}}(A))$ est une catégorie abélienne localement noethérienne et que le foncteur

$$\underline{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Sex}}_A(\underline{C}^o, \underline{\mathrm{Mod}}(\underline{C}^o, \underline{\mathrm{Mod}}(A)) \cong \underline{\mathrm{Ind}}(\underline{C})$$

identifie $\underline{C}$ à la sous-catégorie pleine des objets noethériens.

2.3.5. Théorème. Supposons A noethérien, et soient $\underline{C}$ une catégorie abélienne A-linéaire, $\varphi : \underline{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Modtf}}(A)$ un foncteur A-linéaire, fidèle et exact, où $\underline{\mathrm{Modtf}}(A)$ dénote la catégorie des A-modules de type fini. Alors, il existe une A-cogèbre B plate et une équivalence de catégories $\underline{C} \xrightarrow{\approx} \underline{\mathrm{Comodtf}}(B)$ rendant commutatif le triangle

(2.3.5.1)

$$\begin{array}{ccc} \underline{C} & \xrightarrow{\approx} & \underline{\mathrm{Comodtf}}(B) \\ & {\scriptstyle\varphi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\varphi^B} & \\ & \underline{\mathrm{Modtf}}(A) & \end{array}$$

si et seulement si la condition suivante est vérifiée :

Pour toute A-algèbre A', si on note $F^{A'}$ le foncteur $\underline{C}^o \longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}}(A)$ qui à X associe $\mathrm{Hom}_A(\varphi(X), A')$, le morphisme canonique

$$F^A \longrightarrow F^{A'}$$

induit par les applications $\mathrm{Hom}_A(\varphi(X), A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\varphi(X), A')$ définit un isomorphisme

$$A' \otimes_A F^A \longrightarrow F^{A'} ,$$

où le produit tensoriel externe $A' \otimes_A F^A$ est pris dans la catégorie $\underline{\mathrm{Sex}}_A(\underline{C}^o, \underline{\mathrm{Mod}}(A))$.

2.3.5.1. Preuve de la nécessité. Si $\underline{C} = \underline{\mathrm{Comodtf}}(B)$ avec B plate, il est clair que φ est fidèle et exact (2.0.5). De plus, on sait alors (2.2.3) que le foncteur

$$\underline{\mathrm{Comod}}(B) \longrightarrow \underline{\mathrm{Sex}}_A(\underline{C}^o, \underline{\mathrm{Mod}}(A)) .$$

qui à E associe le foncteur $X \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(X, E)$ est une équivalence. Or, l'image de $A' \otimes_A B$ par ce foncteur est $F^{A'}$ avec les notations de 2.3.5, ce qui montre que la condition est vérifiée.

2.3.5.2. Preuve de la suffisance. Posons $\underline{C}' = \underline{\mathrm{Ind}}(\underline{C})$, et $\varphi' = \mathrm{Ind}(\varphi)$. On a donc

$$\varphi' : \underline{\mathrm{Ind}}(\underline{C}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ind}}(\underline{\mathrm{Modtf}}(A)) = \underline{\mathrm{Mod}}(A) .$$

On va démontrer que $\underline{C}'$, $\varphi' : \underline{C}' \longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}}(A)$ vérifient les conditions i), ii) du corollaire 2.3.3.

Il est d'abord clair que $\underline{C}$ est une catégorie noethérienne (2.3.4.2), donc il en résulte que $\underline{C}'$ est localement noethérienne, et que φ' est exact et commute avec les $\varinjlim$ par 2.3.4.1.

a) Vérification de i). Tout ce qui reste à démontrer est que φ' est fidèle, ou encore, puisqu'il est exact, que si un objet $\underline{X}$ de $\underline{C}'$ est non nul, son image $\varphi'(X)$ est $\neq 0$. Or, cela est clair, parce que $\underline{X}$ est $\varinjlim$ filtrante de ses sous-objets noethériens, que φ est exact, fidèle et que le carré

$$\begin{array}{ccc} \underline{C} & \xrightarrow{\varphi} & \underline{\mathrm{Modtf}}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{C}' & \xrightarrow{\varphi'} & \underline{\mathrm{Mod}}(A) \end{array}$$

est commutatif à isomorphisme près.

b) Vérification de ii). Il suffit de démontrer qu'on peut poser $B^{A'} = F^{A'}$ pour une A-algèbre A' ; la condition ii) de 2.3.3 sera alors une conséquence de la condition de 2.3.5.

Il s'agit de trouver pour un objet G de $\underline{\mathrm{Sex}}_A(\underline{C}^o, \underline{\mathrm{Mod}}(A))$ $(\cong \underline{C}')$, une bijection naturelle

$$\mathrm{Hom}(G, F^{A'}) \simeq \mathrm{Hom}_A(\varphi'(G), A')$$

Or, si on a $G = \varinjlim h_{X_i}$ $(X_i \in \mathrm{ob}\ \underline{C})$, il y a des bijections

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(G, F^{A'}) &\simeq \varprojlim \mathrm{Hom}(h_{X_i}, F^{A'}) \simeq \varprojlim F^{A'}(X_i) \\ &\simeq \varprojlim \mathrm{Hom}_A(\varphi(X_i), A') \simeq \mathrm{Hom}_A(\varinjlim \varphi(X_i), A') \\ &= \mathrm{Hom}_A(\varphi'(G), A') \end{aligned}$$

Il résulte alors de 2.3.3 que φ' définit une équivalence $\varphi' : \underline{C}' \longrightarrow \underline{\mathrm{Comod}}(B)$, pour une certaine A-cogèbre B , et induit donc une équivalence

$$\varphi : \underline{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Comodtf}}(B)$$

entre les sous-catégories pleines d'objets noethériens (voir 2.2.3).

2.4. Foncteurs $\underline{\mathrm{Comod}}(B) \longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}}(A)$.

2.4.1. On s'intéresse aux foncteurs $\varphi : \underline{\mathrm{Comod}}(B) \longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}}(A)$ qui commutent avec les $\varinjlim$ et qui sont A-linéaires. On a sur le A-module $\varphi(B_d)$ une structure de B-comodule à gauche ; celle-ci peut être définie de trois facons, et le B-comodule à gauche $\varphi(B_d)$ est fonctoriel en φ .

2.4.1.1. Si on applique φ au morphisme

$$\sigma_B : B_d \longrightarrow B_o \otimes_A B_d ,$$

on a un morphisme de A-modules

$$\varphi(B_d) \longrightarrow B_o \otimes_A \varphi(B_d) \tag{2.4.1.2}$$

qui définit sur $\varphi(B_d)$ la structure de B-comodule à gauche.

2.4.1.2. La A-algèbre $\mathrm{End}(B_d)$ agit sur le A-module $\varphi(B_d)$; de même pour toute A-algèbre ACU A' , φ définit un foncteur (voir 1.5.2.2 et 2.0.2)

$$\varphi_{(A')} : \underline{\mathrm{Comod}}(B') \longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}}(A') ,$$

et $\mathrm{End}(B'_d)$ agit sur $\varphi(B'_d) = \varphi(B_d) \otimes_A A'$. On voit ainsi que $\varphi(B_d)$ est un $\underline{\mathrm{End}}(B_d)$-module à gauche, donc par 1.2.2 et (2.0.5.2) un B-comodule à gauche.

2.4.1.3. On a un morphisme de $\underline{A}$-modules

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\varphi,\varphi^B) \longrightarrow \varphi(B_d)^\vee$$

qui à $\lambda : \varphi \longrightarrow \varphi^B$ associe le morphisme

$$\varphi(B_d) \xrightarrow{\lambda_{B_d}} B_o \xrightarrow{\varepsilon} A \quad .$$

On vérifie comme dans 2.1.1.1 que c'est un isomorphisme ; en particulier, $\varphi(B_d)^\vee$ se trouve muni d'une action de $\underline{End}(\varphi^B)$ à gauche et il résulte de 2.1.1.3 que $\varphi(B_d)$ est muni d'une structure de B-comodule à gauche.

2.4.2. On dit qu'un foncteur A-linéaire commutant avec les $\varinjlim$ $\varphi : \underline{Comod}(B) \longrightarrow \underline{Mod}(A)$ est <u>relativement exact</u> (par rapport à φ^B) si pour toute suite $E' \longrightarrow E \longrightarrow E''$ de B-comodules telle que la suite de A-modules $E'_o \longrightarrow E_o \longrightarrow E''_o$ soit exacte, la suite $\varphi(E') \longrightarrow \varphi(E) \longrightarrow \varphi(E'')$ est exacte. Si B est plate, φ est relativement exact si et seulement s'il est exact.

2.4.3. Soient E un B-comodule à droite, F un B-comodule à gauche. On définit le <u>coproduit tensoriel</u> de E et F sous B, noté $E \otimes^B F$, par le diagramme exact de A-modules

$$(2.4.3.1) \qquad E \otimes^B F \longrightarrow E_o \otimes_A F_o \underset{\mathrm{id}\otimes\sigma_F}{\overset{\sigma_E\otimes \mathrm{id}}{\rightrightarrows}} E_o \otimes B_o \otimes F_o \quad .$$

On dit qu'un B-comodule à gauche F est B-<u>coplat</u> (ou simplement, coplat) si le foncteur $E \longmapsto E \otimes^B F$ est relativement exact. La proposition suivante est une conséquence de 2.0.4.

2.4.3.1. <u>Proposition</u>. <u>Si E est un B-comodule, on a un isomorphisme canonique de A-modules</u>

$$(2.4.3.2) \qquad E \otimes^B B_g \xrightarrow{\sim} E_o \quad ;$$

<u>en particulier, B_g est B-coplat</u>.

2.4.4. <u>Proposition</u>. <u>La correspondance $\varphi \longmapsto \varphi(B_d)$ définit une équivalence entre la catégorie des foncteurs relativement exacts $\varphi : \underline{Comod}(B) \longrightarrow \underline{Mod}(A)$, et celle</u>

des B-comodules à gauche B-coplats.

2.4.4.1. Preuve. Si φ : Comod(B) $\longrightarrow$ Mod(A) est relativement exact, posons $u(\varphi) = \varphi(B_d)$. Si F est un B-comodule à gauche B-coplat, soit u(F) le foncteur Comod(B) $\longrightarrow$ Mod(A)

$$u(F)(E) = E \otimes^B F \quad .$$

Il est clair par 2.4.3.1 que le foncteur uv est isomorphe au foncteur identique. Quant à vu , appliquons le foncteur relativement exact φ au diagramme exact (2.0.4.1) ; on obtient

$$\varphi(E) \longrightarrow E_o \otimes_A \varphi(B_d) \rightrightarrows E_o \otimes_A B_A \varphi(B_d) \ ,$$

d'où un isomorphisme canonique

$$\varphi(E) \xrightarrow{\sim} E \otimes^B u(\varphi) \quad .$$

2.4.5. Proposition. Supposons B A-plate (resp. A-fidèlement plate). Alors, si φ : Comod(B) $\longrightarrow$ Mod(A) est un foncteur A-linéaire commutant avec les $\varinjlim$ qui est exact (resp. fidèle et exact), le A-module $\varphi(B_d)$ est plat (resp. fidèlement plat).

2.4.5.1. Preuve. Il suffit de remarquer que le foncteur

$$\begin{aligned} \text{Mod}(A) &\longrightarrow \text{Mod}(A) \\ M &\longmapsto M \otimes_A \varphi(B_d) \end{aligned}$$

est isomorphe au composé des foncteurs φ et $M \longmapsto M \otimes_A B_d$ (produit tensoriel externe).

2.5. Lois $\otimes$ sur Comod(B) .

2.5.1. Soient B , B' des A-cogèbres ; on définit un foncteur A-bilinéaire

$$\varphi^{B,B'} : \text{Comod}(B) \times \text{Comod}(B') \longrightarrow \text{Mod}(A)$$

par

$$\varphi^{B,B'}(E,E') = E_o \otimes_A E'_o$$

On a un morphisme de $\underline{A}$-modules

(2.5.1.1) $$\underline{End}(\varphi^{B,B'}) \longrightarrow (B \otimes_A B')^*$$

et on démontre de façon analogue à 2.1.1.1 que c'est un isomorphisme.

2.5.2. Soit $u : B \otimes_A B' \longrightarrow B''$ un morphisme de A-cogèbres. Il définit un foncteur A-bilinéaire

$$\varphi^u : \underline{Comod}(B) \times \underline{Comod}(B') \longrightarrow \underline{Comod}(B'')$$

rendant le triangle

$$\begin{array}{ccc} \underline{Comod}(B) \times \underline{Comod}(B') & \xrightarrow{\varphi^u} & \underline{Comod}(B'') \\ & {\scriptstyle \varphi^{B,B'}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \varphi^{B''}} & \\ & \underline{Mod}(A) & \end{array}$$

commutatif. On vérifie comme dans 2.1.2.1 que l'application $u \longmapsto \varphi^u$ induit une bijection de l'ensemble $\mathrm{Hom}(B \otimes_A B', B'')$ sur l'ensemble des foncteurs $\varphi : \underline{Comod}(B) \times \underline{Comod}(B') \longrightarrow \underline{Comod}(B'')$ tels que

$$\varphi^{B''} \circ \varphi = \varphi^{B,B'} .$$

On peut également établir une variante de cet énoncé avec des classes d'équivalence de couples (φ,η) d'un foncteur A-bilinéaire φ et d'un isomorphisme $\eta : \varphi^{B,B'} \xrightarrow{\sim} \varphi^{B''} \circ \varphi$, comme dans 2.1.2.3 .

2.5.3. Il résulte de ce qui précède que la donnée sur $\underline{Comod}(B)$ d'une loi $\otimes$ pour laquelle φ^B soit un $\otimes$-foncteur strict (I 4.1.1) revient à celle d'un morphisme de A-cogèbres $B \otimes_A B \longrightarrow B$, i.e. d'une structure de bigèbre sur B (I 6.1.3). Une telle loi sera appelée admissible. La donnée d'une loi $\otimes$ admissible revient aussi (voir fin de 2.5.2) à celle d'une classe d'équivalence de couples $(\otimes,\eta)$, où $\otimes$

est une loi $\otimes$ sur $\underline{\mathrm{Comod}}(B)$ et η est une structure de $\otimes$-foncteur sur le foncteur φ^B .

2.5.3.1. Supposons $\underline{\mathrm{Comod}}(B)$ muni d'une loi $\otimes$ admissible. Alors, il y a une contrainte d'associativité, resp. de commutativité (I § 1) avec laquelle φ^B soit compatible si et seulement si la A-algèbre B est associative, resp. commutative ; cette contrainte est alors unique. De même, $\underline{\mathrm{Comod}}(B)$ est unifère (I 1.3.2) si et seulement si B l'est (I 6.1.2).

2.5.4. Soient $\underline{\mathrm{Comod}}(B)$, $\underline{\mathrm{Comod}}(B')$ munies de lois $\otimes$ admissibles, correspondant à des bigèbres B , B' . Alors, les morphismes de A-bigèbre $B \longrightarrow B'$ correspondent biunivoquement aux $\otimes$-foncteurs stricts $\varphi : \underline{\mathrm{Comod}}(B) \longrightarrow \underline{\mathrm{Comod}}(B')$ vérifiant

$$\varphi^{B'} \circ \varphi = \varphi^B \quad .$$

On a des assertions analogues lorsqu'il y a des contraintes pour les lois $\otimes$ sur $\underline{\mathrm{Comod}}(B)$, $\underline{\mathrm{Comod}}(B')$.

2.5.4.1. On démontre facilement aussi, si B est une A-bigèbre, qu'on a des isomorphismes canoniques de foncteurs sur $\underline{\mathrm{Ann}}_{/A}$

$$\underline{\mathrm{End}}^{\otimes}(\varphi^B) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{A\text{-alg.}}(B,A) \quad . \tag{2.5.4.1}$$

Si B est unifère, on a

$$\underline{\mathrm{End}}^{\otimes,1}(\varphi^B) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{A\text{-alg.un.}}(B,A) \quad , \tag{2.5.4.2}$$

avec des notations évidentes.

2.6. Cas d'un anneau régulier de dimension ≤ 1

2.6.0. On fixe un anneau A régulier de dimension ≤ 1 ; c'est donc un produit fini d'anneaux de Dedekind.

2.6.1. Théorème. Soient C une catégorie abélienne A-linéaire,

$\varphi : \underline{C} \longrightarrow \underline{\text{Modtf}}(A)$ *un foncteur A-linéaire fidèle et exact. Alors, il existe une A-cogèbre plate* B *et une équivalence de catégories* $\underline{C} \xrightarrow{\approx} \underline{\text{Comodtf}}(B)$ *rendant commutatif le triangle*

(2.6.1.1)

$$\begin{array}{ccc} \underline{C} & \xrightarrow{\approx} & \underline{\text{Comodtf}}(B) \\ & {\scriptstyle\varphi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\varphi^B} & \\ & \underline{\text{Modtf}}(A) & \end{array}$$

si et seulement si la condition suivante est vérifiée :

Si $\underline{C}_o$ *désigne la sous-catégorie pleine de* $\underline{C}$ *dont les objets sont les* X *pour lesquels* $\varphi(X)$ *est un A-module projectif de type fini, tout objet de* $\underline{C}$ *est quotient d'un objet de* $\underline{C}_o$.

2.6.1.1. *Preuve.* La nécessité est claire en vertu de 2.0.6.1 et du résultat de SERRE rappelé en 2.2.4.4 qui est, bien entendu, valable sur un anneau régulier de dimension ≤ 1 .

Quant à la suffisance, on va montrer que $\underline{C}$ et $\varphi : \underline{C} \longrightarrow \underline{\text{Modtf}}(A)$ satisfont la condition de 2.3.5. Remarquons d'abord que si F,G sont des objets de $\underline{\text{Sex}}_A(\underline{C}^o,\underline{\text{Mod}}(A))$, et si on appelle F_o , G_o les restrictions de F,G à $(\underline{C}_o)^o$, l'application évidente

$$\text{Hom}(F,G) \longrightarrow \text{Hom}(F_o,G_o)$$

est bijective ; cela résulte aussitôt de la condition ii) de 2.6.1. Maintenant, pour démontrer qu'on a une identification

$$A' \otimes_A F^A \simeq F^{A'}$$

dans $\underline{\text{Sex}}_A(\underline{C}^o,\underline{\text{Mod}}(A))$, il suffit de montrer que pour tout foncteur exact à gauche A-linéaire $G : \underline{C}^o \longrightarrow \text{Mod}(A')$, l'application

$$\text{Hom}_{A'}(F^{A'},G) \longrightarrow \text{Hom}_A(F^A,G)$$

est bijective. Par la remarque précédente, il suffit encore de prouver que l'application

$$\mathrm{Hom}_{A'}(F_o^{A'},G_o) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(F_o^A,G_o)$$

est bijective. Or, ceci résulte de ce que $F_o^{A'}$ s'identifie dans la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}_A(\underline{C}_o^o,\underline{\mathrm{Mod}}(A))$ au produit tensoriel externe $A' \otimes_A F^A$; en effet, si $X \in \mathrm{ob}\ \underline{C}_o$, on a

$$F^{A'}(X) = \mathrm{Hom}_A(\varphi(X),A') \simeq \mathrm{Hom}(\varphi(X),A) \otimes_A A'$$

$$\simeq F^A(X) \otimes_A A' .$$

2.6.2. Soit $\underline{C}$ une catégorie abélienne ; on dira qu'une famille $(E_i)_{i\in I}$ d'objets de $\underline{C}$ *engendre* $\underline{C}$ si c'est une famille de générateurs de $\underline{C}$ (SGA 4 I, 7.1) ; cela signifie aussi, comme on le voit facilement, que la plus petite sous-catégorie abélienne strictement pleine de $\underline{C}$ contenant les E_i ($i\in I$) et telle que le foncteur d'inclusion soit exact, est $\underline{C}$ elle-même. Si $E \in \mathrm{ob}\ \underline{C}$, on dit que E est un pseudo-générateur de $\underline{C}$ si tout objet de $\underline{C}$ est quotient d'un sous-objet (ou sous-objet d'un quotient, cela revient au même) d'un objet E^n ($n \in \mathbb{N}$). Si $\underline{C}$ est noethérienne, il est clair qu'un générateur de $\underline{C}$ est un pseudo-générateur de $\underline{C}$, mais la réciproque est fausse ; on en donnera un exemple dans 2.6.3.4.

2.6.2.1. *Proposition.* *Soient* A *un anneau noethérien,* B *une* A*-cogèbre plate, et considérons les assertions suivantes.*

a) B *est un* A*-module de type fini.*

b) Comodtf(B) *est engendrée par un objet, plat en tant que* A*-module.*

c) Comodtf(B) *est engendrée par un objet.*

c') Comodtf(B) *est engendrée par une famille finie d'objets.*

d) Comodtf(B) *possède un pseudo-générateur.*

On a alors a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Leftrightarrow$ c') $\Rightarrow$ d) . *En outre, si* A *est régulier de dimension* ≤ 1 , d) $\Rightarrow$ a) .

2.6.2.2. Preuve. L'équivalence de c) et de c') et les implications b) ⇒ c) ⇒ d) sont triviales. Supposons B de type fini en tant que A-module, et montrons que B engendre la catégorie Comodtf(B) . En effet, si E est un B-comodule de type fini, on a le diagramme exact (2.0.7.1)

$$E \longrightarrow E_o \otimes_A B \rightrightarrows E_o \otimes_A B_o \otimes_A B ,$$

et les hypothèses de type fini sur E_o , B_o , entraînent que les B-comodules $E_o \otimes_A B$, $E_o \otimes_A B_o \otimes_A B$ sont conoyaux de morphismes $B^n \longrightarrow B^m$, donc que E se trouve dans toute sous-catégorie de Comodtf(B) vérifiant les conditions du début.

Supposons maintenant A régulier de dimension ≤ 1 . Si Comodtf possède un pseudo-générateur, en vertu de 2.2.4.4 on peut supposer que celui-ci est projectif. Notons P cet objet ; il est alors clair que la flèche

$$\check{B} \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}_A(P_o)$$

est un monomorphisme. Mais P_o étant projectif de type fini, le A-module $\underline{\mathrm{End}}(P_o)$ est représentable (1.1.1) par un A-module projectif de type fini. Il en résulte que B est quotient d'un A-module de type fini, d'où c) ⇒ a).

2.6.3. Cas d'un corps k de base. Dans ce cas, on a les assertions suivantes

a) Soit C une catégorie abélienne k-linéaire, $\varphi : C \longrightarrow$ Modtf(k) un foncteur k-linéaire. Alors, il existe une k-cogèbre B et une équivalence de catégories $C \xrightarrow{\approx}$ Comodtf(B) rendant commutatif le triangle (2.6.1.1) si et seulement si φ est fidèle et exact.

b) Si B est une k-cogèbre, B est réunion filtrante $B = \varinjlim B_i$ de ses sous-cogèbres de rang fini sur k .

c) La catégorie Comodf(B) est réunion filtrante des sous-catégories pleines Comodf(B_i) .

d) La k-cogèbre B est de rang fini sur k si et seulement si la catégorie

Comodf(B) est engendrée par un objet (2.6.2) ou encore s'il existe un objet X tel que tout autre objet soit sous-objet d'un quotient (ou de façon équivalente quotient d'un sous-objet) d'un X^n (i.e. un pseudo-générateur). Dans ce cas, un objet X est un pseudo-générateur si et seulement si la flèche $\overset{\vee}{B} \longrightarrow \mathrm{End}(X)$ est injective.

e) Soient X un B-comodule de rang fini sur k , $\underline{C}(X)$ la sous-catégorie abélienne pleine de Comodf(B) formée des sous-objets des quotients des X^n $(n \geq 0)$ $\mathcal{U}(X)$ la k-algèbre $\mathrm{Im}(\overset{\vee}{B} \longrightarrow \mathrm{End}_k(X))$. Alors $\underline{C}(X)$ s'identifie à la catégorie des $(\mathcal{U}(X))^{\vee}$-co-modules de rang fini sur k (ou encore à celle des $\mathcal{U}(X)$-modules de rang fini sur k).

f) Soit $u : B \longrightarrow B'$ un morphisme de k-cogèbres, définissant un foncteur φ^u : Comodf(B) $\longrightarrow$ Comodf(B'). Alors

i) u est injectif si et seulement si φ^u est pleinement fidèle et pour tout B-comodule X tout sous-objet de $\varphi^u(X)$ provient d'un sous-objet de X . (La dernière condition est superflue si Comodf(B') est semi-simple ; elle ne l'est pas en général, voir 2.6.3.4).

ii) u est surjectif si et seulement si tout B'-comodule est sous-objet d'un quotient d'un $\varphi^u(X)$.

g) Soit B une k-cogèbre, correspondant à une k-algèbre profinie $\overset{\vee}{B} = \varprojlim \overset{\vee}{B}_i$. Alors, $\overset{\vee}{B}$ est une algèbre semi-simple (i.e. les k-algèbres de rang fini $\overset{\vee}{B}_i$ sont semi-simples) si et seulement si la catégorie Comodf(B) est semi-simple (i.e. toute suite exacte courte est scindée).

2.6.3.1. Preuve. Celle de a) résulte de 2.6.1. L'assertion b) est une conséquence de 2.2.2.3 ; en effet, un sous-espace B' de B est une sous-cogèbre si et seulement si B' est un sous-$B \otimes_k B^o$-comodule de B , où B^o est la k-cogèbre opposée de B . L'assertion c) est conséquence formelle de b). L'assertion d) résulte de 2.6.2.1 et de e) prouvé ci-dessous.

2.6.3.2. Preuve de e). Remarquons tout d'abord que $\mathcal{U}(X)$ en tant que $\overset{\vee}{B}$-module fini (1.4.5) appartient à $\underline{C}(X)$; en effet, si $x_1,\ldots,x_n \in X$ sont des générateurs du

$\check{B}$-module fini X , $u(X)$ est l'image par le morphisme associé à $x_1,\ldots,x_n$

$$\check{B} \longrightarrow X^n \qquad 1 \longmapsto (x_1,\ldots,x_n) \ .$$

Si on note u' l'algèbre des endomorphismes du foncteur oubli sur $\underline{C}(X)$, on a une flèche

$$u(X) \longrightarrow u' \ ;$$

ceci provient de ce que $u(X)$ agit sur tout objet de $\underline{C}(X)$. Il faut montrer que cette application est bijective, et pour cela on va exhiber une application inverse : si $\alpha \in u'$, on lui associe

$$\alpha_{u(X)}(1) \in u(X) \ ;$$

on vérifie aussitôt que c'est bien une inverse, il suffit de remarquer que pour tout objet Y de $\underline{C}(X)$, on a une bijection

$$\mathrm{Hom}_{\check{B}}(u(X),Y) \xrightarrow{\sim} Y \ .$$

2.6.3.3. L'assertion f) i) est une conséquence directe de e). Démontrons ii) : tout d'abord $u : B \longrightarrow B'$ est surjectif si et seulement si $\check{u} : \check{B}' \longrightarrow \check{B}$ est injectif ; soit maintenant $\underline{C}''$ la sous-catégorie strictement pleine de $\underline{\mathrm{Comodf}}(B') = \underline{\mathrm{Modf}}(\check{B}')$ (1.4.5) engendrée par les sous-objets de quotients des $\varphi^u(X)$. On a un diagramme

$$\underline{\mathrm{Modf}}(\check{B}) \longrightarrow \underline{C}'' \longrightarrow \underline{\mathrm{Modf}}(\check{B}')$$

correspondant à un diagramme de k-algèbres profinies

$$\check{B} \longleftarrow u'' \longleftarrow \check{B}' \ .$$

Dans ce diagramme, d'après i), la flèche $\check{B}' \longrightarrow u''$ est surjective. Si $\underline{C}'' = \underline{\mathrm{Modf}}(\check{B}')$, on voit directement que $\check{B}' \longrightarrow \check{B}$ est injectif. Inversement, si $\check{B}' \longrightarrow \check{B}$ est injectif, il en est de même de $\check{B}' \longrightarrow \check{u}''$, donc $\underline{C}'' = \underline{\mathrm{Modf}}(\check{B}')$.

Enfin, g) exprime simplement la définition d'une algèbre semi-simple.

2.6.3.4. Exemple. Soit $\underline{C}$ la catégorie dont les objets sont les morphismes $f : E_1 \longrightarrow E_2$ de k-espaces vectoriels de rang fini, les morphismes de $E_1 \xrightarrow{f} E_2$ dans $E_1' \xrightarrow{f} E_2'$ étant les diagrammes commutatifs dans $\underline{Modf}(k)$

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{f} & E_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_1' & \xrightarrow[f']{} & E_2' \end{array} .$$

Il est clair que $\underline{C}$ est une catégorie abélienne k-linéaire. De plus, on dispose d'un foncteur k-linéaire fidèle et exact $\varphi : \underline{C} \longrightarrow \underline{Modf}(k)$

$$\varphi(E_1 \xrightarrow{f} E_2) = E_1 \oplus E_2 .$$

Il résulte de 2.6.3 a) que φ définit une équivalence

$$\underline{C} \xrightarrow{\sim} \underline{Comod}(B)$$

où B est une certaine k-cogèbre.

Soit P l'objet suivant de $\underline{C}$:

$$P = \{id_k : k \longrightarrow k\} .$$

Je vais prouver que P est un pseudo-générateur de $\underline{C}$. Tout objet de $\underline{C}$ est isomorphe à un objet

$$f : k^r \longrightarrow k^s ,$$

où f est une application k-linéaire arbitraire. Si $\Gamma(f)$ est le graphe de f, $\Gamma(f) \longrightarrow k^{r+s}$ (morphisme d'inclusion) est un sous-objet de P^{r+s}, et on voit aussitôt que $f : k^r \longrightarrow k^s$ s'identifie au quotient de $\Gamma(f) \longrightarrow k^{r+s}$ par le sous-objet $0 \longrightarrow k^r$. Par ailleurs, on a $End(P) = k$; ceci montre que P n'est pas un générateur, car la sous-catégorie pleine dont les objets sont les P^n ($n \in \mathbb{N}$) est une sous-catégorie abélienne $\underline{D}$ (isomorphe à $\underline{Modf}(k)$) dont le foncteur d'inclusion est exact, et distincte de $\underline{C}$. Elle n'est pas stable par sous-objets.

Cependant, bien que $\underline{D}$ soit isomorphe à $\underline{\text{Modf}}(k)$, le foncteur $\varphi' : \underline{D} \longrightarrow \underline{\text{Modf}}(k)$ obtenu par restriction de φ , identifie $\underline{D}$ à la catégorie des modules à gauche (de type fini) sur l'algèbre $M_2(k)$ des matrices 2×2 à coefficients dans k . On peut aussi déterminer facilement B : c'est la cogèbre duale de la k-algèbre de rang 3 ayant la représentation matricielle (dans $\varphi(P) = k^2$)

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda' \end{pmatrix} ,$$

représentation qui d'ailleurs correspond à l'inclusion $\underline{D} \longrightarrow \underline{C}$.

§ 3. REPRESENTATIONS LINEAIRES DE SCHEMAS EN GROUPES AFFINES

3.0. Terminologie et notations.

3.0.1. On conserve les notations de 1.0 et 2.0.1. En outre, toutes les A-bigèbres sont supposées ACU en tant qu'algèbre, AU en tant que cogèbre.

3.0.2. Soit G un A-schéma en monoïdes affine. La A-algèbre

$$B = \Gamma(G, \underline{O}_G)$$

est canoniquement une A-bigèbre grâce au morphisme $B \longrightarrow B \otimes_A B$ induit par la multiplication dans G .

On peut regarder G et c'est ce qu'on fera le plus souvent, comme un foncteur à valeurs les monoïdes

$$G : \underline{\text{Ann}}_{/A} \longrightarrow \underline{\text{Mon}} ,$$

qui est représentable par B :

$$G(A') = \text{Hom}_{A\text{-alg.}}(B, A'). \qquad (3.0.2.1)$$

On a une inclusion évidente de foncteurs en monoïdes

(3.0.2.2) $$G \longrightarrow \check{B}$$

la loi de monoïde sur $\check{B}$ étant le produit pour sa structure de A-algèbre (voir 1.2.1). La A-algèbre $\check{B}$ est appelée l'algèbre des distributions sur G, les points de G s'identifiant aux distributions de Dirac.

3.0.3. Rappelons que, si G est un A-monoïde affine, un G-A-module (ou simplement un G-module, ou une représentation linéaire de G dans un A-module) est un A-module M muni d'un morphisme de foncteurs en monoïdes sur Ann/A, $G \longrightarrow \underline{End}_A(M)$ (SGA 3 I 4.7). La catégorie des G-modules sera notée $\underline{Rep}(G)$, et le foncteur oubli sera noté ω^G

$$\omega^G : \underline{Rep}(G) \longrightarrow \underline{Mod}(A)$$

La catégorie $\underline{Rep}(G)$ est munie d'une loi $\otimes$ ACU pour laquelle ω^G est un $\otimes$-foncteur ACU strict. Si M,N sont des G-modules, G agit dans $M \otimes_A N$ de la façon suivante : si A' est une A-algèbre ACU, $g \in G(A')$, alors

(3.0.3.1) $$g_{M\otimes N} = g_M \otimes g_N \quad .$$

L'objet unité est le A-module A muni de l'action de G pour laquelle, si $g \in G(A')$

(3.0.3.2) $$g_A = id_{A'}$$

3.1. Schémas en monoïdes affines.

3.1.1. Scholie. Soit B une A-cogèbre

1) Les données suivantes sont équivalentes

a) Une loi $\otimes$ ACU (I 4.2.1) et admissible (2.5.3) sur Comod(B).

b) Une structure de A-bigèbre prolongeant celle de A-algèbre sur B.

c) Un A-monoïde affine G et un isomorphisme de A-cogèbres

$$\Gamma(G,\underline{O}_G) \simeq B \ .$$

2) Lorsqu'on a une telle donnée, le foncteur

(3.1.1.1) $$\underline{\mathrm{Comod}}(B) \longrightarrow \underline{\mathrm{Rep}}(G)$$

défini par (3.0.2.2) est un $\otimes$-isomorphisme ACU.

3) Le $\otimes$-isomorphisme (3.1.1.1) induit des isomorphismes

(3.1.1.2) $$G \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{End}}^{\otimes,1}(\omega^G) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{End}}^{\otimes,1}(\varphi^B) \quad .$$

3.1.1.1. L'équivalence de a) et b) a été prouvée dans 2.5, celle de b) et c) est facile et bien connue (voir SGA 3 I 4.2), l'assertion 2) se trouve dans SGA 3 I 4.7.2, et 3) a été prouvé dans 2.5.4. Rappelons comment, à partir de l'une des données a), b),c) ci-dessus, les deux autres peuvent se déduire

3.1.1.2. On a une donnée a). On définit alors un morphisme de A-cogèbres

$$B \otimes_A B \longrightarrow B$$

de la façon suivante : la loi $\otimes$ définit un morphisme de A-algèbres

$$\underline{\mathrm{End}}(\varphi^B) \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}(\varphi^{B,B}) \quad ,$$

ou encore, par 2.1.1.1, 2.5.1, un morphisme de A-algèbres

$$\overset{\vee}{B} \longrightarrow (B \otimes_A B)^{\vee} \quad ,$$

dont le transposé est le morphisme cherché. En tant que A-algèbre, B est ACU puisqu'il en est ainsi de la loi $\otimes$.

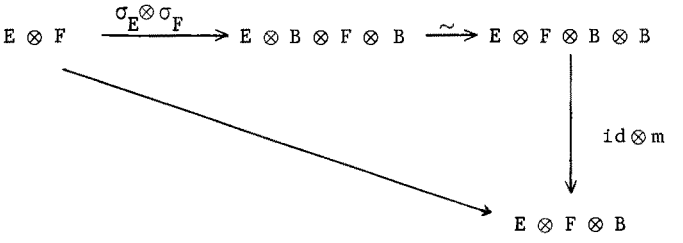
Si on pose $G = \mathrm{Spec}(B)$, la structure de A-cogèbre de B fait G un A-schéma en monoïdes affine, et de plus on a un isomorphisme de A-cogèbres

$$\Gamma(G,\underline{O}_G) \simeq B \quad .$$

Le groupe G peut être aussi défini par la formule (3.1.1.2).

3.1.1.3. On a une donnée b). On obtient une donnée c) comme ci-dessus, en posant $G = \mathrm{Spec}(B)$.

Pour avoir une donnée a), il faut définir pour tout couple E,F de B-comodules, une structure de B-comodule sur $E \otimes_A F$. Celle-ci est par définition :



où m est la multiplication de B. La loi $\otimes$ ainsi définie est ACU parce que B est ACU.

3.1.1.4. On a une donnée c). La donnée de type b) provient de l'isomorphisme $\Gamma(G,\underline{O}_G) \simeq B$ par transport de structure.

Pour obtenir la donnée a), on se sert de la loi $\otimes$ de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ (voir 3.0.3) et on la transporte par l'isomorphisme de catégories (3.1.1.1).

3.1.2. Soit B une A-cogèbre munie des données équivalentes a), b), c) de 3.1.1. On voit alors facilement que la multiplication $B \otimes_A B \longrightarrow B$ est un morphisme de A-cogèbres, i.e. que B_d est une A-algèbre ACU de la $\otimes$-catégorie $\underline{\mathrm{Comod}}(B)$ (I 6.1). De plus, on définit un morphisme d'algèbres de la $\otimes$-catégorie $\underline{\mathrm{Comod}}(B)$

$$q : B \otimes B \longrightarrow B_o \otimes_A B \,. \tag{3.1.2.1}$$

La somme directe d'algèbres ACU étant le produit tensoriel dans $\underline{\mathrm{Comod}}(B)$, il suffit de définir les composantes $q_1, q_2 : B \longrightarrow B_o \otimes_A B$ de q. On pose $q_1 = \mu$, la comultiplication de B, et q_2 est défini par

$$q_2 : B \simeq A \otimes_A B \longrightarrow B_o \otimes_A B \,,$$

la flèche $A \longrightarrow B$ étant l'unité de B.

3.1.2.1. Proposition. Soit G le A-monoïde Spec(B). Alors, les conditions suivantes sont équivalentes.

a) G est un groupe

b) Pour toute A-algèbre ACU A', les ⊗-endomorphismes unifères de $(\omega^G)_{A'}$, sont des isomorphismes.

c) Le morphisme q est un isomorphisme.

3.1.2.2. Preuve. L'équivalence de a) et b) est claire par 3.1.1 iii). Celle de a) et c) provient de ce que si on pose $p = Spec(q)$,

$$p : G \times G \longrightarrow G \times G \quad ,$$

on a pour A'/A et $g, g' \in G(A')$

$$p(g,g') = (gg',g') \quad ,$$

et de ce qu'un monoïde (ensembliste) Γ est un groupe si et seulement si l'application

$$\Gamma \times \Gamma \longrightarrow \Gamma \times \Gamma \qquad (g,g') \longmapsto (gg',g')$$

est bijective.

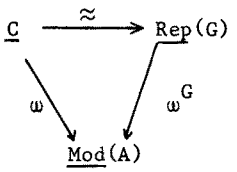
3.1.4. On déduit aussitôt de 3.1.1 et 2.3.2, 2.3.3, 2.3.5 les propositions suivantes.

3.1.4.1. Proposition. Soit C une ⊗-catégorie A-linéaire ACU, $\omega : C \longrightarrow \underline{Mod}(A)$ un ⊗-foncteur A-linéaire ACU. Alors, il existe un A-monoïde affine G et une ⊗-équivalence ACU de ⊗-catégories $C \xrightarrow{\approx} \underline{Rep}(G)$ rendant commutatif le triangle de de ⊗-catégories

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\approx} & \underline{Rep}(G) \\ & {\scriptstyle\omega}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\omega^G} & \\ & \underline{Mod}(A) & \end{array}$$

si et seulement si les conditions i) -iv) de 2.3.2 sont vérifiées.

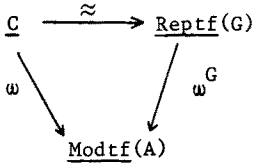
3.1.4.2. Proposition. Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie abélienne A-linéaire ACU avec des générateurs et des $\varinjlim$, et soit $\omega : \underline{C} \longrightarrow \underline{Mod}(A)$ un $\otimes$-foncteur exact A-linéaire ACU. Alors, il existe un A-monoïde affine G et une $\otimes$-équivalence ACU de $\otimes$-catégories $\underline{C} \xrightarrow{\approx} \underline{Rep}(G)$ rendant commutatif le triangle de $\otimes$-catégories



si et seulement si la condition de 2.3.3 est vérifiée.

Dans ce cas, le A-monoïde G est plat.

3.1.4.3. Proposition. Supposons A noethérien, et soient $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie abélienne A-linéaire ACU, $\omega : \underline{C} \longrightarrow \underline{Modtf}(A)$ un $\otimes$-foncteur A-linéaire ACU fidèle et exact. Alors, il existe un A-monoïde affine et plat G, et une $\otimes$-équivalence ACU de $\otimes$-catégories $\underline{C} \xrightarrow{\approx} \underline{Reptf}(G)$ rendant commutatif le triangle de $\otimes$-catégories



si et seulement si la condition de 2.3.5 est vérifiée.

3.2. Foncteurs fibre sur Rep(G).

3.2.1. Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie abélienne A-linéaire ACU, avec des $\varinjlim$ et telle que les foncteurs $X \longrightarrow X \otimes Y$ commutent avec les $\varinjlim$; on appelle foncteur fibre sur $\underline{C}$ (à valeurs dans A) un $\otimes$-foncteur ACU A-linéaire $\underline{C} \longrightarrow \underline{Mod}(A)$ qui est exact, fidèle et qui commute avec les $\varinjlim$. Si ω, ω' sont des foncteurs fibre sur $\underline{C}$, un morphisme de ω dans ω' est un $\otimes$-morphisme unifère $\omega \longrightarrow \omega'$. La catégorie obtenue ainsi sera notée $\underline{Fib}_A(\underline{C})$, ou $\underline{Fib}(\underline{C},A)$.

3.2.2. Proposition. Soient $G = \mathrm{Spec}(B)$ un A-monoïde affine, $\omega : \mathrm{Rep}(G) \longrightarrow \mathrm{Mod}(A)$ un $\otimes$-foncteur ACU relativement exact (2.4.2). Alors, le foncteur $\mathrm{Ann}_{/A} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ qui à A'/A associe $\mathrm{Hom}^{\otimes,1}(\omega_{A'},(\omega^G)_{A'})$, noté $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,1}(\omega,\omega^G)$, est représenté par la A-algèbre ACU $\omega(B_d)$.

3.2.2.1. Preuve. On a remarqué dans 3.1.2 que B_d est une algèbre dans $\mathrm{Comod}(B)$, identifié à $\mathrm{Rep}(G)$; $\omega(B_d)$ est ainsi canoniquement une A-algèbre ACU, et il résulte formellement de 2.4.4 que $\omega(B_d)$ représente $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,1}(\omega,\omega^G)$.

3.2.2.2. Remarque. On vérifie aussitôt que la comultiplication de $\omega(B_d)$ (voir 2.4.1), $\omega(B_d) \longrightarrow B_o \otimes_A \omega(B_d)$, est un morphisme de A-algèbres. Si on pose

$$P = \mathrm{Spec}(\omega(B_d)) ,$$

on obtient une action à gauche du A-monoïde G sur le A-schéma P

$$G \times P \longrightarrow P .$$

Cette action correspond, via les identifications

$$P \simeq \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,1}(\omega,\omega^G)$$

$$G \simeq \underline{\mathrm{End}}^{\otimes,1}(\omega^G)$$

à l'action à gauche évidente de $\underline{\mathrm{End}}^{\otimes,1}(\omega^G)$ sur $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,1}(\omega,\omega^G)$.

3.2.3. Théorème. Soit $G = \mathrm{Spec}(B)$ un A-groupe affine et plat, et soient ω, ω' des foncteurs fibre sur $\mathrm{Rep}(G)$. Alors,

a) ω et ω' sont localement isomorphes pour la topologie fpqc ; i.e., il existe une A-algèbre fidèlement plate A' et un $\otimes$-isomorphisme $\omega_{A'} \overset{\sim}{\to} \omega'_{A'}$.

b) $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,1}(\omega,\omega') = \underline{\mathrm{Isom}}^{\otimes}(\omega,\omega')$.

3.2.3.1. Preuve. Il suffit évidemment de faire $\omega' = \omega^G$, et il s'agit alors de

prouver que le G-schéma $P = \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,1}(\omega,\omega^G)$ est un torseur pour la topologie fpqc (GIRAUD [1],III 1.4). Pour voir que P est un pseudo-torseur sous G, il faut prouver que le morphisme de A-schémas

$$G \times P \longrightarrow P \times P \qquad (g,p) \longrightarrow (gP,P)$$

est un isomorphisme. Or le morphisme correspondant entre les algèbres affines (3.2.2)

$$\omega(B_d) \otimes \omega(B_d) \longrightarrow B \otimes \omega(B_d)$$

est l'image par ω du morphisme (3.1.2.1) d'algèbres de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$. D'après la proposition 3.1.2.1 celui-ci est un isomorphisme.

Enfin, G étant plat sur A, B est un A-module fidèlement plat, et par 2.4.5, il en est de même pour $\omega(B_d)$ ce qui prouve que P est un torseur.

3.2.3.2. Désignons par $\underline{\mathrm{Tors}}(G)$ la catégorie des G-torseurs à droite sur Spec(A). Si ω est un foncteur fibre sur $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$, $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,1}(\omega^G,\omega) = \underline{\mathrm{Isom}}^{\otimes}(\omega^G,\omega)$ est un G-torseur à droite, et on a ainsi un foncteur

(3.2.3.1) $$\underline{\mathrm{Fib}}(G) \longrightarrow \underline{\mathrm{Tors}}(G) .$$

3.2.3.3. Corollaire. Le foncteur (3.2.3.1) est une équivalence de catégories.

3.2.3.4. Voici un foncteur quasi-inverse pour (3.2.3.1) : si P est un torseur à droite sous G, on lui associe le foncteur $\omega_P : \underline{\mathrm{Rep}}(G) \longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}}(A)$ défini par

3.2.3.2) $$\omega_P(M) = P \times^G M ,$$

où on utilise l'opération de torsion introduite dans loc.cit 2.3.1. Le foncteur ω_P est muni canoniquement d'une structure de $\otimes$-foncteur, et on vérifie que c'est un foncteur fibre. On a un isomorphisme canonique

(3.2.3.3) $$\omega_{G_d} \simeq \omega^G .$$

3.3. Fonctorialité.

3.3.1. Scholie. Soient $G = \mathrm{Spec}(B)$, $G' = \mathrm{Spec}(B')$ des A-monoïdes affines. Alors, il y a équivalence entre les données suivantes :

a) Un $\otimes$-foncteur $\underline{\mathrm{Rep}}(G') \longrightarrow \underline{\mathrm{Rep}}(G)$ rendant commutatif le triangle de $\otimes$-catégories

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Rep}}(G') & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Rep}}(G) \\ & {\scriptstyle \omega^{G'}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \omega^{G}} & \\ & \underline{\mathrm{Mod}}(A) & \end{array}$$

a') Une classe d'équivalence de couples (ω,η) , où $\omega : \underline{\mathrm{Rep}}(G') \longrightarrow \underline{\mathrm{Rep}}(G)$ est un $\otimes$-foncteur A-linéaire, η un $\otimes$-isomorphisme $\omega^{G} \circ \omega \simeq \omega^{G'}$.

b) Un morphisme $B' \longrightarrow B$ de A-bigèbres.

c) Un morphisme $u : G \longrightarrow G'$ de A-monoïdes affines.

3.3.1.1. L'équivalence entre des données a), a') est claire par 2.1.2.3, 2.5.2. Rappelons comment, à partir de l'une des données a), b), c), les deux autres peuvent se déduire.

3.3.1.2. On a une donnée a). On définit alors un morphisme de A-bigèbres $B' \longrightarrow B$ de la façon suivante : l'image de B' par le foncteur donné est un B-comodule, il a donc une comultiplication $B' \longrightarrow B' \otimes B$. On vérifie aussitôt que la flèche composée

$$B' \longrightarrow B' \otimes B \xrightarrow{\varepsilon' \otimes \mathrm{id}} A \otimes B \simeq B$$

est un morphisme de A-bigèbres.

Maintenant, définissons une donnée c) : le foncteur $\underline{\mathrm{Rep}}(G') \longrightarrow \underline{\mathrm{Rep}}(G)$ induit par composition un morphisme

$$\underline{\mathrm{End}}^{\otimes,1}(\omega^{G}) \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}^{\otimes,1}(\omega^{G'})$$

d'où par 3.1.1 iii) un morphisme $G \longrightarrow G'$.

3.3.1.3. On a une donnée b). Si $f : B' \longrightarrow B$ est un morphisme de A-cogèbres, $Spec(f) : G \longrightarrow G'$ est un morphisme de A-monoïdes affines.

Pour avoir une donnée a), il suffit de définir un foncteur $\underline{Comod}(B') \longrightarrow \underline{Comod}(B)$ qui commute avec les foncteurs oubli : si E est un B'-comodule, on lui associe le B-comodule ayant E_o comme module sous-jacent et dont la comultiplication est

$$E_o \longrightarrow E_o \otimes_A B' \xrightarrow{id \otimes f} E_o \otimes_A B .$$

3.3.1.4. On a une donnée c). Si on a $u : G \longrightarrow G'$, en passant aux algèbres de sections on obtient un morphisme de A-bigèbres $B' \longrightarrow B$.

D'autre part, u induit un $\otimes$-foncteur évident $\omega^u : \underline{Rep}(G') \longrightarrow \underline{Rep}(G)$. En effet, G opère grâce à u sur tout A-module sur lequel G' opère.

3.3.2. Soit $u : G \longrightarrow G'$ un morphisme de A-groupes. On définit un foncteur

$$u^* : \underline{Tors}(G) \longrightarrow \underline{Tors}(G')$$

par

$$u^*(P) = P \times^G G' .$$

Rappelons la propriété universelle qui définit $P \times^G G'$: on a un morphisme de faisceaux à groupe G d'opérateurs à droite

$$P \longrightarrow u^*(P)$$

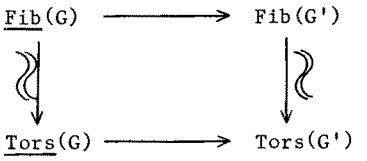
qui induit pour tout torseur à droite Q sous G' (pour la topologie fpqc), une bijection

$$Hom_{G'}(u^*(P),Q) \xrightarrow{\sim} Hom_G(P,Q) .$$

On prouve facilement

3.3.2.1. Proposition. Soit $u : G \longrightarrow G'$ un morphisme de A-schémas en groupes

affines et plats. Alors, le diagramme



est commutatif à isomorphisme fonctoriel près.

3.3.3. Soient G, G' des A-monoïdes affines, $u,v : G \longrightarrow G'$ des morphismes. Rappelons qu'on appelle $\underline{Transp}(u,v)$ le sous-faisceau de G'

$$\underline{Transp}(u,v)(A') = \{x \in G'(A')/ \quad \forall\, A''/A' \quad \forall\, y \in G(A'') \ , \ xu(y) = v(y)x\} \ . \tag{3.3.3.1}$$

On pose également

$$\begin{aligned} \underline{Cent}(u) &= \underline{Transp}(u,u) \\ \underline{Cent}(G) &= \underline{Cent}(id_G) \ . \end{aligned} \tag{3.3.3.2}$$

On a un morphisme de faisceaux

$$\underline{Hom}^{\otimes,1}(\omega^u,\omega^v) \longrightarrow G \tag{3.3.3.3}$$

qui associe à un $\otimes$-morphisme unifère son composé avec $\omega^{G'}$, qui s'identifie à un élément de $G(A)$.

On démontre facilement

3.3.3.1. Proposition. Le morphisme (3.3.3.3) induit un isomorphisme

$$\underline{Hom}^{\otimes,1}(\omega^u,\omega^v) \xrightarrow{\sim} \underline{Transp}(u,v) \ . \tag{3.3.3.4}$$

3.3.3.2. Corollaire. On a des isomorphismes canoniques

$$(3.3.3.5)\qquad \begin{cases} \underline{\mathrm{End}}^{\otimes,1}(\omega^u) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Cent}}(u) \\ \underline{\mathrm{End}}^{\otimes,1}(\mathrm{id}_{\underline{\mathrm{Rep}}(G)}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Cent}}(G). \end{cases}$$

3.4. Sous-catégories de définition de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$.

Le tableau suivant donne dans divers cas des sous-catégories de définition $\underline{D}$ de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$, i.e. sous-$\otimes$-catégories pleines de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ telles que $G \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}^{\otimes,1}(\omega^G \circ i_{\underline{D}})$ soit un isomorphisme. Dans la colonne A (resp. G) on met les hypothèses sur A (resp. G), dans la colonne $\underline{D}$ on décrit la sous-catégorie correspondante. Les démonstrations résultent de 2.1.1.1 ou 2.2.

A	G	$\underline{D}$
quelconque	plat	G-modules plats
quelconque	fini	G-modules de type fini sur A
quelconque	fini plat	G-modules plats de type fini
quelconque	fini localement libre	G-modules projectifs de type fini
noethérien	plat	G-modules de type fini
noethérien régulier de dimension ≤ 1	plat	G-modules projectifs de type fini

§ 4. REPRESENTATIONS DE GROUPES (suite) : CAS D'UN CORPS

4.1. La catégorie $\underline{Rep}_o(G)$.

4.1.0. A dénote un anneau régulier de dimension ≤ 1 .

4.1.1. Rappelons le résultat suivant, conséquence de 2.6.1.

Théorème. Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie ACU abélienne A-linéaire, $\omega : \underline{C} \longrightarrow \underline{Modtf}(A)$ un $\otimes$-foncteur ACU A-linéaire fidèle et exact. Alors, il existe un A-monoïde affine et plat G , et une $\otimes$-équivalence $\underline{C} \xrightarrow{\approx} \underline{Reptf}(G)$ rendant commutatif le triangle de $\otimes$-catégories

$$\begin{array}{ccc} \underline{C} & \xrightarrow{\approx} & \underline{Reptf}(G) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \underline{Modtf}(A) & \end{array}$$

si et seulement si tout objet de $\underline{C}$ est quotient d'un objet de $\underline{C}_o$, où $\underline{C}_o$ désigne la sous-catégorie pleine des X pour lesquels $\omega(X)$ est un A-module projectif de type fini (condition toujours vérifiée si A est un corps).

En outre, on a dans ce cas

$$G \simeq \underline{End}^{\otimes,1}(\omega) \simeq \underline{End}^{\otimes,1}(\omega_o) \quad , \tag{4.1.1.1}$$

où $\omega_o : \underline{C}_o \longrightarrow \underline{Projtf}(A)$ désigne la restriction du foncteur ω à $\underline{C}_o$.

4.1.2. Si G est un A-monoïde affine et plat, notons

$$\underline{Rep}_o(G) \tag{4.1.2.1}$$

la catégorie des G-modules projectifs de type fini sur A , et

$$\omega_o^G : \underline{Rep}_o(G) \longrightarrow \underline{Projtf}(A) \tag{4.1.2.2}$$

le foncteur oubli.

4.1.2.1. Supposons que G soit un groupe. Alors, si E,F sont des G-modules projectifs de type fini, G opère de façon naturelle sur $\mathrm{Hom}_A(E,F)$ qui est également un A-module projectif de type fini ; en effet, en vertu de l'isomorphisme

$$A' \otimes_A \mathrm{Hom}_A(E,F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A'}(A' \otimes_A E \ , \ A' \otimes_A F)$$

il suffit de dire comment $g \in G(A)$ opère dans $\mathrm{Hom}_A(E,F)$. On a

$$g.f(x) = g.(f(g^{-1}.x)) \qquad x \in E \ , \ f : E \longrightarrow F \tag{4.1.2.3}$$

On notera $\underline{\mathrm{Hom}}(E,F)$ le G-module ainsi construit. On vérifie aussitôt que $\underline{\mathrm{Hom}}(E,F)$ est un objet $\underline{\mathrm{Hom}}$ pour E,F dans la $\otimes$-catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_o(G)$ (I 3.1.1). En fait, $\underline{\mathrm{Rep}}_o(G)$ est une $\otimes$-catégorie $\underline{\text{rigide}}$ (I 5.1.1). Réciproquement, on prouve à l'aide de I 5.2.2, 5.2.3, et de l'isomorphisme $G \simeq \underline{\mathrm{End}}^{\otimes,1}(\omega_o^G)$.

4.1.2.2. $\underline{\text{Proposition}}$. $\underline{\text{Si la}}$ $\otimes$-$\underline{\text{catégorie}}$ $\underline{\mathrm{Rep}}_o(G)$ $\underline{\text{est rigide}}$, $\underline{\text{le}}$ A-$\underline{\text{monoïde}}$ G $\underline{\text{est un groupe}}$.

4.2. $\underline{\text{Foncteurs fibre sur}}$ $\underline{\mathrm{Rep}}_o(G)$.

4.2.0. Dans ce numéro et le suivant, k désigne un corps.

4.2.1. Si T est un k-schéma, on note $\underline{\mathrm{Loclib}}(T)$ la $\otimes$-catégorie rigide (I 5.1.1) k-linéaire formée des $\underline{O}_T$-Modules localement libres de rang fini. Si $T = \mathrm{Spec}(A)$, cette $\otimes$-catégorie s'identifie à la $\otimes$-catégorie $\underline{\mathrm{Projtf}}(A)$ des A-modules projectifs de type fini.

Soient G un k-groupe affine, T un k-schéma. Un $\otimes$-foncteur ACU k-linéaire

$$\omega : \underline{\mathrm{Rep}}_o(G) \longrightarrow \underline{\mathrm{Loclib}}(T)$$

est appelé un $\underline{\text{foncteur fibre}}$ sur $\underline{\mathrm{Rep}}_o(G)$ à valeurs dans T s'il est exact (si on considère ω comme prenant ses valeurs dans la catégorie abélienne des $\underline{O}_T$-Modules). Si $S \neq \emptyset$, il est alors fidèle : en effet, si $X \neq 0$, alors $\mathrm{ev}_X : X \otimes X \longrightarrow \underline{1}$ est surjectif et par exactitude $\mathrm{ev}_{\omega(X)}$ est aussi surjectif, donc $\omega(X) \neq 0$.

La catégorie ayant comme objets les foncteurs fibre sur $\underline{\mathrm{Rep}}_o(G)$ à valeurs dans T et comme morphismes les $\otimes$-morphismes unifères sera notée

(4.2.1.1) $$\underline{\mathrm{Fib}}_o(\underline{\mathrm{Rep}}_o(G),\underline{\mathrm{Loclib}}(T)) ,$$

ou encore $\underline{\mathrm{Fib}}_o(G,T)$. L'exemple le plus immédiat de foncteur fibre est $\omega_T^G = (\omega_o^G)_T$

(4.2.1.2) $$\omega_T^G(X) = \underline{O}_T \otimes_k \omega_o^G(X) .$$

4.2.1.1. Soit A une k-algèbre ; si $T = \mathrm{Spec}(A)$, et si G_A dénote le A-groupe obtenu par extension des scalaires de k à A , on a un foncteur

(4.2.1.3) $$\underline{\mathrm{Fib}}(G_A) \longrightarrow \underline{\mathrm{Fib}}_o(G,T)$$

qui à un foncteur fibre $\omega : \underline{\mathrm{Rep}}(G_A) \longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}}(A)$ sur $\underline{\mathrm{Rep}}(G_A)$ (3.2.1) associe le foncteur composé

$$\underline{\mathrm{Rep}}_o(G) \longrightarrow \underline{\mathrm{Rep}}(G_A) \xrightarrow{\omega} \underline{\mathrm{Mod}}(A) ,$$

ou plutôt ce foncteur considéré comme étant à valeurs les A-modules projectifs de type fini. Pour vérifier qu'il en est bien ainsi, on se sert de ce que après extension fidèlement plate $A \longrightarrow A'$ ω est isomorphe à ω^G (3.2.3 a)) et de ce que un A-module M est projectif de type fini si et seulement si le A'-module $M \otimes_A A'$ l'est (Bourbaki, Alg. Comm. chap. I § 3 prop. 12).

4.2.2. Théorème. Soient G un k-groupe affine, A une k-algèbre et posons $T = \mathrm{Spec}(A)$. Alors,

a) Deux foncteurs fibre sur $\mathrm{Rep}_o(G)$ à valeurs dans T sont localement isomorphes pour la topologie fpqc ; i.e. il existe une A-algèbre fidèlement plate A' sur laquelle ils deviennent isomorphes.

b) Si $\omega , \omega' : \underline{\mathrm{Rep}}_o(G) \longrightarrow \underline{\mathrm{Loclib}}(T)$ sont des foncteurs fibre, on a $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\underline{1}}(\omega,\omega') = \underline{\mathrm{Isom}}^{\otimes}(\omega,\omega')$.

c) Le foncteur (4.2.1.3) est une équivalence de catégories.

4.2.2.1. Preuve. L'assertion c) est une conséquence de a), b) : si à chaque foncteur fibre ω on associe $\underline{\mathrm{Isom}}^{\otimes}(\omega_T^G,\omega)$, on obtient un foncteur

$$\underline{\mathrm{Fib}}_o(G,T) \longrightarrow \underline{\mathrm{Tors}}(G_A) \tag{4.2.2.1}$$

rendant commutatif à isomorphisme près le triangle

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Fib}}(G_A) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Fib}}_o(G,T) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \underline{\mathrm{Tors}}(G_A) & \end{array}$$

(voir 3.2.3.2 pour la définition de l'équivalence $\underline{\mathrm{Fib}}(G_A) \longrightarrow \underline{\mathrm{Tors}}(G_A)$) ; d'autre part, on voit facilement comme dans 3.2.3.4 que (4.2.2.1) est une équivalence de catégories, d'où c).

Pour prouver a) et b), il suffit de prouver que si $\omega : \underline{\mathrm{Rep}}_o(G) \longrightarrow \underline{\mathrm{Loclib}}(T)$ est un foncteur fibre, $P = \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes,\underline{1}}(\omega,\omega_T^G)$ muni de l'action à gauche de $G_A = \underline{\mathrm{End}}(\omega_T^G)$ est un torseur. Il est clair, par I 5.2.2 et 5.2.3, que P est un pseudo-torseur, i.e. qu'on a b). Il reste à prouver que P est représentable par une A-algèbre A' fidèlement plate. On sait déjà, par 1.3.2.1, que P est représentable et qu'on a

$$(A')^{\vee} = \underline{\mathrm{Hom}}(\omega,\omega_T^G) \quad .$$

Si on exprime la bigèbre B de G comme réunion filtrante de ses sous-G-modules de rang fini sur k , $B = \varinjlim B_i$, on voit facilement qu'on a

$$A' = \varinjlim \omega(B_i)$$

en tant que A-module. Pour voir que A' est fidèlement plate, il suffit de remarquer que les morphismes de transition $\omega(B_i) \longrightarrow \omega(B_j)$ sont injectifs et font de $\omega(B_i)$ un facteur direct dans $\omega(B_j)$; cela résulte de ce que $B_i \longrightarrow B_j$ est injectif et que $\omega(B_j)/\omega(B_i) \simeq \omega(B_j/B_i)$ est projectif de type fini.

4.3. Un dictionnaire.

4.3.1. Rappelons qu'un k-groupe affine est algébrique si son algèbre affine est une k-algèbre de type fini. Il revient au même (SGA 3, VI_B 1.4.2 et 11.11) de dire qu'il agit fidèlement dans un k-vectoriel de rang fini.

Soit G un k-groupe affine ; on dit qu'un G-module X de rang fini sur k est un $\otimes$-générateur de $\underline{Rep}_o(G)$ si tout objet Y de cette catégorie est sous-objet d'un quotient (ou quotient d'un sous-objet, cela revient au même) d'un objet de la forme $P(X)$, où $P \in \mathbb{N}[t]$; dans cette notation l'addition (resp. le produit) de polynômes correspond à l'opération $\oplus$ (resp. $\otimes$). Cette définition se généralise d'elle même lorsqu'on remplace X par une famille d'objets, et $\underline{Rep}_o(G)$ par une $\otimes$-catégorie abélienne.

4.3.2. Voici le dictionnaire, où G, G' sont des k-groupes affines, $\underline{C} = \underline{Rep}_o(G)$, $\underline{C}' = \underline{Rep}_o(G')$, $u : G \longrightarrow G'$ est un morphisme.

a) G est algébrique si et seulement si $\underline{C}$ possède un $\otimes$-générateur ; si $\underline{C}$ est semi-simple, cela équivaut encore à dire que l'anneau de Grothendieck $R(G)$ est une $\mathbb{Z}$-algèbre de type fini. En outre, si $X \in \mathrm{ob}\ \underline{C}$, X est un G-module fidèle si et seulement si $X \oplus \check{X}$ est un $\otimes$-générateur, ou encore si et seulement si tout objet de $\underline{C}$ est quotient d'un sous-objet d'un objet de la forme $P(X,\check{X})$, où $P \in \mathbb{N}[t_1,t_2]$.

b) Si $X \in \mathrm{ob}\ \underline{C}$, soit $\underline{C}(X)$ la sous-catégorie strictement pleine de $\underline{C}$ engendrée par les quotients des sous-objets des objets de la forme $P(X,\check{X})$, où $P \in \mathbb{N}[t_1,t_2]$. Alors ω_o^G restreint à $\underline{C}(X)$ identifie cette catégorie à $\underline{Rep}_o(G(X))$, où $G(X)$ est l'image du morphisme de k-groupes

$$G \longrightarrow \underline{Aut}(\omega_o^G(X))$$

c) G est fini si et seulement si $\underline{C}$ possède un générateur (resp. un pseudo-générateur)(2.6.2).

d) (si car. k = 0) G est connexe si et seulement si pour tout objet X de $\underline{C}$ sur lequel G n'agit pas de façon triviale, la sous-catégorie strictement pleine engendrée par les quotients des sous-objets de la forme X^n, n'est pas stable par la loi $\otimes$.

e) G est pro-unipotent si et seulement si tout $X \in \text{ob } \underline{C}$ est extension successive de G-modules triviaux.

f) (si car. k = 0). G est pro-réductif si et seulement si la catégorie $\underline{C}$ est semi-simple.

g) i) u est fidèlement plat si et seulement si $\omega_o^u : \underline{C}' \longrightarrow \underline{C}$ est pleinement fidèle, et tout sous-objet d'un $\omega_o^u(X')$ provient d'un sous-objet de X' ($X' \in \text{ob } \underline{C}'$) (la dernière condition est superflue si $\underline{C}$ est semi-simple ; elle ne l'est pas en général, voir l'exemple 4.3.2.2).

ii) u est un monomorphisme (i.e. une immersion fermée, voir DEMAZURE-GABRIEL [1] 3.7.2) si et seulement si tout G-module est sous-objet d'un quotient d'un $\omega^u(X')$ ($X' \in \text{ob } \underline{C}'$).

4.3.3.1. Preuve. Si X est un $\otimes$-générateur de $\underline{C}$, on voit aussitôt que $G \longrightarrow \underline{\text{Aut}}(\omega_o^G(X))$ est un monomorphisme, donc G est algébrique par 4.3.1. Si G est algébrique, il y a un G-module fidèle, donc un $\otimes$-générateur, si on accepte la dernière assertion de a). Celle-ci est une conséquence directe de g) i), et g) lui-même résulte de 2.6.3 f). On a ainsi prouvé a), g). L'assertion b) est également conséquence de g) i), c) résulte de 2.6.3 d), d) résulte aussitôt de c). Enfin, e) et f) résultent de SGA 3, XVII 3.5 et de NAGATA [1].

4.3.3.2. Exemple. Supposons k algébriquement clos, et soit G un groupe algébrique affine lisse connexe sur k, B un sous-groupe de Borel (BOREL [1], IV 11.1). On voit alors que le foncteur

$$\underline{\text{Rep}}_o(G) \longrightarrow \underline{\text{Rep}}_o(B)$$

induit par l'inclusion $B \longrightarrow G$ est pleinement fidèle bien que $B \longrightarrow G$ n'est pas

fidèlement plat, sauf si $B = G$. Il suffit de vérifier que si V est un G-module, un élément de V invariant pour l'action de B est aussi invariant pour l'action de G : soit $v \in V$ un tel élément, le morphisme

$$G \longrightarrow V \qquad g \longmapsto g.v$$

passe au quotient

$$G/B \longrightarrow V$$

et puisque G/B est un schéma projectif connexe, et V un schéma affine, ce morphisme est constant, donc $G \longrightarrow V$ aussi.

APPENDICE : Cas d'un schéma de base général

Les questions traitées dans ce chapitre pour des cogèbres et des groupes affines sur un anneau A ont encore un sens lorsqu'on remplace celui-ci par un schéma S . Les énoncés auxquels on aboutit sont parfois les mêmes, dans d'autres cas ils demandent des modifications mineures mais leur démonstration n'est jamais difficile. Elle est faite toujours en réduisant au cas où S est affine, par la localisation.

Dans ce qui suit, on donne des indications concernant cette généralisation pour les quatre paragraphes précédents.

A.1. Les A-modules sont remplacés par les $\underline{O}_S$-Modules quasi-cohérents et les $\underline{A}$-modules sont remplacés par les faisceaux en $\underline{O}_S$-Modules sur le site zariskien $\underline{Sch}_{/S}$ où $\underline{O}_S$ est défini par $\underline{O}_S(S') = \Gamma(S', \underline{O}_{S'})$. Tous les théorèmes établis pour les $\underline{A}$-modules (1.1 à 1.3) restent valables pour les $\underline{O}_S$-Modules, exception faite des remarques sur l'existence d'adjoint en 1.1.1.2 et 1.1.2.3. On remarquera que le produit tensoriel de $\underline{A}$-modules est remplacé par le produit tensoriel de faisceaux en $\underline{O}_S$-modules, et que dans 1.1.4, 1.3.3, $\underline{Projtf}(A)$ devient $\underline{Loclib}(S)$.

A.2. La raison fondamentale pour laquelle la catégorie $\underline{\mathrm{Comod}}(B)$ (B étant une A-cogèbre) munie du foncteur oubli φ^B a pu nous donner suffisamment de renseignements, en particulier nous permettre de reconstituer B, est que pour une A-algèbre A', le couple $(\underline{\mathrm{Comod}}(B),\varphi^B)$ permet de construire le couple $(\mathrm{Comod}(B'),\varphi^{B'})$ par 2.0.2. Il n'en est pas de même si S est un schéma, B une $\underline{O}_S$-cogèbre quasi-cohérente : la catégorie $\underline{\mathrm{Comod}}(B)$ des $\underline{O}_S$-Modules quasi-cohérents munie du foncteur φ^B ne suffit pas pour reconstituer B. La donnée appropriée dans cette situation est celle de la catégorie fibrée $\mathrm{COMOD}(B)$ sur $\underline{\mathrm{Sch}}_{/S}$, dont la fibre en S'/S est la catégorie $\underline{\mathrm{Comod}}(B_{S'})$, munie du foncteur cartésien $\Phi^B : \mathrm{COMOD}(B) \longrightarrow \mathrm{QCOH}(S)$ (pour les catégories fibrées, voir SGA 1 VI) ; en fait, il suffirait même de connaître la restriction de $\mathrm{COMOD}(B)$ à la sous-catégorie de $\underline{\mathrm{Sch}}/S$ dont les objets sont les ouverts de S et les morphismes les inclusions entre ces ouverts, mais pour être à l'aise, il est préférable de travailler sur tout $\underline{\mathrm{Sch}}_{/S}$.

Avec les modifications évidentes entraînées par le remplacement de $\underline{\mathrm{Comod}}(B)$, φ^B par $\mathrm{COMOD}(B)$, Φ^B, les énoncés du § 2 restent vrais.

A.3. Les mêmes remarques s'appliquent à $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$, ω^G, qui sont remplacés par $\mathrm{REP}(G)$, Ω^G. Ainsi par exemple, si G est un S-groupe affine et plat, un foncteur fibre sur $\mathrm{REP}(G)$ est un $\otimes$-foncteur cartésien ACU (I 4.5) $\mathrm{REP}(G) \longrightarrow \mathrm{QCOH}(S)$ qui fibre par fibre est fidèle et exact ; bien entendu, on a une équivalence de catégories

$$\underline{\mathrm{Fib}}(G) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Tors}}(G) .$$

A.4. En utilisant la notion générale de foncteur fibre expliquée ci-dessus, le théorème 4.2.2 est valable sans restriction sur T.

Chapitre III : DUALITE DE TANNAKA

Introduction.

§ 1. Catégories ind-tannakiennes

1.1. Catégories ind-tannakiennes

1.2. Catégories ind-tannakiennes et descente

§ 2. Gerbes tannakiennes ; le théorème de structure

2.0. Topologies sur la catégorie des schémas

2.1. Rappels sur les gerbes et les liens

2.2. Gerbes tannakiennes

2.3. Le théorème de structure

§ 3. Catégories tannakiennes sur un corps

3.1. Compléments : comparaison entre les cohomologies fpqc et fppf.

3.2. Catégories tannakiennes

3.3. Catégories tannakiennes algébriques.

INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent on a explicité la correspondance entre groupes affines et plats G et les $\otimes$-catégories $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$. On regardait toutefois les catégories $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ comme "ponctuées" par le foncteur fibre ω^G .

Au contraire, on s'intéresse ici à classifier les catégories $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ indépendamment d'un foncteur fibre donné, et aussi à classifier les $\otimes$-catégories qui sont "localement" de la forme $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$. Ce sont les catégories ind-tannakiennes, dont l'étude nous demandera l'usage constant des définitions et résultats de l'algèbre homologique non commutative (GIRAUD [1]).

Dans le cas où l'anneau de base est un corps, les catégories qui sont importantes dans la pratique (voir chapitre des exemples) sont les catégories tannakiennes, dont la caractérisation axiomatique est celle des catégories $\underline{\mathrm{Rep}}_o(G)$ (II 4.1.1) avec la seule différence qu'il n'y a pas de foncteur fibre donné et il peut n'exister de foncteur fibre qu'à valeurs dans une extension du corps de base (voir 3.2.1 pour la définition précise).

Voici l'ordre dans lequel ces questions sont traitées :

Dans le § 1 on définit les catégories ind-tannakiennes et on introduit la notion de "donnée de descente" pour une catégorie linéaire.

Dans le § 2, après quelques rappels d'algèbre homologique non-abélienne, on donne le théorème qui classifie les catégories ind-tannakiennes au moyen des gerbes tannakiennes (2.3.2).

Le § 3 traite des catégories tannakiennes sur un corps, et constitue le coeur de ce chapitre. Le numéro 3.1 contient des compléments sur la topologie fpqc, topologie qui est souvent dédaignée dans la littérature. Dans le numéro 3.2 on prouve le théorème de structure des catégories tannakiennes, et on établit une correspondance entre catégories tannakiennes et gerbes tannakiennes. On n'aboutit à un dictionnaire parfait que dans le cas où les gerbes envisagées sont soit à lien représentable, soit algébriques (3.2.5). Ce dernier cas est analysé en 3.3.

§ 1. CATEGORIES IND-TANNAKIENNES

1.1. Catégories ind-tannakiennes.

1.1.0. On fixe un anneau A commutatif unifère. Les A-algèbres considérées sont également commutatives unifères.

1.1.1. Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie ACU A-linéaire (I 2.4.1) abélienne, avec des $\varinjlim$ quelconques et telle que la loi $\otimes$ commute avec les $\varinjlim$. On dit que $\underline{C}$ est ind-tannakienne s'il existe une A-algèbre fidèlement plate A' telle que les conditions suivantes soient vérifiées :

$(IT)_1$ Le foncteur $i_{A'/A} : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}_{(A')}$ est fidèle et exact.

$(IT)_2$ Il existe un A'-groupe affine et plat G', et une $\otimes$-équivalence A'-linéaire

$$\underline{C}_{(A')} \xrightarrow{\approx} \underline{\mathrm{Rep}}(G') .$$

1.1.1.1. Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$ des catégories ind-tannakiennes sur A. Un morphisme de $\underline{C}$ dans $\underline{C}'$ est un $\otimes$-foncteur ACU A-linéaire $\underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ (I 4.2.4) commutant avec les $\varinjlim$, fidèle et exact. Si $\omega,\omega' : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ sont deux tels morphismes, un morphisme de ω dans ω' est un $\otimes$-morphisme unifère $\omega \longrightarrow \omega'$. On obtient ainsi une 2-catégorie, notée $\underline{\underline{\mathrm{ITann}}}(A)$.

1.1.1.2. Une catégorie ind-tannakienne $\underline{C}$ est dite neutre si dans la définition 1.1.1 on peut prendre $A' = A$. Donc, les catégories ind-tannakiennes neutres sont celles de la forme $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$, où G est un A-groupe affine et plat.

1.1.1.3. Donnons un exemple d'une catégorie ind-tannakienne $\underline{C}$ qui ne soit pas de la forme $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$. Les objets E de $\underline{C}$ sont les $\mathbb{C}$-vectoriels $E_{\mathbb{C}}$ (de dimension quelconque) munis d'une $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduation

$$E_{\mathbb{C}} = E^0 \oplus E^1 ,$$

et d'une application $v_E : E_{\mathbb{C}} \longrightarrow E_{\mathbb{C}}$ semi-linéaire par rapport à la conjugaison complexe, laissant stable les sous-espaces E^0 et E^1, et telle que

$$v_E^2/E^0 = id$$

$$v_E^2/E^1 = -id \ .$$

On vérifie que $\underline{C}$, muni de sa loi $\otimes$ ACU évidente, est une catégorie ind-tannakienne sur $\mathbb{R}$; en effet, on a une $\otimes$-équivalence $\mathbb{C}$-linéaire

$$\underline{C}_{(\mathbb{C})} \xrightarrow{\approx} \underline{\mathrm{Rep}}((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{\mathbb{C}}) \ .$$

Si $\underline{C}$ était neutre, on aurait forcément $\underline{C} \xrightarrow{\approx} \underline{\mathrm{Rep}}((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{\mathbb{R}})$, ce qui est faux : en effet, $\underline{\mathrm{Rep}}((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{\mathbb{R}})$ possède exactement deux objets simples (correspondant aux caractères de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{\mathbb{R}}$) , tous les deux de rang 1 ; $\underline{C}$ possède également deux objets simples, l'un de rang 1, l'autre de rang 2. En fait, on peut interpréter $\underline{C}$ comme étant la somme de la catégorie des vectoriels réels avec celle des vectoriels quaternioniens, l'objet simple de rang 1 (resp. 2) étant le vectoriel réel (resp. quaternionien) de dimension 1.

1.1.2. Soit $\underline{C}$ une catégorie ind-tannakienne sur A . On déduit aussitôt de la définition d'une telle catégorie, que les $\varinjlim$ filtrantes sont exactes, et que si E est un A-module fidèlement plat, le foncteur $X \longmapsto E \otimes_A X$ de $\underline{C}$ dans $\underline{C}$ est un foncteur fidèle et exact.

Ceci a des conséquences importantes concernant la "descente fidèlement plate" dans $\underline{C}$. De façon générale, soit $\underline{C}$ une catégorie abélienne A-linéaire possédant des $\varinjlim$ et telle que pour tout A-module fidèlement plat E , le foncteur $X \longmapsto E \otimes_A X$ soit fidèle et exact. Si A' est une A-algèbre fidèlement plate, on a la notion de donnée de descente sur un objet de $\underline{C}_{(A')}$ (SGA 1, VIII), et avec les hypothèses faites sur $\underline{C}$, on voit aussitôt que les objets et les morphismes de $C_{(A')}$ "se descendent" (voir loc. cit., lemmes 1.4 et 1.6). Ceci entraîne en particulier que si $\omega : \underline{C} \longrightarrow \underline{D}$ est un foncteur A-linéaire entre des catégories comme ci-dessus, ω est exact (resp. fidèle et exact, resp. une équivalence) si et seulement s'il en est ainsi de $\omega_{(A')} : \underline{C}_{(A')} \longrightarrow \underline{D}_{(A')}$. On trouvera dans 1.2 plus de détails sur la descente.

1.1.3. Soit $\underline{C}$ une catégorie ind-tannakienne sur A . Rappelons (II 3.2.1) qu'on note $\underline{Fib}(\underline{C},A)$ la catégorie des foncteurs fibre sur $\underline{C}$. Si A' est une A-algèbre, on posera par définition

$$\underline{Fib}(\underline{C},A') = \underline{Fib}(\underline{C}_{(A')},A') ,$$

en regardant $\underline{C}_{(A')}$ comme munie de la loi $\otimes$ déduite de celle de $\underline{C}$ par extension des scalaires (II 1.5.4).

On a des foncteurs, pour $A' \longrightarrow A''$

$$\underline{Fib}(\underline{C},A') \longrightarrow \underline{Fib}(\underline{C},A'') ,$$

et la collection des catégories $\underline{Fib}(\underline{C},A')$ définit une catégorie cofibrée sur $\underline{Ann}_{/A}$, ou fibrée sur la catégorie $\underline{Schaff}_{/A}$ des A-schémas affines (SGA 1, VI), qu'on notera $FIB(\underline{C})$.

1.1.4. Proposition. *Si $\underline{C}$ est une catégorie ind-tannakienne sur A , B une A-algèbre, alors $\underline{C}_{(B)}$ est une catégorie ind-tannakienne sur B .*

1.1.4.1. Preuve. La $\otimes$-catégorie ACU B-linéaire $\underline{C}_{(B)}$ possède les mêmes propriétés que $\underline{C}$, et si A' est une A-algèbre fidèlement plate vérifiant les conditions $(IT)_1$, $(IT)_2$ pour $\underline{C}$, $B' = B \otimes_A A'$ vérifie également ces conditions pour $\underline{C}_{(B)}$.

1.1.5. Proposition. *Soient G un A-groupe affine et plat, $\omega : \underline{Rep}(G) \longrightarrow \underline{Mod}(A)$ un foncteur fibre. Alors,*

1) le faisceau $\underline{Aut}^{\otimes}(\omega)$ sur $\underline{Schaff}_{/A}$ (pour la topologie fpqc, voir 2.0), est représentable par un A-groupe affine et plat ${}^{\omega}G$,

2) le $\otimes$-foncteur ACU défini par ω

(1.1.5.1) $$\underline{Rep}(G) \longrightarrow \underline{Rep}({}^{\omega}G)$$

est une équivalence de catégories.

1.1.5.2. Preuve. Il existe une A-algèbre fidèlement plate A' telle que $\omega_{(A')}$ soit isomorphe au foncteur fibre $\omega^{G'}$ défini par $G' = G_{A'}$. On en déduit 1) par descente

fidèlement plate des schémas affines (SGA 1, VIII 2.1).

Pour 2), on remarque qu'après extension des scalaires de A à A', le foncteur (1.1.5.1) est isomorphe au foncteur identité, et on conclut également par descente (voir 1.1.2).

1.1.6. Proposition. Soient $\underline{C}$ une catégorie ind-tannakienne sur A, A' une A-algèbre et $\omega' : \underline{C}_{(A')} \longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}}(A')$ un foncteur fibre. Alors,

1) Le faisceau (fpqc) $\underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega')$ est représentable par un A'-groupe affine et plat G',

2) Le $\otimes$-foncteur ACU défini par ω'

$$\underline{C}_{(A')} \longrightarrow \underline{\mathrm{Rep}}(G')$$

est une équivalence de catégories.

1.1.6.1. Preuve. Elle résulte aussitôt de 1.1.2, 1.1.4 et 1.1.5.

1.1.6.2. Corollaire. Si $\underline{C}$ est une catégorie ind-tannakienne sur A, $\underline{C}$ est neutre si et seulement s'il existe un foncteur fibre $\underline{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}}(A)$.

1.2. Catégories ind-tannakiennes et descente.

1.2.0. Soit A' une A-algèbre fidèlement plate. Dans ce numéro, on cherche à expliciter une catégorie ind-tannakienne $\underline{C}$ sur A, en termes de $\underline{C}_{(A')}$ et d'une donnée supplémentaire sur $\underline{C}_{(A')}$. On aboutit ainsi à la notion de donnée de descente pour une catégorie ind-tannakienne sur A'.

Le dictionnaire qu'on trouve est valable pour des catégories plus générales. Dans la suite de ce numéro toutes les catégories linéaires envisagées sont supposées abéliennes, avec des $\varinjlim$ filtrantes exactes, et si elles sont linéaires sur un anneau B, on suppose en plus que pour tout B-module fidèlement plat M, le foncteur $X \longmapsto M \otimes_B X$ est fidèle et exact.

On fixe un anneau A, une A-algèbre fidèlement plate A'. On a des flèches

$$i_\alpha : A' \longrightarrow A'' = A' \otimes_A A' \qquad \alpha = 1,2$$

$$j_\alpha : A' \longrightarrow A''' = A' \otimes_A A' \otimes_A A' \qquad \alpha = 1,2,3$$

$$k_\alpha : A' \longrightarrow A'''' \qquad \alpha = 1,2,3,4$$

où par exemple $i_1(a') = a' \otimes 1$, $i_2(a') = 1 \otimes a'$.

De même, on note

$$i_{\alpha\beta} : A'' \longrightarrow A''' \qquad \alpha , \beta = 1,2,3 \ ; \ \alpha < \beta$$

$$j_{\alpha\beta} : A'' \longrightarrow A'''' \qquad \alpha , \beta = 1,2,3,4 : \alpha < \beta$$

$$i_{\alpha\beta\gamma} : A'' \longrightarrow A'''' \qquad \alpha,\beta,\gamma = 1,2,3,4 \ ; \ \alpha < \beta < \gamma ,$$

les flèches évidentes ; on a par exemple $i_{14}(a' \otimes b') = a' \otimes 1 \otimes 1 \otimes b'$.

1.2.1. Soit $\underline{C}'$ une catégorie A'-linéaire. Une <u>donnée de descente pour</u> $\underline{C}'$ <u>relative-</u>ment au morphisme $A \longrightarrow A'$ est un couple $\Delta = (\alpha,\mu)$ constitué d'une équivalence de catégories A''-linéaires

$$\alpha : i_2^* \underline{C}' \longrightarrow i_1^* \underline{C}'$$

et d'un isomorphisme fonctoriel

$$\begin{array}{ccccc} j_3^* \underline{C}' & \xrightarrow{i_{23}^*(\alpha)} & j_2^* \underline{C}' & \xrightarrow{i_{12}^*(\alpha)} & j_1^* \underline{C}' \\ & \searrow^{i_{13}^*(\alpha)} & \downarrow \wr \mu & \nearrow & \end{array} ,$$

vérifiant la condition de cohérence

$$(1.2.1.1) \qquad i_{134}^*(\mu) \circ \left[j_{34}^*(\alpha) * i_{123}^*(\mu) \right] = i_{124}^*(\mu) \circ \left[i_{234}^*(\mu) * j_{12}^*(\alpha) \right] .$$

On a fait libre usage des conventions de notation de II 1.5.2. Ainsi, par exemple, on a identifié $j_3^* \underline{C}'$ et $i_{23}^*(i_2^* \underline{C}')$.

1.2.1.1. Soient $\underline{C}'$, $\underline{D}'$ des catégories A'-linéaires, munies de données de descente

$\Delta = (\alpha,\mu)$, $\Gamma = (\beta,\nu)$ relativement à $A \longrightarrow A'$. Un morphisme du couple $(\underline{C}',\Delta)$ dans le couple $(\underline{D}',\Gamma)$ est un couple (u,ε) d'un foncteur A'-linéaire $u : \underline{C}' \longrightarrow \underline{D}'$ commutant avec les $\varinjlim$ et d'un isomorphisme fonctoriel

$$\varepsilon : i_1^*(u) \circ \alpha \longrightarrow \beta \circ i_2^*(u) ,$$

vérifiant la condition de cohérence

$$(1.2.1.2) \quad i_{13}^*(\varepsilon) \circ [j_1^*(u) * \mu] = [\nu * j_3^*(u)] \circ [i_{12}^*(\beta) * i_{23}^*(\varepsilon)] \circ [i_{12}^*(\varepsilon) * i_{23}^*(\alpha)]$$

Enfin, si (u,ε) , (u',ε') sont des morphismes comme ci-dessus, un morphisme de (u,ε) dans (u',ε') est un morphisme fonctoriel $\lambda : u \longrightarrow u'$ tel qu'on ait un diagramme commutatif

$$(1.2.1.3) \qquad \begin{array}{ccc} i_1^*(u) \circ \alpha & \longrightarrow & i_1^*(u') \circ \alpha \\ \downarrow & & \downarrow \\ \beta \circ i_2^*(u) & \longrightarrow & \beta \circ i_2^*(u') \end{array} ,$$

i.e.

$$\varepsilon' \circ [i_1^*(\lambda) * \alpha] = [\beta * i_2^*(\lambda)] \circ \varepsilon$$

La 2-catégorie obtenue sera notée $\underline{\underline{Cat}}(A'/A)$.

1.2.1.2. Soit $\underline{C}$ une catégorie A-linéaire. Si on pose $\underline{C}' = \underline{C}_{(A')}$, $\underline{C}'$ est muni d'une donnée de descente évidente. L'équivalence $\alpha : i_2^* \underline{C}' \longrightarrow i_1^* \underline{C}'$ provient simplement de l'identification de ces deux catégories à $\underline{C}_{(A'')}$, et μ se réduit à l'isomorphisme identique.

La construction précédente est 2-fonctorielle en $\underline{C}$, et on a ainsi un 2-foncteur de la 2-catégorie $\underline{\underline{Cat}}(A)$ des catégories A-linéaires dans la 2-catégorie $\underline{\underline{Cat}}(A'/A)$.

1.2.2. On vient d'associer à une catégorie A-linéaire une catégorie A'-linéaire munie d'une donnée de descente. Dans le sens inverse, soit $\underline{C}'$ une catégorie A-linéaire munie d'une donnée de descente $\Delta = (\alpha,\mu)$ relativement à $A \longrightarrow A'$. On

définit une catégorie A-linéaire $^{\Delta}\underline{C}'$, et une équivalence de catégories A'-linéaires munies de données de descente

$$\underline{C}' \xrightarrow{\approx} (^{\Delta}\underline{C}')_{(A')} \quad . \tag{1.2.2.1}$$

1.2.2.1. Définition de $^{\Delta}\underline{C}'$. Les objets de la "catégorie descendue" $^{\Delta}\underline{C}'$ sont les couples (X,λ) constitués d'un objet X de $\underline{C}$ et d'un isomorphisme (d'objets de $i_1^* \underline{C}'$)

$$\lambda : \alpha\, i_2^*(X) \xrightarrow{\sim} i_1^*(X)$$

tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} i_{12}^*(\alpha)\, i_{23}^*(\alpha)\, j_3^*(X) & \xrightarrow{i_{12}^*(\alpha)(i_{23}^*(\lambda))} & i_{12}^*\, j_2^*(X) \\ {\scriptstyle \mu_{j_3^*(X)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_{12}^*(\lambda)} \\ i_{13}^*\, j_3^*(X) & \xrightarrow[i_{13}^*(\lambda)]{} & j_1^*(X) \end{array} \tag{1.2.2.2}$$

soit commutatif ; un morphisme d'un couple (X,λ) dans un couple (X',λ') est un morphisme $f : X \longrightarrow X'$ tel qu'on ait

$$i_1^*(f) \circ \lambda = \lambda' \circ \alpha\, i_2^*(f) \quad . \tag{1.2.2.3}$$

Il est clair par construction que $^{\Delta}\underline{C}'$ est une catégorie A-linéaire (vérifiant les conditions de 1.2.0), et que le foncteur "oubli" $^{\Delta}\underline{C}' \longrightarrow \underline{C}'$ est A-linéaire, exact, et commute avec les $\varinjlim$.

1.2.2.2. Le foncteur "oubli"

$$^{\Delta}\underline{C}' \longrightarrow \underline{C}' \qquad (X,\lambda) \longmapsto X$$

s'étend en un foncteur A'-linéaire

(1.2.2.4) $$({}^{\Delta}\underline{C}')_{(A')} \longrightarrow \underline{C}' \quad .$$

Ce foncteur définit une équivalence de catégories munies de données de descente. On va expliciter un foncteur quasi-inverse

(1.2.2.5) $$\underline{C}' \longrightarrow ({}^{\Delta}\underline{C}')_{(A')} \ ,$$

en omettant les vérifications relatives aux données de descente, qui n'offrent aucune difficulté.

Soit X un objet de $\underline{C}'$. L'objet $A' \otimes_A X$ est muni d'une action évidente de A'' telle que l'action de A' induite par i_2 soit l'action de A' sur $A' \otimes_A X$ en tant qu'objet d'une catégorie A'-linéaire. On a donc un objet de $i_2^* \underline{C}'$, qu'on notera encore $A' \otimes X$. Posons

$$\bar{X} = i_{1*}\alpha(A' \otimes_A X) \in \text{ob } \underline{C}' \ .$$

On vérifie aussitôt qu'on a des isomorphismes canoniques

(1.2.2.6) $$\begin{cases} i_1^* \bar{X} \simeq i_{12*}\, i_{13}^*(\alpha)\ (A'' \otimes_A X) \\ \alpha\, i_2^* \bar{X} \simeq i_{12*}\, i_{12}^*(\alpha)\, i_{23}^*(\alpha)\ \ (A'' \otimes_A X) \ , \end{cases}$$

où $A'' \otimes_A X$ est considéré comme objet de $j_3^* \underline{C}'$ grâce à l'action évidente de A'''. On obtient, par ces identifications, un isomorphisme $\lambda_X : \alpha\, i_2^*(\bar{X}) \longrightarrow i_1^*(\bar{X})$, $\lambda_X = i_{12*}(\mu_{A''\otimes_A X})$.

Cela dit, l'image de X par le foncteur (1.2.2.5) est l'objet $(\bar{X},\lambda_X)$ de ${}^{\Delta}\underline{C}'$, muni de l'action de A' déduite par application du foncteur $i_{1*} \circ \alpha$ de l'action de A' sur $A' \otimes_A X$ en tant qu'objet de $\underline{C}'$, $a' \longmapsto 1 \otimes a'_X$.

On vérifie sans peine, en utilisant (1.2.1.1) que $(\bar{X},\lambda_X)$ est bien un objet de ${}^{\Delta}(\underline{C}')$, et que (1.2.2.4) et (1.2.2.5) sont des foncteurs quasi-inverses l'un de l'autre.

1.2.3. Proposition. Le 2-foncteur $\underline{\underline{Cat}}(A) \longrightarrow \underline{\underline{Cat}}(A'/A)$ associant à $\underline{C}$, $\underline{C}_{(A')}$ munie de sa donnée de descente canonique, est une 2-équivalence admettant $(\underline{C}',\Delta) \longmapsto {}^{\Delta}\underline{C}'$ comme quasi-inverse.

1.2.3.1. Preuve. On a déjà exhibé, pour $(\underline{C}',\Delta)$ donné, une équivalence $\underline{C}' \approx ({}^{\Delta}\underline{C}')_{(A')}$. Inversement, soit $\underline{C}$ une catégorie A-linéaire ; il est clair que si X est un objet de $\underline{C}$, $i_{A'/A}(X) = A' \otimes_A X$ est de façon canonique un objet de ${}^{\Delta}(\underline{C}_{(A')})$. On obtient ainsi un foncteur

$$\underline{C} \longrightarrow {}^{\Delta}(\underline{C}') \quad , \tag{1.2.3.1}$$

où $\underline{C}'$ dénote $\underline{C}_{(A')}$, Δ sa donnée de descente canonique. Pour prouver que ce foncteur est une équivalence de catégories, il suffit de prouver que le foncteur obtenu en étendant les scalaires de A à A'

$$\underline{C}' \longrightarrow ({}^{\Delta}\underline{C}')_{(A')}$$

l'est, en vertu de 1.1.2. Or, on vérifie facilement que ce foncteur n'est autre que le foncteur (1.2.2.5).

1.2.4. Soit Γ un groupe fini (ensembliste), et supposons que la A-algèbre fidèlement plate A' soit donnée comme un revêtement galoisien de A de groupe Γ (GIRAUD [1], III 3.7.4.1). Rappelons que ceci signifie qu'on s'est donné une action de Γ (à gauche) sur la A-algèbre A' , telle que le morphisme de A-algèbres

$$A'' \longrightarrow A'^{\Gamma} \qquad a' \otimes b' \longmapsto (\gamma(a').b') \quad \gamma \in \Gamma$$

soit un isomorphisme.

1.2.4.1. Soit $\underline{C}'$ une catégorie A'-linéaire. Une donnée de descente Δ sur $\underline{C}'$ relativement à A'/A peut encore s'exprimer comme la donnée de

a) Une famille $(\alpha_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ d'équivalences de catégories, semilinéaires par rapport à γ

$$\alpha_\gamma : \underline{C}' \longrightarrow \underline{C}' \ .$$

b) une famille $(\mu_{\gamma',\gamma})_{(\gamma',\gamma)\in\Gamma\times\Gamma}$ d'isomorphismes fonctoriels

$$\mu_{\gamma',\gamma} : \alpha_{\gamma'\gamma} \xrightarrow{\sim} \alpha_{\gamma'} \circ \alpha_{\gamma} \quad ;$$

ces données vérifiant la "condition de cocycles", pour $\gamma, \gamma', \gamma'' \in \Gamma$:

$$(1.2.4.1) \qquad (\alpha_{\gamma''} * \mu_{\gamma',\gamma}) \circ \mu_{\gamma'',\gamma'\gamma} = (\mu_{\gamma'',\gamma'} * \alpha_{\gamma}) \circ \mu_{\gamma''\gamma',\gamma} \quad .$$

1.2.4.2. Si $\underline{C}', \underline{D}'$ sont des catégories A'-linéaires munies de données de descente relativement à A'/A s'exprimant par des données $((\alpha_\gamma),(\mu_{\gamma',\gamma}))$, $((\beta_\gamma),(\nu_{\gamma',\gamma}))$, la donnée d'un morphisme de catégories A'-linéaires munies de données de descente s'exprime par un couple $(u,(\varepsilon_\gamma)_{\gamma\in\Gamma})$, où $u : \underline{C}' \longrightarrow \underline{D}'$ est un foncteur A'-linéaire commutant avec les $\varinjlim$, et les ε_γ sont des isomorphismes fonctoriels

$$\varepsilon_\gamma : u \circ \alpha_\gamma \longrightarrow \beta_\gamma \circ u$$

vérifiant la condition, pour $\gamma, \gamma' \in \Gamma$.

$$(1.2.4.2) \qquad (\nu_{\gamma',\gamma} * u) \circ \varepsilon_{\gamma'\gamma} = (\beta_{\gamma'} * \varepsilon_\gamma) \circ (\varepsilon_{\gamma'} * \alpha_\gamma) \circ (u * \mu_{\gamma',\gamma}) \quad .$$

Si $(u,(\varepsilon_\gamma))$, $(u',(\varepsilon'_\gamma))$ sont comme ci-dessus, un morphisme de $(u,(\varepsilon_\gamma))$ dans $(u',(\varepsilon'_\gamma))$ est un morphisme fonctoriel $\sigma : u \longrightarrow u'$ tel que pour $\gamma \in \Gamma$, on ait

$$(1.2.4.3) \qquad \varepsilon'_\gamma \circ (\sigma * \alpha_\gamma) = (\beta_\gamma * \sigma) \circ \varepsilon_\gamma \quad .$$

1.2.4.3. Avec les notations de 1.2.4.1, la catégorie ${}^{\Delta}\underline{C}'$ peut s'expliciter comme suit : ses objets sont les couples $(X,(\lambda_\gamma)_{\gamma\in\Gamma})$, où X est un objet de $\underline{C}'$, et les λ_γ sont des isomorphismes

$$\lambda_\gamma : X \xrightarrow{\sim} \alpha_\gamma(X) \ ,$$

rendant commutatifs les carrés $(\gamma,\gamma' \in \Gamma)$:

(1.2.4.4)

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\lambda_{\gamma'}} & \alpha_{\gamma'}(X) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \lambda_{\gamma'\gamma}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha_{\gamma'}(\lambda_\gamma)} \\ \alpha_{\gamma'\gamma}(X) & \xrightarrow[(u_{\gamma',\gamma})_X]{} & \alpha_{\gamma'}\alpha_\gamma(X) \end{array}$$

un morphisme d'un couple $(X,(\lambda_\gamma))$ dans un couple $(X',(\lambda'_\gamma))$ est un morphisme $f : X \longrightarrow X'$ tel qu'on ait

(1.2.4.5) $$\alpha_\gamma(f) \circ \lambda_\gamma = \lambda'_\gamma \circ f \quad .$$

1.2.5. On peut établir des variantes de ce qui précède dans le cas où de plus, on a affaire à une loi $\otimes$. C'est ce qu'on esquisse brièvement dans ce qui suit. Toutes les lois $\otimes$ envisagées sont linéaires, et commutent avec les $\varinjlim$ (II.1.5.4).

1.3.5.1. Soit $\underline{C}'$ une $\otimes$-catégorie A'-linéaire. Si $\Delta = (\alpha,\mu)$ est une donnée de descente pour $\underline{C}'$ relativement à $A \longrightarrow A'$, une <u>compatibilité</u> de Δ avec la loi $\otimes$ de $\underline{C}'$ est une structure de $\otimes$-foncteur sur α (I 4.1.1) telle que μ soit un $\otimes$-isomorphisme.

Si $\underline{C}$ est une $\otimes$-catégorie A-linéaire, la donnée de descente canonique sur $\underline{C}_{(A')}$ est munie de façon naturelle d'une compatibilité avec la loi $\otimes$ de $\underline{C}_{(A')}$ (II 1.5.4).

Une donnée de descente Δ , munie d'une telle compatibilité, est appelée une $\otimes$-<u>donnée de descente</u> relativement à $A \longrightarrow A'$.

1.3.5.2. Soient $\underline{C}'$, $\underline{D}'$ des $\otimes$-catégories A'-linéaires munies de $\otimes$-données de descente relativement à $A \longrightarrow A'$. Un <u>morphisme</u> de $\underline{C}'$ dans $\underline{D}'$ est un morphisme (u,ε) de catégories A'-linéaires munies de données de descente, avec une structure de $\otimes$-foncteur sur u telle que ε soit un $\otimes$-isomorphisme. Enfin, un <u>morphisme</u> λ entre deux tels morphismes (u,ε), (u',ε') est un $\otimes$-morphisme $\lambda : u \longrightarrow u'$ vérifiant la condition (1.3.1.3).

1.3.5.3. Avec les hypothèses et notations de 1.3.5.1, la catégorie A-linéaire $\underline{\underline{C}}'$ est munie d'une loi $\otimes$ canonique. Bornons-nous à l'expliciter sur les objets de cette catégorie, en faisant quelques identifications évidentes

$$(X,\lambda) \otimes (X',\lambda') = (X \otimes Y , \lambda \otimes \lambda') \quad . \tag{1.3.5.1}$$

On peut démontrer facilement l'analogue de la proposition 1.3.3, ainsi que des variantes relatives aux diverses contraintes qu'on peut imposer aux lois $\otimes$ envisagées.

1.3.5.4. Dans le cas où A' est donné comme un revêtement galoisien de groupe Γ de A (voir 1.3.4), on peut donner des variantes $\otimes$ analogues. On imagine qu'après tout ce qui précède, les définitions correspondantes sont évidentes pour le lecteur. Aussi on s'en servira sans aucun scrupule par la suite.

1.3.6. Scholie. Soit A' une A-algèbre fidèlement plate. Il revient au même de se donner une catégorie ind-tannakienne sur A, que de se donner une catégorie ind-tannakienne sur A' munie d'une $\otimes$-donnée de descente ACU relativement au morphisme $A \longrightarrow A'$. En particulier, si G' est un A'-groupe affine et plat, les catégories ind-tannakiennes sur A devenant équivalentes sur A' avec $\underline{\mathrm{Rep}}(G')$, correspondent aux $\otimes$-données de descente ACU sur $\underline{\mathrm{Rep}}(G')$ relativement à $A \longrightarrow A'$.

§ 2. GERBES TANNAKIENNES ; LE THEOREME DE STRUCTURE

2.0. Topologies sur la catégorie des schémas.

2.0.1. Soit S un schéma, et désignons comme d'habitude par $\underline{\mathrm{Sch}}_{/S}$ la catégorie des S-schémas. On définit sur $\underline{\mathrm{Sch}}_{/S}$ plusieurs topologies, dont la plus importante dans ce paragraphe est la topologie fidèlement plate quasi-compacte, en abrégé fpqc (voir SGA 3, IV 6.3). On a aussi les topologies fppf (fidèlement plate de présentation finie), de Zariski, étale.

On obtient des sites qui seront respectivement notés S_{fpqc} , S_{fppf} , S_{zar} , $S_{ét}$.

2.0.2. Soit A un anneau (commutatif unifère), et posons $S = \mathrm{Spec}(A)$. On peut munir la sous-catégorie de $\underline{\mathrm{Sch}}_{/S}$ des A-schémas affines, notée $\underline{\mathrm{Schaff}}_{/A}$, de la topologie induite par la topologie fpqc sur $\underline{\mathrm{Sch}}_{/S}$ (SGA, III 3.1). D'après le lemme de comparaison (SGA 4, III 4.1), l'inclusion $\underline{\mathrm{Schaff}}_{/A} \longrightarrow \underline{\mathrm{Sch}}_{/S}$ induit une équivalence de catégories entre les catégories correspondantes de faisceaux. On en déduit qu'il revient au même de se donner un champ sur S_{fpqc} que de se donner sa restriction à $\underline{\mathrm{Schaff}}_{/A}$ (voir GIRAUD [1], II 3.3.1).

Pour cette raison, en construisant un faisceau ou un champ sur S_{fpqc}, on se limitera souvent à le définir sur les A-algèbres. (i.e. la catégorie opposée à $\underline{\mathrm{Schaff}}_{/A}$). Cette méthode nous épargnera un certain nombre de définitions purement auxiliaires.

Des remarques semblables s'appliquent aux sites S_{fppf}, S_{Zar}, ...

2.1. Rappels sur les gerbes et les liens.

2.1.0. Pour la commodité du lecteur, on rassemble ici un certain nombre de définitions et résultats dûs à GIRAUD [1]. Dans la suite de ce numéro, on fixe un site S, supposé standard pour simplifier ; ceci signifie que S possède des $\varprojlim$ finies et que les préfaisceaux représentables sont des faisceaux.

2.1.1. On appelle gerbe sur S un champ $\mathcal{G}$ sur S vérifiant les conditions suivantes.

a) Les fibres $\mathcal{G}_T$ ($T \in \mathrm{ob}\, S$) du S-champ $\mathcal{G}$ sont des groupoïdes, i.e. tout morphisme de $\mathcal{G}_T$ est un isomorphisme.

b) Les objets des fibres $\mathcal{G}_T$ sont localement isomorphes.

c) Il existe une famille $(T_i)_{i\in I}$ d'objets de S couvrant l'objet final $\underline{C}$ de S telle que les fibres $\mathcal{G}_{T_i}$ soient non vides.

On dit qu'une gerbe $\mathcal{G}$ sur S est neutre si la fibre $\mathcal{G}_e$ est non vide.

Un morphisme de gerbes sur S est simplement un morphisme entre les S-champs sous-jacents, et on définit de même les morphismes de gerbes.

2.1.1.1. Soit G un faisceau en groupes sur S, et soit $TORS(G)$ le S-champ des G-torseurs à droite (loc.cit., III 1.7.1). Il est clair que $TORS(G)$ est une gerbe, et même que c'est une gerbe neutre. On a en effet le G-torseur G_d sur $\underline{e}$.

On vérifie facilement qu'une gerbe sur S est neutre si et seulement si elle est équivalente à une gerbe de la forme $TORS(G)$. De même un S-champ est une gerbe si et seulement s'il est localement (sur S) équivalent à un champ de la forme $TORS(G)$.

2.1.2. Donnons-nous un faisceau en anneaux $\underline{O}_S$ sur S, de sorte que $(S,\underline{O}_S)$ est un <u>site annelé</u>. Ceci permet de définir le champ $\underline{O}_S$-linéaire $QCOH(S)$ des $\underline{O}_S$-Modules quasi-cohérents. Si $\mathcal{G}$ est une gerbe sur S, on note $REP(\mathcal{G})$ (resp. $\underline{Rep}(\mathcal{G})$) le S-champ (resp. la catégorie) des $S_{/T}$-foncteurs (resp. S-foncteurs) cartésiens $\mathcal{G}_{/T} \longrightarrow QCOH(T)$, où $T \in ob\ S$ (resp. $\mathcal{G} \longrightarrow QCOH(S)$).

Si on remarque que $QCOH(S)$ est de façon évidente un $\otimes$-champ ACU S-linéaire, on voit que $REP(\mathcal{G})$ (resp. $\underline{Rep}(\mathcal{G})$) est canoniquement muni d'une structure de $\otimes$-champ ACU S-linéaire (resp. $\otimes$-catégorie ACU $\Gamma(S, \underline{O}_S)$-linéaire), avec des $\varinjlim$.

On a

$$REP(\mathcal{G})_T = \underline{Rep}(\mathcal{G}_T) \qquad (2.1.2.1)$$

2.1.2.1. Le S-champ $REP(\mathcal{G})$ dépend fonctoriellement de la gerbe $\mathcal{G}$. Si $u : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$ est un morphisme de gerbes sur S, on obtient par composition un morphisme de $\otimes$-champs ACU S-linéaires :

$$\Omega^u : REP(\mathcal{G}') \longrightarrow REP(\mathcal{G}) .$$

2.1.2.2. Soit G un faisceau en groupes sur S, $\mathcal{G} = TORS(G)$ la gerbe des G-torseurs à droite. On dispose alors de deux $\otimes$-champs ACU S-linéaires, $REP(\mathcal{G})$ et le $\otimes$-champ $REP(G)$ des G-$\underline{O}_S$-Modules quasi-cohérents. Ces deux $\otimes$-champs sont équivalents ; de façon précise, on définit des $\otimes$-foncteurs ACU stricts $\Gamma(T,\underline{O}_S)$-linéaires

$$\underline{Rep}(\mathcal{G}_T) \longrightarrow \underline{Rep}(G_T) \qquad T \in ob\ S \qquad (2.1.2.2)$$

en associant à chaque foncteur cartésien Φ : $TORS(G_T) \longrightarrow QCOH(T)$ le $\underline{O}_T$-Module quasi-cohérent $\Phi((G_T)_d)$ muni de l'action à gauche de G_T déduite par fonctorialité de Φ de l'isomorphisme canonique

$$G_T \tilde{\longrightarrow} \underline{Aut}((G_T)_d) .$$

On vérifie facilement que ce sont des équivalences, et que la collection de ces foncteurs définit une équivalence

$$REP(TORS(G)) \xrightarrow{\approx} REP(G) \quad . \tag{2.1.2.3}$$

2.1.3. Rappelons la notion de lien sur un site S . Si on note $FAGR(S)$ le S-champ ayant pour fibre au-dessus de $T \in ob\ S$ la catégorie $Fagr(T)$ des faisceaux en groupes sur T (ou plutôt sur le site $S_{/T}$), soit $LI(S)$ la catégorie fibrée sur S ayant pour fibre au-dessus de T la catégorie ayant les mêmes objets que $Fagr(T)$, et comme morphismes $G \longrightarrow G'$ l'ensemble des sections globales du faisceau quotient $\underline{Hom}_T(G,G')/G'$, G' agissant par automorphismes intérieurs.

Le champ $LIEN(S)$ est par définition le champ associé à la catégorie fibrée (loc.cit., II 2.1.3) $LI(S)$. La catégorie $\underline{Lien}(S)$ des S-$\underline{liens}$ est

$$\underline{Lien}(S) = LIEN(S)_{\underline{e}}$$

On a en particulier un foncteur

$$lien : \underline{Fagr}(S) \longrightarrow \underline{Lien}(S) , \tag{2.1.3.1}$$

et on vérifie qu'on a

$$\underline{Hom}(lien(G),lien(G')) = \underline{Hom}(G,G')/G' . \tag{2.1.3.2}$$

Un lien sur S est dit $\underline{représentable}$ s'il est isomorphe à un lien de la forme $lien(G)$. Tout lien est localement (sur S) représentable.

Un lien sur S est dit $\underline{abélien}$ si localement sur S il est représentable par un Groupe abélien. Dans ce cas, il est représentable (globalement) par un Groupe abélien uniquement déterminé. De façon précise, le foncteur (2.1.3.1) induit une équivalence

de la catégorie des faisceaux en groupes abéliens sur S sur celle des liens abéliens sur S.

2.1.4. A une gerbe sur S on attache canoniquement un lien sur S. Nous n'allons pas définir ce procédé en détail (loc.cit., IV 2.2) ; disons seulement que cette correspondance est uniquement déterminée, à isomorphisme fonctoriel près, par ses propriétés d'être fonctorielle, compatible avec la localisation, et d'associer à une gerbe $\mathrm{TORS}(G)$ le lien $\mathrm{lien}(G)$. Si L est le lien d'une gerbe $\mathcal{G}$, on dit que L lie $\mathcal{G}$, ou que $\mathcal{G}$ est liée par L, ou encore que $\mathcal{G}$ est une L-gerbe.

De même si $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$ sont des gerbes liées par L, L', et si $u : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$ est un morphisme auquel correspond un morphisme de liens $\lambda : L \longrightarrow L'$, on dit que u est un λ-morphisme.

On dit que deux L-gerbes sont équivalentes s'il existe entre elles une équivalence de gerbes liée par le morphisme id_L.

2.1.5. Soit L un lien sur S. On note $H^2(S,L)$ ou $H^2(L)$ l'ensemble des classes d'équivalence de L-gerbes, $H^2(L)'$ la partie définie par celles des L-gerbes qui sont neutres (2.1.1). Cet ensemble ne dépend pas fonctoriellement de L. Toutefois, si $\lambda : L \longrightarrow L'$ est un morphisme de liens, on définit une relation $\overset{\lambda}{\longrightarrow\!\!\!\!\circ}$. Si $p \in H^2(L)$, $q \in H^2(L')$, on écrit

$$p \overset{\lambda}{\longrightarrow\!\!\!\!\circ} q$$

s'il existe une L-gerbe $\mathcal{G}$ (resp. L'-gerbe $\mathcal{G}'$) représentant p (resp. q) et un λ-morphisme $\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$. Cette relation est une fonction chaque fois qu'on a $\mathrm{Cent}(L) = \mathrm{Cent}(\lambda)$ (loc.cit., IV 3.1.5), par exemple si L' est abélien, ou si λ est surjectif (i.e. localement représenté par un épimorphisme de faisceaux en groupes).

2.2. Gerbes tannakiennes.

2.2.1. Soit S un schéma. On dit qu'une gerbe $\mathcal{G}$ sur S_{fpqc} est représentable

(resp. affine, plate, lisse) si le lien de $\mathcal{G}$ est localement défini par un faisceau en groupes représentable (resp. et affine, et plat, et lisse).

2.2.2. On dit qu'une gerbe sur S_{fpqc} est tannakienne si elle est affine et plate. Ceci équivaut à dire que, localement pour fpqc, elle est équivalente à une gerbe TORS(G), où G est un schéma en groupes affine et plat.

2.2.3. Soient A un anneau, S = Spec(A), et $\mathcal{G}$ une gerbe tannakienne sur A (i.e. sur S_{fpqc}). Remarquons que, par descente fpqc (SGA 1, VIII), le champ des Modules quasi-cohérents sur S est le même pour la topologie fpqc ou pour la topologie de Zariski. Ainsi, si $\mathcal{G}$ = TORS(G), on a par 2.1.2.2 une équivalence de $\otimes$-catégories A-linéaires

$$\underline{\mathrm{Rep}}(\mathcal{G}) \xrightarrow{\approx} \underline{\mathrm{Rep}}(G) \quad ,$$

où $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ a la signification habituelle (chap. II).

Soit A' une A-algèbre. On a un $\otimes$-foncteur ACU

$$\underline{\mathrm{Rep}}(\mathcal{G})_{(A')} \longrightarrow \mathrm{Rep}(\mathcal{G}_{/A'}) \quad , \tag{2.2.3.1}$$

où $\mathcal{G}_{/A'}$ est la gerbe $\mathcal{G}$ restreinte à $\underline{\mathrm{Sch}}_{/A'}$. On voit facilement que ce foncteur est une équivalence de catégories.

Les remarques précédentes entraînent :

2.2.3.1. Proposition. Si $\mathcal{G}$ est une gerbe tannakienne sur A, la $\otimes$-catégorie ACU A-linéaire $\underline{\mathrm{Rep}}(\mathcal{G})$ est ind-tannakienne.

2.2.4. Notons $\underline{\underline{\mathrm{GTann}}}(A)$ la 2-catégorie des gerbes tannakiennes sur A. La correspondance

$$\mathcal{G} \longmapsto \underline{\mathrm{Rep}}(\mathcal{G})$$

est 2-fonctorielle en $\mathcal{G}$, et définit un 2-foncteur

$$\underline{\mathrm{Rep}} : \underline{\underline{\mathrm{GTann}}}(A)^{\circ} \longrightarrow \underline{\underline{\mathrm{ITann}}}(A) \quad . \tag{2.2.4.1}$$

Rappelons que si $\underline{\underline{C}}$ est une 2-catégorie, dans la 2-catégorie $\underline{\underline{C}}^{o}$, on a, quels que soient les objets X , Y

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\underline{C}}^{o}}(X,Y) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\underline{C}}}(Y,X) ,$$

i.e. on change le sens des 1-morphismes mais non celui des 2-morphismes.

2.3. Le théorème de structure.

2.3.0. Dans ce numéro, A désigne un anneau (commutatif unifère) $S = \mathrm{Spec}(A)$. Tous les faisceaux et les champs considérés sur S le sont pour la topologie fppc , et on utilisera le procédé indiqué en 2.0.2.

2.3.1. Soit $\underline{C}$ une catégorie ind-tannakienne sur A ; ce qui a été dit en 1.1.2 entraîne aussitôt que la catégorie fibrée $\mathrm{FIB}(\underline{C})$ sur $\underline{\mathrm{Schaff}}_{/A}$ (1.1.3) est un champ pour la topologie fpqc . Puisque $\underline{C}$ est, localement pour fppc , de la forme $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ où G est un groupe affine et plat, il résulte de II 3.2.3.3 que $\mathrm{FIB}(\underline{C})$ est, localement pour fppc, de la forme $\mathrm{TORS}(G)$. En d'autres termes $\mathrm{FIB}(\underline{C})$ est une gerbe tannakienne sur A . Comme $\mathrm{FIB}(\underline{C})$ dépend de $\underline{C}$ de façon 2-fonctorielle, on a un 2-foncteur

$$\text{(2.3.1.1)} \qquad \mathrm{FIB} : \underline{\underline{\mathrm{ITann}}}(A) \longrightarrow \underline{\underline{\mathrm{GTann}}}(A)^{o}$$

allant en sens inverse du 2-foncteur

$$\text{(2.3.1.2)} \qquad \underline{\mathrm{Rep}} : \underline{\underline{\mathrm{GTann}}}(A) \longrightarrow \underline{\underline{\mathrm{ITann}}}(A)$$

construit en 2.2.4.

2.3.2. Théorème. Les 2-foncteurs ci-dessus sont des 2-équivalences, quasi-inverses l'un de l'autre.

Pour prouver ce théorème, il suffit de définir des équivalences fonctorielles, pour une gerbe tannakienne $\mathcal{G}$ et une catégorie ind-tannakienne $\underline{C}$

(2.3.2.1) $$\alpha_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \xrightarrow{\approx} \mathrm{FIB}(\underline{\mathrm{Rep}}(\mathcal{G}))$$

(2.3.2.2) $$\beta_{\underline{C}} : \underline{C} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Rep}}(\mathrm{FIB}(\underline{C})) \quad .$$

2.3.2.1. Définition de α_g . Si A' est une A-algèbre, P, Q des objets de la fibre $\mathcal{G}_{A'}$ de $\mathcal{G}$ au-dessus de A' , $f : P \longrightarrow Q$ un morphisme de $\mathcal{G}_{A'}$, on pose

$$\alpha(P)_{A''}(F) = F(P_{A''})$$

$$\alpha(f)_{A''}(F) = F(f_{A''}) \ ,$$

où A'' est une A'-algèbre et $F : \mathcal{G}_{/A''} \longrightarrow \mathrm{QCOH}(A'')$ est une représentation de $\mathcal{G}_{/A''}$. La notation $P_{A''}$ (resp. $f_{A''}$) indique l'image inverse de P (resp. f) par le morphisme $\mathrm{Spec}(A'') \longrightarrow \mathrm{Spec}(A')$.

Le foncteur α_g ainsi défini est une équivalence. En effet, l'assertion étant de nature locale, on peut supposer $\mathcal{G} = \mathrm{TORS}(G)$ avec G un A-groupe affine et plat. Il suffit alors de vérifier que le triangle

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{TORS}(G) & \xrightarrow{\alpha_{\mathrm{TORS}(G)}} & \mathrm{FIB}(\underline{\mathrm{Rep}}(\mathrm{TORS}(G))) \\ & \nwarrow^{\approx} \quad \uparrow \wr & \\ & \mathrm{FIB}(\underline{\mathrm{Rep}}(G)) & \end{array}$$

dans lequel les flèches sans nom sont celles données par (2.1.2.3) et II (3.2.3.1), est commutatif à isomorphisme près. Si ω est un foncteur fibre sur $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$, $F : \mathrm{TORS}(G) \longrightarrow \mathrm{QCOH}(A)$ est une représentation de TORS(G), et si on note $A(\omega)$, $B(\omega)$ les foncteurs fibre sur $\underline{\mathrm{Rep}}(\mathrm{TORS}(G))$ image de ω respectivement par les foncteurs $[\alpha_{\mathrm{TORS}(G)} \circ \approx\ ] \approx$, on a

$$A(\omega)(F) = F(\underline{\mathrm{Isom}}^{\otimes}(\omega^G, \omega))$$

$$B(\omega)(F) = \omega(F(G_d)) \ .$$

Ecrivons $P = \underline{\mathrm{Isom}}^{\otimes}(\omega^G, \omega)$; c'est un torseur à droite sous G . L'isomorphisme

fonctoriel cherché

$$A(\omega)(F) \xrightarrow{\sim} B(\omega)(F)$$

est donné comme composé des isomorphismes

$$A(\omega)(F) = F(P) \simeq F(P \times^G G_d) \simeq P \times^G F(G_d)$$

$$\simeq \omega(F(G_d)) = B(\omega)(F) \quad ;$$

l'isomorphisme $P \times^G F(G_d) \simeq \omega(F(G_d))$ provient de II. 3.2.3.4.

2.3.2.2. Définition de $\beta_{\underline{C}}$. Si $X,Y \in \text{ob } \underline{C}$, $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme, on pose

$$\beta(X)_{A'}(\omega) = \omega(X \otimes_A A')$$

$$\beta(f)_{A'}(\omega) = \omega(f \otimes id_{A'})$$

où A' est une A-algèbre et $\omega : \underline{C}_{(A')} \longrightarrow \underline{\text{Mod}}(A')$ est un foncteur fibre.

Le foncteur $\beta_{\underline{C}}$ ainsi défini est une équivalence de catégories ind-tannakiennes ; la preuve est semblable à celle de 2.3.2.1.

2.3.3. Si $\underline{C}$ est une catégorie ind-tannakienne sur A , on appelle lien de $\underline{C}$ le lien de la gerbe $\text{FIB}(\underline{C})$ (voir 2.1.4) ; si L est ce lien, on dit également que $\underline{C}$ est liée par L , ou que L lie $\underline{C}$. On appellera aussi L-catégorie ind-tannakienne une catégorie ind-tannakienne $\underline{C}$ munie d'un isomorphisme de liens $L \simeq \text{lien}(\underline{C})$. De même, si $\omega : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ est un morphisme de catégories ind-tannakiennes liées respectivement par L , L' et si $u : L' \longrightarrow L$ est le morphisme de liens qui lie $\text{FIB}(\omega)$: $\text{FIB}(\underline{C}') \longrightarrow \text{FIB}(\underline{C})$, on dit que u lie ω ou que ω est lié par u , ou encore que ω est un u-morphisme. On notera $\tau_{\underline{C}}$ la classe d'équivalence de la gerbe $\text{FIB}(\underline{C})$. On a donc $\tau_{\underline{C}} \in H^2(L)$.

On déduit immédiatement de 2.3.2.

2.3.3.1. Corollaire. Soit L un lien sur S_{fpqc} défini localement par un groupe affine et plat. L'application $\underline{C} \longrightarrow \tau_{\underline{C}}$ définit une bijection de l'ensemble des

classes d'équivalence de catégories ind-tannakiennes sur A liées par L , sur l'ensemble $H^2(L)$. Dans cette bijection, la partie $H^2(L)'$ correspond aux catégories ind-tannakiennes qui sont neutres.

2.3.4. Soient $\underline{C}$, $\underline{C}'$ des catégories ind-tannakiennes sur A liées respectivement par L , L' , et soit $u : L \longrightarrow L'$ un morphisme de liens. On note

$$HOM_u(\underline{C}',\underline{C})$$

le champ sur $S = Spec(A)$ dont la fibre en une A-algèbre A' est la catégorie $\underline{Hom}_u(\underline{C}'_{(A')},\underline{C}_{(A')})$ des u-morphismes $\underline{C}'_{(A')} \longrightarrow \underline{C}_{(A')}$. Si $L = L'$ et $u = id_L$, on note aussi $HOM_L(\underline{C}',\underline{C})$, et si $C = \underline{C}'$, $END_L(\underline{C})$. Remarquons qu'en fait on a

$$END_L(\underline{C}) = AUT_L(\underline{C}) ,$$

où le second membre désigne le champ sur S des équivalences $\underline{C} \longrightarrow \underline{C}$ liées par id_L ; ceci résulte de 2.3.2 et de ce qu'un morphisme de gerbes est une équivalence si et seulement s'il est lié par un isomorphisme de liens (GIRAUD [1], IV 2.2.6).

Soit Z_u le centralisateur de u (loc. cit. IV 1.5.1). On déduit alors de 2.3.2 et loc. cit. IV 2.3.2

2.3.4.1. Proposition. Le champ $HOM_u(\underline{C}',\underline{C})$ sur S est une gerbe dont le lien est canoniquement isomorphe à Z_u , le morphisme canonique $L \times Z_u \longrightarrow L'$ s'identifiant à celui qui lie le morphisme de gerbes évident $FIB(\underline{C}) \times HOM_u(\underline{C}',\underline{C}) \longrightarrow FIB(\underline{C}')$.

2.3.4.2. Explicitons la situation dans le cas où $\underline{C} = \underline{C}'$ et $u = id_L$. Soit $Z = \underline{Cent}(L)$ le centre de L ; c'est un faisceau abélien sur S_{fpqc} , et on peut déjà remarquer qu'on a un isomorphisme canonique

$$(2.3.4.1) \qquad Z \xrightarrow{\sim} \underline{End}^{\otimes}(id_{\underline{C}})$$

Il suffit de définir celui-ci localement, i.e. dans le cas où $\underline{C} = \underline{Rep}(G)$, cas traité en II 3.3.3.2.

Il est maintenant facile de voir qu'on a un isomorphisme de gerbes

(2.3.4.2) $$\mathrm{TORS}(Z) \longrightarrow \mathrm{END}_L(\underline{C}) \quad ;$$

celui-ci associe à un torseur P sous Z l'endomorphisme $X \longmapsto P \overset{Z}{\times} X$, compte tenu de ce que Z agit sur chaque objet de $\underline{C}$ par l'intermédiaire de (2.3.4.1).

On déduit de (2.3.4.2) des isomorphismes de groupe

(2.3.4.3) $$\begin{cases} \mathrm{End}_L(\underline{C}) \simeq H^1(S_{fpqc}, Z) \\ \mathrm{End}^{\otimes,1}(\mathrm{id}_{\underline{C}}) \simeq H^0(S_{fpqc}, Z) \end{cases}$$

2.3.5. Le groupe $\mathrm{Aut}_L(\underline{C}) \simeq H^1(Z)$ opère à gauche sur l'ensemble $\mathrm{Hom}_u(\underline{C}', \underline{C})$ par composition. De même, si $Z' = \underline{\mathrm{Cent}}(L')$, $H^1(Z')$ opère à droite sur cet ensemble.

Il résulte alors de loc. cit., IV 2.3.15.

2.3.5.1. Proposition. *Si le centralisateur de* u, $\underline{\mathrm{Cent}}(u)$ *coïncide avec* Z', *l'ensemble* $\mathrm{Hom}_u(\underline{C}, \underline{C})$ *est un pseudo-torseur sous le groupe* $H^1(Z')$.

Voici une variante de ce qui précède, dans laquelle on suppose le lien L' abélien (l'hypothèse faite en 2.3.5.1 est alors automatiquement vérifiée pour tout morphisme $L \longrightarrow L'$). Si $\tau \in H^2(L)$, $\tau' \in H^2(L')$ dénotent les classes de cohomologie de $\underline{C}$, $\underline{C}'$ (2.3.3), on note $\mathrm{Hom}(L, L'; \tau, \tau')$ l'ensemble des morphismes de lien $L \longrightarrow L'$ qui envoient τ sur τ' (voir 2.1.5). On a une application

(2.3.6.1) $$\mathrm{Hom}(\underline{C}', \underline{C}) \xrightarrow{f} \mathrm{Hom}(L, L'; \tau, \tau')$$

qui à un morphisme $\underline{C}' \longrightarrow \underline{C}$ associe le morphisme $L \longrightarrow L'$ qui le lie.

2.3.6.2. Proposition. *L'action de* $H^1(L')$ *fait de* $\mathrm{Hom}(\underline{C}', \underline{C})$ *un torseur au-dessus de l'ensemble* $\mathrm{Hom}(L, L'; \tau, \tau')$.

Rappelons que ceci signifie que l'application

$$\mathrm{Hom}(\underline{C}', \underline{C}) \times H^1(L') \longrightarrow \mathrm{Hom}(\underline{C}', \underline{C}) \times_f \mathrm{Hom}(\underline{C}', \underline{C})$$

$$(\omega,h) \longmapsto (\omega,\omega h)$$

est une bijection.

§ 3. CATEGORIES TANNAKIENNES SUR UN CORPS

3.1. Compléments : comparaison entre la cohomologie fpqc et fppf .

3.1.0. Fixons un corps k . La catégorie $\underline{Sch}_{/k}$ des k-schémas peut être munie de deux topologies : la topologie fpqc qu'on a utilisée jusqu'ici , et la topologie fidèlement plate de présentation finie (fppf). Pour abréger, les sites correspondants seront notés respectivement k_{qc} , k_{pf} . La topologie fpqc est plus fine que la topologie fppf , d'où un morphisme de sites

$$k_{qc} \longrightarrow k_{pf} \tag{3.1.0.1}$$

induisant l'identité sur $\underline{Sch}_{/k}$. Une gerbe sur l'un de ces sites est tannakienne si elle est liée localement (pour la topologie envisagée) par un groupe affine (automatiquement plat). Elle sera dite algébrique si ce groupe est de type fini (ou de présentation finie, cela revient au même).

L'objet de ce numéro est de prouver qu'il n'y a pas de distinction à faire entre les gerbes tannakiennes algébriques sur k_{pf} ou sur k_{qc} .

3.1.1. Soit F un préfaisceau en groupes abéliens sur $\underline{Sch}_{/k}$, $F : \underline{Sch}_{/k}^{o} \longrightarrow \underline{Ab}$. Rappelons que F est localement de présentation finie s'il transforme $\varprojlim$ filtrantes de k-schémas affines en $\varinjlim$.

On a des morphismes de groupes, pour $i \in \mathbb{N}$

$$\check{H}^i(k_{pf},F) \longrightarrow \check{H}^i(k_{qc},F) \quad , \tag{3.1.1.1}$$

provenant du morphisme de sites (3.1.0.1), où $\check{H}^i$ désigne la cohomologie de Čech (voir SGA 4, V).

3.1.1.1. Proposition. Si F est localement de présentation finie, les applications (3.1.1.1) sont bijectives.

3.1.1.2. Preuve. Par définition de la cohomologie de Čech, on a

$$\check{H}^i(k_{pf},F) = \varinjlim_{A/k} H^i(A/k,F)$$

$$\check{H}^i(k_{qc},F) = \varinjlim_{A/k} H^i(A/k,F) \quad ,$$

où dans la première expression A parcourt les k-algèbres de type fini, dans la seconde A parcourt toutes les k-algèbres (i.e. appartenant à l'univers ambiant dans lequel on travaille). L'application (3.1.1.1) est l'application canonique provenant de l'inclusion du premier ensemble d'indices dans le second. Il suffit pour conclure, de remarquer que si A est une k-algèbre, l'hypothèse sur F entraîne qu'on a un isomorphisme canonique

$$H^i(A/k,F) \simeq \varinjlim_{A' \hookrightarrow A} H^i(A'/k,F) \quad ,$$

où A' parcourt l'ensemble des sous-algèbres de A qui sont de type fini sur k.

3.1.2. Proposition. Soient S un schéma, F un faisceau en groupes sur le site S_{fpqc}. Alors, l'application canonique

$$H^1(S_{fppf},F) \longrightarrow H^1(S_{fpqc},F) \tag{3.1.2.1}$$

est injective. De plus, si F est un faisceau localement de présentation finie, elle est bijective dans chacun des cas suivants :

a) F est représentable par un S-groupe affine et plat (de présentation finie par hypothèse).

b) S est le spectre d'un corps.

On va décomposer la démonstration en plusieurs pas.

3.1.2.1. Prouvons la première assertion. Il suffit pour cela de remarquer que si P est un torseur à droite sous F pour la topologie fppf, P est également un torseur à droite sous F pour la topologie fpqc. Ceci provient de ce que P est localement isomorphe à F pour la topologie fppf, et de ce que pour un faisceau fppf (tel P),

la propriété d'être un faisceau fpqc est de nature locale pour la topologie fppf comme le montre un diagram-chasing facile. Ce raisonnement montre en fait, que l'application (3.1.2.1) est induite par le foncteur pleinement fidèle

$$\underline{\mathrm{Tors}}(S_{fppf},F) \longrightarrow \underline{\mathrm{Tors}}(S_{fpqc},F) \tag{3.1.2.2}$$

$$P \longmapsto P \quad .$$

3.1.2.2. Plaçons-nous dans le cas a). Le foncteur (3.1.2.2) est alors une équivalence (et même un isomorphisme de catégories) ; en effet, si P est un torseur à droite sous F pour fpqc, il est représentable par un S-schéma affine, plat et de présentation finie noté encore P (SGA 1, exposé VIII). Il possède un point à valeurs dans un S-schéma fppf, à savoir P lui-même et est donc un torseur fppf sous F.

3.1.2.3. Plaçons-nous dans le cas b). Si $S = \mathrm{Spec}(k)$, on prouve encore que tout torseur fpqc P sous F est un torseur fppf, i.e. possède un point à valeurs dans une k-algèbre de type fini. Pour ceci, remarquons d'abord que P est un foncteur localement de présentation finie ; en effet, ceci est une propriété de nature locale (pour fpqc) pour un faisceau fpqc. Soit A une k-algèbre avec $P(A) \neq \emptyset$. On a

$$P(A) = \varinjlim_{A' \hookrightarrow A} P(A') \quad ,$$

où A' parcourt l'ensemble des sous-algèbres de A qui sont de type fini. Il en résulte qu'il existe une telle A' avec $P(A') \neq \emptyset$.

3.1.3. Comparaison des H^2 : cas abélien. Soit G un k-groupe affine de type fini commutatif. On a un morphisme de groupes

$$H^2(k_{pf},G) \longrightarrow H^2(k_{qc},G) \ , \tag{3.1.3.1}$$

dont on se propose de prouver la bijectivité.

3.1.3.1. Soient E, E' les suites spectrales qui relient la cohomologie habituelle et la cohomologie de Cech (SGA 4, exposé V, 2.5) de G respectivement dans le site

k_{pf} , k_{qc} . On a

$$E_2^{pq} = \check{H}^p(k_{pf},\underline{H}^q(k_{pf},G)) \Rightarrow E^{p+q} = H^{p+q}(k_{pf},G)$$

$$E'^{pq}_2 = \check{H}^p(k_{qc},\underline{H}^q(k_{qc},G)) \Rightarrow E'^{p+q} = H^{p+q}(k_{qc},G) \quad .$$

Il y a également un morphisme évident de suites spectrales $E \longrightarrow E'$.

3.1.3.2. Un calcul facile donne pour les termes $E_\infty^{p,q}$ avec $p+q = 2$, les formules suivantes

$$E_\infty^{02} = 0$$

$$E_\infty^{11} = \mathrm{Ker}\,[\check{H}^1(k_{pf},\underline{H}^1(k_{pf},G)) \longrightarrow \check{H}^3(k_{pf},G)]$$

$$E_\infty^{20} = \check{H}^2(k_{pf},G) \quad ,$$

ainsi que des formules analogues pour les termes $E_\infty'^{pq}$ avec $p+q = 2$. Ceci permet, en considérant les filtrations de E^2 , E'^2 , d'écrire un morphisme de suites exactes.

(3.1.3.2)
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \check{H}^2(k_{pf},G) & \longrightarrow & H^2(k_{pf},G) & \longrightarrow & \check{H}^1(k_{pf},\underline{H}^1(k_{pf},G)) & \longrightarrow & \check{H}^3(k_{pf},G) \\ & & \downarrow\,① & & \downarrow\,② & & \downarrow\,③ & & \downarrow\,④ \\ 0 & \longrightarrow & \check{H}^2(k_{qc},G) & \longrightarrow & H^2(k_{qc},G) & \longrightarrow & \check{H}^1(k_{qc},\underline{H}^1(k_{qc},G)) & \longrightarrow & \check{H}^3(k_{qc},G) \end{array}$$

3.1.3.3. Théorème. L'application (3.1.3.1) est bijective.

3.1.3.4. Preuve. Le théorème sera une conséquence du lemme des cinq si on sait prouver que les applications ①,③,④ dans le diagramme (3.1.3.2) sont bijectives. Pour ① et ④ cela suit de 3.1.1.1. Pour pouvoir appliquer ce même critère à ③, il faut savoir, d'abord que les préfaisceaux $\underline{H}^1(k_{pf},G)$,$\underline{H}^1(k_{qc},G)$ coïncident, ce qui résulte de 3.1.2, puisque $\underline{H}^1(k_{pf},G)$ est un foncteur localement de présentation finie ; ceci résulte aussitôt de EGA IV § 8 .

3.1.4. Le morphisme de sites $k_{qc} \longrightarrow k_{pf}$ induit un foncteur image inverse

(GIRAUD [1],V 1.2)

(3.1.4.1) $$\underline{LIEN}(k_{pf}) \longrightarrow LIEN(k_{qc}) \ ,$$

qu'on notera $L \longmapsto L^{\#}$. Si G est un k-schéma en groupes, on a un isomorphisme canonique

$$lien(G)^{\#} \simeq lien(G)$$

où le premier lien(G) désigne le lien attaché à G pour la topologie fppf , le second celui correspondant à la topologie fpqc.

On dira qu'un lien L sur k_{pf} (resp. k_{qc}) est <u>algébrique affine</u> s'il est défini localement par un groupe affine de type fini.

3.1.4.1. <u>Proposition</u>. <u>Soit</u> L <u>un lien algébrique affine sur</u> k_{pf} . <u>Alors, le morphisme de faisceaux</u> fppf

(3.1.4.2) $$\underline{Aut}(L) \longrightarrow \underline{Aut}(L^{\#})$$

<u>induit par le morphisme de champs</u> (3.1.4.1) <u>est un isomorphisme</u>.

3.1.4.2. <u>Preuve</u>. Le problème étant local pour la topologie fppf , quitte à remplacer k par une extension finie, on peut supposer L défini par un k-groupe affine de type fini G . Il s'agit alors de prouver que le morphisme de faisceaus fppf

$$\underline{Aut\ ext}(G) \longrightarrow \underline{Aut\ ext}'(G)$$

est un isomorphisme, où $\underline{Autext}(G) = \underline{Aut}(G)/\underline{Int}(G)$, le quotient étant pris au sens de la topologie fppf (SGA 3, exposé IV), et $\underline{Autext}'(G) = \underline{Aut}(G)/\underline{Int}(G)$, le quotient étant pris au sens de la topologie fpqc. Ici $\underline{Int}(G) = G/\underline{Cent}(G)$, le quotient étant le même pour les deux topologies ; ceci provient de la représentabilité de $\underline{Int}(G)$ (loc.cit., VI, 11.17 et VIII, 6.7).

Soit S un k-schéma ; on a une suite exacte de faisceaux sur S_{fppf} (noté S_{pf})

$$1 \longrightarrow \underline{\mathrm{Int}}(G_S) \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}(G_S) \longrightarrow \underline{\mathrm{Autext}}(G_S) \longrightarrow 1 \ ,$$

dont l'image inverse par le morphisme de sites $S_{qc} \longrightarrow S_{pf}$ s'identifie à

$$1 \longrightarrow \underline{\mathrm{Int}}(G_S) \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}(G_S) \longrightarrow \underline{\mathrm{Autext}}'(G_S) \longrightarrow 1 \ .$$

En écrivant les suites exactes de cohomologie, on obtient un diagramme commutatif,

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Int}}(G)(S) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(G_S) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Autext}}(G)(S) & \longrightarrow & H^1(S_{pf}, \underline{\mathrm{Int}}(G_S)) \longrightarrow H^1(S_{pf}, \underline{\mathrm{Aut}}(G_S)) \\
 & & \downarrow \textcircled{1} & & \downarrow \textcircled{2} & & \downarrow \textcircled{3} & & \downarrow \textcircled{4} \qquad\qquad \downarrow \textcircled{5} \\
1 & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Int}}(G)(S) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(G_S) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Autext}}'(G)(S) & \longrightarrow & H^1(S_{qc}, \underline{\mathrm{Int}}(G_S)) \longrightarrow H^1(S_{qc}, \underline{\mathrm{Aut}}(G_S))
\end{array}$$

Les applications ①, ② sont des identités, ④ est une bijection en vertu des remarques précédentes et de 3.1.2 a), 5 est injectif par 3.1.2. Un diagram-chasing facile prouve alors que l'application ③ est bijective.

3.1.4.3. Remarque. Notons $\mathfrak{L}$ (resp. $\mathfrak{L}'$) la sous-catégorie de $\underline{\mathrm{Lien}}(k_{pf})$ (resp. $\underline{\mathrm{Lien}}(k_{qc})$) ayant comme objets les liens algébriques affines et comme morphismes les isomorphismes entre ces liens. La proposition dit alors que le foncteur

(3.1.4.3) $$\mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}'$$

induit par (3.1.4.1) est pleinement fidèle. Soit M un objet de $\mathfrak{L}'$, il existe alors une extension finie de k sur laquelle M est représenté par un groupe affine de type fini. En effet, soit A une k-algèbre $\neq 0$ sur laquelle M est représenté par un groupe affine de présentation finie. Des arguments standard (voir EGA IV, §8) prouvent que ce groupe provient d'une sous-algèbre de type fini de A ; on voit ainsi, en prenant un idéal maximal de cette sous-algèbre qu'il existe une extension finie k_1 de k et un k_1-groupe G_1 affine de type fini tel que M et G_1 soient localement isomorphes pour la topologie fpqc. Ils le sont alors aussi pour la topologie fppf, parce que le faisceau quotient $\underline{\mathrm{Autext}}(G_1) = \underline{\mathrm{Autext}}'(G_1)$ est localement de présentation finie comme on le voit aussitôt (3.1.2, b)).

3.1.4.4. Théorème. Le foncteur (3.1.4.3) est une équivalence de catégories.

3.1.4.5. Preuve. Soit M un objet de $\mathfrak{L}'$, k'/k une extension finie telle que sur k', M provient de $\mathfrak{L}$ (voir 3.1.4.3)

$$M_{k'} \simeq (L')^{\#} .$$

En utilisant 3.1.4.1, on voit que la donnée de descente évidente sur $M_{k'}$ définit une donnée de descente sur L'. Comme $\mathrm{LIEN}(k_{pf})$ est un champ sur k_{pf} et que k'/k est une extension finie, c'est une donnée de descente effective, et on obtient un lien L sur k_{pf} avec

$$L^{\#} \simeq M$$

3.1.5. Théorème. Soit $\mathcal{G}$ une catégorie fibrée sur $\mathrm{Sch}_{/k}$. Alors, $\mathcal{G}$ est une gerbe tannakienne algébrique pour la topologie fpqc si et seulement si elle l'est pour la topologie fppf.

La preuve se décompose en plusieurs pas.

3.1.5.1. Lemme. Soient S un schéma, et $\mathcal{G}$ un champ sur S_{fppf} tel que localement pour la topologie fppf, $\mathcal{G}$ est un champ pour la topologie fpqc. Alors, $\mathcal{G}$ est un champ pour la topologie fpqc.

3.1.5.2. Preuve. Le fait que les morphismes se recollent est une conséquence de ce que pour un faisceau fppf F la propriété " F est un faisceau fpqc " est de nature locale pour la topologie fppf. La vérification du fait que les objets se recollent est du même style. Soit $\{R_i \longrightarrow T\}$ un recouvrement fpqc d'un S-schéma T, et soient $x_i \in \mathrm{ob}\, \mathcal{G}_{R_i}$ des objets dans les fibres de $\mathcal{G}$ munis d'une donnée de descente $f_{ji} : (x_i)_{R_{ij}} \simeq (x_j)_{R_{ji}}$. Par hypothèse, il existe un recouvrement fppf $\{T'_\alpha \longrightarrow T\}$ tel qu'au-dessus des T'_α, $\mathcal{G}$ soit un champ fpqc. En prenant l'image inverse de la donnée de descente $((x_i),(f_{ij}))$ par les morphismes $T'_\alpha \longrightarrow T$ on trouve des données de descente, qui sont effectives, et donnent lieu à des objets $x'_\alpha \in \mathcal{G}_{T'}$. Par construction, la famille (x'_α) se trouve canoniquement munie d'une

donnée de descente par rapport au recouvrement $\{T'_\alpha \longrightarrow T\}$, qui est effective parce que $\mathcal{G}$ est un champ fppf .

3.1.5.3. Le lemme précédent entraîne aussitôt que si $\mathcal{G}$ est une gerbe tannakienne algébrique pour fppf , alors elle l'est aussi pour fpqc . Il reste à prouver que si $\mathcal{G}$ est une gerbe tannakienne algébrique pour fpqc , elle l'est aussi pour fppf , i.e. qu'il existe une extension finie k' de k avec $\mathcal{G}_{k'} \neq \emptyset$. Soit L le lien de $\mathcal{G}$.

a) Cas où L = lien(G) , G un k-groupe. Il suffit évidemment de prouver, compte tenu de 3.1.5.1, que l'application

$$H^2(k_{pf},L) \longrightarrow H^2(k_{qc},L)$$

est bijective. Puisque L = lien(G), ces ensembles sont non vides (il y a au moins la gerbe des torseurs sous G) , et on se ramène grâce à GIRAUD [1], III 3.3.3., au cas où G est commutatif, cas qui a été résolu en 3.1.3.3.

b) Cas général. On sait, par 3.1.4.4, qu'il y a une extension finie k_1/k telle que L est représenté par un groupe G_1 . Il résulte de a) qu'il existe une extension finie k'/k_1 avec $\mathcal{G}_{k'} \neq \emptyset$.

3.1.6. Corollaire. Soit L un lien algébrique affine sur k (voir 3.1.4.4). Alors, l'application

(3.1.6.1) $$H^2(k_{pf},L) \longrightarrow H^2(k_{qc},L)$$

est bijective, et induit une bijection

(3.1.6.2) $$H^2(k_{pf},L)' \longrightarrow H^2(k_{qc},L)'$$

3.2. Catégories tannakiennes.

3.2.1. Soit $\underline{C}_o$ une catégorie abélienne k-linéaire (k étant un corps) munie d'une loi

$\otimes$ ACU k-linéaire. On dit que $\underline{C}_o$ est une catégorie tannakienne sur k si elle est rigide (I 5.1 1), et si de plus, il existe une extension k'/k , et un foncteur rigide k-linéaire

$$\underline{C}_o \xrightarrow{\omega_o} \underline{Modf}(k')$$

qui soit fidèle et exact. On supposera aussi que $\underline{C}_o$ est petite (i.e. l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets de $\underline{C}_o$ est un élément de l'univers ambiant). On notera qu'une catégorie tannakienne est à la fois noethérienne et artinienne (GABRIEL [1],II 4). En effet, elle est petite par hypothèse, et à l'aide d'un foncteur "fibre" tel que ω_o , on voit que ses objets sont de longueur finie. Une catégorie tannakienne $\underline{C}_o$ est neutre si dans la définition précédente, on peut faire k' = k .

3.2.1.1. Si $\underline{C}_o$, $\underline{D}_o$ sont des catégories tannakiennes sur k , les morphismes de $\underline{C}_o$ dans $\underline{D}_o$ sont les foncteurs k-linéaires fidèles et exacts $\underline{C}_o \longrightarrow \underline{D}_o$ rigides (I 5.2.1), i.e. munis d'une structure de $\otimes$-foncteur ACU.

3.2.1.2. Soient $\underline{C}_o$ une catégorie tannakienne sur k , S un k-schéma. Rappelons qu'on désigne par Loclib(S) la $\otimes$-catégorie ACU $\Gamma(S,\underline{O}_S)$-linéaire des $\underline{O}_S$-Modules localement libres de rang fini. On appelle foncteur fibre sur $\underline{C}_o$ à valeurs dans S un $\otimes$-foncteur ACU k-linéaire et exact $\underline{C}_o \longrightarrow$ Loclib(S) ; si $S \neq \emptyset$, on voit comme en 4.2.1, qu'il est aussi fidèle. Si on prend comme morphismes de foncteurs fibre les $\otimes$-morphismes unifères, on obtient une catégorie $\underline{Fib}_o(\underline{C}_o,S)$. La collection de ces catégories définit de façon naturelle une catégorie fibrée $\underline{FIB}_o(\underline{C}_o)$ sur $\underline{Sch}_{/k}$. La théorie de descente fpqc (SGA 1, VIII) montre aussitôt que $FIB_o(\underline{C}_o)$ est un champ sur le site k_{qc} obtenu en munissant $\underline{Sch}_{/k}$ de la topologie fpqc . On voit également, par (I 5.2.2 et 5.2.3) que les fibres $\underline{Fib}_o(\underline{C}_o,S)$ de ce champ sont des groupoïdes. Si $\omega : \underline{C}_o \longrightarrow \underline{Loclib}(S)$ est un foncteur fibre, son S-groupe d'automorphismes $\underline{Aut}^{\otimes}(\omega)$ est appelé le groupe d'holonomie de $\underline{C}_o$ en ω (voir VI, 1.2).

En fait, $FIB_o(\underline{C}_o)$ est une gerbe tannakienne sur k_{qc} , comme il résulte du théorème ci-dessous.

3.2.2. Théorème. Soit $\underline{C}_o$ une catégorie tannakienne sur un corps k , et désignons

par $\underline{C}$ la $\otimes$-catégorie ACU k-linéaire des ind-objets de $\underline{C}_o$, $\underline{C} = \underline{Ind}(\underline{C}_o)$ (voir II 2.3.4). Alors, $\underline{C}$ est une catégorie ind-tannakienne sur k et le $\otimes$-foncteur canonique $\underline{C}_o \longrightarrow \underline{C}$ induit une équivalence de champs

(3.2.2.1) $$FIB(\underline{C}) \longrightarrow FIB_o(\underline{C}_o) \quad .$$

3.2.2.1. Remarques préliminaires à la preuve. On a une équivalence de catégories

(3.2.2.2) $$\underline{C} \cong \underline{Sex}_k(\underline{C}_o^o, \underline{Mod}(k))$$

où $\underline{Sex}_k(\underline{C}_o^o, \underline{Mod}(k))$ désigne la catégorie des foncteurs k-linéaires exacts à gauche $\underline{C}_o^o \longrightarrow \underline{Mod}(k)$ (voir II 2.3.4.2). Le foncteur canonique $\underline{C}_o \longrightarrow \underline{C}$ s'identifie au foncteur pleinement fidèle.

$$\underline{C}_o \longrightarrow \underline{Sex}_k(\underline{C}_o^o, \underline{Mod}(k))$$

qui à $X \in ob\ \underline{C}_o$ associe le foncteur

$$X(Y) = Hom(Y,X) \ .$$

De même, si A est une k-algèbre, la catégorie $\underline{C}_{(A)}$ s'identifie à la catégorie $\underline{Sex}_k(\underline{C}_o^o, \underline{Mod}(A))$ des foncteurs k-linéaires $\underline{C}_o^o \longrightarrow \underline{Mod}(A)$, qui sont exacts à gauche. Le foncteur canonique $i_{A/k} : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}_{(A)}$ (II, 1.5.2) devient le foncteur

$$\underline{Sex}_k(\underline{C}_o^o, \underline{Mod}(k)) \longrightarrow \underline{Sex}_k(\underline{C}_o^o, \underline{Mod}(A))$$

qui envoie un foncteur k-linéaire exact à gauche $F : \underline{C}_o^o \longrightarrow \underline{Mod}(k)$ dans F_A défini par

$$F_A(Y) = A \otimes_k F(Y).$$

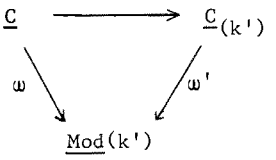
Le foncteur $j_{A/k} : \underline{C}_{(A)} \longrightarrow \underline{C}$ adjoint à droite de $i_{A/k}$ devient l'inclusion évidente. On en déduit par exemple que si $X,Y \in ob\ \underline{C}_o$, et si on note X_A , Y_A les objets de $\underline{C}_{(A)}$ qu'on obtient par application de $i_{A/k}$, l'application

$$Hom_{\underline{C}_o}(X,Y) \longrightarrow Hom_{\underline{C}_{(A)}}(X_A, Y_A)$$

induit une bijection

(3.2.2.3) $$A \otimes_k \mathrm{Hom}_{\underline{C}_o}(X,Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\underline{C}_{(A)}}(X_A, Y_A) .$$

Soit maintenant $\omega_o : \underline{C}_o \longrightarrow \underline{\mathrm{Modf}}(k')$ un foncteur fibre sur $\underline{C}_o$ à valeurs dans une extension k' de k. Il définit un $\otimes$-foncteur ACU fidèle exact $\omega : \underline{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}}(k')$, et encore un $\otimes$-foncteur ACU k'-linéaire $\omega' : \underline{C}_{(k')} \longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}}(k')$ rendant le triangle



commutatif à isomorphisme canonique près. Un premier pas dans la démonstration du théorème consiste à prouver que ω' est fidèle et exact ; malheureusement, ceci n'est pas aussi trivial qu'il le paraît au premier abord, et dépend fermement de ce que $\underline{C}_o$ est une catégorie tannakienne.

3.2.2.2. Construction d'une gerbe auxiliaire.

a) Le foncteur fibre $\omega_o : \underline{C}_o \longrightarrow \underline{\mathrm{Modf}}(k')$ définit de la façon décrite en II 1.3.3.3, un k'-monoïde affine G',

(3.2.2.4) $$G' = \underline{\mathrm{End}}^{\otimes,1}(\omega_o) .$$

On a $G' = \mathrm{Spec}(B')$, où B' est la k'-bigèbre définie par

(3.2.2.5) $$\check{B}' = \underline{\mathrm{End}}(\omega_o) .$$

On a d'ailleurs des isomorphismes

(3.2.2.6) $$\check{B}' \simeq \underline{\mathrm{End}}(\omega) \simeq \underline{\mathrm{End}}(\omega')$$
$$\check{G}' \simeq \underline{\mathrm{End}}^{\otimes,1}(\omega) \simeq \underline{\mathrm{End}}^{\otimes,1}(\omega') ;$$

on remarquera aussi que G' est un groupe, i.e.

$$\underline{\mathrm{End}}^{\otimes,1}(\omega_o) = \underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega_o) ,$$

ce qui résulte des remarques à la fin de 3.2.1.

Il est clair, par définition de G', que ω_o et ω prennent leurs valeurs dans la catégorie des G'-modules ; on a des triangles commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \underline{C}_o & \xrightarrow{\tilde{\omega}_o} & \underline{\mathrm{Rep}}_o(G') \\ & {\scriptstyle \omega_o} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \omega_o^{G'}} & \\ & \underline{\mathrm{Modf}}(k') & \end{array}$$

(3.2.2.7)

$$\begin{array}{ccc} \underline{C} & \xrightarrow{\tilde{\omega}} & \underline{\mathrm{Rep}}\ (G') \\ & {\scriptstyle \omega} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \omega^{G'}} & \\ & \underline{\mathrm{Mod}}(k') & \end{array}$$

b) On définit une sous-catégorie fibrée $\mathcal{C}_\natural$ de $\mathrm{FIB}_o(\underline{C}_o)$ de la façon suivante : si S est un k-schéma, $\mathcal{C}_{\natural S}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Fib}_o(\underline{C}_o, S)$ ayant comme objets les foncteurs fibre $\nu : \underline{C}_o \longrightarrow \underline{\mathrm{Loclib}}(S)$ qui se factorisent localement par $\omega_o^{G'}$. En termes précis, ν appartient à $\mathcal{C}_{\natural S}$ s'il existe un recouvrement fpqc $\{S_i \longrightarrow S\}$ de S et des carrés commutatifs

$$\begin{array}{ccc} S_i & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(k') \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(k) \end{array}$$

tel que les diagrammes de $\otimes$-foncteurs

$$\begin{array}{ccc} \underline{C}_o & \xrightarrow{\tilde{\omega}_o} & \underline{\mathrm{Rep}}_o(G') \\ {\scriptstyle\nu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\omega_o^{G'})_{S_i}} \\ \underline{\mathrm{Loclib}}(S) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Loclib}}(S_i) \end{array}$$

soient commutatifs à $\otimes$-isomorphisme près.

La propriété pour ν d'appartenir à $\mathcal{G}_S$ est locale en S pour la topologie fpqc, comme il résulte de la définition. Ceci entraîne que $\mathcal{G}$ est un champ sur k_{qc}. En fait, $\mathcal{G}$ est même une gerbe : on a déjà remarqué que ses fibres sont des groupoïdes, la fibre $\mathcal{G}_{k'}$ est non vide (elle contient ω_o), et enfin, par définition, tous les objets de $\mathcal{G}_S$ sont localement isomorphes.

Le $\otimes$-foncteur fidèle et exact $\tilde{\omega}_o : \underline{C}_o \longrightarrow \underline{\mathrm{Rep}}_o(G')$ définit un morphisme de gerbes sur k'_{qc}

$$\mathrm{FIB}_o(\underline{\mathrm{Rep}}_o(G')) \longrightarrow \mathcal{G}_{/k'} \quad . \tag{3.2.2.8}$$

Celui-ci est une équivalence. En effet, $\omega_o^{G'}$ qui est un objet de la première gerbe au-dessus de k', s'envoie par ce morphisme dans ω_o, et il suffit de prouver que le morphisme de faisceaux

$$\underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega_o^{G'}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega_o)$$

est un isomorphisme (GIRAUD [1], IV, 2.2.6) ; or ce morphisme s'identifie au morphisme identité de G'.

c) Soit X un objet de $\underline{C}_o$. La correspondance qui à chaque objet ν de $\mathcal{G}_S$, $\nu : \underline{C}_o \longrightarrow \underline{\mathrm{Loclib}}(S)$, associe $\nu(X)$, est une représentation de la gerbe $\mathcal{G}$. On obtient ainsi un $\otimes$-foncteur ACU k-linéaire $\underline{C}_o \longrightarrow \underline{\mathrm{Rep}}(\mathcal{G})$, ou encore

$$\underline{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Rep}}(\mathcal{G}) \quad . \tag{3.2.2.9}$$

Celui-ci est manifestement exact. Il est aussi fidèle. En effet, si $X \in \mathrm{ob}(\underline{C})$ est envoyé en l'objet nul, on a en particulier $\omega(X) = 0$, donc $X = 0$.

En outre, si on identifie $\underline{\mathrm{Rep}}(\underline{G})_{(k')} \cong \underline{\mathrm{Rep}}(\underline{G}_{/k'})$ à $\underline{\mathrm{Rep}}(G')$ en utilisant (3.2.2.8) et II (3.2.3.1), le foncteur déduit de (3.2.2.9) en étendant les scalaires de k à k' s'identifie au foncteur $\widetilde{\omega}' : \underline{C}_{(k')} \longrightarrow \underline{\mathrm{Rep}}(G')$ déduit de $\widetilde{\omega} : \underline{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Rep}}(G')$. On en déduit que le foncteur ω' est exact et fidèle.

3.2.2.3. Le foncteur (3.2.2.9) est une $\otimes$-équivalence. Il suffit de prouver que $\widetilde{\omega}' : \underline{C}_{(k')} \longrightarrow \underline{\mathrm{Rep}}(G')$ est une équivalence :

a) La collection des objets $X_{k'}$ ($X \in \mathrm{ob}\ \underline{C}_o$) est une famille de générateurs pour la catégorie $\underline{C}_{(k')}$. En effet, si $F,G : \underline{C}_o \longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}}(k')$ sont des objets de $\underline{C}_{(k')}$, on a

$$\mathrm{Hom}(X_{k'},F) \simeq F(X)$$

$$\mathrm{Hom}(X_{k'},G) \simeq G(X) ,$$

donc un morphisme $F \longrightarrow G$ est un isomorphisme si et seulement si pour tout X, $\mathrm{Hom}(X_{k'},F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X_{k'},G)$ est une bijection.

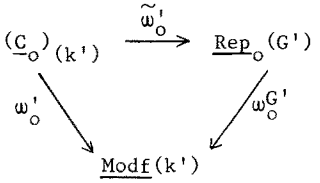
En outre, les $X_{k'}$ sont des objets noethériens (et artiniens) de $\underline{C}_{(k')}$; en effet, on a vu que ω' est exact et fidèle, et $\widetilde{\omega}'(X_{k'}) = \widetilde{\omega}_o(X)$ est un G'-module de rang fini sur k'.

On en conclut que $\underline{C}_{(k')}$ est une catégorie localement noethérienne.

b) Soit $(\underline{C}_o)_{(k')}$ la sous-catégorie pleine des objets noethériens de $\underline{C}_{(k')}$. C'est une sous $\otimes$-catégorie, et ω' induit un $\otimes$-foncteur ACU k'-linéaire

$$\widetilde{\omega}'_o : (\underline{C}_o)_{(k')} \longrightarrow \underline{\mathrm{Rep}}_o(G')$$

qui est fidèle et exact. Pour prouver que $\widetilde{\omega}'$ est une équivalence, il suffit de prouver que celui-ci est une équivalence. On a un triangle commutatif



et $(\underline{C}_o)_{(k')}$ s'identifie par ω'_o à la $\otimes$-catégorie $\underline{Rep}_o(H')$, où $H' = \underline{Aut}^{\otimes}(\omega'_o)$ (II 4.1.1). Mais on a

$$\underline{Aut}^{\otimes}(\omega'_o) \simeq \underline{Aut}^{\otimes}(\omega') ,$$

d'où il résulte par (3.2.2.6) que le morphisme induit $G' \longrightarrow H'$ est un isomorphisme. On conclut aussitôt.

3.2.2.4. Fin de la démonstration. Il suffit évidemment de prouver que $\mathcal{G} = FIB_o(\underline{C}_o)$, c'est-à-dire que pour tout k-schéma S, tout foncteur fibre $\nu_o : \underline{C}_o \longrightarrow \underline{Loclib}(S)$ vérifie la condition de 3.2.2.2 b). Il est clair qu'on peut supposer S affine, $S = Spec(A)$. Soit $\nu : \underline{C} \longrightarrow \underline{Mod}(A)$ le $\otimes$-foncteur ACU fidèle et exact qu'on déduit de ν_o (on suppose $A \neq 0$, autrement il n'y a rien à prouver).

Si $A' = k' \otimes_k A$, on remarque qu'on a un isomorphisme canonique de catégories k'-linéaires.

$$\underline{Mod}(A)_{(k')} \simeq \underline{Mod}(A')$$

(cette remarque s'applique clairement à une situation plus générale), donc on a un carré commutatif à $\otimes$-isomorphisme près

$$\begin{array}{ccc} \underline{C} & \longrightarrow & \underline{C}_{(k')} \\ \downarrow{\scriptstyle \nu} & & \downarrow{\scriptstyle \nu'} \\ \underline{Mod}(A) & \longrightarrow & \underline{Mod}(A') \end{array}$$

où ν' est un foncteur fibre sur $\underline{C}_{(k')} \simeq \underline{Rep}(G')$ à valeurs dans A'. Il est alors localement isomorphe pour fpqc au foncteur ω^G (II 3.2.3), ce qui conclut la preuve du théorème.

3.2.3. Soit $\mathcal{G}$ une gerbe tannakienne sur un schéma S, et notons $\underline{Rep}_o(\mathcal{G})$ la $\otimes$-catégorie $\Gamma(S,\underline{O}_S)$-linéaire des foncteurs cartésiens $\mathcal{G} \longrightarrow LOCLIB(S)$, où $LOCLIB(S)$ est le champ sur S_{fpqc} des Modules localement libres de rang fini.

Voici l'explicitation que le théorème précédent permet de donner des catégories tannakiennes.

3.2.3.1. Scholie. Soit $\underline{C}_o$ une catégorie tannakienne sur k ; le champ $FIB_o(\underline{C}_o)$ est une gerbe sur k_{qc} , et le $\otimes$-foncteur évident

$$\underline{C}_o \longrightarrow \underline{Rep}_o(FIB_o(\underline{C}_o)) \tag{3.2.3.1}$$

est une équivalence de catégories tannakiennes. On a d'autre part une équivalence de gerbes $FIB(\underline{C}) \xrightarrow{\approx} FIB_o(\underline{C}_o)$ où $\underline{C} = \underline{Ind}(\underline{C}_o)$.

3.2.3.2. La $\otimes$-catégorie $\underline{Rep}_o(\mathcal{G})$ est évidemment une catégorie tannakienne et le scholie résulte aussitôt de 3.2.2 appliqué à $\underline{C}_o$ et à $\underline{Rep}_o(FIB_o(\underline{C}))$.

3.2.3.3. Soient $\underline{C}_o$, $\underline{D}_o$ des catégories tannakiennes sur k , et soit $\underline{Hom}(\underline{C}_o,\underline{D}_o)$ la catégorie ayant comme objets les morphismes de $\underline{C}_o$ dans $\underline{D}_o$ (voir 3.2.1.1) et comme morphismes les $\otimes$-morphismes unifères entre ces $\otimes$-foncteurs. On prouve facilement que le foncteur

$$\underline{Hom}(\underline{C}_o,\underline{D}_o) \longrightarrow \underline{Hom}(FIB_o(\underline{D}_o),FIB_o(\underline{C}_o)) \tag{3.2.3.2}$$

obtenu par fonctorialité de la formation de FIB_o est une équivalence de catégories.

3.2.4. Extension des scalaires. Soient $\underline{C}_o$ une catégorie tannakienne sur k , A une k-algèbre, et posons $\mathcal{G} = FIB_o(\underline{C}_o)$. L'équivalence (3.2.3.1) autorise à poser

$$(\underline{C}_o)_{(A)} = \underline{Rep}_o(\mathcal{G}_{/A}) \quad ; \tag{3.2.4.1}$$

Cette notation est surtout valable lorsque A est un corps, auquel cas la $\otimes$-catégorie $(\underline{C}_o)_{(A)}$ est tannakienne sur A et résout le problème universel qu'on devine.

L'image d'un objet X de $\underline{C}_o$ par le foncteur "extension des scalaires"

$$\underline{C}_o \longrightarrow (\underline{C}_o)_{(A)}$$

sera noté $X \underset{k}{\otimes} A$, ou X_A . Il résulte de (3.2.2.3) que ce foncteur induit des

isomorphismes

(3.2.4.2) $$\mathrm{Hom}(X,Y) \otimes_k A \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(X_A, Y_A)$$

pour X , $Y \in \mathrm{ob}\ \underline{C}_o$. En particulier, les k-vectoriels $\mathrm{Hom}(X,Y)$ sont de rang fini sur k , puisque pour un A convenable, $(\underline{C}_o)_{(A)}$ est de la forme $\underline{\mathrm{Rep}}_o(G)$.

3.2.4.1. Soit k'/k une extension de k et posons

$$\underline{C}'_o = (\underline{C}_o)_{(k')} .$$

Il résulte de la démonstration de 3.2.2 que la famille des objets $X_{k'}$, $(X \in \mathrm{ob}\ \underline{C}_o)$ est une famille de générateurs de $\underline{C}'_o$. De même, si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille de générateurs (resp. de $\otimes$-générateurs, voir 4.3.1) pour $\underline{C}_o$, il en est de même de $(X_i \otimes_k k')$ pour $\underline{C}'_o$.

3.2.4.2. Proposition. Soient X , $Y \in \mathrm{ob}\ \underline{C}_o$, et supposons que X et Y soient localement isomorphes pour fpqc , i.e. qu'il existe une k-algèbre $A_o \neq 0$ et un isomorphisme $X_{A_o} \simeq Y_{A_o}$; alors, $X \simeq Y$.

3.2.4.3. Preuve. Soit $\underline{\mathrm{Isom}}(X,Y)$ le k-foncteur qui à une k-algèbre A associe l'ensemble

$$\underline{\mathrm{Isom}}(X,Y)(A) = \mathrm{Isom}(X_A, Y_A) .$$

L'hypothèse signifie que $\underline{\mathrm{Isom}}(X,Y)$ est un torseur à droite sous le k-groupe $\underline{\mathrm{Aut}}(X)$ pour fpqc. Or, si $U = \mathrm{End}(X)$ est la k-algèbre des endomorphismes de X , U est de rang fini sur k , et (3.2.4.2) exprime que pour une k-algèbre A on a

$$\underline{\mathrm{Aut}}(X)(A) = (A \otimes_k U)^* .$$

D'après EGA IV 2.5.8, tout torseur sous ce groupe est trivial, donc $\mathrm{Isom}(X,Y) \neq \emptyset$.

3.2.5. Soit $\mathcal{G}$ une gerbe tannakienne sur k , correspondant par 2.3.2 à une catégorie

ind-tannakienne $\underline{C} = \underline{Rep}(\mathcal{G})$.

Rappelons que $\underline{C}_o = \underline{Rep}_o(\mathcal{G})$ est la sous-$\otimes$-catégorie pleine de $\underline{Rep}(\mathcal{G})$ des foncteurs cartésiens $\mathcal{G} \longrightarrow LOCLIB(k)$, où $LOCLIB(k)$ est le champ sur k_{qc} des Modules localement libres de rang fini. Comme on le voit aussitôt, $\underline{C}_o$ est une catégorie tannakienne sur k , et on a un morphisme de gerbes

$$\mathcal{G} \longrightarrow FIB_o(\underline{Rep}_o(\mathcal{G})) \tag{3.2.5.2}$$

qui à un objet P de $\mathcal{G}$ au-dessus d'un k-schéma S , associe le foncteur fibre $\underline{Rep}_o(\mathcal{G}) \longrightarrow \underline{Loclib}(S)$, $F \longrightarrow F(P)$.

Ce morphisme est une équivalence de gerbes si et seulement si $\underline{C}$ s'identifie à $\underline{Ind}(\underline{C}_o)$ via l'inclusion $\underline{C}_o \longrightarrow \underline{C}$. Soit k' une extension de k telle que la gerbe $\mathcal{G}_{/k'}$ soit neutre ; on voit facilement que les conditions précédentes équivalent encore à la suivante : les objets $X_{k'}$, pour $X \in ob\ \underline{C}_o$, constituent une famille de générateurs de la catégorie $\underline{C}_{(k')}$.

J'ignore si (3.2.5.2) est une équivalence pour toute gerbe tannakienne $\mathcal{G}$. Voici deux cas dans lesquels la réponse est affirmative.

3.2.5.1. Proposition. Si $\mathcal{G}$ est algébrique (3.1.0), le morphisme (3.2.4.2) est une équivalence de gerbes.

3.2.5.2. Preuve. D'après 3.1.5, il existe une extension finie k'/k et une équivalence de catégories ind-tannakiennes

$$\underline{C}_{(k')} \simeq \underline{Rep}(G') ,$$

où G' est un k'-groupe affine de type fini. Soit X' un $\otimes$-générateur de $\underline{Rep}_o(G')$ (II 4.3.1). Par l'équivalence précédente, X' correspond à un objet X de $\underline{C}$, muni d'une action de k' , $\varphi : k' \longrightarrow End(X)$. C'est-à-dire que $X' = (X,\varphi)$. Le G'-module $X_{k'}$ n'est autre que $X' \otimes_k k'$, est encore un $\otimes$-générateur de $\underline{Rep}_o(G')$ (loc.cit.), puisque l'extension k'/k est finie. Il résulte de là, d'abord que $X \in ob\ \underline{C}_o$, ensuite que la collection des $Y_{k'}$, pour $Y \in ob\ \underline{C}_o$, est un système de

générateurs de la catégorie $\underline{C}_{(k')}$ d'où la preuve par les remarques à la fin de 3.2.5.

3.2.5.3. Proposition. Si le lien de $\mathcal{G}$ est représentable par un k-groupe (affine), le morphisme (3.2.5.2) est une équivalence de gerbes.

3.2.5.4. Preuve. Elle est semblable à la précédente. Soit G un k-groupe tel que $\mathrm{lien}(G) = L$, où L est le lien de $\mathcal{G}$. On a un isomorphisme canonique

$$G \xrightarrow{\sim} \varprojlim G_i ,$$

où les G_i sont les k-groupes quotient de G qui sont de type fini (SGA 3, VI_B, 11.13) ; de plus les morphismes de transition $G_i \longrightarrow G_j$ sont fidèlement plats, ainsi que les projections $G \longrightarrow G_i$. Il résulte alors de GIRAUD [1] IV 2.3.18 qu'il existe un système projectif $(\mathcal{G}_i)$ de gerbes tannakiennes algébriques, avec $\mathcal{G}_i$ liée par le lien (G_i) et le morphisme $\mathcal{G}_i \longrightarrow \mathcal{G}_j$ lié par $\mathrm{lien}(G_i \longrightarrow G_j)$. Il résulte aussitôt de ceci, compte tenu du théorème 3.1.5 déjà invoqué, que $\underline{\mathrm{Ind}}(\underline{C}_o) = \underline{C}$.

3.2.6. Soient $\underline{C}$ une catégorie tannakienne sur k, k'/k une extension finie galoisienne de groupe Γ. Si L est le lien de $\underline{C}$, l'ensemble des classes d'équivalence de catégories tannakiennes liées par L est en correspondance biunivoque avec l'ensemble $H^2(L)$. D'autre part, si $Z = \underline{\mathrm{Cent}}(L)$, le groupe $H^2(Z)$ agit sur $H^2(L)$ en en faisant un pseudo-torseur sous $H^2(Z)$ (GIRAUD [1] III 3.3.3), et le choix de $\underline{C}$ définit une bijection de $H^2(Z)$ sur l'ensemble des classes d'équivalence de catégories tannakiennes sur k liées par L. Le groupe de cohomologie galoisienne

$$H^2(k'/k,Z) = H^2(\Gamma,Z(k'))$$

correspond par cette bijection aux catégories tannakiennes $\underline{D}$ sur k liées par L tels que $\underline{C}_{(k')} \simeq \underline{D}_{(k')}$.

Soit $\xi : \Gamma \times \Gamma \longrightarrow Z(k')$ un 2-cocycle de Γ à valeurs dans $Z(k')$. Si la donnée de descente sur $\underline{C}' = \underline{C}_{(k')}$ définissant $\underline{C}$ (1.2.4.1) s'exprime par

$$\begin{cases} \alpha_\gamma : \underline{C}' \longrightarrow \underline{C}' \\ \mu_{\gamma',\gamma} : \alpha_{\gamma'\gamma} \xrightarrow{\sim} \alpha_{\gamma'} \circ \alpha_\gamma \ , \end{cases}$$

celle définissant la catégorie tannakienne $\underline{D}$ correspondant à ξ s'exprime par

$$\begin{cases} \alpha_\gamma \\ [(\alpha_{\gamma'} \circ \alpha_\gamma) * \xi(\gamma',\gamma)] \circ \mu_{\gamma',\gamma} = \mu_{\gamma'\gamma} \circ [\alpha_{\gamma'\gamma} * \xi(\gamma',\gamma)] \end{cases}$$

en se rappelant que $\xi(\gamma',\gamma) \in \mathrm{Aut}^{\otimes}(\mathrm{id}_{\underline{C}'})$.

3.3. Catégories tannakiennes algébriques.

3.3.0. Dans tout ce numéro, on fixe un corps k.

3.3.1. Une catégorie tannakienne $\underline{C}$ sur k est algébrique si elle correspond par 3.2.2 à une gerbe algébrique sur k (3.1.0) ; cela revient à dire qu'il existe une extension de corps k'/k et une équivalence de catégories tannakiennes

$$\underline{C}_{(k')} \simeq \underline{\mathrm{Rep}}_o(G') \ ,$$

où G' est un k-groupe affine de type fini. D'après 3.1.5, on peut choisir une extension k'/k finie.

Les assertions suivantes résultent aussitôt de 3.1.5, 3.2.4.1 et II 4.3.2 a).

3.3.1.1. Scholie. Une catégorie tannakienne $\underline{C}$ sur k est algébrique si et seulement si elle possède un $\otimes$-générateur (4.3.1). Dans ce cas, il existe un foncteur fibre sur $\underline{C}$ à valeurs dans une extension finie de k. Si L/k est une extension algébriquement close de k, et $\omega : \underline{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Modf}}(L)$ un foncteur fibre, il existe une sous-extension finie de L/k à laquelle ω peut se réduire.

3.3.2. Soit $\mathcal{G}$ une gerbe tannakienne algébrique sur k, et posons $\underline{C} = \underline{\mathrm{Rep}}_o(\mathcal{G})$. Un objet X de $\underline{C}$, i.e. un $\mathcal{G}$-module, est un foncteur cartésien

$$X : \mathcal{G} \longrightarrow \mathrm{LOCLIB}(k) .$$

On dit qu'un $\mathcal{G}$-module X est fidèle si le foncteur X est fidèle ; cette définition coïncide avec la définition usuelle si $\mathcal{G} = \mathrm{TORS}(G)$. Il résulte de 3.3.1.1 et II 4.3.2 a) que X est fidèle si et seulement si $X \oplus \check{X}$ est un $\otimes$-générateur.

Signalons enfin un corollaire du scholie.

3.3.2.1. Proposition. Si $\underline{C}$ est une catégorie tannakienne sur k, $\underline{C}$ est réunion filtrante de ses sous-catégories tannakiennes pleines qui sont algébriques.

3.3.2.2. Corollaire. Si $\underline{C}$ possède une famille dénombrable de $\otimes$-générateurs, il existe un foncteur fibre sur $\underline{C}$ à valeurs dans une extension algébrique de k.

3.3.3. Soit $\omega : \underline{C}' \longrightarrow \underline{C}$ un morphisme de catégories tannakiennes, lié par un morphisme de liens $u : L \longrightarrow L'$. On peut donner, comme en II 4.3.2, un dictionnaire reliant les propriétés de $\underline{C}$ ou de ω à celles de L ou de u. Voici par exemple :

a) L est fini (i.e. localement représenté par un groupe fini) si et seulement si $\underline{C}$ possède un générateur (voir 2.6.1).

b) (si $k = 0$) L est pro-réductif si et seulement si $\underline{C}$ est semi-simple.

c) (i) u est fidèlement plat (i.e. un épimorphisme de liens) si et seulement si ω est pleinement fidèle et tout sous-objet d'un $\omega(X')$ provient d'un sous-objet de X' ($X' \in \mathrm{ob}\ \underline{C}'$).

(ii) u est injectif (i.e. localement représenté par un monomorphisme de groupes) si et seulement si tout objet de $\underline{C}$ est sous-objet d'un quotient d'un $\omega(X')$ ($X' \in \mathrm{ob}\ \underline{C}'$).

Chapitre IV : GRADUATIONS ET FILTRATIONS

§ 1. Graduations

1.1. Graduations et cogèbres

1.2. $\otimes$-graduations et schémas en groupes affines

1.3. $\otimes$-graduations de catégories tannakiennes et de foncteurs fibre.

§ 2. Filtrations

2.1. $\otimes$-filtrations exactes de foncteurs fibre

2.2. Scindages de $\otimes$-filtrations

2.3. $\otimes$-filtrations opposées

2.4. Structure des foncteurs fibre filtrés

2.5. Un exemple : $\otimes$-filtrations associées à des éléments unipotents.

§ 1. GRADUATIONS

1.1. Graduations et cogèbres.

1.1.1. Soient I un ensemble, $\underline{C}$ une catégorie. On dénote $\underline{\mathrm{Grad}}^I(\underline{C})$ la catégorie des familles d'objets de $\underline{C}$ indexées par I ; si $\underline{I}$ est la catégorie discrète ayant I comme ensemble d'objets, on a

$$\underline{\mathrm{Grad}}^I(\underline{C}) = \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{I},\underline{C}) \ .$$

Si $\underline{C}$ est additive (resp. A-linéaire, voir I 0.1.2), il en est de même de $\underline{\mathrm{Grad}}^I(\underline{C})$. Si les sommes directes indexées par I existent dans $\underline{C}$, on a un foncteur

$$\Sigma : \underline{\mathrm{Grad}}^I(\underline{C}) \longrightarrow \underline{C}$$

muni de morphismes fonctoriels

$$i_\alpha = i_{X_\alpha} : X_\alpha \longrightarrow \Sigma\,(X_\beta)$$

faisant de $\Sigma(X_\beta)$ la somme directe des objets X_β ; bien entendu, le couple $(\Sigma,(i_\alpha))$ est unique à isomorphisme unique près, et si $\underline{C}$ est une catégorie A-linéaire, le foncteur Σ est aussi A-linéaire.

Si $u : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ est un foncteur additif, et si on suppose que dans $\underline{C}'$ les sommes directes existent, la donnée d'une graduation de type I sur chaque $u(X)$ ($X \in \mathrm{ob}\ \underline{C}$) , i.e. d'une décomposition

$$u(X) = \bigoplus_{\alpha \in I} X'_\alpha \quad ,$$

qui dépend de façon fonctorielle de X , revient à celle d'un couple (u^I,φ) d'un foncteur additif

$$u^I : \underline{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Grad}}^I(\underline{C}') \qquad X \longmapsto (u^\alpha(X))_{\alpha \in I}$$

et d'un isomorphisme fonctoriel $\varphi : \Sigma\, u^I \xrightarrow{\sim} u$.

1.1.1.1. Si B est une A-cogèbre, I un ensemble, le A-module $B^{(I)}$ est naturellement une A-cogèbre, la somme directe de I exemplaires de B dans la catégorie de A-cogèbres ; ceci résulte aussitôt de II 1.2.2. lorsqu'on remarque que

$$(B^{(I)})^{\vee} = (\overset{\vee}{B})^{I} ,$$

avec les notations de loc.cit. Le même raisonnement montre qu'on a un morphisme codiagonal de cogèbres

$$\nabla : B^{(I)} \longrightarrow B$$

qui est donné par

$$\nabla((b_i)) = \Sigma\, b_i .$$

On vérifie facilement que $\underline{\mathrm{Comod}}(B^{(I)})$ s'identifie en tant que catégorie A-linéaire avec $\underline{\mathrm{Grad}}^{I}(\underline{\mathrm{Comod}}(B))$ et que le foncteur $\Sigma : \underline{\mathrm{Grad}}^{I}(\underline{\mathrm{Comod}}(B)) \longrightarrow \underline{\mathrm{Comod}}(B)$ n'est autre que le foncteur φ^{∇} défini par ∇ (II 2.1.2).

En particulier, si on note $\underline{\mathrm{Grad}}^{I}(A)$ la catégorie A-linéaire $\underline{\mathrm{Grad}}^{I}(\underline{\mathrm{Mod}}(A))$ des A-modules gradués de type I, on a un isomorphisme de catégories

$$\underline{\mathrm{Grad}}^{I}(A) \simeq \underline{\mathrm{Comod}}(A^{(I)}) .$$

1.1.2. Proposition. *Soient B une A-cogèbre, I un ensemble. Les données suivantes sont équivalentes.*

a) *Une graduation de φ^{B} de type I, $\varphi^{B} = \bigoplus_i \varphi^{i}$.*

b) *Un morphisme de A-cogèbres $B \longrightarrow A^{(I)}$*

c) *Une graduation du B-comodule à gauche B_g de type I, $B_g = \oplus B^{i}$.*

d) *Une famille $(\varepsilon_i)_{i\in I}$, $\varepsilon_i \in \overset{\vee}{B}(A)$ vérifiant*

d1) $\varepsilon_i \varepsilon_j = \delta_{ij}$

d2) $\sum_i \varepsilon_i b = b$ (somme finie) pour $b \in B$.

De plus, les conditions d1), d2) sur une famille (ε_i) équivalent à d1) et

d3) $\sum_i b\,\varepsilon_i = b \quad , \quad b \in B \quad .$

1.1.2.1. Preuve. L'équivalence des données a), b) résulte de la discussion 1.1.1.1, celle de a), c) de II 2.4.4 et de la remarque qu'un sous-foncteur de φ^B (resp. sous-comodule à gauche de B_g) qui est facteur direct est automatiquement relativement exact (resp. coplat). La donnée d'une graduation de B_g ,

$$B_g = \oplus B^i \ ,$$

revient à celle d'une famille $(\varphi_i)_{i\in I}$, $\varphi_i \in \mathrm{End}_B(B_g)$ vérifiant les conditions

$$\varphi_i\varphi_j = \delta_{ij}$$

$$\sum_i \varphi_i(b) = b \qquad b \in B \quad .$$

Puisqu'on a un isomorphisme de $\underline{A}$-algèbres (II 2.0.5)

$$\overset{\vee}{B} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{End}}_B(B_g) \qquad \varepsilon \longmapsto (b \longmapsto \varepsilon b)$$

on voit l'équivalence des données c) et d).

Pour vérifier la dernière assertion de l'énoncé, il suffit de prouver que si on suppose les conditions d1), d2) satisfaites pour une famille (ε_i) , pour tout B-comodule à gauche M , le A-module M est somme directe de ses sous-modules $M\varepsilon_i$ ($i\in I$). (Ici et dans ce qui suit, on utilise librement le langage de II 1 et 2.0). Considérons le morphisme suivant de A-Modules

$$\underline{\mathrm{Hom}}_B(M,B_g) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(M,B_g)^I$$

$$\alpha \longmapsto (\varphi_i \circ \alpha) \qquad ;$$

c'est évidemment un monomorphisme de $\underline{A}$-modules représentables, donc son transposé

$$M^{(I)} \longrightarrow M$$

$$(m_i) \longmapsto \sum_i m_i\,\varepsilon_i$$

est surjectif. Il résulte de ceci et de d1) que M est somme directe de ses sous-

modules $M\epsilon_i$ $(i\in I)$.

1.1.2.2. Corollaire. Si $B_g = \sum_i B^i = \sum_i \epsilon_i B$ est une graduation du B-comodule à gauche B_g, les projections $B \longrightarrow \epsilon_i B$ font de B_g le produit direct dans la catégorie des B-comodules à gauche des $\epsilon_i B$. Si M est un B-comodule à gauche, on a

$$\underline{\mathrm{Hom}}_B(M,\epsilon_i B) \simeq (M\epsilon_i)^{\vee}$$

1.1.2.3. Preuve. Elle résulte facilement de la décomposition en somme directe $M = \Sigma\, M\,\epsilon_i$ et de l'isomorphisme de A-modules (II 2.0.5)

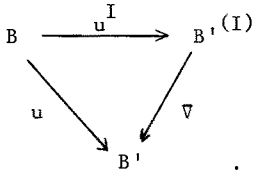
$$\underline{\mathrm{Hom}}_B(M,B_g) \simeq \overset{\vee}{M} \quad .$$

Le résultat que voici est une conséquence facile de ce qui précède.

1.1.3. Proposition. Soit $u : B \longrightarrow B'$ un morphisme de A-cogèbres. Les données suivantes sont équivalentes

a) Une graduation de φ^u (II 2.1.2) de type I .

b) Un morphisme de A-cogèbres $u^I : B \longrightarrow B'^{(I)}$ rendant commutatif le triangle



c) Une graduation de B'-comodule à gauche B_g de type I .

d) Une famille $(\epsilon_i)_{i\in I}$, $\epsilon_i \in \mathrm{Cent}({}^t u)(A)$ (II 2.1.3.1) vérifiant

d1) $\epsilon_i\epsilon_j = \delta_{ij}$

d2) $\sum_i \epsilon_i b = b \qquad b \in B$.

1.2. ⊗-Graduations et schémas en groupes affines.

1.2.1. Soient A un anneau, M un monoïde commutatif. On définit comme en SGA 3 I 4.4. le A-monoïde affine $D_A(M)$, qui a $A^{(M)}$ comme bigèbre, le produit provenant de la multiplication dans M, le coproduit de la loi de $\underline{A}$-algèbre de $(A^{(I)})^{\vee} = A^I$.

On en déduit par 1.1.1.1 et II 3.1.1 ii) qu'on a une équivalence de ⊗-catégories

$$\underline{\mathrm{Rep}}(D_A(M)) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Grad}}^M(A) ,$$

respectant les foncteurs oubli. La loi ⊗ sur $\underline{\mathrm{Grad}}^M(A)$ est donnée par

$$(X^n) \otimes (Y^m) = (Z^\ell)$$

$$Z^\ell = \bigoplus_{n+m=\ell} X^n \otimes Y^m$$

la contrainte ACU est induite par celle de $\underline{\mathrm{Mod}}(A)$.

La proposition suivante est conséquence immédiate de ce qui précède et de II 3.3.3.

1.2.2. Proposition. Soit $u : G \longrightarrow G'$ un morphisme de A-monoïdes affines, et soit M un monoïde commutatif. Il revient au même de se donner une ⊗-graduation de type M du ⊗-foncteur $\omega^u : \underline{\mathrm{Rep}}(G') \longrightarrow \underline{\mathrm{Rep}}(G)$ ou un morphisme de A-monoïdes $D_A(M) \longrightarrow \underline{\mathrm{Cent}}(u)$ (ce dernier n'étant pas représentable en général).

1.2.2.1. Corollaire. Si G est un A-monoïde affine, il revient au même de se donner une ⊗-graduation du foncteur identique de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ (une telle ⊗-graduation est appelée centrale) ou un morphisme $D_A(M) \longrightarrow \underline{\mathrm{Cent}}(G)$.

1.2.2.2. Corollaire. Si G est un A-monoïde affine, il revient au même de se donner une ⊗-graduation de type M du foncteur oubli $\omega^G : \underline{\mathrm{Rep}}(G) \longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}}(A)$ ou un morphisme $D_A(M) \longrightarrow G$.

1.3. ⊗-graduations de catégories tannakiennes et de foncteurs fibre.

Voici l'énoncé correspondant, qui, étant de nature locale pour la topologie fpqc, résulte de ce qui précède et de la définition des catégories ind-tannakiennes (resp. tannakiennes), cf. chap. III. Ici, A désigne un anneau, k un corps, S un k-schéma, M un groupe commutatif.

1) Soit $\omega : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ un morphisme de catégories ind-tannakiennes (resp. tannakiennes) sur A (resp. sur k). Alors la donnée d'une ⊗-graduation de type M sur ω revient à celle d'un morphisme de A-groupes (resp. k-groupes) $D(M) \longrightarrow \underline{Aut}^{\otimes}(\omega)$.

2) Soit $\omega : \underline{C} \longrightarrow \underline{Loclib}(S)$ un foncteur fibre sur une catégorie tannakienne $\underline{C}$ à valeurs dans S (III 3.2.1.2). Alors, la donnée d'une ⊗-graduation de type M sur ω revient à celle d'un morphisme de S-groupes $D_S(M) \longrightarrow \underline{Aut}^{\otimes}(\omega)$.

§ 2. FILTRATIONS

Toutes les filtrations considérées dans ce paragraphe sont décroissantes indexées par $\mathbb{Z}$, et sont exhaustives séparées ; i.e. si un objet E dans une catégorie abélienne estfiltré par des sous-objets F^nE $(n \in \mathbb{Z})$, on a

$$F^nE \supset F^{n+1}E$$

$$\bigcup_n F^nE = E$$

$$\bigcap_n F^nE = 0 \quad .$$

2.1. ⊗-filtrations exactes de foncteurs fibre.

2.1.1. Soient $\underline{C}$ une catégorie ind-tannakienne sur un anneau A, $\omega : \underline{C} \longrightarrow \underline{Mod}(A)$ un foncteur fibre (III 1.1). Une filtration F de ω par des sous-foncteurs

exacts $F^n\omega$ ($n \in \mathbb{Z}$) est appelée une $\otimes$-filtration exacte si les conditions suivantes sont vérifiées

FE 1) Si $E \in$ ob $\underline{C}$, les sous-modules $F^n\omega(E)$ sont facteur direct dans $\omega(E)$.

FE 2) Le foncteur gradué associe $gr_F(\omega)$ est exact.

FE 3) On a pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $E,E' \in$ ob $\underline{C}$

$$F^n\omega(E\otimes E') = \sum_{p+q=n} F^p\omega(E) \otimes F^q\omega(E') \quad ,$$

moyennant l'isomorphisme $\omega(E\otimes E') \simeq \omega(E) \otimes \omega(E')$.

On en déduit un foncteur fibre $gr_F(\omega)$, muni d'une $\otimes$-graduation (voir 1.2).

2.1.1.1. Si $\underline{C}$ est une catégorie tannakienne sur un corps k, $\omega : \underline{C} \longrightarrow \underline{Loclib}(S)$ un foncteur fibre à valeurs dans un k-schéma S (III 3.2), on définit de la même façon une $\otimes$-filtration exacte de ω. Une telle filtration F donne lieu à un foncteur fibre $\omega' = gr_F(\omega)$ muni d'une $\otimes$-graduation de type $\mathbb{Z}$, i.e. (1.3) d'un morphisme de S-groupes

$$\mathbb{G}_{m,S} \longrightarrow \underline{Aut}^{\otimes}(\omega') \ .$$

On déduit facilement de ce que $gr_F(\omega)$ commute avec les $\underline{Hom}$, que si $E, E' \in$ ob $\underline{C}$, et moyennant l'identification

$$\omega(\underline{Hom}(E,E')) \simeq \underline{Hom}(\omega E, \omega E') \ ,$$

qu'on a

$$F^p\omega(\underline{Hom}(E,E')) = \{u : \omega E \longrightarrow \omega E'/u(F^n) \subset F^{n+p}\} \tag{2.1.1.1}$$

En particulier

$$F^p\omega(\check{E}) = (F^{1-p}\omega(E))^{\perp} \ . \tag{2.1.1.2}$$

2.1.1.2. Remarque. D'un point de vue technique, il suffit de travailler avec des

$\otimes$-filtrations sur des foncteurs fibre $\omega : \underline{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}}(A)$ pour $\underline{C}$ une catégorie ind-tannakienne sur A. En effet, les énoncés qu'on prouve sont en général de nature locale pour la topologie de Zariski sur $\mathrm{Spec}(A)$, et une fois prouvés dans ce contexte, leur validité s'ensuit pour les $\otimes$-filtrations des foncteurs fibre $\underline{C}_o \longrightarrow \underline{\mathrm{Loclib}}(S)$ pour $\underline{C}_o$ une catégorie tannakienne sur un corps k, S un k-schéma. On peut donc se limiter à prouver les énoncés pour une $\otimes$-filtration du foncteur ω^G, G un A-schéma en groupes affine et plat ; l'hypothèse de platitude n'étant d'ailleurs pas toujours nécessaire.

2.1.2. Soient G un A-groupe affine et plat, F une $\otimes$-filtration exacte de $\omega^G : \underline{\mathrm{Rep}}(G) \longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}}(A)$. Si E est un objet de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$, i.e. un G-A-module, le $\underline{A}$-module représentable dual de E, $\check{E}$ (II 1.1.1), est muni d'une action à gauche de G : si A' est une A-algèbre, $g \in G(A')$, $\varepsilon \in \check{E}(A') = \mathrm{Hom}_A(E,A')$, on pose

$$g \cdot \varepsilon = \varepsilon \circ g^{-1} .$$

En s'inspirant de (2.1.1.2), on définit une filtration de E par des sous-$\underline{A}$-modules représentables, naturelle en E

$$F^p\check{E} = (F^{1-p}E)^{\perp} . \tag{2.1.2.1}$$

Cette filtration est compatible avec les accouplements, dans le sens que si E', E'' sont des G-A-modules,

$$\varphi : E' \otimes \check{E} \longrightarrow E''$$

un morphisme de G-$\underline{A}$-modules, on a que

$$\varphi(F^pE' \otimes F^q\check{E}) \subset F^{p+q}E'' .$$

Ceci résulte de l'identification (II 1.1.6)

$$\mathrm{Hom}_{\underline{A}}(E' \otimes \check{E}, E'') = \mathrm{Hom}(E', E \otimes E'')$$

et de ce que si $\varphi : E' \otimes \check{E} \longrightarrow E''$ est G-invariant, le morphisme correspondant $E' \longrightarrow E \otimes E''$ l'est aussi.

2.1.2.1. Si $B = \mathrm{Aff}(G/A)$ est l'algèbre affine de G, notons B_d, B_{ad} les G-modules obtenus en munissant B respectivement des actions à gauche suivantes :

$$g.b(h) = b(hg) \quad , \quad g,h \in G \ , \ b \in B$$

$$g.b(h) = b(g^{-1}hg) \quad .$$

Si le $\underline{A}$-module $\underline{\mathrm{End}}(\omega)$ est muni de l'action à gauche adjointe, $g : u \longmapsto g\,u\,g^{-1}$, l'isomorphisme de $\underline{A}$-modules représentables

$$(B_{ad})^{\vee} \simeq \underline{\mathrm{End}}(\omega^G) \tag{2.1.2.2}$$

défini en II 2.1.1.3 est compatible avec les actions de G. Il résulte aussitôt de ce qui précède que, moyennant cette identification, on a pour une A-algèbre A'

$$F^p\underline{\mathrm{End}}(\omega^G)(A') = \{u : \omega^G_{A'} \longrightarrow \omega^G_{A'} \,/\, u(F^n) \subset F^{n+p}\} \ . \tag{2.1.2.3}$$

On a en effet un accouplement de G-modules

$$B_d \otimes \underline{\mathrm{End}}(\omega^G) \longrightarrow B_d \qquad b \otimes u \longmapsto u(b) \ .$$

2.1.3. Soient ω, ω' deux foncteurs fibre sur une catégorie ind-tannakienne munis de $\otimes$-filtrations exactes F,F'. On peut considérer la partie de $\mathrm{Isom}^{\otimes}(\omega,\omega')$ des $\otimes$-isomorphismes respectant les filtrations F,F' ; elle sera notée $\mathrm{Isom.fil.}^{\otimes}(\omega,\omega')$. Si on se permet des extensions arbitraires de la base, on obtient un foncteur

$$\underline{\mathrm{Isom.fil.}}^{\otimes}(\omega,\omega') \ .$$

Si, de plus, on dispose d'un isomorphisme donné

$$\mathrm{gr}(\omega) \simeq \mathrm{gr}(\omega')$$

de $\otimes$-foncteurs gradués (ce qui est le cas par exemple si $\omega = \omega'$, voir aussi 2.1.3), on a un sous-foncteur de $\underline{\mathrm{Isom.fil.}}^{\otimes}(\omega,\omega')$, noté

$$\underline{\mathrm{Isom}}^{\otimes !}(\omega,\omega')$$

formé par les $\otimes$-isomorphismes $\omega \simeq \omega'$ respectant les filtrations et induisant l'identification donnée sur les gradués associés.

En particulier, si $\omega = \omega'$, on a des sous-groupes de $G = \underline{Aut}^{\otimes}(\omega)$

$$U \hookrightarrow P \hookrightarrow G$$

$$P = \underline{Aut}^{\otimes}_{F}(\omega)$$

$$U = \underline{Aut}^{\otimes !}(\omega) \quad ,$$

et U est le noyau du morphisme évident

$$P \longrightarrow G' = \underline{Aut}^{\otimes}(gr_{F}(\omega)) \ .$$

2.1.4. Soient G un A-groupe affine et plat, F une $\otimes$-filtration exacte du foncteur oubli $\omega^{G} : \underline{Rep}(G) \longrightarrow \underline{Mod}(A)$. On vient de définir des sous-groupes P, U de $G = \underline{Aut}^{\otimes}(\omega^{G})$. De façon plus générale, pour $\alpha \in \mathbb{N}$, on définit le sous-groupe U_{α} de G en posant, si A' est une A-algèbre

$$U_{\alpha}(A') = \{u \in G(A')/\forall p, u/F^{p}\omega \equiv id_{F^{p}\omega} \bmod F^{p+\alpha}\omega\} \ .$$

On a

$$P = U_{o}$$

$$U = U_{1}$$

$$U_{\alpha} \supset U_{\alpha+1} \qquad \alpha \in \mathbb{N} \ .$$

Dans la proposition suivante, B désigne l'algèbre affine de G, I l'idéal d'augmentation de B, noyau de $\epsilon : B \longrightarrow A$. On remarque que I, ainsi que ses puissances I^{n}, sont des sous-G-modules de B_{ad} (voir 2.1.2.1 pour la définition de ce dernier) ; rappelons aussi qu'on a un isomorphisme canonique de G-$\underline{A}$-modules

$$\underline{Lie}(G) \simeq (I/I^{2})^{\vee} \ ,$$

où $\underline{Lie}(G)$ est muni de la représentation adjointe.

2.1.4.1. Proposition. 1) Le sous-groupe U_α est représentable par le sous-schéma fermé de G d'idéal engendré par $F^{1-\alpha} I$.

2) On a $\underline{Lie}\ U_\alpha = F^\alpha(\underline{Lie}\ G)$.

3) Si G est lisse, il en est de même des U_α .

2.1.4.2. Preuve. L'assertion 1) résulte aussitôt de la définition de U_α et de l'explicitation de la filtration de B_{ad} donnée par (2.1.2.2), (2.1.2.3).

Prouvons 2). Soit J_α l'idéal engendré par $F^{1-\alpha}I$, donc l'idéal d'augmentation de U_α est $I_\alpha = I/J_\alpha$. On vérifie aussitôt que les images de J_α et de $F^{1-\alpha}I$ dans I/I^2 coïncident, d'où la formule (on utilise ici FE 2))

$$F^{1-\alpha}(I/I^2) = (I^2 + J_\alpha)/I^2 .$$

D'autre part, on a l'identification naturelle

$$I_\alpha/I_\alpha^2 = I/(I^2 + J_\alpha) \ ;$$

on en tire une suite exacte

$$0 \longrightarrow F^{1-\alpha}(I/I^2) \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow I_\alpha/I_\alpha^2 \longrightarrow 0 \ .$$

Le morphisme $I/I^2 \longrightarrow I_\alpha/I_\alpha^2$ a comme transposé

$$\underline{Lie}(U_\alpha) \longrightarrow \underline{Lie}(G) \ ,$$

d'où la formule cherchée d'après la définition (2.1.2.1) de la filtration de $\underline{Lie}(G) = (I/I^2)^\vee$.

Prouvons 3). Puisque G est lisse, on peut supposer, quitte à localiser en A pour la topologie de Zariski, que I/I^2 est libre et même qu'il existe une base adaptée à la filtration de I/I^2 (i.e. qui la scinde). Soient $\alpha \in \mathbb{N}$, $\bar{f}_1,\ldots,\bar{f}_k$ une base de $F^{1-\alpha}(I/I^2)$ adaptée à la filtration, avec $\bar{f}_i \in F^{\varphi(i)}(I/I^2)$; relevons-la dans I en $f_1,\ldots,f_k$, avec $f_i \in F^{\varphi(i)}(I)$. Pour prouver la lissité de U_α , il suffira de prouver (critère jacobien) que le complété $\hat{J}_\alpha \hookleftarrow \hat{B}$ le long de I est

engendré par les f_i . On prouve par récurrence sur n que

$$F^{l-\alpha}(I/I^{n+1}) = \sum_i f_i.F^{l-\alpha-\varphi(i)}(B/I^{n+1}) \quad .$$

C'est clair pour $n = 1$, et dans le sens $\supset$. Passons à $n+1$, $n \geq 1$; soit $f \in F^{l-\alpha}(I/I^{n+2})$. Puisque $F^{l-\alpha-\varphi(i)}(B/I^{n+2})$ est image de $F^{l-\alpha-\varphi(i)}(B/I^{n+1})$ (on utilise encore FE 2)), l'hypothèse de récurrence permet de corriger f pour qu'il soit dans $I^{n+1}/I^{n+2} \simeq \mathrm{Sym}^{n+1}(I/I^2)$. Mais on vérifie facilement que $F^{l-\alpha}(\mathrm{Sym}^{n+1}(I/I^2))$ est image de $\sum_i f_i F^{l-\alpha-\varphi(i)}(\mathrm{Sym}^n(I/I^2))$, d'où l'assertion.

2.1.5. On a vu comment une $\otimes$-filtration exacte F d'un foncteur fibre ω définit un foncteur fibre $\mathrm{gr}_F(\omega)$ muni d'une $\otimes$-graduation (de type $\mathbb{Z}$). Soit maintenant, ω un foncteur fibre muni d'une $\otimes$-graduation (de type $\mathbb{Z}$), i.e. d'un morphisme de groupes (1.3)

$$i : \mathbb{G}_m \longrightarrow G = \underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega) \quad .$$

On obtient une filtration associée à i , notée F(i), sur ω , qui est évidemment une $\otimes$-filtration exacte, et on a un isomorphisme de foncteurs fibre gradués

$$\omega \simeq \mathrm{gr}_{F(i)}(\omega) \quad .$$

Les groupes U_α $(\alpha \geq 0)$ définis en 2.1.4 seront notés $U_\alpha(i)$. On posera aussi

$$U(i) = U_1(i)$$

$$P(i) = U_0(i) \quad .$$

On vérifie aussitôt que P(i) est le produit semi-direct de U(i) par le centralisateur de i :

(2.1.5.1) $$P(i) = U(i).\underline{\mathrm{Cent}}(i).$$

2.1.5.1. Remarque. Il résulte de la formule (2.1.5.1) et de 2.1.4.1, 1) que si $i : \mathbb{G}_m \longrightarrow G$ est un morphisme de $\mathbb{G}_m$ dans un A-groupe affine et plat, $\underline{\mathrm{Cent}}(i)$ est représentable par un sous-groupe fermé. L'hypothèse de platitude

peut être d'ailleurs levée.

2.2. Scindages de ⊗-filtrations.

2.2.0. Dans ce qui suit, $\underline{C}$ désigne soit une catégorie ind-tannakienne sur un anneau A, soit une catégorie tannakienne sur un corps k. Suivant les cas, ω désigne un foncteur fibre $\omega : \underline{C} \longrightarrow \underline{Mod}(A)$ ou un foncteur fibre $\omega : \underline{C} \longrightarrow \underline{Loclib}(S)$ à valeurs dans un k-schéma S (voir 2.1.1.2). On pose

$$G = \underline{Aut}^{\otimes}(\omega) .$$

2.2.1. Si ω est muni d'une ⊗-filtration exacte F, un <u>scindage</u> de F est une ⊗-graduation i de ω telle qu'on ait $F = F(i)$ (2.1.5). On dit que F est <u>scindable</u> s'il existe un scindage, <u>localement scindable</u> (ou admissible) s'il existe des scindages localement pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte sur la base A ou S.

La donnée d'un scindage de F revient à celle d'un isomorphisme de foncteurs filtrés

$$\omega' = gr_F(\omega) \simeq \omega$$

induisant l'identité sur les gradués associés, donc le foncteur (sur $\underline{Ann}_{/A}$, ou $\underline{Sch}_{/S}$) des scindages de F, noté $\underline{Scin}(\omega,F)$, n'est autre que le foncteur $\underline{Isom}^{\otimes !}(gr_F(\omega),\omega)$ et se trouve de ce fait muni d'une structure de pseudo-torseur à gauche sous le groupe $U = \underline{Aut}^{\otimes !}(\omega)$ et de pseudo-torseur à droite sous le groupe $U(i')$ correspondant à $F(i')$, la filtration déduite de la graduation i' de ω', $i' : \mathbb{G}_m \longrightarrow G' = \underline{Aut}^{\otimes}(\omega')$.

On espère, c'est un problème ouvert, que toute ⊗-filtration exacte de ω est admissible (c'est prouvé en 2.4 pour les cas intéressants en pratique, par exemple si G est un schéma en groupes réductif). Ceci signifierait que le pseudo-torseur précédent est un torseur pour la topologie fpqc. Dans ce qui suit, on s'intéresse surtout aux ⊗-filtrations admissibles.

2.2.2. Proposition. Soit G un k-groupe algébrique, et supposons k de caractéristique zéro. Alors, toute $\otimes$-filtration admissible de $\omega^G : \underline{Rep}_o(G) \longrightarrow \underline{Modf}(k)$ est scindable.

2.2.2.1. Preuve. Il résulte de SGA 3 XVII 3.5 que U est un groupe unipotent, et il suffit de remarquer que si U est un groupe unipotent en caractéristique zéro, tout torseur sous U (pour la topologie fpqc) est trivial, i.e. qu'on a $H^1(k,U) = 0$. Ceci résulte de ce que U est extension successive de groupes $\mathbb{G}_a$ (loc.cit. 4.1.3) et du fait bien connu que $H^1(k,\mathbb{G}_a) = 0$ (SERRE [2],X § 1 prop. 1).

2.2.3. Soit (ω,F) un foncteur fibre muni d'une $\otimes$-filtration admissible. Au couple (ω,F) on associe

1) Le foncteur fibre $\omega' = gr_F(\omega)$, d'où $G' = \underline{Aut}^{\otimes}(\omega)$.

2) Le morphisme $i' : \mathbb{G}_m \longrightarrow G'$ définissant la $\otimes$-graduation de ω' .

3) Le torseur à droite sous U(i')

$$Q = \underline{Isom}^{\otimes !}(\omega',\omega) \quad .$$

Réciproquement si on a un triple (ω',i',Q) d'un foncteur fibre ω' , d'un morphisme $i' : \mathbb{G}_m \longrightarrow \underline{Aut}^{\otimes}(\omega')$ et d'un torseur fpqc Q sous U(i') , on lui associe un couple (ω,F) de la façon suivante : on pose

$$P = Q \times^{U(i')} G' \quad ,$$

c'est un torseur à droite sous G' qui définit donc un foncteur fibre (voir II 3.2.3.4)

$$\omega = P \times^{G'} \omega' = Q \times^{U(i')} \omega' \quad ;$$

d'autre part le groupe U(i') agit sur le foncteur fibre filtré $(\omega',F(i'))$ induisant l'identité sur le gradué associé, d'où une $\otimes$-filtration admissible sur $\omega = Q \times^{U(i')} \omega'$.

On obtient ainsi un dictionnaire entre foncteurs fibre ω munis d'une $\otimes$-filtration admissible et entre triples $(\omega',i'.Q)$ comme ci-dessus, cette dernière

ne s'exprimant qu'en termes de foncteurs fibre gradués.

2.2.3.1. Exemple. Soit k un corps non parfait de caractéristique p, et posons

$$G = \alpha_p . \mathbb{G}_m$$

le produit semi-direct de α_p, noyau de l'élévation à la puissance p-ième dans $\mathbb{G}_a$, par le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ opérant par homothéties.

On va construire un foncteur fibre sur $\underline{\mathrm{Rep}}_o(G)$ muni d'une $\otimes$-filtration admissible qui ne soit pas scindable. Pour cela, il suffit par 2.2.3 de construire un triple (ω,i,Q) où Q ne soit pas trivial, ou encore de construire un couple (ω,i) tel que $H^1(k_{fpqc},U(i)) \neq 0$. On pose $\omega = \omega^G$ le foncteur oubli et $i : \mathbb{G}_m \longrightarrow G$ le morphisme évident ; on vérifie aussitôt que $U(i) = \alpha_p$, et la suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte de faisceaux fpqc

$$0 \longrightarrow \alpha_p \longrightarrow \mathbb{G}_a \longrightarrow \mathbb{G}_a \longrightarrow 0$$

donne

$$H^1(k_{fpqc},\alpha_p) \simeq k/k^p \neq 0 \quad .$$

2.2.4. Soit ω muni d'une $\otimes$-filtration admissible F ; pour chaque scindage de F donné par un morphisme $i : \mathbb{G}_m \longrightarrow G$, le morphisme $\mathbb{G}_m \longrightarrow P/U$ qu'on en déduit est toujours le même. En fait, même si les scindages ne sont définis que localement pour la topologie fpqc, le morphisme précédent est défini globalement : c'est le seul rendant commutatif le triangle

$$\begin{array}{ccc} & & P/U \\ & \nearrow & \downarrow \\ \mathbb{G}_m & & \\ & \searrow^{i'} & \\ & & G' = \underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega') \end{array} \quad ,$$

où la flèche $P/U \longrightarrow G'$ a été définie en 2.1.3.

On trouve ainsi un isomorphisme du foncteur $\underline{\mathrm{Scin}}(\omega,F)$ des scindages de F

avec le foncteur des relèvements de $\mathbb{G}_m \longrightarrow P/U$ à un morphisme $\mathbb{G}_m \longrightarrow P$, l'action à gauche de U sur ce dernier (correspondant à la structure de torseur sous U sur $\underline{Scin}(\omega,F)$) étant la conjugaison.

Dans le cas où G est réductif (voir V 1.1 et SGA 3 pour ce qui suit) on a d'autres résultats.

2.2.5. Proposition. Soit ω muni d'une $\otimes$-filtration admissible, et supposons que $G = \mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega)$ soit un schéma en groupes réductifs. Alors

1) P est un sous-groupe parabolique de G , de radical unipotent U (SGA 3 XXVI 1.1 et 1.6). Si $i : \mathbb{G}_m \longrightarrow G$ définit un scindage de F et $\underline{g} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \underline{g}^n$ est la graduation correspondante de $\underline{g} = \mathrm{Lie}(G)$, on a

$$\mathrm{Lie}(P) = \bigoplus_{n\geq 0} \underline{g}^n \quad .$$

2) Pour chaque scindage $i : \mathbb{G}_m \longrightarrow G$ de F , $\underline{Cent}(i)$ est un sous-groupe de Levi pour P (loc.cit. 1.7), et le morphisme de foncteurs défini ainsi

$$\underline{Scin}(\omega,F) \longrightarrow \underline{Lev}(P)$$

est un isomorphisme.

3) Si la base est affine (i.e. si dans le second cas considéré en 2.2.0, S est affine), la filtration F est scindable.

On divise la preuve en plusieurs parties.

2.2.5.1. La dernière assertion de 1) est mise pour mémoire et résulte de 2.1.4.

2.2.5.2. Si on admet la partie 1), l'assertion 3) résulte de SGA 3 XXVI 2.2. En effet, on y voit que tout torseur sous U est trivial, donc $\underline{Scin}(\omega,F)$ possède une section globale par définition de $\otimes$-filtration admissible.

2.2.5.3. Supposons qu'on a prouvé que P est parabolique, et soit $i : \mathbb{G}_m \longrightarrow G$ définissant un scindage de F. On a alors une décomposition en produit semi-directe

$$P = U(i).\underline{Cent}(i)$$

par 2.1.3. D'autre part, par DEMAZURE [1] 2.1.3 (iv), on sait que $\underline{Cent}(i)$ est un sous-schéma en groupes réductif de G, et il résulte aussitôt des définitions SGA 3 XXVI 1.6, 1.7 que $U = U(i)$ est le radical unipotent de P et que $\underline{Cent}(i)$ est un sous-groupe de Levi de P. Puisque la propriété pour $U \hookleftarrow P$ d'être le radical unipotent de P est locale pour fpqc, on a prouvé cette assertion indépendamment de l'existence de $i : \mathbb{G}_m \longrightarrow G$. Enfin, l'application

$$\underline{Scin}(\omega,F) \longrightarrow \underline{Lev}(P)$$

est compatible avec les actions de U, et est donc un isomorphisme puisque $\underline{Scin}(\omega,F)$ et $\underline{Lev}(P)$ sont des torseurs sous U (loc.cit. 1.9).

2.2.5.4. Il reste à prouver que P est parabolique ; le problème est local pour la topologie fpqc, on peut supposer que $P = P(i)$ pour un $i : \mathbb{G}_m \longrightarrow G$ donné. On sait alors construire un sous-groupe parabolique $P' = P'(i)$ de G qui est caractérisé par les conditions de contenir $\underline{Cent}(i)$ et d'avoir $\bigoplus_{n\geq 0} \underline{g}^n$ comme Algèbre de Lie (SGA 3 XXVI 6.1) ; de plus, $\underline{Cent}(i)$ est un sous-groupe de Levi de P', i.e. on a une décomposition

$$P' = U'.\ \underline{Cent}(i)\ ,$$

où U' est le radical unipotent de P'. Il s'agit de prouver que $P = P'$.

Prouvons $P' \subset P$; il suffit de prouver que $U' \subset P$, et puisque tout le problème est local comme on l'a dit au début, supposons que G est déployé muni d'un tore maximal T, que $i : \mathbb{G}_m \longrightarrow G$ se factorise par T et que G est muni d'un épinglage adapté à P' (loc.cit. 1.11). Ceci entraîne aussitôt (loc.cit. 1.12) que si M est le groupe des caractères de T, $i^* : M \longrightarrow \mathbb{Z}$ le transposé de i (quitte à localiser encore pour que $i : \mathbb{G}_m \longrightarrow G$ provienne d'un tel i^*) on a

$$U' = \prod_{i^*(r)>0} P_r$$

avec les notations de loc.cit. Il faut en définitive, prouver que pour toute racine $r \in M$ vérifiant $i^*(r) > 0$, $P_r \hookrightarrow P$, ou encore que si $p_r : \mathbb{G}_a \xrightarrow{\sim} P_r$ est défini par l'épinglage, pour tout scalaire t et G-module E, si (e_{nm}) est la matrice de $p_r(t)$ par rapport à la décomposition $E = \oplus E^n$ définie par i $(e_{nm} : E^m \longrightarrow E^n)$, alors $e_{nm} = 0$ si $n < m$.

Soit λ un scalaire inversible, on a alors si

$$p_r(t) = (e_{nm})$$

$$i(\lambda)p_r(t)i(\lambda)^{-1} = (\lambda^{n-m}e_{nm}) \ ;$$

d'autre part on a l'identité fondamentale pour h dans T

$$h\, p_r(t)\, h^{-1} = p_r(r(h)t) \ ,$$

d'où

$$p_r(\lambda^{i^*(r)}t) = (\lambda^{n-m}e_{nm}) \ .$$

Si on prend $n < m$ et les composantes $E^m \longrightarrow E^n$ des deux matrices on trouve à gauche une expression dépendant de $\lambda^{i^*(r)}$ où $i^*(r) > 0$ et à droite une expression dépendant de λ^{n-m} où $n-m < 0$; ceci entraîne que $e_{n-m} = 0$.

On vient de prouver que $P' \hookrightarrow P$. Puisque P' est lisse et $\underline{Lie}(P) = \underline{Lie}(P')$, on conclut que $P = P'$. On aurait pu aussi se servir de la caractérisation suivante de P'

$$P' = \underline{Norm}(\oplus_{n\geq 0} \underline{g}^n)$$

(cf.loc.cit.), qui montre l'inclusion opposée $P \hookrightarrow P'$ puisque P normalise évidemment $\oplus_{n\geq 0} \underline{g}^n$.

2.2.6. On se place ici dans le premier cas considéré en 2.2.0. Une $\otimes$-filtration exacte de ω est appelée <u>centrale</u> si elle provient d'une filtration du foncteur identique de $\underline{C}$. Si $i : \mathbb{G}_m \longrightarrow G$ est un morphisme central de groupes, la filtration

F(i) qu'on en déduit est centrale. Toutefois, la réciproque n'est pas vraie en général : si F est une filtration centrale et scindable de ω, il peut ne pas exister de scindage de F défini par un $\mathbb{G}_m \longrightarrow G$ central.

2.2.6.1. Exemple. Soit k un corps de caractéristique zéro, $G = \mathbb{G}_a.\mathbb{G}_m$ le produit semi-direct de $\mathbb{G}_a$ par $\mathbb{G}_m$ opérant par homothéties (i.e. "le groupe affine"). Si E est un k-vectoriel de rang fini sur k, la donnée d'une action linéaire de G sur E revient à celle d'une graduation de type $\mathbb{Z}$ de E

$$E = \bigoplus_n E^n$$

et d'un endomorphisme v_E de E vérifiant

$$v_E(E^n) \subset E^{n+1} .$$

La graduation du G-module E provient du morphisme évident $i : \mathbb{G}_m \longrightarrow G$, l'endomorphisme v_E est le logarithme de l'automorphisme unipotent de E donné par l'action de $1 \in \mathbb{G}_a(k)$. L'action de G sur E se récupère en termes de v_E et la graduation par

$$(t,\lambda).x = \lambda^n \exp(tv_E)(x)$$

pour $t \in \mathbb{G}_a$, $\lambda \in \mathbb{G}_m$, $x \in E^n$.

Si $\omega = \omega^G$ est le foncteur oubli sur $\underline{C} = \underline{\mathrm{Rep}}_o(G)$, on voit aussitôt que la filtration F(i) est centrale, mais i (ni aucun de ses conjugués n'est central).

2.3. $\otimes$-filtrations opposées.

2.3.0. On maintient les notations de 2.2.0.

2.3.1. Deux $\otimes$-filtrations exactes F, $\bar{F}$ de ω sont dites opposées si pour tout $p \in \mathbb{Z}$ le morphisme canonique

$$F^p\omega \oplus \bar{F}^{1-p} \longrightarrow \omega \qquad (2.3.1.1)$$

est un isomorphisme. Si on est dans le second cas de 2.2.0, i.e. si $\underline{C}$ est une catégorie tannakienne sur un corps k et $\omega : \underline{C} \longrightarrow \underline{Loclib}(S)$ un foncteur fibre à valeurs dans un k-schéma S, les filtrations de chaque $\omega(X)$ ($X \in ob\ \underline{C}$) sont <u>finies</u>, et on déduit de DELIGNE [4] 1.2.5 que <u>dans ce cas les filtrations</u> $F,\bar{F}$ <u>sont opposées si et seulement si pour</u> $p+q \neq 0$

$$(2.3.1.2) \qquad gr_F^p\ gr_{\bar{F}}^q(\omega) = 0 \ .$$

Il résulte aussi de loc.cit. que si on pose

$$(2.3.1.3) \qquad \omega^p = F^p\omega \cap \bar{F}^{-p}\omega \qquad (p \in \mathbb{Z})$$

on obtient une $\otimes$-graduation de type $\mathbb{Z}$ de ω et qu'on a

$$F^p\omega = \sum_{r \geq p} \omega^r$$

$$\bar{F}^p\omega = \sum_{-r \geq p} \omega^r \ .$$

Ce dernier résultat est valable également dans le premier cas ; si $E \in ob\ \underline{C}$, $x \in \omega(E)$, il existe p,q tels que

$$x \in F^p \cap \bar{F}^q$$

car les filtrations $F,\bar{F}$ sont exhaustives. De plus, les filtrations induites par $F,\bar{F}$ sur $F^p \cap \bar{F}^q$ sont finies, d'où

$$F^p\omega(E) \cap \bar{F}^q\omega(E) = \bigoplus_{p \leq i \leq -q} F^i\omega(E) \cap \bar{F}^{-i}\omega(E) \ ,$$

et on obtient la décomposition voulue de x, et par suite de ω, d'où l'assertion.

2.3.2. On peut interpréter les constructions précédentes comme fournissant une équivalence de catégories entre la catégorie de foncteurs fibre munie de deux $\otimes$-filtrations exactes opposées et celle de foncteurs fibre munis d'une $\otimes$-graduation (de type $\mathbb{Z}$).

Si (ω,F) est un foncteur fibre muni d'une $\otimes$-filtration exacte, le foncteur

$\underline{Scin}(\omega,F)$ de scindages de F (2.2.1) est isomorphe canoniquement au foncteur $\underline{Opp}(\omega,F)$ des filtrations $\bar{F}$ opposées à F (de définition évidente).

Dans le cas où G est un schéma en groupes réductifs, on peut relier l'isomorphisme

$$\underline{Scin}(\omega,F) \simeq \underline{Opp}(\omega,F)$$

à la théorie des groupes de la façon suivante : soit $P = \underline{Aut}_F(\omega)$ le parabolique correspondant à F (2.2.5), alors pour chaque $\otimes$-filtration exacte $\bar{F}$ opposée à F le parabolique $\bar{P}$ qui lui correspond est opposé à P, i.e. l'intersection $P \cap \bar{P} = \underline{Cent}(i)$ (où $i : \mathbb{G}_m \longrightarrow G$ définit la graduation (2.3.1.3)) est un sous-groupe de Levi commun à P et $\bar{P}$ (SGA 3 XXVI 4.3.3). On sait d'autre part que le foncteur $\underline{Opp}(P)$ des paraboliques opposées à P est un torseur sous le radical unipotent U de P pour l'action par conjugaison (loc.cit. 4.3.5). On a ainsi un diagramme d'isomorphismes de U-torseurs :

$$\begin{array}{ccc} \underline{Scin}(\omega,F) & \simeq & \underline{Opp}(\omega,F) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \underline{Lev}(P) & \simeq & Opp(P) \end{array} .$$

2.3.3. Voici une généralisation de la notion de filtrations opposées. Soit $j : \mathbb{G}_m \longrightarrow G$ un morphisme central définissant une $\otimes$-graduation

$$\omega = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \omega_j^n ,$$

notée $\omega = \oplus\, \omega^n$ s'il n'y a pas de confusion possible. Deux $\otimes$-filtrations exactes $F,\bar{F}$ de ω sont dites opposées suivant j si le morphisme canonique

$$F^p\, \omega_j^n \oplus \bar{F}^{n+1-p}\, \omega_j^n \longrightarrow \omega_j^n$$

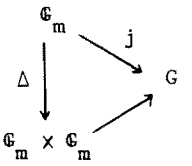
est un isomorphisme. Dans le second cas considéré en 2.2.0 ceci équivaut à la condition

$$gr_F^p\, gr_{\bar{F}}^q\, \omega_j^n = 0 \qquad \text{pour} \quad p+q \neq n .$$

On voit de la même façon qu'en 2.3.1 que la donnée de deux $\otimes$-filtrations $F,\bar{F}$ opposées suivant j revient à la donnée de deux morphismes $i_1,i_2 : \mathbb{G}_m \longrightarrow G$ vérifiant

$$j = i_1 . i_2 \quad ,$$

ou encore d'un morphisme $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m \longrightarrow G$ rendant commutatif le triangle



.

Voici la recette pour passer d'une de ces données à l'autre : si $F,\bar{F}$ sont des $\otimes$-filtrations opposées suivant j, la bigraduation de ω correspondant au morphisme $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m \longrightarrow G$ est donnée par

$$\omega^{p,q} = F^p \omega_j^{p+q} \cap \bar{F}^q \omega_j^{p+q} \quad .$$

Inversement, les filtrations $F,\bar{F}$ sont données par

$$F^p \omega = \sum_{r \geq p} \omega^{r,s}$$

$$\bar{F}^p \omega = \sum_{s \geq p} \omega^{r,s} \quad .$$

Signalons enfin, comment on récupère la j-graduation à partir de i_1,i_2

$$\omega_j^n = \sum_{p+q=n} \omega_{i_1}^p \cap \omega_{i_2}^q \quad .$$

2.4. Structure des foncteurs fibre filtrés.

Les résultats de ce numéro sont dûs à P. Deligne.

Théorème. Soient G un A-groupe affine et plat, F une $\otimes$-filtration exacte sur ω^G (2.1.1). Alors, si G est réductif connexe ou bien si A est un corps de caractéristique zéro et G de type fini, F est scindable ; si A est un anneau de caractéristique zéro et G est lisse, F est localement scindable pour la topologie de Zariski sur $\mathrm{Spec}(A)$. En particulier, si C est une catégorie tannakienne sur un

corps k , F une $\otimes$-filtration exacte d'un foncteur fibre $\omega : C \longrightarrow \underline{Loclib}(S)$, F est scindable si k est de car. 0 , S est le spectre d'un corps et le lien de C est algébrique ou si le lien de C est réductif connexe et S est affine, localement scindable pour la topologie de Zariski sur S si k est de car. 0 et le lien de C est lisse.

La dernière partie du théorème suit de la première de la façon habituelle (voir 2.1.1.2) ; celle-ci se décompose en plusieurs étapes.

2.4.1. Réduction au cas d'un corps algébriquement clos. Réduisons d'abord au cas d'un corps ; posons $S = \mathrm{Spec}(A)$, et soit $s \in S$. Au point s la filtration F se scinde par un morphisme $i_s : \mathbb{G}_{m,s} \longrightarrow P_s$; par platitude de P (voir 2.1.4), celui-ci se rélève au voisinage de s en $i : \mathbb{G}_m \longrightarrow P$. La filtration F se découpe donc suivant la graduation définie par i , et puisque ce découpage est trivial au point s il en est de même au voisinage. On prouve ainsi que la filtration se scinde localement pour la topologie de Zariski sur S , et dans le cas où G est réductif connexe ceci peut se faire globalement sur S par 2.2.5.3). Enfin, la réduction d'un corps à un corps algébriquement clos suit de 2.2.5 et 2.2.2.

Par la suite on a donc affaire à un corps algébriquement clos k , un k-groupe algébrique G et à une $\otimes$-filtration exacte de $\omega^G : \underline{Rep}(G) \longrightarrow \underline{Mod}(k)$, ou de façon équivalente de $\omega_o^G : \underline{Rep}_o(G) \longrightarrow \underline{Modtf}(k)$. Si k est de car. non nulle, ce groupe est supposé réductif connexe.

2.4.2. Cas où G est un tore. C'est trivial ; dans ce cas le scindage $i : \mathbb{G}_m \longrightarrow G$ est unique et s'obtient de la façon suivante : si M est le groupe des caractères de G , $i^* : M \longrightarrow \mathbb{Z}$ a comme valeur en $m \in M$ l'ordre pour la filtration F du G-module de poids m et de rang 1 .

2.4.3. Cas où G est connexe semi-simple adjoint. Voici comment procède la preuve. On déduit d'abord d'un lemme général sur les groupes réductifs que P est un sous-groupe parabolique de G de radical unipotent U ; soit T un tore maximal de G

contenu dans P , et soit

$$\underline{g} = \underline{g}^{o} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \underline{g}^{\alpha}$$

la décomposition de Cartan de l'algèbre de Lie de G suivant les caractères de T ; ici $R \hookrightarrow M = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_m)$.

Si pour $\alpha \in R$, on note $f(\alpha)$ l'ordre pour la filtration F du sous-espace de rang un $\underline{g}^{\alpha}$ (ceci a un sens car $T \subset P$, et la décomposition de Cartan est ainsi compatible avec F) , on vérifie que

$$(2.4.3.1) \qquad \begin{cases} f(-\alpha) = -f(\alpha) & \alpha \in R \\ f(\alpha+\beta) = f(\alpha) + f(\beta) & \alpha, \beta \quad \alpha+\beta \in R \ . \end{cases}$$

Il résulte alors de Bourbaki, Groupes et alg. de Lie, chap. VI , prop. 19 , cor. 2, que f est le transposé d'un morphisme $i : \mathbb{G}_m \longrightarrow T$. D'autre part, par construction la filtration définie par i sur $\underline{g}$ coïncide avec F , et comme par hypothèse $\underline{g}$ est un G-module fidèle (pour la représentation adjointe), on conclut par II 4.3.2 a) que

$$F = F(i) \ .$$

Il ne reste qu'à prouver les lemmes utilisés.

2.4.3.1. Lemme. Soient G un k-groupe réductif connexe, P un sous-groupe lisse de G , U un sous-groupe unipotent distingué de P tel que $\dim U \geq \dim G/P$. Alors P est un sous-groupe parabolique de G de radical unipotent U et $\dim U = \dim G/P$.

La dernière assertion est conséquence des deux autres comme il est bien connu. Comme d'autre part les sous-groupes paraboliques sont connexes, on peut supposer P connexe et $U = \mathrm{rad}_u(P)$. Soient B' un sous-groupe de Borel de P/U , P' l'image réciproque de B' , U' l'image réciproque de $\mathrm{rad}_u(B')$. Puisque $\dim P/U = \dim B' + \dim \mathrm{rad}_u(B')$, les hypothèses du lemme sont encore vérifiées par $U' \hookrightarrow P'$ et il suffit de prouver que $P' \hookrightarrow P$ est parabolique ; en d'autres termes on s'est ramené

à supposer que P est résoluble, donc inclus dans un sous-groupe de Borel de B. On a alors

$$\dim G/P \geq \dim G/B$$

$$\dim U \leq \dim \mathrm{rad}_u B$$

$$\dim G/B = \dim \mathrm{rad}_u B$$

d'où $P = B$.

2.4.3.2. Corollaire. Revenant aux notations du théorème, P est parabolique de radical unipotent U.

Il suffit de vérifier (voir (2.1.4) que $\dim[\mathrm{Lie}(G)/F^0(\mathrm{Lie}(G))] = \dim F^1(\mathrm{Lie}(G))$. Si on avait un isomorphisme de G-modules $\mathrm{Lie}(G) \simeq \mathrm{Lie}(G)^\vee$ ce serait clair (par exemple si k est de car. 0). Toutefois, il est suffisant de savoir que $\mathrm{Lie}(G)$, $\mathrm{Lie}(G)^\vee$ ont même image dans le groupe de Grothendieck $R(G)$, i.e. sont virtuellement isomorphes. C'est ce qui résulte de SERRE [4] 3.6 , th. 4.

2.4.3.3. Vérifions enfin les formules (2.4.3.1) ; la première d'elles utilise le même raisonnement que 2.4.3.2. Prouvons la seconde : si α,β , $\alpha+\beta \in R$, on a

$$[\underline{g}^{\alpha},\underline{g}^{\beta}] = \underline{g}^{\alpha+\beta}$$

$$[\underline{g}^{-\alpha},\underline{g}^{\alpha+\beta}] = \underline{g}^{\beta} \quad ,$$

d'où

$$f(\alpha+\beta) \geq f(\alpha) + f(\beta)$$

$$f(\beta) \quad \geq f(-\alpha) + f(\alpha+\beta) = -f(\alpha) + f(\alpha+\beta) \ ,$$

d'où la formule.

2.4.4. Cas où G est fini. Dans ce cas la filtration F est triviale : $F^1 = 0$. Il suffit de prouver que la $\otimes$-graduation sur $\mathrm{gr}_F(\omega)$ est triviale ; elle est en effet définie par un morphisme $\mathbb{G}_m \longrightarrow G$ qui ne peut être que nul.

2.4.5. Cas où G est réductif connexe. On dispose d'une isogénie centrale $a : G \longrightarrow G' \times H$, où G' est semi-simple adjoint, H un tore. Par 2.4.2, 2.4.3, il existe $i : \mathbb{G}_m \longrightarrow G' \times H$ définissant la filtration induite par F sur $\omega^{G' \times H}$. Il existe $n > 0$ tel que i^n se relève en $i' : \mathbb{G}_m \longrightarrow G$, et pour toute représentation de G, triviale sur le noyau de a, i' définit la filtration F' déduite de F en multipliant les indices par n ($F'^p = F^{pn}$). Puisque pour tout G-module E il existe k tel que $E^{\otimes k}$ soit un $G' \times H$-module, i' définit F', et on conclut que i se relève en $\tilde{i}$ avec $i' = \tilde{i}^n$ et que $\tilde{i}$ définit F.

2.4.6. Cas où car. $k = 0$ et G est réductif. Soit V un G-module fidèle. Vu ce qui précéde, il suffit de vérifier que la filtration F de V définit une filtration de ω^{G^o}, où G^o est la composante neutre de G. Puisque G^o est réductif et k de car. 0, il suffit de voir que tout élément de $V^{\otimes \ell} \otimes \overset{\vee}{V}{}^{\otimes m}$, invariant par G^o est de filtration 0. En effet, $(V^{\otimes \ell} \otimes \overset{\vee}{V}{}^{\otimes m})^{G^o}$ est un sous-G-module de $V^{\otimes \ell} \otimes \overset{\vee}{V}{}^{\otimes m}$ qui provient de G/G^o ; on en conclut par 2.4.4.

2.4.7. Cas où car. $k = 0$. Soit N le radical unipotent de G^o ; on dispose de $i' : \mathbb{G}_m \longrightarrow G/N$. L'application

$$F^o(\underline{\text{Lie}}\ G) \longrightarrow F^o(\underline{\text{Lie}}\ G/N)$$

étant surjective, on peut relever i' en $i : \mathbb{G}_m \longrightarrow G$ avec $\text{Im}(di) \supset F^o(\underline{\text{Lie}}\ G)$. Ceci signifie que la graduation définie par i est compatible avec F. Pour prouver que la filtration F coïncide avec celle associée à cette graduation, on procède par récurrence sur la longueur d'un G-module E : si E est simple, E provient d'un G/N-module, et on applique 2.4.6 ; sinon, on dévisse en une suite exacte

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0 \ ,$$

somme directe des suites

$$0 \longrightarrow E'^{\alpha} \longrightarrow E^{\alpha} \longrightarrow E''^{\alpha} \longrightarrow 0 \qquad \alpha \in \mathbb{Z} \ .$$

Par hypothèse de récurrence E'^{α}, E''^{α} sont de filtration α, donc E^{α} aussi.

2.5. Un exemple : $\otimes$-filtrations associées à des éléments unipotents.

2.5.0. Dans ce numéro, on fixe un corps k de caractéristique zéro. Rappelons (voir GROTHENDIECK [1] prop. 4 b)) que si E est un k-vectoriel de rang fini, il revient au même de donner une représentation linéaire $p : \mathbb{G}_a \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}(E)$ qu'un automorphisme unipotent u (resp. un endomorphisme nilpotent N), ces données se déterminant (mutuellement par le formulaire

$$u = p(1)$$

$$N = \log(u)$$

$$p(t) = \exp(tN) .$$

On peut donc interpréter $\underline{\mathrm{Rep}}_o(\mathbb{G}_a)$ comme la $\otimes$-catégorie des k-vectoriels E de rang fini munis d'un automorphisme unipotent u_E (resp. endomorphisme nilpotent N_E). Il en résulte que si G est un k-groupe affine, l'ensemble des éléments unipotents de $G(k)$ s'identifie à l'ensemble des morphismes de groupe $\mathbb{G}_a \longrightarrow G$ (II 3.3.1).

2.5.1. La construction suivante est due à P. Deligne, voir aussi GRIFFITHS [1] (9.11). Soit N un endomorphisme nilpotent d'un k-vectoriel de rang fini E. Il existe sur E une filtration finie décroissante F_N qui est la seule vérifiant les conditions suivantes

(2.5.1.1) $$N(F_N^p E) \subset F_N^{p+2} E .$$

(2.5.1.2) Si $p \geq 0$, l'application induite par N^p

$$\mathrm{gr}_{F_N}^{-p} E \longrightarrow \mathrm{gr}_{F_N}^{p} E$$

est un isomorphisme. La construction de $F_N^p E$ se fait par récurrence sur $|p|$ en remarquant que pour $p \gg 0$, $F_N^{-p} E = E$, $F_N^p E = 0$.

2.5.1.1. La construction ainsi faite est fonctorielle en le couple (E,N_E) et on vérifie même que la filtration qu'on obtient de $\omega^{\mathbb{G}_a}$ est une $\otimes$-filtration. Toutefois, ce n'est pas une $\otimes$-filtration exacte, comme on s'en aperçoit aussitôt.

2.5.2. Soient G un k-groupe affine, $u \in G(k)$ un élément unipotent, correspondant donc à un morphisme $p : \mathbb{G}_a \longrightarrow G$, ou encore à un foncteur $\omega : \underline{\mathrm{Rep}}_o(G) \longrightarrow \underline{\mathrm{Rep}}_o(\mathbb{G}_a)$ rendant commutatif le triangle

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Rep}}_o(G) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Rep}}_o(\mathbb{G}_a) \\ & {\scriptstyle \omega^G} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \omega^{\mathbb{G}_a}} & \\ & \underline{\mathrm{Modf}}(k) & \end{array} .$$

On associe à u une $\otimes$-filtration $F(u)$ de ω^G par la règle

$$F(u)_X = F_{N_X}$$

où X est un G-module et $N_X = \log(u_X)$: c'est la filtration déduite par ω de la filtration définie sur $\omega^{\mathbb{G}_a}$ en 2.5.1.1. Si G est pro-réductif, i.e. si la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_o(G)$ est semi-simple (II 4.3.2 f)), le foncteur $\mathrm{gr}_{F(u)}\,\omega^G$ est exact donc aussi fidèle et la $\otimes$-filtration $F(u)$ est exacte (2.1.1).

2.5.2.1. Exemple. Soit $G = SL(2,k)$, et soit

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient une $\otimes$-filtration exacte $F(u)$ de ω^G, et on peut prouver qu'elle coïncide avec la filtration $F(i)$ déduite du morphisme standard $i : \mathbb{G}_m \longrightarrow G$

$$\lambda \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} .$$

Pour ceci, il suffit de vérifier qu'elles coïncident sur un G-module fidèle E (II 4.3.2 a)). Posons $E = k^2$ avec base e_1, e_2 muni de la représentation évi-

dente de G ; on vérifie immédiatement que pour la graduation définie par i on a

$$E^1 = ke_1$$

$$E^{-1} = ke_2$$

et que

$$\log(u_E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$F^{-p}E = E \qquad p \geq 1$$

$$F^0E = F^1E = ke_1$$

$$F^pE = 0 \qquad p > 1$$

ce qui prouve l'assertion. On vérifie de même que si $F(i^{-1})$ est la $\otimes$-filtration opposée de $F(i)$ définie par le scindage i (2.3), on a

$$F(i^{-1}) = F(u')$$

où

$$u' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.5.2.2. On dira qu'une $\otimes$-filtration exacte comme ci-dessus est de type unipotent.

2.5.3. Proposition. Soit G un k-groupe réductif (non nécessairement connexe), F une $\otimes$-filtration de ω^G de type unipotent. Alors, F est scindable. De plus, si k est algébriquement clos et $u \in G(k)$ est un élément unipotent tel que $F = F(u)$, il existe un morphisme $SL(2,k) \longrightarrow G$ envoyant $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en u (voir 2.5.2.1) ; en particulier F se déduit par ce morphisme de la filtration considérée en loc. cit.

2.5.3.1. Preuve. Par 2.2.2 on peut supposer k algébriquement clos, et aussi G connexe, puisque tout élément unipotent de G(k) se trouve dans $G^o(k)$ (i.e. G_a est connexe !). D'après KOSTANT [1] Theorem 3.4, il existe un morphisme

$SL(2,k) \longrightarrow G$ vérifiant la condition requise et on en conclut.

2.5.4. Supposons k algébriquement clos pour simplifier. Il résulte aussitôt de ce qui précède que l'ensemble des classes de conjugaison de filtrations de type unipotent de ω^G se trouve en correspondance biunivoque avec l'ensemble des classes de conjugaison de morphismes $\mathbb{G}_m \longrightarrow G$ qui sont composés du morphisme standard $\mathbb{G}_m \longrightarrow SL(2,k)$ et d'un morphisme $SL(2,k) \longrightarrow G$. Si T est un tore maximal de G de groupe de caractères M , R_o un système de racines simple pour le système de racines de G par rapport à T , une condition nécessaire pour un morphisme $i : \mathbb{G}_m \longrightarrow T \hookrightarrow G$ pour être de ce type est que les entiers $i^*(r)$ $(r \in R_o)$ soient 0, 1, ou 2 (voir loc.cit. 5.1, où les notations employées sont légèrement différentes) ; la liste des entiers $i^*(r)$ pouvant apparaître pour les différents groupes simples G a été faite par DYNKIN [1]. On voit ainsi que <u>l'ensemble des classes de conjugaison des</u> $\otimes$-<u>filtrations de type unipotent de</u> ω^G <u>est fini et borné par</u> 3^ℓ , <u>où</u> ℓ <u>est le rang de</u> G (ou plus généralement, de la composante neutre G^o).

Chapitre V : POLARISATIONS DES CATEGORIES TANNAKIENNES SUR $\mathbb{R}$

Introduction

§ 0. Rappels de théorie des groupes

0.1. Schémas en groupes réductifs

0.2. Représentations linéaires

0.3. Groupes compacts, dualité de Tannaka

0.4. Groupes compacts et groupes complexes réductifs

§ 1. Catégories tannakiennes à lien réductif connexe

1.1. Classification des catégories ind-tannakiennes

1.2. Explication des tables

1.3. Tables

§ 2. Polarisations : cas homogène

2.1. Formes bilinéaires

2.2. Formes sesquilinéaires

2.3. Formes de Weil

2.4. Polarisations

2.5. Classification des polarisations

2.6. Le théorème de rigidité

2.7. Cas neutre I : Les C-polarisations

2.8. Cas neutre II : Détermination des groupes polarisables

§ 3. Polarisations : cas gradué

3.1. Triples de Tate

3.2. Polarisations

3.3. Cas neutre.

INTRODUCTION

Ce chapitre est essentiellement consacré à l'étude de structures de positivité sur des catégories tannakiennes sur un sous-corps de $\mathbb{R}$, à savoir les structures de polarisation. Celles-ci apparaissent de façon naturelle dans l'étude des structures de Hodge et des motifs (voir chapitre suivant).

Le § 0 rassemble quelques résultats de théorie des groupes dont on se sert dans ce chapitre. Les démonstrations ne sont pas données, mais des références sont en général indiquées.

Le § 1 donne le principe d'une classification des catégories ind-tannakiennes à lien réductif sur une base S , et en application on élabore une table des catégories tannakiennes sur $\mathbb{R}$ à lien simple.

Au § 2 on développe la notion de polarisation homogène, qui est surtout un artifice technique pour étudier au § 3 les polarisations graduées, qui sont celles qui apparaissent en pratique. Les résultats essentiels sont résumés en 2.4.5.1 et 3.2.3.1.

§ 0. RAPPELS DE THEORIE DES GROUPES

0.1. Schémas en groupes réductifs (DEMAZURE [1], SGA 3).

0.1.1. Définitions.

0.1.1.1. Un schéma en groupes G sur un corps algébriquement clos k est réductif s'il est de type fini, connexe et ne possède aucun sous-groupe unipotent, connexe et distingué autre que l'unité. Si S est un schéma quelconque, un S-groupe G est réductif s'il est affine et lisse au-dessus de S et si ses fibres géométriques sont des groupes réductifs.

0.1.1.2. Remarque. Si k est un corps de caractéristique nulle, et G un k-groupe de type fini, on dit aussi que G est réductif si sa composante connexe est un k-groupe réductif au sens précédent. Cette terminologie est justifiée par le fait suivant (voir NAGATA [1]) : G est réductif si et seulement si la catégorie $\underline{Rep}_0(G)$ des G-modules de rang fini sur k est semi-simple. Dans les numéros 0.1. et 0.2. tous les groupes réductifs sont connexes.

0.1.1.3. Soit G/S un S-groupe réductif. Un sous-tore T de G est un tore maximal de G si ses fibres géométriques $T_{\bar{s}}$ sont des tores maximaux des groupes $G_{\bar{s}}$. Un sous-groupe lisse et de présentation finie B de G est un sous-groupe de Borel si ses fibres géométriques $B_{\bar{s}}$ sont des sous-groupes de Borel des $G_{\bar{s}}$, i.e. des sous-groupes résolubles connexes maximaux.

Un S-groupe réductif possède des tores maximaux (resp. des sous-groupes de Borel) localement pour la topologie étale, et deux tels sous-groupes sont conjugués localement pour la topologie étale.

0.1.2. Groupes réductifs déployés.

0.1.2.1. Soient G un S-groupe réductif, T un tore maximal déployé de G, de groupe de caractères M,

$$T = D_S(M) \quad .$$

Dans ces conditions, on peut munir M (quitte à travailler localement sur S pour la topologie de Zariski) d'une donnée radicielle (SGA 3 XXI) pour laquelle l'ensemble R des racines est constitué des $r \in M$, $r \neq 0$, tels que pour tout point $s \in S$, l'espace vectoriel $\underline{g}^r$ correspondant à la valeur propre $r_s : T_s \longrightarrow \mathbb{G}_{m,s}$ pour T_s agissant sur $\underline{g} = \mathrm{Lie}(G_s/k(s))$ via la représentation adjointe, soit non nul. On obtient une décomposition

$$\underline{\mathrm{Lie}}(G) = \underline{\mathrm{Lie}}(T) \oplus \sum_{r \in R} \underline{\mathrm{Lie}}(G)^r$$

associé à cette donnée radicielle où les $\underline{\mathrm{Lie}}(G)^r$ sont des $\underline{O}_S$-modules libres de rang 1. On dit qu'un groupe réductif G/S est <u>déployable</u> s'il existe un tore maximal déployable et si la construction de la donnée radicielle sur le groupe des caractères M peut se faire globalement ; il est <u>déployé</u> s'il est muni d'un tore maximal déployé $T = D_S(M)$ et de la donnée radicielle sur M. D'après 0.1.1.3, tout groupe réductif est localement déployable pour la topologie étale.

Les données radicielles associées aux groupes déployés, permettent de classifier complètement ceux-ci, voir SGA 3 XXIII et XXV.

0.1.2.2. Soit G/S un groupe réductif déployé, de tore maximal

$$T = D_S(M)$$

et soit $R \subset M$ l'ensemble des racines. Si $\Gamma_o(R)$ dénote le sous-groupe de M engendré par R, il y a un isomorphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Cent}}(G) \simeq D_S(M/\Gamma_o(R)) \ ,$$

l'inclusion $\underline{\mathrm{Cent}}(G) \longrightarrow T$ s'identifiant au transposé de l'homomorphisme

$$M \longrightarrow M/\Gamma_o(R) \ .$$

0.1.3. Automorphismes, groupes quasi-déployés.

0.1.3.1. Soit G/S un groupe réductif, et notons

$$\underline{\mathrm{Int}}(G) = G/\underline{\mathrm{Cent}}(G)$$

le faisceau quotient pour la topologie fidèlement plate de présentation finie (fppf) ; il est représentable par un S-groupe adjoint (i.e. réductif et à centre trivial). On a par définition une suite exacte de faisceaux fppf

$$1 \longrightarrow \underline{\mathrm{Int}}(G) \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}(G) \longrightarrow \underline{\mathrm{Autext}}(G) \longrightarrow 1 \quad . \tag{0.1.3.1}$$

On prouve alors que $\underline{\mathrm{Autext}}(G)$ est représentable par un S-groupe constant tordu, à engendrement fini.

0.1.3.2. Supposons G épinglé, i.e. déployé et muni de plus des données supplémentaires : 1) un système $R_o \subset R$ de racines simples pour la donnée radicielle sur le groupe des caractères M du tore maximal T ; 2) pour chaque $r \in R_o$, une section $X_r \in \Gamma(S, \underline{\mathrm{Lie}}(G/S)^r)$.

Alors, $\underline{\mathrm{Autext}}(G)$ est un groupe constant, qui s'identifie au groupe des automorphismes du groupe épinglé $(G, M, R_o, (X_r))$; il s'identifie aussi au groupe des automorphismes de la donnée radicielle sur M, munie du système R_o de racines simples.

On voit ainsi que si G est déployé, la suite exacte précédente se scinde ; plus précisément, le choix d'un épinglage de G détermine une section du morphisme $\underline{\mathrm{Aut}}(G) \longrightarrow \underline{\mathrm{Autext}}(G)$.

0.1.3.3. Supposons G épinglé, et soit P un torseur sous $\underline{\mathrm{Autext}}(G)$; la section de $\underline{\mathrm{Aut}}(G) \longrightarrow \underline{\mathrm{Autext}}(G)$ définie par l'épinglage de G détermine un torseur sous $\underline{\mathrm{Aut}}(G)$, ou encore un S-groupe localement isomorphe à G. Les S-groupes réductifs obtenus par ce procédé sont appelés quasi-déployés, ils ne dépendent pas du choix d'un épinglage du groupe déployable G. Si le schéma S est semi-local, ce sont les

groupes réductifs qui possèdent un sous-groupe de Borel (SGA 3, XXIV, 3.9.1).

0.1.3.4. Notons, pour abréger

$$\underline{O}(G) = \underline{\mathrm{Autext}}(G) ,$$

et supposons G épinglé, d'où un morphisme

$$\underline{O}(G) \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}(G) ,$$

i.e. une action de $\underline{O}(G)$ dans G. Si P est un torseur à droite sous $\underline{O}(G)$, le S-groupe G' qu'il définit est donné par

$$G' = P \overset{\underline{O}(G)}{\times} G .$$

On a des isomorphismes canoniques

$$\underline{\mathrm{Cent}}(G') \simeq P \overset{\underline{O}(G)}{\times} \underline{\mathrm{Cent}}(G) . \tag{0.1.3.2}$$

0.1.4. Actions des groupes de Galois.

0.1.4.1. Soient S un schéma, $S' \longrightarrow S$ un revêtement étale de groupe Γ, G un S-groupe réductif, et supposons que $G' = G \times_S S'$ soit épinglé avec tore maximal $T = D_S(M)$, et système de racines simple $R_o \subset R$. On définit alors une action de Γ dans M qui laisse stables R et R_o. Si G/S est déployable, et si le tore T' provient d'un tore trivial T de G, cette action est triviale.

0.1.4.2. Supposons G épinglé, et considérons le groupe constant $E = \underline{\mathrm{Autext}}(G)$, comme le groupe des automorphismes de M qui respectent R et R_o. On a alors

$$H^1(S'/S, \underline{\mathrm{Autext}}(G)) \simeq \mathrm{Hom}(\Gamma, E)/\text{conjugaison} .$$

Si $\varphi : \Gamma \longrightarrow E$ est un homomorphisme de groupes, i.e. une action de Γ dans M qui respecte R_o, on peut construire un S-groupe ${}^{\varphi}G$, muni d'un isomorphisme

$$({}^{\varphi}G)_{S'} \simeq G_{S'} = G' ,$$

et c'est par ce procédé qu'on obtient les groupes quasi-déployés sur S qui deviennent déployés sur S' (cf. 0.1.3). L'action de Γ sur M qu'on obtient par cet isomorphisme et par 0.1.4.1, est celle donnée par φ .

0.1.4.3. Si S est un schéma localement noethérien et normal (par exemple le spectre d'un corps) tout S-groupe quasi-déployé est déployable localement pour la topologie finie étale, et ce qui précède s'applique.

0.2. Représentations linéaires.

Dans ce numéro, on travaille au-dessus d'un corps k .

0.2.1. Soit G un k-groupe réductif épinglé ; on a donc un tore $T = D_k(M)$, une donnée radicielle sur M , et un système R_o de racines simples de R . Ceci détermine une relation d'ordre dans M : si $m,n \in M$, on dit que $m \geq n$ si $m-n$ est combinaison linéaire à coefficients entiers positifs d'éléments de R_o . On a d'autre part l'ensemble $R^* \subset M^*$ des coracines, et une bijection $R \longrightarrow R^*$, $r \longmapsto r^*$. On pose

$$P = \{p \in M / \forall\, r \in R_o\ ,\ r^*(p) \geq 0\}\ ,$$

et les éléments de P sont appelés les poids dominants ; ils sont en correspondance biunivoque avec les classes d'isomorphisme d'objets simples de $\underline{\mathrm{Rep}}_o(G)$, de la façon suivante (voir SERRE [4], 3.6) : pour tout $p \in P$, il existe un objet E_p unique à isomorphisme près, qui est simple, et qui en tant que T-module, i.e. vectoriel muni d'une graduation de type M , s'écrit

$$E_p = E_p^p \oplus \sum_{m_i < p} (E_p)^{m_i}\ ,$$

où $(E_p)^p$ est de rang 1 ; de plus, tout G-module simple est isomorphe à un tel E_p .

On remarquera que les éléments de P engendrent un sous-groupe d'indice fini dans M .

0.2.2. Avec les hypothèses de 0.2.1, si E_p est un G-module simple, son dual $\check{E}_p$ est encore simple, et isomorphe à un $E_{p'}$ pour un $p' \in P$ bien déterminé. On vérifie facilement qu'on a

$$p' = -w_o(p) \quad , \tag{0.2.2.1}$$

où w_o est l'unique élément du groupe de Weyl de la donnée radicielle sur M, qui transforme R_o en $-R_o$.

0.2.3. Soit G un k-groupe réductif non nécessairement déployable ; il le deviendra après une extension galoisienne, soit k'/k de groupe Γ. Munissons $G' = G \otimes_k k'$ d'un épinglage : alors le groupe Γ agit par 0.1.4 sur (M,R,R_o), donc sur P, et il agit par ailleurs de façon évidente sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de G-modules simples. D'après BOREL-TITS [1], 12.5, ces deux actions sont compatibles avec l'identification de 0.2.1, i.e.

$$\gamma(E_p) \simeq E_{\gamma(p)} \tag{0.2.3.1}$$

0.3. Groupes compacts. Dualité de Tannaka.

0.3.1. Soit K un groupe topologique, et notons

$$\underline{\text{Rep.cont.}}(K)$$

la $\otimes$-catégorie ACU $\mathbb{R}$-linéaire des représentations continues de K sur des $\mathbb{R}$-vectoriels de rang fini. Elle est munie du foncteur oubli

$$\omega^K : \underline{\text{Rep.cont.}}(K) \longrightarrow \underline{\text{Modf}}(\mathbb{R})$$

qui est un $\otimes$-foncteur strict, $\mathbb{R}$-linéaire, exact et fidèle. Si on pose

$$\tilde{K} = \text{env}_{\mathbb{R}}(K) = \underline{\text{Aut}}^{\otimes}(\omega^K)$$

pour le $\mathbb{R}$-groupe affine défini par cette situation, qui sera appelé l'enveloppe algébrique réelle de K, on a une équivalence de $\otimes$-catégories ACU $\mathbb{R}$-linéaires

(0.3.1.1) $$\underline{\text{Rep.cont.}}(K) \xrightarrow{\approx} \underline{\text{Rep}}_o(\tilde{K}) \quad ,$$

qui est induite par ω^K , et qui respecte les foncteurs oubli (voir II 4.1.1). On dispose aussi d'un morphisme de groupes topologiques évident

(0.3.1.2) $$K \longrightarrow \tilde{K}(\mathbb{R}) \quad ,$$

qui possède la propriété universelle pour les morphismes continus de K dans les groupes de points réels de $\mathbb{R}$-groupes affines : si G est un $\mathbb{R}$- groupe affine, $G(\mathbb{R})$ muni de la topologie "usuelle" (déduite de celle de $\mathbb{R}$) est un groupe topologique, et (0.3.1.2) induit une bijection

(0.3.1.3) $$\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\tilde{K},G) \longrightarrow \text{Hom.cont.}(K,G(\mathbb{R})) \quad .$$

Ceci justifie le nom d'enveloppe algébrique réelle. On définirait de même l'enveloppe algébrique de K sur un corps topologique (exemple $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}_p$,...).

0.3.2. Si K est compact, on prouve que la flèche d'ajoinction (0.3.1.2) est un isomorphisme (l'injectivité résulte du théorème de Peter-Weyl ; pour la surjectivité, on se ramène au cas où K est un groupe de Lie, et cela résulte de ce que si K opère continûment sur un vectoriel réel V de rang fini, l'image de K est Zariski-fermée dans $\text{End}(V)$). Ceci signifie aussi que le foncteur $K \longmapsto \tilde{K}$ de la catégorie des groupes topologiques compacts vers celle des $\mathbb{R}$-groupes affines est pleinement fidèle. Les $\mathbb{R}$-groupes appartenant à l'image essentielle de celui-ci sont appelés <u>compacts</u>, ou <u>anisotropes</u>. Un exemple du dictionnaire qui en résulte (dictionnaire qui n'est qu'une variante de plus de la <u>dualité de Tannaka</u>) : un groupe compact K <u>est</u> de Lie si et seulement si $\tilde{K}$ est un $\mathbb{R}$-groupe de type fini (i.e. algébrique), K est connexe si et seulement si $\tilde{K}$ l'est...

0.3.3. Voici des critères de compacité pour un $\mathbb{R}$-groupe. Un $\mathbb{R}$-groupe G est compact si et seulement si le groupe des points réels $G(\mathbb{R})$ est compact et Zariski-dense dans $G(\mathbb{C})$. S'il est connexe, cette dernière condition est inutile.

Remarquons aussi qu'un sous-$\mathbb{R}$-groupe d'un $\mathbb{R}$-groupe compact est compact (voir par exemple DELIGNE [5], lemme 2.4), ce qui montre qu'un $\mathbb{R}$-groupe algébrique est compact si et seulement s'il agit fidèlement dans un $\mathbb{R}$-vectoriel muni d'une forme définie positive.

Enfin, un $\mathbb{R}$-groupe fini est compact si et seulement s'il est constant.

0.4. Groupes compacts et groupes complexes réductifs.

0.4.1. Rappelons les faits suivants, qui nous seront utiles dans ce chapitre. Si Γ est un groupe de Lie réel n'ayant qu'un nombre fini de composantes connexes, les sous-groupes compacts maximaux sont conjugués (voir par exemple HOCHSCHILD [1] chap. XI). Si de plus Γ est le groupe des points d'un $\mathbb{R}$ - groupe algébrique G ,

$$\Gamma = G(\mathbb{R}) \ ,$$

il résulte de 0.3.1 et 0.3.2 que les sous-groupes compacts (resp. compacts maximaux) de Γ sont en correspondance biunivoque avec les sous-$\mathbb{R}$-groupes compacts (resp. compacts maximaux) de G .

0.4.2. Rappelons qu'un groupe de Lie complexe Γ est réductif s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :

a) Γ est le groupe des points complexes d'un $\mathbb{C}$-groupe réductif.

b) $\mathrm{Lie}(\Gamma)$ est réductive, Γ a un nombre fini de composantes connexes et la composante neutre du centre de Γ est de la forme $(\mathbb{C}^*)^n$.

De plus, a) définit une équivalence de la catégorie de $\mathbb{C}$-groupes réductif avec celle des groupes de Lie complexes réductifs.

On démontre également que si G est un $\mathbb{C}$-groupe réductif et K un sous-groupe compact maximal de $G(\mathbb{C})$, l'inclusion

$$K \longrightarrow G(\mathbb{C})$$

induit un isomorphisme ("existence de formes compactes")

$$(\widetilde{K})_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} G .$$

L'application

$$K \times \mathrm{Lie}(K) \longrightarrow G(\mathbb{C})$$

$$(k,m) \longmapsto k.\exp(im)$$

est bijective : c'est la décomposition de Cartan. Voici quelques unes de ses propriétés :

$$\overline{k \exp(im)} = k \exp(-im)$$

$$(k \exp(im))^{-1} = \exp(-im)\, k^{-1}$$

$$k \exp(im)\, k^{-1} \in \exp(i \,\mathrm{Lie}(k))$$

Ici, $x \longmapsto \bar{x}$ désigne la conjugaison de $G(\mathbb{C})$ définissant K .

§ 1. CATEGORIES TANNAKIENNES A LIEN REDUCTIF CONNEXE

1.1. Classification des catégories ind-tannakiennes.

1.1.1. Soient A un anneau, $S = \mathrm{Spec}(A)$. Il s'agit de déterminer l'ensemble $IT(A)$ des classes d'équivalence de catégories ind-tannakiennes sur A (III 1.1) dont le lien est localement défini par un schéma en groupes réductif (0.1.1). D'après le théorème de structure III 2.3.2, ceci se ramène au problème de déterminer l'ensemble des classes d'équivalence de gerbes sur S (pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte) qui localement sont du type $\mathrm{TORS}(G)$, où G est un schéma en groupes réductif.

Voici comment on procède : on détermine d'abord l'ensemble $L(A)$ des classes d'isomorphisme de liens définis localement par des schémas en groupes réductifs (ce qui sera fait en 1.1.2), puis pour chaque lien L on explicite l'ensemble $H^2(L)$ des

classes d'équivalence de L-gerbes, en distinguant la partie $H^2(L)'$ correspondant aux L-gerbes neutres (voir 1.1.3).

1.1.2. D'après la classification des groupes réductifs, tout lien sur S localement défini par un groupe réductif est localement isomorphe avec un S-groupe réductif déployable (0.1.2) unique à isomorphisme près. Comme on connaît bien la classification des groupes réductifs déployables (SGA 4), il reste à déterminer pour chaque groupe déployable G, l'ensemble des classes d'isomorphisme de liens localement isomorphes à G ; celui-ci, par des raisonnements standard (voir GIRAUD [1]), est en correspondance biunivoque avec l'ensemble

$$H^1(S,\underline{Aut}(lien(G))) = H^1(S,\underline{Autext}(G)) .$$

On a vu en 0.1.3.2 que le faisceau $\underline{Autext}(G)$ est représentable par un S-groupe constant E. Si on choisit un épinglage de G (loc.cit.), celui-ci définit une section du morphisme

$$\underline{Aut}(G) \longrightarrow \underline{Autext}(G) ,$$

qui identifie E au groupe des automorphismes du groupe G qui respectent l'épinglage. Ceci montre qu'un lien L localement isomorphe à G est représentable par un groupe quasi-déployé G_L, unique à isomorphisme près (0.1.3.3)

$$L = lien(G_L) .$$

En conclusion, la correspondance $G \longmapsto lien(G)$ définit une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphisme de S-groupes quasi-déployés sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de liens réductifs (i.e. localement définis par un schéma en groupes réductif) sur S.

1.1.3. Soit G un S-groupe quasi-déployé ; il est localement isomorphe à un S-groupe épinglé G_o et correspond à un torseur P sous $\underline{Autext}(G_o)$ $(= \underline{O}(G_o))$.

Il faut calculer l'ensemble $H^2(S,G)$, muni de sa partie $H^2(S,G)'$. Or, si $Z = \underline{Cent}(G)$, on sait que $H^2(S,Z)$ agit sur l'ensemble $H^2(S,G)$ en en faisant un

torseur, donc l'application $H^2(S,Z)$-équivariante

$$H^2(S,Z) \longrightarrow H^2(S,G)$$

définie par la classe de la gerbe TORS(G) est bijective. D'autre part, par cette bijection, la partie $H^2(S,G)'$ de $H^2(S,G)$ correspond à l'image de l'application cobord (image notée $H^2(S,Z)'$)

$$H^1(S,\underline{Int}(G)) \longrightarrow H^2(S,Z)$$

déduite de la suite exacte

$$1 \longrightarrow Z \longrightarrow G \longrightarrow \underline{Int}(G) \longrightarrow 1 .$$

Il en résulte que si $G \longrightarrow G'$ est un épimorphisme dont le noyau est central dans G, l'application

$$H^2(S,Z) \longrightarrow H^2(S,Z')$$

induit une <u>surjection</u>

$$H^2(S,Z)' \longrightarrow H^2(S,Z')' \quad .$$

Pour rendre complète cette explicitation de $H^2(S,G)$ muni de $H^2(S,G)'$, il faut expliciter Z en termes de G_o et P. Or, la formule (0.1.3.2)

$$\underline{Cent}(G) \simeq P \times^{\underline{O}(G)} \underline{Cent}(G_o)$$

répond à cette question.

1.2. <u>Explication des tables</u>.

On applique dans ces tables les raisonnements qui précèdent, pour aboutir à une liste des catégories tannakiennes sur $\mathbb{R}$ dont le lien sur $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-groupe simple, mais non nécessairement simplement connexe.

1.2.1. <u>Table</u> I. On y donne la liste des groupes simples déployés, munis de leurs centres, de leurs groupes d'automorphismes extérieurs et des actions correspondantes de ceux-ci sur les centres. Cette dernière n'est explicitée que si elle n'est pas

triviale.

Les indices a,s,d ... qu'on a attachés aux symboles usuels A_n, B_n, ... de la classification des groupes simples simplement connexes sont à mettre en rapport avec le centre du groupe, ou bien avec la position dans le centre $\tilde{Z}$ du revêtement universel, du noyau du morphisme $\tilde{Z} \longrightarrow Z$. Ainsi, l'indice a signifie <u>adjoint</u>, l'indice s <u>simplement connexe</u>, l'indice d signifie que si le centre $\tilde{Z}$ est un produit de deux facteurs isomorphes le dit sous-groupe est en position <u>diagonale</u>, l'indice f qu'il est en <u>facteur</u>.

1.2.2. <u>Table</u> II. On donne la liste de groupes quasi-déployés qui sont associés avec chaque groupe déployé. L'exposant qui apparaît dans l'écriture de ces groupes quasi-déployés dénote le degré sur $\mathbb{R}$ du plus petit corps de déploiement. Cet exposant suffit à déterminer la classe d'isomorphisme du groupe ; ceci provient du fait, facilement vérifiable sur la table I, que dans le groupe Γ ($=\underline{\mathrm{Autext}}(G)$) il y a au plus deux classes de conjugaison d'éléments d'ordre 2 (i.e. de morphismes $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) \longrightarrow \Gamma$), chaque fois que G est simple déployé sur $\mathbb{R}$. L'exposant 1 est parfois omis.

Enfin, les groupes quasi-déployés qui sont soulignés sont ceux qui ont le même lien qu'un groupe réel compact.

1.2.3. <u>Table</u> III. Pour chaque groupe quasi-déployé G , on donne le centre $\underline{\mathrm{Cent}}(G)$, le groupe de cohomologie $H = H^2(\mathbb{R},\underline{\mathrm{Cent}}(G))$ et sa partie distinguée H' . Le calcul du centre est fait à l'aide de (0.1.3.2), et les calculs de cohomologie sont toujours faciles. Ceux des H' utilisent 1.1.3 et le résultat suivant de HARDER [1], Lemma 4.2.3 : <u>si G est un $\mathbb{R}$-groupe semi-simple simplement connexe de centre Z , l'application cobord</u>

$$H^1(\mathbb{R},\underline{\mathrm{Int}}(G)) \longrightarrow H^2(\mathbb{R},Z)$$

<u>est surjective</u>. Ceci signifie qu'une catégorie tannakienne sur $\mathbb{R}$ dont le lien est semi-simple simplement connexe, est forcément neutre. On constate par ailleurs sur la table III que les seules catégories tannakiennes sur $\mathbb{R}$ non neutres de lien un

groupe simple correspondent aux groupes quasi-déployés

$^1A_{n,r}$ (i.e. $SL_{n+1}/\mu_{r'}$) si $r,r' = \frac{n+1}{r}$ pairs

$^1D_{n,2}$ (i.e. SO_{2n+1}/μ_2) $n > 4$ impair

$^2D_{n,d}$ $n \geq 4$ pair .

Dans les trois cas, $H^2(\mathbb{R},Z) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et la classe de la catégorie tannakienne non neutre est 1. On peut constater pour finir, que des trois groupes, $^1A_{n,r}$ est le seul à avoir le même lien qu'un groupe compact (cf. table II).

Enfin, le groupe E qui apparaît dans la table III est l'unique extension non triviale de μ_2 par μ_2 (sur $\mathbb{R}$). Il peut être aussi caractérisé comme la restriction à la Weil de $\mu_{2,\mathbb{C}}$

$$E = \prod_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \mu_{2,\mathbb{C}} \quad ;$$

ceci prouve qu'on a

$$H^i(\mathbb{R},E) \simeq H^i(\mathbb{C},\mu_2) = 0 \qquad \text{pour} \quad i > 0 .$$

1.3. Tables.

TABLE I : GROUPES DEPLOYES SIMPLES.

G	Cent(G)		Γ = Autext(G)	
$A_{n,r}$ $n\geq 1$, $r \mid (n+1)$	μ_r		0 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$n = 1$ $n > 1$
$B_{n,i}$ $n\geq 2$, $i = a,s$	0 μ_2	$i = a$ $i = s$	0	
$C_{n,i}$ $n\geq 3$, $i = a,s$	0 μ_2	$i = a$ $i = s$	0	
$D_{4,i}$ $i = a,s,d$	0 $(\mu_2)^2$ μ_2	$i = a$ $i = s$ $i = d$	$\mathfrak{S}_3$ $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$i = a,s$ $i = d$
$D_{n,i}$ $n>4$ impair, $i = a,s,2$	0 μ_4 μ_2	$i = a$ $i = s$ $i = 2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	
$D_{n,i}$ $n>4$ pair , $i = a,s,d,f$	0 $(\mu_2)^2$ μ_2	$i = a$ $i = s$ $i = d,f$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 0	$i = a,s,d$ $i = f$
$E_{n,i}$ $n = 6,7$, $i = a,s$	0 μ_3 μ_2	$i = a$ $n = 6, i = s$ $n = 7, i = s$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 0	$n = 6$ $n = 7$
E_8, F_4, G_2	0		0	

Le groupe Γ agit dans Cent(G) :

a) par $x \longmapsto -x$ pour $A_{n,i}, D_{n,i}$ ($n>4$ impair), $E_{6,s}$

b) par la symétrie canonique $(x,y) \longmapsto (y,x)$ pour $D_{n,s}$ ($n>4$ pair)

c) en permutant les éléments d'ordre 2 pour $D_{4,s}$.

TABLE II : GROUPES QUASIDEPLOYES SIMPLES SUR $\mathbb{R}$.

Groupe de Chevalley	Formes quasi-déployées sur $\mathbb{R}$	Groupe de Chevalley	Formes quasi-déployées sur $\mathbb{R}$
$A_{l,r}$	$\underline{A_{l,r}}$	$D_{n,i}$ $n>4$ pair, $i=a,s,d$	${}^{1}\underline{D_{n,i}}$ ${}^{2}D_{n,i}$
$A_{n,r}$ $n>1$	${}^{1}A_{n,r}$ $\underline{{}^{2}A_{n,r}}$	$D_{n,f}$ $n>4$ pair	$\underline{D_{n,f}}$
$B_{n,i}$ $n\geq 2$	$\underline{B_{n,i}}$	$E_{6,i}$	${}^{1}E_{6,i}$ $\underline{{}^{2}E_{6,i}}$
$C_{n,i}$ $n\geq 3$	$\underline{C_{n,i}}$	$E_{7,i}$	$\underline{E_{7,i}}$
$D_{4,i}$	${}^{1}\underline{D_{4,i}}$ ${}^{2}D_{4,i}$	E_8, F_4, G_2	$\underline{E_8}, \underline{F_4}, \underline{G_2}$
$D_{n,i}$ $n>4$ impair	${}^{1}D_{n,i}$ $\underline{{}^{2}D_{n,i}}$		

TABLE III.

G	$\underline{\text{Cent}}(G)$	$H = H^2(\mathbb{R}, \underline{\text{Cent}}\ G)$	$H^2(\mathbb{R}, \underline{\text{Cent}}\ G)'$
${}^1A_{n,r}$ $n\geq 1$	μ_r	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ r pair 0 r impair	0 $\frac{n+1}{r} = r'$ pair H r' impair
${}^2A_{n,r}$ $n\geq 2$	$\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ r pair 0 r impair	H
$B_{n,i}$ $C_{n,i}$	μ_2 i=s 0 i=a	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ i=s 0 i=a	H
${}^pD_{4,i}$ (p=1,2)	0 i=a μ_2 i=d $(\mu_2)^2$ i=s , p=1 E(*) i=s , p=2	0 i=a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ i=d $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ i=s , p=1 0 i=s , p=2	H i=a,s (i=d ; p=1) 0 (i=d ; p=2)
${}^pD_{n,i}$ (p=1,2 ; n>4 impair)	0 i=a μ_2 i=2 μ_4 i=s , p=1 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ i=s , p=2	0 i=a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ i=2,s	H i=a,s (i=2 ; p=2) 0 (i=2 ; p=1)
${}^pD_{n,i}$ (p=1,2 ; n>4 pair)	0 i=a μ_2 i=d,f $(\mu_2)^2$ i=s , p=1 E(*) i=s , p=2	0 i=a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ i=d,f $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ i=s , p=1 0 i=s , p=2	H i=a,s,f (i=d ; p=1) 0 (i=d ; p=2)
${}^pE_{6,i}$ (p=1,2)	0 i=a μ_3 i=s , p=1 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ i=s , p=2	0	0
$E_{7,i}$	0 i=a μ_2 i=s	0 i=a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ i=s	H
E_8, F_4, G_2	0	0	0

(*) Voir 1.2.3 pour la définition de ce groupe.

§ 2. POLARISATIONS : CAS HOMOGENE

2.1. Formes bilinéaires.

2.1.0. Dans ce qui suit, $\underline{C}$ désigne une catégorie tannakienne sur un corps k (III 3.2.1), dont les objets seront notés $V,W,\ldots$ Toutes les démonstrations sont faciles et sont en général omises. Presque toutes les notions présentées dans ce numéro sont valables dans le contexte plus général des $\otimes$-catégories rigides (I 5.1.1) et demandent des preuves à l'aide de diagrammes plus ou moins évidents ; dans notre cas, on peut se ramener, à l'aide d'un foncteur fibre, à des assertions relatives à des espaces vectoriels de rang fini sur un corps. Aussi on se permettra d'écrire des formules comportant des "éléments" des objets de $\underline{C}$.

Voici enfin une convention de langage, qui sera utile dans la suite : si

$$A \underset{c_2}{\overset{c_1}{\rightrightarrows}} B$$

est un diagramme d'isomorphismes dans une catégorie, on dira que la différence de c_1,c_2 en A (resp. B) est $c_2^{-1}c_1$ (resp. $c_2c_1^{-1}$).

2.1.1. Soient T un objet inversible de $\underline{C}$ (I 2.5), V un objet de $\underline{C}$. Une <u>forme bilinéaire sur</u> V <u>à valeurs dans</u> T est un morphisme $\varphi : V \otimes V \longrightarrow T$. On a un diagramme de bijections

$$\text{(2.1.1.1)} \qquad \mathrm{Hom}(V \otimes V,T) \rightrightarrows \mathrm{Hom}(V,\check{V} \otimes T)$$

$$\varphi \mapsto \begin{matrix} \varphi^{\sim} \\ {}^{\sim}\varphi \end{matrix} ,$$

où $\varphi^{\sim}$, ${}^{\sim}\varphi$ sont définis par les formules

$$\varphi^{\sim}(x)(y) = \varphi(x \otimes y)$$

$${}^{\sim}\varphi(x)(y) = \varphi(y \otimes x) .$$

Il en résulte aussitôt que la différence du couple d'applications précédent en $\mathrm{Hom}(V \otimes V,T)$ est induite par la symétrie canonique de $V \otimes V$ et que cette

différence en $\mathrm{Hom}(V,\check{V}\otimes T)$ est donnée par l'application

$$\mathrm{Hom}(V,\check{V}\otimes T) \longrightarrow \mathrm{Hom}(V,\check{V}\otimes T)$$

$$\lambda \longmapsto ({}^t\lambda)\otimes \mathrm{id}_T$$

moyennant l'identification $V \simeq (\check{V}\otimes T)^{\check{}}\otimes T$. En particulier, si φ est une forme bilinéaire sur V à valeurs dans T , $\varphi^{\sim}$ est un isomorphisme si et seulement si ${}^{\sim}\varphi$ est un isomorphisme ; on dit dans ce cas que φ est une forme bilinéaire non-dégénérée.

2.1.2. Soit $\varphi : V\otimes V \longrightarrow T$ une forme bilinéaire non dégénérée ; on a un diagramme d'isomorphismes

(2.1.2.1) $$V \underset{{}^{\sim}\varphi}{\overset{\varphi^{\sim}}{\rightrightarrows}} \check{V}\otimes T ,$$

dont la différence $({}^{\sim}\varphi)^{-1}\circ\varphi^{\sim}$ en V est notée ε_φ et appelée la parité de φ :

(2.1.2.2) $$\varphi(x,y) = \varphi(y,\varepsilon_\varphi x) \quad .$$

Une conséquence immédiate de cette formule est que l'automorphisme ε_φ de V respecte la forme bilinéaire φ

(2.1.2.3) $$\varphi(x,y) = \varphi(\varepsilon_\varphi x,\varepsilon_\varphi y) \quad .$$

2.1.2.1. Le choix de φ détermine également un couple d'isomorphismes

(2.1.2.4) $$\mathrm{End}(V) \underset{}{\overset{}{\rightrightarrows}} \mathrm{Hom}(V\otimes V,T)$$

$$u \longmapsto \begin{matrix}\varphi\circ(u\otimes \mathrm{id}_V)\\ \varphi\circ(\mathrm{id}_V\otimes u)\end{matrix} ,$$

dont la différence en $\mathrm{End}(V)$ est une bijection

$$\mathrm{End}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(V) .$$

On notera u^φ l'image par cette bijection de $u\in\mathrm{End}(V)$; par définition, on a

(2.1.2.5) $$\varphi(ux,y) = \varphi(x,u^{\varphi}y) \ .$$

On appelle u^{φ} le <u>transposé</u> ou <u>adjoint</u> de u (relativement à φ) .

En composant (2.1.1.1) et (2.1.2.4) on obtient encore un couple

(2.1.2.6) $$\mathrm{End}(V) \rightrightarrows \mathrm{Hom}(V,\check{V} \otimes T)$$

$$u \longmapsto \begin{matrix} \widetilde{\varphi} \circ u \\ \widetilde{\varphi} \circ u \end{matrix} ,$$

dont la différence

$$\mathrm{End}(V) \longrightarrow \mathrm{End}(V)$$

envoie u dans un endomorphisme de V , noté u^{s} ; par définition on a

(2.1.2.7) $$\varphi(y,u^{s}(x)) = \varphi(u(x),y) \ .$$

2.1.2.2. Les formules suivantes se prouvent facilement :

(2.1.2.8) $$\begin{cases} (uv)^{\varphi} = v^{\varphi} u^{\varphi} \\ (id_V)^{\varphi} = id_V \end{cases}$$

(2.1.2.9) $$(u^{\varphi})^{\varphi} = \varepsilon_{\varphi} u \varepsilon_{\varphi}^{-1}$$

(2.1.2.10) $$(\varepsilon_{\varphi})^{\varphi} = \varepsilon_{\varphi}^{-1}$$

(2.1.2.11) $$u^{s} = \varepsilon_{\varphi} \circ u \ ;$$

bien entendu, $u \longmapsto u^{\varphi}$ est k-linéaire.

2.1.3. Si $\varphi : V \otimes V \longrightarrow T$ est une forme bilinéaire non dégénérée, toute autre forme bilinéaire non dégénérée $\varphi : V \otimes V \longrightarrow T$ est obtenue comme

$$\psi = \varphi \circ (\alpha \otimes id_V) = \varphi \circ (id_V \otimes \alpha^{\varphi}) \ ,$$

où $\alpha \in \mathrm{Aut}(V)$ est uniquement déterminé. Si $u \in \mathrm{End}(V)$, on a

(2.1.3.1) $$u^{\psi} = (\alpha\, u\, \alpha^{-1})^{\varphi} .$$

La parité de ψ est donnée par

(2.1.3.2) $$\varepsilon_{\psi} = (\alpha^{\varphi})^{-1}\, \varepsilon_{\varphi}\alpha .$$

En particulier, l'application $\alpha \longmapsto \varphi \circ (\alpha \otimes id_V)$, identifie l'ensemble des formes bilinéaires non dégénérées sur V à valeurs dans T ayant même parité que φ à l'ensemble des automorphismes $\alpha \in Aut(V)$ vérifiant

$$\alpha^{\varphi}\, \varepsilon_{\varphi} = \varepsilon_{\varphi}\alpha ;$$

si ε_{φ} est dans le centre de $Aut(V)$, cette condition se réduit à

$$\alpha^{\varphi} = \alpha .$$

2.1.4. Soit V_1 (resp. V_2) un objet de $\underline{C}$ muni d'une forme bilinéaire non dégénérée φ_1 (resp. φ_2) à valeurs dans T. On a des bijections

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(V_1,V_2) & \xrightarrow{\sim} & \\ & & \mathrm{Hom}(V_1 \otimes V_2, T) \\ \mathrm{Hom}(V_2,V_1) & \xrightarrow{\sim} & \end{array}$$

qui à $u : V_1 \longrightarrow V_2$ (resp. $v : V_2 \longrightarrow V_1$) associe le morphisme $\varphi_2 \circ (u \otimes id_{V_2})$ (resp. $\varphi_1 \circ (id_{V_1} \otimes v)$). Si

$$\mathrm{Hom}(V_1,V_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V_2,V_1)$$

est la bijection qui rend le triangle précédent commutatif, on note $u^{(\varphi_1,\varphi_2)}$ l'image de u par cette application ; par définition, on a la formule

(2.1.4.1) $$\varphi_1(x, u^{(\varphi_1,\varphi_2)}(y)) = \varphi_2(u(x),y) .$$

On vérifie facilement la formule

(2.1.4.2) $$(u^{(\varphi_1,\varphi_2)})^{(\varphi_2,\varphi_1)} = \varepsilon_{\varphi_2}\, u\, \varepsilon_{\varphi_1}^{-1}$$

2.1.4.1. Si V_3 est un autre objet de $\underline{C}$ muni d'une forme bilinéaire non dégénérée $\varphi_3 : V_3 \otimes V_3 \longrightarrow T$, et si $u : V_1 \longrightarrow V_2$, $v : V_2 \longrightarrow V_3$, on a

$$(2.1.4.3) \qquad (v\,u)^{(\varphi_1,\varphi_3)} = u^{(\varphi_1,\varphi_2)} \circ v^{(\varphi_2,\varphi_3)} .$$

2.1.5. Soit $\varphi : V \otimes V \longrightarrow T$ une forme bilinéaire non dégénérée. On définit une forme bilinéaire non dégénérée $\check{\varphi} : \check{V} \otimes \check{V} \longrightarrow \check{T}$, en posant

$$(\check{\varphi})^{\sim} = (\varphi^{\sim})^{\vee} .$$

On vérifie facilement que

$$^{\sim}(\check{\varphi}) = (^{\sim}\varphi)^{\vee} ,$$

d'où

$$(2.1.5.1) \qquad \epsilon_{\check{\varphi}} = (\epsilon_{\varphi})^{\vee} .$$

On peut aussi définir $\check{\varphi}$ comme étant la forme définie par transport au moyen de $\varphi^{\sim}$ (ou de $^{\sim}\varphi$) de la forme φ : ceci signifie qu'on a le triangle commutatif

$$(2.1.5.2) \qquad \begin{array}{ccc} V \otimes V & \xrightarrow{\varphi^{\sim} \otimes \varphi^{\sim}} & \check{V} \otimes \check{V} \otimes T^{\otimes 2} \\ & {\scriptstyle \varphi} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \check{\varphi} \otimes \mathrm{id}_{T^{\otimes 2}}} & \\ & T & \end{array}$$

moyennant des isomorphismes canoniques évidents, par exemple

$$T \simeq \check{T} \otimes T^{\otimes 2} .$$

2.1.5.1. Soient $(V_i)_{i\in I}$ une famille finie d'objets de $\underline{C}$, $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'objets inversibles de $\underline{C}$, $(\varphi_i)_{i\in I}$ des formes bilinéaires sur les V_i à valeurs dans les T_i ($i \in I$). On définit une forme bilinéaire φ, notée $\bigotimes_{i\in I} \varphi_i$, sur l'objet $V = \bigotimes_{i\in I} V_i$ à valeurs dans $T = \bigotimes_{i\in I} T_i$ par

$$\varphi : V \otimes V \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{I \amalg I} V_i \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{I} (V_i \otimes V_i) \xrightarrow{\otimes \varphi_i} T .$$

On vérifie qu'on a

$$\varphi^{\sim} = \otimes\, \varphi_i^{\sim}$$
$$^{\sim}\varphi = \otimes\, {}^{\sim}\varphi_i \quad ;$$

si les φ_i sont non dégénérées, φ aussi, et on a

(2.1.5.3) $$\varepsilon_\varphi = \bigotimes_I \varepsilon_{\varphi_i} \quad ,$$

et si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille d'endomorphismes $u_i \in \mathrm{End}(V_i)$, et on pose $u = \bigotimes_I u_i$, on a (toujours en supposant les φ_i non dégénérées)

(2.1.5.4) $$u^\varphi = \bigotimes_I u_i^{\varphi_i} \quad .$$

2.1.5.2. Soient $(V_i)_{i\in I}$ une famille finie d'objets de $\underline{C}$, T un objet inversible de $\underline{C}$, $(\varphi_i)_{i\in I}$ une famille de formes bilinéaires $\varphi_i : V_i \otimes V_i \longrightarrow T$. Si on note $V = \bigoplus_I V_i$, on définit une forme bilinéaire $\varphi : V \otimes V \longrightarrow T$, noté $\bigoplus_I \varphi_i$, par

$$\varphi : V \otimes V \simeq \bigoplus_{i,j} (V_i \otimes V_j) \longrightarrow \bigoplus_i (V_i \otimes V_i) \xrightarrow{(\varphi_i)} T \quad .$$

On vérifie aussitôt qu'on a

$$\varphi\tilde{} = \oplus \varphi_i\tilde{}$$

$$\tilde{}\varphi = \oplus \tilde{}\varphi_i \quad .$$

Il en résulte que φ est non dégénérée si et seulement si chacune des φ_i $(i \in I)$ l'est, et que dans ce cas

(2.1.5.5) $$\varepsilon_\varphi = \oplus \varepsilon_{\varphi_i} \quad ;$$

si $u \in \mathrm{End}(V)$ est représenté par une famille (u_{ji}), où $u_{ji} : V_i \longrightarrow V_j$, on a que $v = u^\varphi$ est représenté par la famille (v_{ji}) où

(2.1.5.6) $$v_{ji} = (u_{ij})^{(\varphi_j, \varphi_i)} \qquad \text{(voir 2.1.4).}$$

2.1.6. Soit $\varphi : V \otimes V \longrightarrow T$ une forme bilinéaire, et soit W un sous-objet de V. On note φ_W la forme bilinéaire qu'on obtient par restriction de φ à W

$$\varphi_W : W \otimes W \longrightarrow V \otimes V \xrightarrow{\varphi} T \quad .$$

On dit que W est un sous-objet <u>isotrope</u> (resp. <u>totalement isotrope</u>, <u>non isotrope</u>) de V, relativement à φ, si φ_W est dégénérée (resp. nulle, non

dégénérée).

On définit les sous-objets de V orthogonaux à V à gauche et à droite : ${}^{\perp}W$, $W^{\perp}$, par

$$W^{\perp} = \mathrm{Ker}(V \xrightarrow{\varphi^{\sim}} \check{V} \otimes T \longrightarrow \check{W} \otimes T)$$

$${}^{\perp}W = \mathrm{Ker}(V \xrightarrow{{}^{\sim}\varphi} \check{V} \otimes T \longrightarrow \check{W} \otimes T) \quad .$$

Si W est non isotrope, on a des décompositions

$$V = W \oplus W^{\perp} = W \overset{\perp}{\oplus} W \ .$$

Si φ est non dégénérée, on a

$${}^{\perp}W = \varepsilon_{\varphi}(W^{\perp}) \quad ;$$

il en résulte par exemple que si ε_{φ} est dans le centre de $\mathrm{End}(V)$ et si V est semi-simple, on a ${}^{\perp}W = W^{\perp}$.

2.1.7. Soit $\omega : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ un morphisme de catégories tannakiennes. Si $\varphi : V \otimes V \longrightarrow T$ est une forme bilinéaire sur un objet V de $\underline{C}$,

$$\omega(\varphi) : \omega(V) \otimes \omega(V) \longrightarrow \omega(T)$$

est également une forme bilinéaire ; elle est non-dégénérée si et seulement s'il en est ainsi de φ, en effet, on a

$$\omega(\varphi)^{\sim} = \omega(\varphi^{\sim})$$

$${}^{\sim}\omega(\varphi) = \omega({}^{\sim}\varphi) \quad .$$

Il en résulte aussi que

$$\varepsilon_{\omega(\varphi)} = \omega(\varepsilon_{\varphi}) \quad , \tag{2.1.7.1}$$

et que si $u \in \mathrm{End}(V)$

$$\omega(u)^{\omega(\varphi)} = \omega(u^{\varphi}) \ . \tag{2.1.7.2}$$

2.2. Formes sesquilinéaires.

2.2.0. Soit k'/k une extension quadratique, $\lambda \longmapsto \bar{\lambda}$ la conjugaison de k'/k. Si $\underline{C}$ est une catégorie tannakienne sur k, on note $\underline{C}'$ la catégorie tannakienne $\underline{C}_{(k')}$ qu'on obtient par extension des scalaires (III 3.2.4). Rappelons (III 1.2.4) que $\underline{C}'$ est munie de

a) Un $\otimes$-foncteur rigide semi-linéaire

$$\underline{C}' \longrightarrow \underline{C}' \quad , \quad V \longmapsto \bar{V} .$$

b) Un $\otimes$-isomorphisme fonctoriel

$$\mu_V : V \xrightarrow{\sim} \bar{\bar{V}}$$

vérifiant

$$\mu_{\bar{V}} = \overline{\mu_V} .$$

La catégorie $\underline{C}$ peut être reconstituée à $\otimes$-équivalence près à partir de ces données : ses objets sont les couples (V,a_V), où $V \in \text{ob } \underline{C}'$, et $a_V : V \xrightarrow{\sim} \bar{V}$ vérifie

$$\overline{a_V} \circ a_V = \mu_V .$$

On dira qu'un objet V de $\underline{C}'$ est "défini sur k" si on s'est donné un tel a_V, qu'on omettra le plus souvent dans l'écriture en identifiant V et $\bar{V}$.

Enfin, si $V \in \text{ob } \underline{C}'$, on note V_o l'objet de $\underline{C}$ sous-jacent à V ; rappelons que la donnée de V revient à celle de V_o plus le morphisme de k-algèbres $k' \longrightarrow \text{End}(V_o)$.

2.2.1. Soient V un objet de $\underline{C}'$, T un objet inversible de $\underline{C}'$ qui est défini sur k. On a des bijections

(2.2.1.1) $$\text{Hom}(V \otimes \bar{V},T) \rightrightarrows \text{Hom}(V,\check{\bar{V}} \otimes T)$$

$$\varphi \longmapsto {}^{\varphi\sim}_{\sim\varphi} ,$$

où $\varphi^{\sim}$, ${}^{\sim}\varphi$ sont définis par les formules

$$\varphi^{\sim}(x)(y) = \varphi(x \otimes y)$$

$${}^{\sim}\varphi(x)(y) = \bar{\varphi}(y \otimes x) \quad .$$

On notera que l'application $\varphi \longmapsto \varphi^{\sim}$ est k'-linéaire, tandis que $\varphi \longmapsto {}^{\sim}\varphi$ est seulement semi-linéaire. La différence du couple ci-dessus en $\mathrm{Hom}(V, \overset{\vee}{V} \otimes T)$ par exemple, est l'application semi-linéaire

$$\mathrm{Hom}(V, \overset{\vee}{V} \otimes T) \longrightarrow \mathrm{Hom}(V, \overset{\vee}{V} \otimes T)$$

$$\lambda \longmapsto {}^{t}(\bar{\lambda}) \otimes \mathrm{id}_T \quad .$$

Une forme <u>sesquilinéaire</u> sur V à valeurs dans T (relativement au sous-corps k de k') est un morphisme $\varphi : V \otimes \bar{V} \longrightarrow T$. Elle est <u>non-dégénérée</u> si $\varphi^{\sim}$, ou ce qui revient au même ${}^{\sim}\varphi$, est un isomorphisme.

2.2.2. Soit $\varphi : V \otimes \bar{V} \longrightarrow T$ une forme sesquilinéaire non dégénérée ; on a un diagramme d'isomorphismes

$$V \underset{{}^{\sim}\varphi}{\overset{\varphi^{\sim}}{\rightrightarrows}} \overset{\vee}{V} \otimes T \quad .$$

dont la différence en V est notée ε_{φ} et appelée la <u>parité</u> de φ . Par définition, on a

(2.2.2.1) $$\varphi(x,y) = \bar{\varphi}(y, \varepsilon_{\varphi} x)$$

ou plus précisément, en termes de diagrammes

(2.2.2.2)
$$\begin{array}{ccccc} V \otimes \bar{V} & & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & & T \\ \Big\| \wr & & & \nwarrow^{\bar{\varphi}} & \\ \bar{V} \otimes V & \xrightarrow[\mathrm{id}_{\bar{V}} \otimes \varepsilon_{\varphi}]{} & \bar{V} \otimes V & \xrightarrow[\mathrm{id}_{\bar{V}} \otimes \mu_V]{} & \bar{V} \otimes \bar{\bar{V}} \end{array}$$

il résulte aussitôt d'ici que ε_φ respecte la forme φ :

$$\varphi \circ (\varepsilon_\varphi \otimes \bar{\varepsilon}_\varphi) = \varphi \tag{2.2.2.3}$$

2.2.2.1. Le choix de φ détermine également des isomorphismes

$$\mathrm{End}(V) \xrightarrow{\quad} \mathrm{Hom}(V \otimes \bar{V}, T)$$

$$u \longmapsto \begin{matrix} \varphi \circ (u \otimes \mathrm{id}_{\bar{V}}) \\ \varphi \circ (\mathrm{id}_V \otimes \bar{u}) \end{matrix} ,$$

dont la différence en $\mathrm{End}(V)$ est une bijection semilinéaire, notée $u \longmapsto u^\varphi$. Par définition, on a

$$\varphi(ux,y) = \varphi(x,\overline{u^\varphi} y) . \tag{2.2.2.4}$$

2.2.2.2. On prouve facilement le formulaire

$$\begin{cases} (uv)^\varphi = v^\varphi u^\varphi \\ (\mathrm{id}_V)^\varphi = \mathrm{id}_V \end{cases} , \tag{2.2.2.5}$$

$$(u^\varphi)^\varphi = \varepsilon_\varphi u \varepsilon_\varphi^{-1} \tag{2.2.2.6}$$

$$(\varepsilon_\varphi)^\varphi = \varepsilon_\varphi^{-1} . \tag{2.2.2.7}$$

2.2.3. Si $\varphi : V \otimes \bar{V} \longrightarrow T$ est une forme sesquilinéaire non dégénérée, toute autre forme sesquilinéaire non dégénérée $\psi : V \otimes \bar{V} \longrightarrow T$ est obtenue comme

$$\psi = \varphi \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}_{\bar{V}}) = \varphi \circ (\mathrm{id}_V \otimes \overline{\alpha^\varphi}) ,$$

où $\alpha \in \mathrm{Aut}(V)$ est uniquement déterminé. Si $u \in \mathrm{End}(V)$, on a

$$u^\psi = (\alpha\, u\, \alpha^{-1})^\varphi , \tag{2.2.3.1}$$

et la parité de ψ est donnée par

(2.2.3.2) $$\epsilon_{\psi} = (\alpha^{\varphi})^{-1}\, \epsilon_{\varphi}\alpha \quad .$$

L'application $\alpha \longmapsto \varphi \circ (\alpha \otimes id_{\bar{V}})$ identifie l'ensemble des formes sesquilinéaires non dégénérées $V \otimes \bar{V} \longrightarrow T$ ayant parité ϵ_{φ} à l'ensemble des automorphismes $\alpha \in \mathrm{Aut}(V)$ vérifiant

$$\alpha^{\varphi}\, \epsilon_{\varphi} = \epsilon_{\varphi}\alpha \ ,$$

condition qui se réduit à

$$\alpha^{\varphi} = \alpha$$

si ϵ_{φ} est central.

2.2.4. Si V_1, V_2 sont des objets de $\underline{C}'$ munis de formes sesquilinéaires non-dégénérées $\varphi_1 : V_1 \otimes \bar{V}_1 \longrightarrow T$, $\varphi_2 : V_2 \otimes \bar{V}_2 \longrightarrow T$, on définit comme dans 2.1.4, une bijection semi-linéaire

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(V_1,V_2) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(V_2,V_1) \\ u & \longmapsto & u^{(\varphi_1,\varphi_2)} \end{array} \quad .$$

On a

(2.2.4.1) $$(u^{(\varphi_1,\varphi_2)})^{(\varphi_2,\varphi_1)} = \epsilon_{\varphi_2}\, u\, \epsilon_{\varphi_1}^{-1} \quad .$$

Enfin, si V_3 est un troisième objet de $\underline{C}'$ muni d'une forme sesquilinéaire $\varphi_3 : V_3 \otimes V_3 \longrightarrow T$, et si $u : V_1 \longrightarrow V_2$, $v : V_2 \longrightarrow V_3$. On a

(2.2.4.2) $$(vu)^{(\varphi_1,\varphi_3)} = u^{(\varphi_1,\varphi_2)} \circ v^{(\varphi_2,\varphi_3)} \quad .$$

2.2.5. On définit comme dans 2.1.5 les diverses opérations ^{v}, $\otimes$, $\oplus$ pour des formes sesquilinéaires. Toutes les assertions faites en 2.1.5 sont valables dans le contexte des formes sesquilinéaires.

De plus, dans ce cas, on peut définir la forme sesquilinéaire <u>conjuguée</u> d'une forme sesquilinéaire $\varphi : V \otimes \bar{V} \longrightarrow T$, à savoir

$$\bar{\varphi} : \bar{V} \otimes V \longrightarrow T .$$

On a, si φ est non-dégénérée,

(2.2.5.1) $$\varepsilon_{\bar{\varphi}} = \overline{\varepsilon_{\varphi}}$$

Si $u \in End(V)$

(2.2.5.2) $$(\bar{u})^{\bar{\varphi}} = \overline{(u^{\varphi})} .$$

2.2.6. Comme dans 2.1.6, on définit les notions de sous-objets isotropes, totalement isotropes, non isotropes, et la notion de sous-objets orthogonaux à gauche et à droite d'un sous-objet donné.

2.3. Formes de Weil.

2.3.0. On fixe un corps K muni d'un morphisme de corps $K \longrightarrow \mathbb{R}$, par lequel on identifie K à un sous-corps de $\mathbb{R}$. $\underline{C}$ dénote une catégorie tannakienne sur K ; comme d'habitude, $\underline{C}_{\mathbb{R}}$ désignera la catégorie tannakienne sur $\mathbb{R}$ obtenue par extension des scalaires. Si $V \in ob\ \underline{C}$, on posera

$$V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \otimes_K V .$$

2.3.1. Soient V un objet de $\underline{C}$, T un objet inversible de $\underline{C}$. On dit qu'une forme bilinéaire non dégénérée $\varphi : V \otimes V \longrightarrow T$ est une <u>forme de Weil</u> si sa parité ε_{φ} est dans le centre de $End(V)$ et si pour tout $u \in End(V)$, $u \neq 0$, on a

(2.3.1.1) $$Tr(u\, u^{\varphi}) > 0 .$$

Il en résulte que la forme bilinéaire sur le K-vectoriel $End(V)$,

$$(u,v) \longmapsto Tr(u\, v^{\varphi})$$

est symétrique définie positive.

Si $\varphi : V \otimes V \longrightarrow T$, $\psi : W \otimes W \longrightarrow T$ sont des formes de Weil, on dit que

φ et ψ sont compatibles si $\varphi \oplus \psi$ est une forme de Weil ; il revient au même de dire que pour tout morphisme $u : V \longrightarrow W$, $u \neq 0$, on a

$$\mathrm{Tr}(u\, u^{(\varphi,\psi)}) > 0 \ .$$

La relation de compatibilité est symétrique et réflexive, mais elle n'est pas transitive (voir, toutefois, 2.3.3).

2.3.1.1. Si $\varphi : V \otimes V \longrightarrow T$ est une forme bilinéaire non dégénérée, et on note $\varphi_{\mathbb{R}} : V_{\mathbb{R}} \otimes V_{\mathbb{R}} \longrightarrow T_{\mathbb{R}}$ la forme obtenue par extension des scalaires de K à $\mathbb{R}$, φ est une forme de Weil si et seulement si $\varphi_{\mathbb{R}}$ est une forme de Weil. De même, si $\varphi : V \otimes V \longrightarrow T$, $\psi : W \otimes W \longrightarrow T$ sont des formes de Weil, elles sont compatibles si et seulement si $\varphi_{\mathbb{R}}$, $\psi_{\mathbb{R}}$ le sont. Cela résulte de ce que K est dense dans $\mathbb{R}$, et de l'isomorphisme canonique (III (3.2.4.2))

$$\mathrm{Hom}(V_{\mathbb{R}},W_{\mathbb{R}}) \simeq \mathbb{R} \otimes_K \mathrm{Hom}(V,W) \ .$$

2.3.2. Soit $\varphi : V \otimes V \longrightarrow T$ une forme de Weil. On pose $\varepsilon = \varepsilon_\varphi$ et $A = \mathrm{End}(V)$.

2.3.2.1. Proposition. 1) La K-algèbre A est semi-simple.

2) Toute sous-algèbre commutative B de A formée d'éléments symétriques (i.e. vérifiant $u^\varphi = u$), est "totalement réelle" au-dessus du plongement donné $K \longrightarrow \mathbb{R}$, i.e. on a $B \otimes_K \mathbb{R} = \mathbb{R}^r$ en tant que $\mathbb{R}$-algèbre.

3) Si $\alpha \in A$, $\alpha = \alpha^\varphi$, les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) α est un carré dans la sous-$\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{R}[\alpha]$ de $\mathbb{R} \otimes_K A$ engendrée par α .

ii) Si $u \in A$, $\mathrm{Tr}(u^\varphi \alpha u) \geq 0$.

iii) Si $u = u^\varphi$, $\mathrm{Tr}(u^2\alpha) \geq 0$.

iv) Si $u \in K[\alpha]$, $\mathrm{Tr}(u^2\alpha) \geq 0$.

2.3.2.2. Preuve. Pour 1), il faut montrer que A ne possède pas d'idéal à droite

nilpotent non nul. Soit I un tel idéal ; I contient un élément symétrique non nul u (par exemple, si $x \in I$, $x \neq 0$, on a que $xx^{\varphi} \in I$ et $Tr(xx^{\varphi}) > 0$, donc $xx^{\varphi} \neq 0$). Il suffit de prouver qu'un tel u n'est pas nilpotent ; en effet, s'il en était ainsi, on aurait pour un certain n

$$u^{2^n} \neq 0 \qquad u^{2^{n+1}} = 0 \ ,$$

mais $u^{2^n} \neq 0$ entraîne $Tr(u^{2^{n+1}}) > 0$.

Prouvons 2) : on peut supposer, compte tenu de 2.3.1.1, que $K = \mathbb{R}$. Soit B une sous-algèbre commutative de A formée d'éléments symétriques ; si $u \in B$, $u \neq 0$, on a $Tr(u^2) > 0$. On prouve comme dans 1) que B est semi-simple, donc produit de corps. On se ramène ainsi à supposer que B est un corps, et il faut prouver que $B = \mathbb{R}$. En effet, si $B = \mathbb{C}$, il existe $\lambda \in B$ tel que pour tout $u \in B$, on a

$$Tr(u) = \lambda(u + \bar{u}) \ ,$$

et on peut choisir $u \in B$ avec $Tr(u^2) < 0$.

Prouvons 3) : les implications i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ iv) sont évidentes. L'implication iv) $\Rightarrow$ i) suit de 2).

2.3.2.3. Corollaire. L'application $\alpha \longmapsto \varphi \circ (\alpha \otimes id_V)$ induit une bijection de l'ensemble des automorphismes α de V tels que $\alpha^{\varphi} = \alpha$ et que pour $u \neq 0$, $Tr(uu^{\varphi}\alpha) > 0$, sur l'ensemble des formes de Weil $\varphi' : V \otimes V \longrightarrow T$ telles que $\varepsilon_{\varphi'} = \varepsilon$ et compatibles avec φ .

2.3.2.4. Preuve. Soit $\alpha \in Aut(V)$ vérifiant $\alpha^{\varphi} = \alpha$, et posons $\varphi' = \varphi \circ (\alpha \otimes id_V)$. Rappelons (2.1.3) qu'on a

$$\varepsilon_{\varphi'} = \varepsilon_{\varphi} = \varepsilon \ ,$$

et que si $u \in End(V)$,

$$u^{\varphi'} = \alpha^{-1} u^{\varphi} \alpha \ .$$

Par ailleurs, on vérifie facilement qu'on a

$$u^{(\varphi,\varphi')} = u^{\varphi}\alpha \ .$$

Il suffit donc de prouver que la condition

$$\mathrm{Tr}(uu^{(\varphi,\varphi')}) = \mathrm{Tr}(uu^{\varphi}\alpha) > 0 \qquad \text{si } u \neq 0$$

entraîne que φ' est une forme de Weil, i.e.

$$\mathrm{Tr}(u\,\alpha^{-1}\,u^{\varphi}\,\alpha) > 0 \qquad \text{si } u \neq 0 \ ,$$

et quitte à étendre les scalaires, on peut supposer $K = \mathbb{R}$. On a alors, par 3), que α est un carré dans $\mathbb{R}[\alpha]$

$$\alpha = \beta^2 \qquad \beta \in \mathbb{R}[\alpha] \ ,$$

d'où

$$u\,\alpha^{-1}\,u^{\varphi}\,\alpha = (u\beta^{-1})(u\beta^{-1})^{\varphi}$$

$$\mathrm{Tr}(u\,\alpha^{-1}\,u^{\varphi}\,\alpha) > 0 \qquad \text{si } u \neq 0 \ .$$

2.3.3. Proposition. 1) Soient V,W des objets de C, munis d'automorphismes ε, η, T un objet inversible de C et $\varphi, \varphi' : V \otimes V \longrightarrow T$ (resp. $\psi,\psi' : W \otimes W \longrightarrow T$) des formes de Weil compatibles ayant parité ε (resp. η). Alors, φ et ψ sont compatibles si et seulement si φ' et ψ' sont compatibles ; en particulier, la relation de compatibilité pour les formes de Weil $V \otimes V \longrightarrow T$ ayant parité ε, est une relation d'équivalence.

2) Notons $W_{\varepsilon}(V,T)$ l'ensemble quotient par cette relation d'équivalence. Alors, l'application

$$W_{\varepsilon}(V,T) \longrightarrow W_{\varepsilon}(V_{\mathbb{R}},T_{\mathbb{R}})$$

induite par 2.3.1.1 est une bijection.

2.3.3.1. Preuve de 1). Il suffit de prouver que si φ et ψ sont compatibles, alors φ' et ψ sont compatibles. Par 2.3.2.3, il existe $\alpha \in \mathrm{Aut}(V)$ tel que $\alpha^{\varphi} = \alpha$

$$\varphi' = \varphi \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}_V)$$

et pour $u \neq 0$

$$\mathrm{Tr}(\, uu^{\varphi}\alpha\,) > 0 \quad .$$

La condition: φ et ψ sont compatibles, s'écrit

$$\mathrm{Tr}(vv^{(\varphi,\psi)}) > 0 \qquad \text{si} \quad v : V \longrightarrow W \ , \quad v \neq 0 \ .$$

Il faut alors prouver, pour $v : V \longrightarrow W$, $v \neq 0$, que

$$\mathrm{Tr}(vv^{(\varphi',\psi)}) > 0 \ ,$$

ce qui s'écrit encore

$$\mathrm{Tr}(v\alpha^{-1}v^{(\varphi,\psi)}) > 0 \ ;$$

mais, par 2.3.2.1, α est un carré dans $\mathbb{R}[\alpha]$,

$$\alpha = \beta^2 \qquad \beta \in \mathbb{R}[\alpha] \ ,$$

et on conclut aussitôt.

2.3.3.2. Preuve de 2). L'application est injective, par 2.3.1.1. Pour voir qu'elle est surjective, on raisonne comme suit : soit E (resp. E') le sous-espace de $\mathrm{End}(V)$ (resp. $\mathrm{End}(V_{\mathbb{R}})$) des α vérifiant $\alpha^{\varphi} = \alpha$. On a

$$E' = E \otimes_K \mathbb{R} \ ;$$

en outre, il résulte facilement de 2.3.2.3 que les classes d'équivalence de formes de Weil de parité ε sont des parties ouvertes dans E' , et puisque K est dense dans $\mathbb{R}$, chacune d'entre elles contient des formes de Weil définies sur K .

2.3.4. On se propose dans ce numéro de classifier les formes de Weil de parité donnée. Grâce à ce qui précède, on peut supposer dans ce qui suit que $K = \mathbb{R}$. On supposera aussi que $\underline{C}$ est semi-simple. Cette hypothèse est justifiée par 2.4.1.1.

2.3.4.1. Proposition. Soit $\varphi : V \otimes V \longrightarrow T$ une forme de Weil. Tout sous-objet W de V est non isotrope pour φ , et on a donc $V = W \oplus W^{\perp}$, $\varphi = \varphi_W \oplus \varphi_{W^{\perp}}$.

2.3.4.2. Preuve. Il faut montrer que le sous-objet $W' = W \cap W^{\perp}$ est nul.

Soit $p : V \longrightarrow V$ un projecteur ayant W' comme image ; on voit aussitôt, puisque $\varphi_{W'} = 0$, que $p\varphi p = 0$, donc $Tr(p\varphi p) = 0$ et $W' = 0$.

2.3.4.3. Proposition. On reprend les notations de 2.3.4.1. Soit $\varepsilon \in Aut(V)$; alors, l'ensemble $W_{\varepsilon}(V,T)$ est fini. S'il est non vide, il a exactement 2^r éléments, où r est le nombre de composantes isotypiques de V.

2.3.4.4. Preuve. Soit $V = \oplus V_i$ la décomposition de V en somme de ses composantes isotypiques ; on a $Hom(V_i,V_j) = 0$ et il résulte de 2.3.1 et 2.3.4.1 qu'on a, si $\varepsilon = \oplus \varepsilon_i$

$$W_{\varepsilon}(V,T) = \prod W_{\varepsilon_i}(V_i,T) \quad .$$

D'autre part, il est clair que si V est isotypique, le nombre des classes d'équivalence de formes de Weil est le même pour V ou pour un de ses facteurs simples (on remarquera que, ε étant central, il est diagonalisable dans toute décomposition de V en produit de facteurs simples). On se ramène ainsi à prouver que si V est simple, et $W_{\varepsilon}(V,T) \neq \emptyset$, il a exactement deux éléments. Cela résulte du lemme facile:

2.3.4.5. Lemme. Soit A un corps de rang fini sur $\mathbb{R}$ muni d'une anti-involution $u \longmapsto u'$ et d'une forme linéaire $Tr : A \longrightarrow \mathbb{R}$, vérifiant $Tr(uv) = Tr(vu)$, et $Tr(uu') > 0$ chaque fois que $u \neq 0$. Alors, on a

$$\mathbb{R} = \{u \in A \ / \ u = u'\} \ .$$

2.3.5. Soient $\underline{C}$ une catégorie tannakienne sur $\mathbb{R}$, T un objet inversible de $\underline{C}$. Rappelons que $\underline{C}_{\mathbb{C}}$ dénote la catégorie tannakienne sur $\mathbb{C}$ qu'on obtient par extension des scalaires de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$.

Soit V un objet de $\underline{C}_{\mathbb{C}}$. On dit qu'une forme sesquilinéaire non dégénérée

$\varphi : V \otimes \bar{V} \longrightarrow T_{\mathbb{C}}$ est une forme de Weil si sa parité ϵ_φ est dans le centre de $End(V)$ et si pour tout $u \in End(V)$, $u \neq 0$, on a

(2.3.5.1) $$Tr(uu^{\varphi}) > 0 \quad .$$

Il en résulte que la forme sesquilinéaire sur $End(V)$

$$(u,v) \longmapsto Tr(uv^{\varphi})$$

est hermitienne définie positive.

Si $\varphi : V \otimes \bar{V} \longrightarrow T_{\mathbb{C}}$, $\psi : W \otimes \bar{W} \longrightarrow T_{\mathbb{C}}$ sont des formes de Weil, on dit que φ et ψ sont compatibles si $\varphi \oplus \psi$ est une forme de Weil, ou ce qui revient au même, si pour tout $u : V \longrightarrow W$, $u \neq 0$, on a

$$Tr(uu^{(\varphi,\psi)}) > 0 \quad .$$

2.3.5.1. En s'inspirant des numéros précédents, on prouve facilement

1) Si $\varphi : V \otimes \bar{V} \longrightarrow T_{\mathbb{C}}$ est une forme de Weil, la $\mathbb{C}$-algèbre $End(V)$ est semi-simple.

2) Si $\epsilon \in Aut(V)$, la relation de compatibilité pour les formes de Weil de parité ϵ est une relation d'équivalence.

3) Si V est semi-simple et muni d'une forme de Weil φ , tout sous-objet de V est non isotrope pour φ .

4) Si $\epsilon \in Aut(V)$, et V est semi-simple, l'ensemble des classes d'équivalence de formes de Weil a 0 ou 2^r éléments, où r est le nombre des composantes isotypiques de V .

2.3.5.2. Soient V un objet de $\underline{C}$, $\varphi : V \otimes V \longrightarrow T$ une forme de Weil ayant parité $\epsilon_\varphi = \epsilon$. On définit une forme de Weil sur $V_{\mathbb{C}} \in ob\ \underline{C}_{\mathbb{C}}$ par

$$\psi : V_{\mathbb{C}} \otimes \bar{V}_{\mathbb{C}} \longrightarrow V_{\mathbb{C}} \otimes V_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\varphi_{\mathbb{C}}} T_{\mathbb{C}} \quad .$$

On vérifie aussitôt que ψ est une forme de Weil, qu'elle est compatible

avec sa conjuguée $\bar{\psi} : \bar{V}_{\mathbb{C}} \otimes \bar{V}_{\mathbb{C}} \longrightarrow T_{\mathbb{C}}$, qu'on a $\varepsilon_{\psi} = (\varepsilon)_{\mathbb{C}}$ et que l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{End}(V_{\mathbb{C}}) &\longrightarrow \mathrm{End}(V_{\mathbb{C}}) \\ u &\longmapsto u^{\psi} \quad , \end{aligned}$$

est l'extension semi-linéaire canonique de

$$\begin{aligned} \mathrm{End}(V) &\longrightarrow \mathrm{End}(V) \\ u &\longmapsto u^{\varphi} \quad , \end{aligned}$$

lorsqu'on fait l'identification (III (3.2.4.2))

$$\mathrm{End}(V_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{End}(V) \ .$$

2.3.5.3. Soit V un objet de $\underline{C}_{\mathbb{C}}$, et notons V_o l'objet de $\underline{C}$ qu'il définit, $i_V \in \mathrm{Aut}(V_o)$ l'automorphisme de carré $-\mathrm{id}_{V_o}$ qui définit V_o (on suppose qu'on a choisi une racine carrée de -1 dans $\mathbb{C}$). Il est facile de voir que <u>la donnée d'une forme sesquilinéaire non dégénérée</u> $\varphi : V \otimes \bar{V} \longrightarrow T_{\mathbb{C}}$ <u>revient à celle d'une forme bilinéaire non dégénérée</u> $\varphi_o : V_o \otimes V_o \longrightarrow T$ <u>vérifiant</u>

$$\varphi_o \circ (i_V \otimes i_V) = \varphi_o \ .$$

<u>Si</u> φ <u>est de Weil, la forme</u> φ_o <u>est de Weil si et seulement si</u> φ <u>et</u> $\bar{\varphi}$ <u>sont compatibles</u>.

2.4. Polarisations.

2.4.0. K désigne un corps, muni d'un morphisme de corps $K \longrightarrow \mathbb{R}$, $\underline{C}$ une catégorie tannakienne sur K .

2.4.1. Soit ε un $\otimes$-automorphisme du foncteur $\mathrm{id}_{\underline{C}}$; une ε-<u>polarisation</u> (homogène) π sur $\underline{C}$ consiste en la donnée pour tout objet V de $\underline{C}$ d'une classe d'équivalence $\pi(V)$ de formes de Weil $V \otimes V \longrightarrow \underline{1}$ de parité ε_V , vérifiant la condition

PH) Si $V,W \in \text{ob } \underline{C}$, $\varphi \in \pi(V)$, $\psi \in \pi(W)$, alors

$$\varphi \oplus \psi \in \pi\ (V \oplus W)$$

$$\varphi \otimes \psi \in \pi\ (V \otimes W)\ .$$

Si $\varphi \in \pi(V)$, on dira que φ est une forme positive pour la polarisation π ; le $\otimes$-automorphisme ϵ s'appelle la parité de π , et sera noté $\epsilon(\pi)$. L'ensemble des polarisations de $\underline{C}$ sera noté $\text{Pol}(\underline{C})$, et l'application "parité" sera notée ϵ :

$$\text{Pol}(\underline{C}) \xrightarrow{\epsilon} \text{Aut}^{\otimes}(\text{id}_{\underline{C}})\ .$$

Si $\epsilon \in \text{Aut}^{\otimes}(\text{id}_{\underline{C}})$, l'ensemble des ϵ-polarisations est noté $\text{Pol}_{\epsilon}(\underline{C})$. Une polarisation π telle que $\epsilon(\pi) = \text{id}$ sera appelée une polarisation symétrique ; en effet, π est symétrique si et seulement si les formes positives pour π sont des formes bilinéaires symétriques.

2.4.1.1. Proposition. Soit π une polarisation pour $\underline{C}$. Alors,

1) La catégorie $\underline{C}$ est semi-simple.
2) Si $\varphi \in \pi(V)$, alors $\check{\varphi} \in \pi(\check{V})$
3) Si $\varphi \in \pi(V)$ et W est un sous-objet de V , $\varphi_W \in \pi\ (W)$.

2.4.1.2. Preuve. Pour prouver 1), on montrera que tout objet V de $\underline{C}$ est somme de sous-objets simples. Pour cela, il suffit de prouver que si $v : W \longrightarrow V$ désigne l'inclusion d'un sous-objet simple W , il existe $v' : V \longrightarrow W$ avec $v'v = \text{id}_V$. Soient ψ , φ des formes bilinéaires sur W , V , positives pour π ; si $W \neq 0$ (autrement il n'y a rien à prouver), on a, par PH), que $\text{Tr}(v^{(\psi,\varphi)} \circ v) > 0$, donc $u = v^{(\psi,\varphi)} \circ v$ est non nul et puisque W est simple, c'est un automorphisme de W . Il suffit de poser

$$v' = u^{-1} \circ v^{(\psi,\varphi)}\ .$$

L'assertion 3) est une conséquence immédiate de ce qu'on vient de prouver et de 2.3.4.1. Quant à 2), cela suit de 2.1.5.

2.4.2. Dans l'étude des polarisations d'une catégorie tannakienne $\underline{C}$ sur un corps $K \hookrightarrow \mathbb{R}$, on peut se limiter au cas où $K = \mathbb{R}$ et où $\underline{C}$ est algébrique, i.e. possède un $\otimes$-générateur (III 3.3.1.1).

Ecrivons d'abord $\underline{C} = \varinjlim \underline{C}_i$ comme réunion filtrante de ses sous-catégories tannakiennes pleines qui sont algébriques (III 3.3.2). On voit que les inclusions $\underline{C}_i \longrightarrow \underline{C}_j$ induisent des applications

$$\mathrm{Pol}(\underline{C}_j) \longrightarrow \mathrm{Pol}(\underline{C}_i) \quad ,$$

et on vérifie aussitôt que l'application canonique

$$\mathrm{Pol}(\underline{C}) \longrightarrow \varprojlim \mathrm{Pol}(\underline{C}_i)$$

est bijective.

Soit maintenant $\varepsilon \in \mathrm{Aut}^{\otimes}(\mathrm{id}_{\underline{C}})$, et appelons ε encore le $\otimes$-automorphisme du foncteur identique de $\underline{C}_{\mathbb{R}}$ qu'il détermine. Si π est une ε-polarisation sur $\underline{C}$, il existe une et une seule ε-polarisation $\pi_{\mathbb{R}}$ sur $\underline{C}_{\mathbb{R}}$ telle que si φ est une forme bilinéaire sur $V \in \mathrm{ob}\ \underline{C}$ positive pour π, alors $\varphi_{\mathbb{R}}$ est positive pour $\pi_{\mathbb{R}}$; ceci provient de ce que les objets $V_{\mathbb{R}}$ ($V \in \mathrm{ob}\ \underline{C}$) engendrent la catégorie $\underline{C}_{\mathbb{R}}$ (III 3.2.4.1). On a ainsi une application

$$\mathrm{Pol}_{\varepsilon}(\underline{C}) \longrightarrow \mathrm{Pol}_{\varepsilon}(\underline{C}_{\mathbb{R}}) \quad , \tag{2.4.2.1}$$

et il résulte aussitôt de 2.3.3 que cette application est bijective.

2.4.2.1. Convention. *Dans ce qui suit, $\underline{C}$ désigne une catégorie tannakienne algébrique* (III 3.3.1) *sur le corps $\mathbb{R}$. On posera $Z = \mathrm{Aut}^{\otimes}(\mathrm{id}_{\underline{C}})$; c'est un $\mathbb{R}$-groupe algébrique commutatif.*

2.4.3. Soit $\varepsilon \in Z(\mathbb{R})$. Une ε-polarisation (sesquilinéaire homogène) π consiste en la donnée pour tout objet V de $\underline{C}_{\mathbb{C}}$ d'une classe d'équivalence $\pi(V)$ des formes de Weil $V \otimes \bar{V} \longrightarrow \underline{1}$ de parité ε_V, vérifiant les conditions suivantes

P'0) Si $V \in \text{ob } \underline{C}_{\mathbb{C}}$, $\varphi \in \pi(V)$, alors $\bar{\varphi} \in \pi(\bar{V})$.

P'1) Si $V,W \in \text{ob } \underline{C}_{\mathbb{C}}$, $\varphi \in \pi(V)$, $\psi \in \pi(W)$, alors

$$\varphi \oplus \psi \in \pi(V \oplus W)$$

$$\varphi \otimes \psi \in \pi(V \otimes W) .$$

On adopte les mêmes notations pour les polarisations sur $\underline{C}_{\mathbb{C}}$ que celles données en 2.4.1. pour les polarisations sur $\underline{C}$. On démontre suivant les mêmes lignes que pour 2.4.1.1.

2.4.3.1. Proposition. Soit π une polarisation sur $\underline{C}_{\mathbb{C}}$. Alors,

1) $\underline{C}$ est semi-simple.

2) Si $V \in \text{ob } \underline{C}_{\mathbb{C}}$ et $\varphi \in \pi(V)$, alors $\check{\varphi} \in \pi(\check{V})$.

3) Si $V \in \text{ob } \underline{C}_{\mathbb{C}}$, W est un sous-objet de V et $\varphi \in \pi(V)$, alors $\varphi_W \in \pi(W)$.

2.4.3.2. Soit π une polarisation sur $\underline{C}$. En se servant de ce que les objets $V_{\mathbb{C}}$ ($V \in \text{ob } \underline{C}$) engendrent la catégorie $\underline{C}_{\mathbb{C}}$ (III 3.2.4.1), on voit qu'il existe une et une seule polarisation $\pi_{\mathbb{C}}$ sur $\underline{C}_{\mathbb{C}}$ telle que si $\varphi : V \otimes V \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme positive pour π , $V_{\mathbb{C}} \otimes \bar{V}_{\mathbb{C}} \longrightarrow V_{\mathbb{C}} \otimes V_{\mathbb{C}} \longrightarrow \underline{C}$ soit une forme positive pour $\pi_{\mathbb{C}}$. On a défini ainsi une application

(2.4.3.1) $$\text{Pol}(\underline{C}) \longrightarrow \text{Pol}(\underline{C}_{\mathbb{C}}) .$$

La proposition suivante se démontre sans difficulté, en se servant de 2.3.5.3.

2.4.3.3. Proposition. L'application (2.4.3.1) est bijective.

2.4.4. Proposition. Supposons que $\underline{C}$ soit polarisable (i.e. $\text{Pol}(\underline{C}) \neq \emptyset$) ; alors le $\mathbb{R}$-groupe $Z = \underline{\text{Aut}}^{\otimes}(\text{id}_{\underline{C}})$ est compact (0.3.2).

2.4.4.1. Preuve. Soient $\pi \in \mathrm{Pol}(\underline{C})$, V un $\otimes$-générateur de $\underline{C}$, $\varphi : V \otimes V \longrightarrow \underline{\mathbb{R}}$ une forme positive pour π . Le $\mathbb{R}$-groupe Z opère fidèlement sur le $\mathbb{R}$-vectoriel $A = \mathrm{End}(V)$, i.e. on a une immersion fermée

$$Z \longrightarrow \underline{GL}(A)$$

$$z \longmapsto (u \longmapsto z_V \circ u) .$$

Si K est une $\mathbb{R}$-algèbre , et $z \in Z(K)$, on a

$$\varphi_K \circ (z_{V_K} \otimes z_{V_K}) = \varphi_K ,$$

d'où il résulte que l'adjoint de z_{V_K} pour φ_K est égal à $z_{V_K}^{-1}$; si $u,v \in A \otimes_{\mathbb{R}} K = \mathrm{End}(V_K)$, on a

$$\mathrm{Tr}((z.u).(z.v)^{\varphi_K}) = \mathrm{Tr}(uv^{\varphi}) .$$

En conséquence, Z est contenu dans le groupe orthogonal de la forme bilinéaire définie positive $(u,v) \longmapsto \mathrm{Tr}(uv^{\varphi})$ sur A , et il est compact (0.3.3).

2.4.4.2. Corollaire. Si $\underline{C}$ est polarisable, on a

$$(2.4.4.1) \qquad \begin{cases} H^1(\mathbb{R},Z) = {}_2Z(\mathbb{R}) \\ H^2(\mathbb{R},Z) = Z(\mathbb{R})/Z(\mathbb{R})^2 . \end{cases}$$

2.4.4.3. Preuve. Ces formules sont valables pour un $\mathbb{R}$-groupe commutatif compact ; on les vérifie en se ramenant au cas où Z est soit fini, soit un tore compact.

2.4.5. On résume ici en un seul énoncé les propriétés fondamentales des polarisations, qui seront prouvées dans les numéros 2.5 à 2.8.

2.4.5.1. Théorème. Soit L un lien algébrique affine sur $\mathbb{R}$ (III 3.1.4, 3.1.4.4) de centre Z . Alors

1) Si $\underline{C}$ est une L-catégorie tannakienne, l'ensemble $\mathrm{Pol}(\underline{C})$ est de façon naturelle un pseudo-torseur sous le groupe $Z(\mathbb{R})$.

2) Si une L-catégorie tannakienne est polarisable, tout autre l'est, et tout élément de $Z(\mathbb{R})$ peut s'exprimer comme la parité d'une polarisation d'une L-catégorie tannakienne (on dit alors que L est polarisable).

3) Si $\underline{C}$, $\underline{C}'$ sont des L-catégories tannakiennes polarisées (i.e. munies de polarisations) ayant la même parité, il existe une équivalence de L-catégories tannakiennes $\underline{C} \approx \underline{C}'$ et une seule à isomorphisme (non unique) près soumise à la condition de respecter les polarisations.

4) Supposons que L soit connexe ou abélien. Alors L est polarisable si et seulement s'il est le lien d'un groupe compact. De plus, si $\underline{C}$ est une L-catégorie tannakienne munie d'une polarisation symétrique, il existe un foncteur fibre $\omega : \underline{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Modf}}(\mathbb{R})$ et un seul à isomorphisme (non unique) près tel que les formes de polarisation dans $\underline{C}$ soient exactement les formes bilinéaires transformées par ω en formes définies positives.

2.5. Classification des polarisations.

2.5.0. On maintient la convention 2.4.2.1 et on suppose que $\underline{C}$ est polarisable ; en particulier, le $\mathbb{R}$-groupe algébrique $Z = \underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\mathrm{id}_{\underline{C}})$ est compact.

2.5.1. On définit une action du groupe $Z(\mathbb{R})$ sur l'ensemble $\mathrm{Pol}(\underline{C})$ de la façon suivante : si $\pi \in \mathrm{Pol}(\underline{C})$ et $z \in Z(\mathbb{R})$, $z.\pi$ est la polarisation telle que si $V \in \mathrm{ob}\ \underline{C}$ et si $\varphi : V \otimes V \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme de Weil, on a

$$\varphi \in z\pi(V) \Leftrightarrow \varphi \circ (\mathrm{id}_V \otimes z_V) \in \pi(V) \quad . \tag{2.5.1.1}$$

On vérifie aussitôt qu'on a la formule suivante pour les parités :

$$\varepsilon(z.\pi) = z^2.\varepsilon(\pi) \quad ; \tag{2.5.1.2}$$

en particulier, si $\varepsilon \in Z(\mathbb{R})$, l'action de $Z(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{Pol}(\underline{C})$ induit une action

du groupe ${}_2Z(\mathbb{R})$ des points d'ordre 2 de $Z(\mathbb{R})$ sur $Pol_\varepsilon(\underline{C})$.

Si on identifie $Pol(\underline{C})$ à $Pol(\underline{C}_{\mathbb{C}})$ par l'application (2.4.3.1), l'action de $Z(\mathbb{R})$ sur $Pol(\underline{C}_{\mathbb{C}})$ s'explicite de la façon suivante : si $\pi \in Pol(\underline{C}_{\mathbb{C}})$ et $z \in Z(\mathbb{R})$, $z.\pi$ est la polarisation de $\underline{C}_{\mathbb{C}}$ telle que si $V \in ob(\underline{C}_{\mathbb{C}})$, et si $\varphi : V \otimes \bar{V} \longrightarrow \underline{C}$ est une forme de Weil, on a

$$(2.5.1.3) \qquad \varphi \in (z.\pi)(V) \Leftrightarrow \varphi \circ (id_V \otimes z_{\bar{V}}) \in \pi(V) .$$

2.5.1.1. Soit L le lien de $\underline{C}$; on sait (III 2.3.4.1) qu'on a un isomorphisme canonique

$$Aut_L(\underline{C}) \simeq H^1(\mathbb{R},Z)$$

entre le groupe de classes d'isomorphisme d'auto-équivalences de $\underline{C}$ liés par id_L et le groupe $H^1(\mathbb{R},Z)$. D'autre part, d'après 2.4.4.2, $H^1(\mathbb{R},Z)$ s'identifie au sous-groupe ${}_2Z(\mathbb{R})$ de $Z(\mathbb{R})$. Explicitons comment, un élément $z \in {}_2Z(\mathbb{R})$ détermine un automorphisme ω_z de $\underline{C}$. Pour cela, on reconstitue $\underline{C}$ à partir de $\underline{C}_{\mathbb{C}}$ et de sa conjugaison de la façon rappelée en 2.2.0 : ses objets sont les couples (V,a_V) tels que $V \in ob\ \underline{C}_{\mathbb{C}}$ et $a_V : V \longrightarrow \bar{V}$ est un isomorphisme tel que $\bar{a}_V \circ a_V : V \longrightarrow \bar{\bar{V}}$ soit l'isomorphisme canonique. Cela dit, ω_z est donné par

$$\omega_z(V,a_V) = (V,a_V \circ z_V)$$

$$\omega_z(f) = f \qquad .$$

Les remarques qui précèdent ont pour but l'observation suivante : le groupe $Aut_L(\underline{C})$ opère sur l'ensemble $Pol(\underline{C})$ par transport de structure, donc on a une action de ${}_2Z(\mathbb{R})$ sur $Pol(\underline{C})$. L'explicitation précédente entraîne aussitôt

2.5.1.2. Lemme. *Cette action de ${}_2Z(\mathbb{R})$ sur $Pol(\underline{C})$ coïncide avec l'action de ${}_2Z(\mathbb{R})$ sur $Pol(\underline{C})$ induite par celle de $Z(\mathbb{R})$.*

2.5.2. Théorème. *L'action de $Z(\mathbb{R})$ sur $Pol(\underline{C})$ fait de cet ensemble un torseur*

sous $Z(\mathbb{R})$; de même, si $\epsilon \in Z(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Pol}_{\epsilon}(\underline{C}) \neq \emptyset$, il est un torseur sous ${}_2Z(\mathbb{R})$.

2.5.2.1. Preuve. La dernière assertion est une conséquence formelle de la première et de (2.5.1.2). Pour prouver la première, on va travailler en termes de polarisation sesquilinéaires, i.e., on prouvera que $\mathrm{Pol}(\underline{C}_{\mathbb{C}})$ est un torseur sous $Z(\mathbb{R})$.

a) L'action est libre. Soient $\pi \in \mathrm{Pol}(\underline{C})$, $z \in Z(\mathbb{R})$, supposons qu'on a $\pi = z.\pi$; il faut prouver que $z = id$, et pour cela, il suffit de prouver que pour tout objet simple V de $\underline{C}_{\mathbb{C}}$, on a

$$z_V = id_V .$$

Soit $\varphi \in \pi(V)$, et $\psi = \varphi \circ (z_V \otimes id_{\bar{V}})$; puisque V est simple, les seuls endomorphismes de V sont les homothéties par un nombre complexe, et puisque φ et ψ sont compatibles, z_V est la multiplication par un nombre réel positif ; mais, d'autre part, Z étant compact, z_V se trouve dans un sous-groupe compact de $\mathrm{Aut}(V)$, d'où $z_V = id_V$.

b) L'action est transitive. Soient π , $\pi' \in \mathrm{Pol}(\underline{C}_{\mathbb{C}})$, V un objet simple de $\underline{C}_{\mathbb{C}}$ et $\varphi \in \pi(V)$. La forme $\varphi : V \otimes \bar{V} \longrightarrow \underline{\mathbb{C}}$ détermine (2.2.2.1) une bijection

$$\mathrm{End}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V \otimes \bar{V}, \underline{\mathbb{C}})$$

$$\alpha \longmapsto \varphi \circ (\alpha \otimes id_{\bar{V}}) .$$

Soit K_V l'unique sous-groupe compact maximal de $\mathrm{Aut}(V)$ et notons encore $\pi'(V)$ la demi-droite réelle dans $\mathrm{End}(V)$ qui correspond par la bijection précédente à $\pi'(V) \subset \mathrm{Hom}(V \otimes \bar{V}, \underline{\mathbb{C}})$. Puisque $\mathrm{End}(V)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$, il est clair que l'intersection de $\pi'(V)$ et K_V se réduit à un point, noté z_V . L'élément z_V peut être caractérisé comme le seul automorphisme α de V contenu dans un sous-groupe compact de $\mathrm{Aut}(V)$ et tel que si $\varphi \in \pi(V)$, alors $\varphi \circ (\alpha \otimes id_{\bar{V}}) \in \pi'(V)$; d'ailleurs, il est clair que si $\varphi : V \otimes \bar{V} \longrightarrow \underline{C}$ est une forme de Weil, $\varphi \in \pi(V)$ si et seulement si $\varphi \circ (z_V \otimes id_{\bar{V}}) \in \pi'(V)$. La collection des z_V (V objet simple de $\underline{C}_{\mathbb{C}}$) définit un

automorphisme z de $id_{\underline{C}}$; prouvons que c'est un $\otimes$-automorphisme : il suffit de remarquer que si V, W sont des objets simples de $\underline{C}_{\mathbb{C}}$, $z_V \otimes z_W$ est dans le centre de $End(V\otimes W)$ (étant une homothétie), qu'il est contenu dans un sous-groupe compact de $Aut(V\otimes W)$, à savoir l'image de $K_V \times K_W$ par $Aut(V) \times Aut(W) \longrightarrow Aut(V\otimes W)$ et que si $\varphi : (V\otimes W) \otimes \overline{(V\otimes W)} \longrightarrow \underline{C}$ est une forme de Weil,

$$\varphi \in \pi(V\otimes W) \Leftrightarrow \varphi \circ \left[(z_V \otimes z_W) \otimes id_{\overline{V\otimes W}}\right] \in \pi'(V) .$$

Ainsi, $z \in Z(\mathbb{C})$; enfin, puisque π et π' vérifient la condition P'O) de 2.4.3, on voit que

$$z_{\bar{V}} = \overline{(z_V)} ,$$

i.e. que $z = \bar{z}$, donc $z \in Z(\mathbb{R})$ et

$$\pi' = z.\pi .$$

2.5.2.2. Corollaire. Si $\underline{C}$, $\underline{C}'$ sont des catégories tannakiennes sur $\mathbb{R}$ polarisées (i.e. avec des polarisations données), il existe au plus une équivalence $\underline{C} \cong \underline{C}'$ à isomorphisme près induisant un isomorphisme de liens donné $L \simeq L'$, et respectant les polarisations.

2.5.3. On a vu dans 2.5.1 que si $\pi \in Pol(\underline{C})$, $z \in Z(\mathbb{R})$, on a

$$\varepsilon(z.\pi) = z^2.\varepsilon(\pi) ;$$

il résulte de 2.5.2 que l'ensemble des parités $\varepsilon(\pi)$ $(\pi \in Pol(\underline{C}))$ est une orbite dans $Z(\mathbb{R})$ pour l'action de $Z(\mathbb{R})^2$ par translation, i.e. que $\underline{C}$ détermine un élément, noté $\varepsilon_{\underline{C}}$ dans $Z(\mathbb{R})/Z(\mathbb{R})^2$ qui par 2.4.4.2 s'identifie à $H^2(\mathbb{R},Z)$.

L'élément $\varepsilon_{\underline{C}} \in H^2(\mathbb{R},Z)$ ne dépend que de $\underline{C}$, et constitue l'obstruction pour l'existence sur $\underline{C}$ d'une polarisation symétrique :

2.5.3.1. Proposition. $\underline{C}$ possède une polarisation symétrique si et seulement si

$\epsilon_{\underline{C}} = 0$.

2.6. Le théorème de rigidité.

2.6.0. Dans la suite, L dénote un lien sur $\mathbb{R}$ pour la topologie étale, représentable sur $\mathbb{C}$ par un groupe algébrique affine. On notera Z le centre de L ; c'est un $\mathbb{R}$-groupe algébrique affine commutatif. Rappelons comment le groupe $H^2(\mathbb{R},Z)$ agit sur l'ensemble des classes d'équivalence des catégories tannakiennes sur $\mathbb{R}$ liées par L (III 3.2.6). Soit $\underline{C}$ une telle catégorie tannakienne et soit $\xi \in H^2(\mathbb{R},Z)$ représenté par $z \in Z(\mathbb{R})$. La donnée de $\underline{C}$ est équivalente à celle de $\underline{C}_{\mathbb{C}}$ munie de sa conjugaison

$$\underline{C}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \underline{C}_{\mathbb{C}}$$

$$V \longmapsto \bar{V}$$

et du $\otimes$-isomorphisme fonctoriel

$$\mu_V : V \xrightarrow{\sim} \bar{\bar{V}} \quad .$$

En ces termes, la catégorie tannakienne ${}^z\underline{C}$, dont la classe d'équivalence ne dépend que de ξ , se décrit de la façon suivante : sa complexifiée $({}^z\underline{C})_{\mathbb{C}}$ est égale à $\underline{C}_{\mathbb{C}}$, sa conjugaison est celle de $\underline{C}_{\mathbb{C}}$, et le $\otimes$-isomorphisme $\mu'_V : V \longrightarrow \bar{\bar{V}}$ est donné par

$$\mu'_V = \mu_V \circ z_V \quad .$$

2.6.1. Théorème. Avec les notations ci-dessus, les conditions suivantes sont équivalentes.

i) Toutes les catégories tannakiennes sur $\mathbb{R}$ liées par L sont polarisables.

ii) Il existe une catégorie tannakienne sur $\mathbb{R}$ liée par L qui soit polarisable.

De plus, si ces conditions sont vérifiées, l'application "parité"

(2.6.1.1) $$H^2(\mathbb{R},L) \longrightarrow H^2(\mathbb{R},Z)$$

commute à l'action de $H^2(Z)$ et en particulier est une bijection.

2.6.1.1. Preuve. Il suffit de montrer que si $\underline{C}$ est une catégorie tannakienne sur $\mathbb{R}$ liée par L et $z \in Z(\mathbb{R})$, alors si $\underline{C}$ est polarisable, ${}^{z}\underline{C}$ aussi, et qu'on a

(2.6.1.2) $$\varepsilon_{{}^{z}\underline{C}} = z.\varepsilon_{\underline{C}} \qquad (\text{mod. } Z(\mathbb{R})^2) \ .$$

Soit en effet π une polarisation sesquilinéaire sur $\underline{C}_{\mathbb{C}}$; on remarque alors que la définition de polarisation sesquilinéaire ne fait intervenir que $\underline{C}_{\mathbb{C}}$ munie de sa conjugaison $V \longmapsto \bar{V}$, et non pas les isomorphismes μ_V. Il en résulte, par 2.6.0 que π définit une polarisation sesquilinéaire sur $({}^{z}\underline{C})_{\mathbb{C}}$, et la définition de la parité (2.2.2.2) d'une forme sesquilinéaire donne aussitôt la formule précédente.

2.6.1.2. On dit que le lien L est polarisable s'il vérifie les conditions du théorème ; une condition nécessaire, d'après 2.4.4, est que Z soit compact.

2.6.2. Corollaire. (Théorème de rigidité). Si L est polarisable, pour tout $z \in Z(\mathbb{R})$, il existe une catégorie tannakienne sur $\mathbb{R}$, $\underline{C}(z)$ liée par L et munie d'une polarisation $\pi(z)$ de parité z. De plus, le couple $(\underline{C}(z),\pi(z))$ est unique à équivalence unique (respectant les polarisations données et liée par id_L) à isomorphisme (non unique) près.

2.7. Cas neutre I : Les C-polarisations.

2.7.1. Soit G un $\mathbb{R}$-groupe algébrique affine. On étudiera ici un moyen de définir des polarisations sur la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_o(G)$ des G-modules de rang fini sur $\mathbb{R}$. Si G est, soit abélien, soit connexe, on verra au 2.8 que toutes les polarisations sur $\underline{\mathrm{Rep}}_o(G)$ sont de ce type. Dans le cas général, la question reste ouverte.

Pour simplifier, on note

$$\mathrm{Pol}(G) = \mathrm{Pol}(\underline{\mathrm{Rep}}_o(G)) \ ,$$

et on dira que le groupe G est polarisable si $\underline{\mathrm{Rep}}_o(G)$ l'est.

Soit $C \in G(\mathbb{R})$; une forme bilinéaire $\varphi : V \otimes V \longrightarrow \mathbb{R}$ G-invariante sur un G-module V est dite de C-polarisation. Si la forme bilinéaire sur le $\mathbb{R}$-vectoriel V

$$\varphi^C(x,y) = \varphi(x,Cy)$$

est symétrique définie positive. Un calcul immédiat montre que la parité de φ est C^2 et que C^2 est central dans l'image de G dans $\underline{Aut}_{\mathbb{R}}(V)$.

2.7.1.1. Proposition. Soit $C \in G(\mathbb{R})$

1) Une forme de C-polarisation $\varphi : V \otimes V \longrightarrow \mathbb{R}$ est de Weil.

2) Si $\varphi : V \otimes V \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme de C-polarisation, φ et les formes induites sur des sous-objets de V sont de C-polarisation.

3) Si $\varphi : V \otimes V \longrightarrow \mathbb{R}$, $\psi : W \otimes W \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des formes de C-polarisation, $\varphi \oplus \psi$, $\varphi \otimes \psi$ sont des formes de C-polarisation.

4) Soit $\varphi : V \otimes V \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme de C-polarisation. Alors, V est un objet semisimple de $\underline{Rep}_o(G)$ et toute forme de Weil ψ sur V de parité C^2 compatible avec φ, est une forme de C-polarisation.

2.7.1.2. Preuve. Pour 1), il faut vérifier que la parité de φ est dans le centre de $End(V)$ et que si $u \in End(V)$, $u \neq 0$, on a

$$Tr(uu^{\varphi}) > 0 \quad ;$$

la parité de φ est C^2 et commute donc avec les éléments de $End(V)$, d'autre part on a

$$u^{\varphi} = u^{\varphi_C} \quad ,$$

et il est connu qu'on a la propriété de positivité précédente pour des formes symétriques définies positives.

Les assertions 2) et 3) sont évidentes sur la définition de forme de C-polarisation. Enfin, pour 4), l'assertion de semisimplicité de V résulte de 2) et 3) en utilisant la même méthode que pour prouver 2.4.1.1. 1). Pour la dernière

assertion, on peut supposer que V est simple, et alors par 2.3.4.5, ψ est un multiple scalaire positif de φ.

2.7.2. On dit qu'un élément $C \in G(\mathbb{R})$ est hodgien si tout G-module (de rang fini sur $\mathbb{R}$) possède une forme de C-polarisation. D'après 2.7.1.1 et II 4.3.2 a) il revient au même s'il en est ainsi pour un G-module fidèle. Le $\mathbb{R}$-groupe G est alors réductif (0.1.1.2), et on dit qu'il est hodgien. La proposition 2.7.1.1 montre que chaque élément hodgien C définit une polarisation de $\underline{\mathrm{Rep}}_0(G)$, notée π_C, pour laquelle les formes positives (2.4.1) sont exactement les formes de C-polarisation. Une polarisation obtenue ainsi sera appelée hodgienne. La proposition suivante n'offre aucune difficulté.

2.7.2.1. Proposition. Soit $C \in G(\mathbb{R})$ un élément hodgien, et notons Z le centre de G.

1) $C^2 \in Z(\mathbb{R})$ et la parité $\varepsilon(\pi_C)$ de π_C est C^2.

2) Si $g \in G(\mathbb{R})$, $z \in Z(\mathbb{R})$, alors $C' = zg\,C\,g^{-1}$ est hodgien et on a

$$\pi_{C'} = z.\pi_C .$$

En particulier, toute polarisation de G est hodgienne (voir 2.5.2).

2.7.2.2. Proposition. Soient $G' \hookrightarrow G$ un sous-groupe de G, $C \in G'(\mathbb{R})$. Si C est hodgien comme élément de $G(\mathbb{R})$ alors il l'est aussi comme élément de $G'(\mathbb{R})$.

2.7.2.3. Preuve. Si C est hodgien dans G, il existe un G-module fidèle V et une forme de C-polarisation $\varphi : V \otimes V \longrightarrow \mathbb{R}$. Par restriction du groupe d'opérateurs de G à G', V est aussi un G'-module fidèle et φ une forme de C-polarisation.

2.7.3. Soit $C \in G(\mathbb{R})$ un élément de carré central, i.e. $C^2 \in Z(\mathbb{R})$. L'image de C par $\mathrm{int}_G : G \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}(G)$ définit une classe de cohomologie galoisienne

$$C \in H^1(\mathbb{R}, \underline{\mathrm{Aut}}(G)) ,$$

donc une forme réelle de G, notée G_C. On a

$$G_C(\mathbb{R}) = \{g \in G(\mathbb{C}) / g = C^{-1}\bar{g}C\},$$

i.e. le complexifié de G_C est $G_{\mathbb{C}}$:

$$(G_C)_{\mathbb{C}} = G_{\mathbb{C}},$$

et la conjugaison $G_{\mathbb{C}} \longrightarrow G_{\mathbb{C}}$ définissant G_C est donnée par $g \longmapsto C^{-1}\bar{g}C$.

2.7.3.1. Proposition. (DELIGNE [5], lemme 2.8). *L'élément $C \in G(\mathbb{R})$ est hodgien si et seulement si G_C est un $\mathbb{R}$-groupe compact* (au sens de 0.3.2).

2.7.3.2. Preuve. Elle consiste à remarquer que C est hodgien si et seulement si tout $G_{\mathbb{C}}$-module V possède une forme sesquilinéaire de C-polarisation. En explicitant la conjugaison de $G_{\mathbb{C}}$ par rapport à la forme réelle G_C comme précédemment, on voit que ceci arrive si et seulement si tout G_C-module possède une forme de 1-polarisation, i.e. que G_C est sous-groupe du groupe orthogonal d'une forme symétrique définie positive. On conclut à la compacité de G_C par 0.3.3.

2.7.3.3. Proposition. *Si G est compact, C est hodgien si et seulement si $C \in Z(\mathbb{R})$.*

2.7.3.4. Preuve. Si $C \in Z(\mathbb{R})$, il est clair qu'il est hodgien par 2.7.2.1, 2). Réciproquement, si C est hodgien, G_C est compact ; par l'unicité des sous-groupes compacts maximaux de $G(\mathbb{C})$ (voir 0.4.1), il existe $h \in G(\mathbb{C})$ tel que $h\,G(\mathbb{R})\,h^{-1} = G_C(\mathbb{R})$. Donc, si $g \in G(\mathbb{R})$ (i.e. $g \in G(\mathbb{C})$ et $\bar{g} = g$), on a

$$h\,g\,h^{-1} \in G_C(\mathbb{R}),$$

ce qui s'écrit encore

$$h\,g\,h^{-1} = C^{-1}\,\overline{h\,g\,h^{-1}}\,C$$

i.e.
$$g = h^{-1}\,C^{-1}\,\bar{h}\,g\,(h^{-1}\,C^{-1}\,\bar{h})^{-1} \qquad \forall\, g \in G(\mathbb{R}).$$

Ceci signifie, puisque G est compact, que $h^{-1} C^{-1} \bar{h} = z \in Z(\mathbb{C})$. L'élément z s'écrit, suivant la décomposition de Cartan de $G(\mathbb{C})$ relative à $G(\mathbb{R})$ (voir 0.4.2).

$$z = z_1 z_2 \qquad z_1 \in Z(\mathbb{R}) \ .$$

De même, on écrit

$$h = kp \qquad k \in G(\mathbb{R}) \ .$$

Par définition de z, on a

$$C^{-1} \bar{h} = hz$$

$$C^{-1} k p^{-1} = k pz$$

$$k^{-1} C^{-1} k \ p^{-2} = z_1 z_2$$

d'où

$$k^{-1} C^{-1} k = z_1 \in Z(\mathbb{R})$$

$$C \in Z(\mathbb{R}) \ .$$

2.7.3.5. Corollaire. Si $C \in G(\mathbb{R})$ est un élément hodgien d'un $\mathbb{R}$-groupe G, le centralisateur de C, $\mathrm{Cent}_G(C)$ est un sous-groupe compact maximal de G, et est le seul compact maximal de G contenant C.

2.7.3.6. Preuve. Si $K = \mathrm{Cent}_G(C)$, pour voir que K est compact, il suffit de remarquer que si φ est une forme de C-polarisation sur un G-module fidèle V, la forme symétrique définie positive φ est K-invariante (0.3.3). Pour finir la démonstration du corollaire, il faut prouver que tout sous-groupe compact K' de G contenant C est contenu dans K. En effet, par 2.7.2.2, C est hodgien dans K', donc par 2.7.3.3. il est dans le centre de K' et $K' \subset K$.

2.7.4. Proposition. Si $C, C' \in G(\mathbb{R})$ sont hodgiens, il existe $g \in G(\mathbb{R})$ et un et un seul $z \in Z(\mathbb{R})$ tels qu'on ait

$$C' = z g C g^{-1} \ ;$$

en particulier, si $\pi_C = \pi_{C'}$, C et C' sont conjugués.

2.7.4.1. Preuve. D'après 2.5.2 et 2.7.2.1, il suffit de prouver la dernière assertion. Soient $C, C' \in G(\mathbb{R})$ hodgiens avec $\pi_C = \pi_{C'}$, et posons $K = \underline{\mathrm{Cent}}_G(C)$, $K' = \underline{\mathrm{Cent}}_G(C')$. D'après l'unicité des sous-groupes compacts maximaux (0.4.1) et 2.7.3.5 il existe $g \in G(\mathbb{R})$ tel que $g K g^{-1} = K'$, et en particulier $g C g^{-1} \in K'(\mathbb{R})$. Par 2.7.2.2 et 2.7.3.3, $g C g^{-1} = z C'$, où z appartient au centre de K' (en fait, C' et $g C g^{-1}$ appartiennent au centre de K'). D'autre part, les polarisations de G définies par C' , $g C g^{-1}$ coïncident, et il est clair qu'il en est de même pour les polarisations de K' qu'ils définissent. En utilisant à nouveau 2.7.2.2 et 2.5.2 on voit que $z = 1$ et

$$C' = g C g^{-1} .$$

2.7.5. Proposition. Soit G un $\mathbb{R}$-groupe algébrique affine. Alors, G est hodgien si et seulement si le lien de G est le lien d'un groupe compact. Dans ce cas, $\underline{\mathrm{Rep}}_o(G)$ possède une polarisation symétrique si et seulement si elle est équivalente (en tant que catégorie tannakienne) à la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_o(K)$, où K est compact.

2.7.5.1. Preuve. Prouvons la première assertion ; on peut évidemment supposer que G est réductif, et soit K sa forme compacte. Dire que $\mathrm{lien}(G) \simeq \mathrm{lien}(K)$ équivaut à dire que la classe d'isomorphisme de G se trouve dans l'image de l'application

$$H^1(\mathbb{R}, \underline{\mathrm{Int}}(K)) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}, \underline{\mathrm{Aut}}(K)) .$$

D'après SERRE [2] , III théorème 6, le premier ensemble s'identifie à $H^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \underline{\mathrm{Int}}(K)(\mathbb{R}))$, et ceci plus la surjectivité de l'application

$$K(\mathbb{R}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Int}}(K)(\mathbb{R}) ,$$

prouve que cette image est composée des classes d'isomorphismes des groupes de la forme K_C ($C \in K(\mathbb{R})$, C^2 central). Mais ceux-ci, par 2.7.3.1, sont exactement les groupes hodgiens qui sont des formes de K .

La dernière assertion suit aussitôt de la suite exacte de cohomologie associée à

$$1 \longrightarrow \underline{\mathrm{Cent}}(K) \longrightarrow K \longrightarrow \underline{\mathrm{Int}}(K) \longrightarrow 1$$

et de ce que $\underline{\mathrm{Rep}}_0(G) \cong \underline{\mathrm{Rep}}_0(K)$ si et seulement si la classe d'isomorphisme de G se trouve dans l'image de l'application

$$\mathrm{int} : H^1(\mathbb{R},K) \longrightarrow H^1(\mathbb{R},\underline{\mathrm{Aut}}(K))$$

(voir II 3.2).

2.8. Cas neutre II : détermination des $\mathbb{R}$-groupes polarisables.

2.8.1. On peut se poser la question suivante : si G est un $\mathbb{R}$-groupe algébrique affine, est-ce que toute polarisation de $\underline{\mathrm{Rep}}_0(G)$ est hodgienne ? En d'autres termes, G est-il polarisable si et seulement s'il est hodgien ?

Une réponse affirmative entraîne que si $L = \mathrm{lien}(G)$, une L-catégorie tannakienne $\underline{C}$ munie d'une polarisation symétrique π est neutre, et même, par le théorème de rigidité 2.6.2 et par 2.7.5, il existe un foncteur fibre $\omega : \underline{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Modf}}(\mathbb{R})$ unique à isomorphisme (non unique) près tel que les formes $\varphi : V \otimes V \longrightarrow \underline{1}$ positives pour π soient celles telles que $\omega(\varphi)$ est une forme symétrique définie positive.

2.8.2. Théorème. Soit G un $\mathbb{R}$-groupe algébrique affine connexe ou abélien. Alors, G est hodgien si et seulement s'il est polarisable.

2.8.2.1. Preuve. Il suffit de montrer par 2.7.1 que si G est polarisable $L = \mathrm{lien}(G)$ est le lien d'un groupe compact. Ceci est clair si G est abélien, par 2.4.4. On est ramené au cas où G est réductif connexe, et pour conclure, il faut prouver qu'il n'y a qu'un lien localement isomorphe à $L = \mathrm{lien}(G)$ (à isomorphisme près) qui soit polarisable, à savoir le lien de la forme compacte de G ; ou encore, qu'il n'y a qu'un $\mathbb{R}$-groupe quasi-déployé localement isomorphe à G qui soit

polarisable (voir 1.1.2).

Si Γ désigne le groupe (constant) des automorphismes extérieurs de la forme déployée de G (0.1.3.2), l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\mathbb{R}$-groupes quasi-déployés localement isomorphes à G se trouve en correspondance bijective avec l'ensemble $H^1(\mathbb{R},\Gamma)$, ou encore avec l'ensemble ${}_2\Gamma/\text{conjug.}$ des classes de conjugaison d'éléments d'ordre 2 de Γ. Soit $q \in {}_2\Gamma$, et supposons que le groupe quasi-déployé G_q que cet élément définit soit polarisable. Ceci entraîne, par 2.4.3.3 que pour tout $(G_q)_{\mathbb{C}}$-module V (de rang fini sur $\mathbb{C}$), on a un isomorphisme

$$C_q(V) \simeq \check{V} ,$$

où $C_q(V)$ dénote le conjugué du $(G_q)_{\mathbb{C}}$-module V par rapport à la forme G_q de $(G_q)_{\mathbb{C}} = G_{\mathbb{C}}$. En particulier, si V est un $G_{\mathbb{C}}$-module simple de poids dominant $p \in P$ (on adopte les notations de 0.2), d'après les formules (0.2.2.1) et (0.2.3.1), l'existence d'un tel isomorphisme signifie qu'on a

$$q(p) = -w_o(p) .$$

Puisqu'on a cette égalité pour tout $p \in P$ et que les éléments de P engendrent un sous-groupe d'indice fini dans le groupe abélien libre M, on conclut

$$q = -w_o ,$$

d'où l'unicité du $\mathbb{R}$-groupe quasi-déployé polarisable.

2.8.2.2. Corollaire. Soit L un lien algébrique affine sur $\mathbb{R}$, qui sur $\mathbb{C}$ est défini par un groupe connexe ou abélien. Si C est une L-catégorie tannakienne munie d'une polarisation symétrique π, il existe un foncteur fibre $\omega : C \longrightarrow \text{Modf}(\mathbb{R})$ unique tel que les formes positives pour π soient les formes $\varphi : V \otimes V \longrightarrow 1$ telles que $\omega(\varphi)$ soit symétrique définie positive.

2.8.2.3. Preuve. Elle découle aussitôt du théorème, de la discussion de 2.8.1 et du fait qu'un lien comme ci-dessus est représentable, i.e. de la forme lien(G) (voir 1.1.2 et III 2.1.3).

2.8.3. Dans la liste des catégories tannakiennes sur $\mathbb{R}$ à lien simple, donnée au § 1 , on peut distinguer celles qui sont polarisables. En effet, dans la table II on a souligné ceux des groupes quasi-déployés qui sont polarisables. On voit sur cette liste que le seul exemple de catégorie tannakienne sur $\mathbb{R}$ à lien simple connexe qui soit polarisable et non neutre est donné par "la" catégorie tannakienne non neutre sur $\mathbb{R}$ de lien

$$SL_{n+1}/\mu_{r'}$$

où r' , $r = \frac{n+1}{2}$ sont pairs.

§ 3. POLARISATIONS : CAS GRADUE

3.1. Triples de Tate.

3.1.0. On fixe un corps de caractéristique nulle k .

3.1.1. Un triple de Tate $\underline{T} = (\underline{C},w,T)$ est constitué par la donnée d'une catégorie tannakienne $\underline{C}$ sur k , une $\otimes$-graduation de type $\mathbb{Z}$ w de $id_{\underline{C}}$, et un objet inversible T de degré -2 pour la graduation w . La graduation w est appelée graduation par le poids, l'objet T est appelé l'objet de Tate. Si V est un objet de $\underline{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, on note

$$V(n) = V \otimes T^{\otimes n} .$$

Suivant cette notation, on a

$$T^{\otimes n} = \underline{1}(n) .$$

Les triples de Tate constituent de façon évidente une 2-catégorie, notée $\underline{\underline{TT}}(k)$. Chaque triple de Tate définit un triple $(\underline{\underline{C}},w,t)$ d'une gerbe tannakienne $\underline{\underline{C}}$

sur k (à savoir $FIB_o(\underline{C})$, voir III 3.2.1.2), un morphisme $w : \mathbb{G}_m \longrightarrow Z$ dans le centre $Z = \underline{Aut}(id_{\mathcal{G}}) \simeq \underline{Aut}^{\otimes}(id_{\underline{C}})$ de la gerbe $\mathcal{G}$, et un morphisme de gerbes $\mathcal{G} \longrightarrow TORS(\mathbb{G}_m)$ tel que le composé $\mathbb{G}_m \longrightarrow Z \longrightarrow \mathbb{G}_m$ soit -2 (i.e. $x \longmapsto x^{-2}$) (voir IV). Si on se limite au cas algébrique (i.e. $\underline{C}$ algébrique, $\mathcal{G}$ algébrique), on obtient ainsi une 2-équivalence entre $\underline{\underline{TT}}(k)$ et la 2-catégorie des triples $(\mathcal{G},w,t)$ (voir III 3.2.5.1).

3.1.2. A un triple de Tate $\underline{T} = (\underline{C},w,T)$ on associe le triple (L,w,t) constitué par le lien L de $\underline{C}$, le morphisme $w : \mathbb{G}_m \longrightarrow Z = \underline{Cent}(L)$ définissant la graduation par le poids, et le morphisme $t : L \longrightarrow \mathbb{G}_m$ défini par l'objet de Tate ; on a

$$t \circ w = -2 .$$

On dit que $\underline{T}$ est <u>lié</u> par le triple (L,w,t).

Pour un triple (L,w,t) comme ci-dessus, on note L' le lien conoyau de $\mathbb{G}_m \xrightarrow{w} Z \longrightarrow L$, Z' son centre ; on vérifie aussitôt que dans ce cas le noyau $L_o = Ker(t)$ existe, et on note Z_o son centre. On vérifie qu'on a des identitifications

$$Z_o = Ker(t : Z \longrightarrow \mathbb{G}_m)$$

$$Z' = Coker(w : \mathbb{G}_m \longrightarrow Z) .$$

Si $\varepsilon : \mu_2 \longrightarrow Z_o$ est le morphisme induit par $w : \mathbb{G}_m \longrightarrow Z$ (sa donnée revient à celle de $\varepsilon(-1) \in {}_2Z_o(k)$) , on vérifie également que les morphismes évidents

$$Z_o \longrightarrow Z'$$

$$L_o \longrightarrow L'$$

sont surjectifs de noyau $Im(\varepsilon)$. Toutes ces vérifications sont faciles et de nature locale pour la topologie fpqc , on peut donc supposer que L est représentable.

A un triple (L,w,t) comme ci-dessus on peut associer le couple (L_o,ε). Réciproquement, si (L_o,ε) est un couple d'un lien tannakien L_o et d'un morphisme

$\varepsilon : \mu_2 \longrightarrow Z_o$, on construit un triple (L,w,t) en posant

$$L = \mathrm{Coker}\,(\widetilde{\varepsilon} : \mu_2 \longrightarrow L_o \times \mathbb{G}_m) ,$$

où $\widetilde{\varepsilon}$ et l'inclusion $\mu_2 \longrightarrow \mathbb{G}_m$; w est induit par $\mathbb{G}_m \longrightarrow L_o \times \mathbb{G}_m$, t par

$$L_o \times \mathbb{G}_m \xrightarrow{\ pr\ } \mathbb{G}_m \xrightarrow{\ -2\ } \mathbb{G}_m \quad .$$

Ces constructions sont réciproques l'une de l'autre.

3.1.3. On dira qu'un triple de Tate $\underline{T} = (\underline{C},w,T)$ est neutre si la catégorie tannakienne $\underline{C}$ est neutre, neutralisé si $\underline{C}$ est munie d'un foncteur fibre

$$\omega : \underline{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Modf}}(k) .$$

et d'un isomorphisme $\omega(T) \simeq k$.

On voit aussitôt par II 4.1.1 que les triples de Tate neutralisés se trouvent en correspondance biunivoque avec les triples (G,w,t) formés d'un k-groupe affine G , un morphisme central $w : \mathbb{G}_m \longrightarrow G$ et un morphisme $t : G \longrightarrow \mathbb{G}_m$ tel que le composé tw soit -2 . Il résulte par ailleurs de ce qui précède que la donnée d'un triple (G,w,t) équivaut à celle d'un couple (G_o,ε) , où $\varepsilon \in G_o(k)$ est un élément central d'ordre 2 (ou encore $\varepsilon : \mu_2 \longrightarrow G_o$ un morphisme central). On passe de (G,w,t) à (G_o,ε) en posant

$$G_o = \mathrm{Ker}(t : G \longrightarrow \mathbb{G}_m)$$

(3.1.2.1)

$$\varepsilon = w(-1)$$

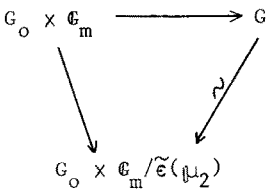
et on passe de (G_o,ε) à (G,w,t) par

$$G = \mathrm{Coker}(\widetilde{\varepsilon} : \mu_2 \longrightarrow G_o \times \mathbb{G}_m) \qquad \widetilde{\varepsilon} = (\varepsilon,-1)$$

$$w(\lambda) = (1,\lambda)$$

$$t(g,\lambda) = \lambda^{-2} \quad .$$

Si, par exemple, on part de (G,w,t), l'isomorphisme entre G et $G_o \times \mathbb{G}_m / \widetilde{\varepsilon}\,(\mu_2)$ est le seul rendant commutatif le triangle



Pour un triple (G,w,t), on note

$$G_o = \mathrm{Ker}(t)$$

$$G' = \mathrm{Coker}(w)$$

$$Z_o = \underline{\mathrm{Cent}}(G_o) = \mathrm{Ker}(t : Z \longrightarrow \mathbb{G}_m)$$

$$Z' = \underline{\mathrm{Cent}}(G') = \mathrm{Coker}(w : \mathbb{G}_m \longrightarrow Z)$$

Enfin, les morphismes

$$Z_o \longrightarrow Z'$$

$$G_o \longrightarrow G'$$

sont des épimorphismes et ont comme noyau $\mathrm{Im}(\epsilon)$.

3.1.4. Soit $(\mathcal{G},w,t)$ un triple comme dans 3.1.1. On note $\mathcal{G}_o$ la gerbe noyau du morphisme $t : \mathcal{G} \longrightarrow \mathrm{TORS}(\mathbb{G}_m)$, ou plus précisément la gerbe des couples (P,ξ) d'un objet P de $\mathcal{G}$ et d'un isomorphisme $\xi : t(P) \simeq \mathbb{G}_m$. Si Z (resp. Z_o) est le centre du lien de $\mathcal{G}$ (resp. $\mathcal{G}_o$) , on a par 3.1.2 que

$$Z_o = \mathrm{Ker}(t : Z \longrightarrow \mathbb{G}_m) ,$$

et si on note $\epsilon = w(-1)$, on a $\epsilon \in Z_o(k)$. Voici l'extension pour les gerbes des assertions faites en 3.1.3 pour les triples (G,w,t) et les couples (G_o,ϵ).

3.1.4.1. Proposition. La correspondance $(\mathcal{G},w,t) \longmapsto (\mathcal{G}_o,\epsilon)$ définit une 2-équivalence de la 2-catégorie des triples $(\mathcal{G},w,t)$ tels que le composé $\mathbb{G}_m \xrightarrow{w} Z \xrightarrow{t} \mathbb{G}_m$ soit -2 sur la 2-catégorie des couples $(\mathcal{G}_o,\epsilon)$, où $\epsilon \in Z_o(k)$.

3.1.4.2. Preuve. Il suffit de définir un 2-foncteur quasi-inverse, ou encore d'associer à un couple $(\mathcal{G}_o,\varepsilon)$, un triple $(\mathcal{G},w,t)$. Si $L_o = \text{lien}(\mathcal{G}_o)$, on a un morphisme $\varepsilon : \mu_2 \longrightarrow L_o$, et encore un morphisme

$$\tilde{\varepsilon} : \mu_2 \longrightarrow L_o \times \mathbb{G}_m$$

ayant ε et l'inclusion de μ_2 dans $\mathbb{G}_m$ comme composantes. Par définition, on pose

$$L = \text{Coker}(\tilde{\varepsilon})$$

et $\mathcal{G}$ est l'image directe de $\mathcal{G}_o \times \mathbb{G}_m \longrightarrow L$ (voir GIRAUD [1] IV, 2.3.18). D'après loc.cit. la gerbe $\mathcal{G}$ munie du morphisme de gerbes

$$\mathcal{G}_o \times \text{TORS}(\mathbb{G}_m) \longrightarrow \mathcal{G}$$

est unique à équivalence unique à isomorphisme unique près. De façon précise si

$$\mathcal{G}_o \times \text{TORS}(\mathbb{G}_m) \xrightarrow[u']{u} \mathcal{G}, \mathcal{G}'$$

sont des morphismes de gerbes liés par $L_o \times \mathbb{G}_m \longrightarrow L$, il existe un couple (a,α) d'une équivalence $a : \mathcal{G} \xrightarrow{\approx} \mathcal{G}'$ et d'un isomorphisme $\alpha : au \xrightarrow{\sim} u'$, et si (a,α) , (a',α') sont deux couples comme ci-dessus, il existe un et un seul isomorphisme $\mu : a \xrightarrow{\sim} a'$ vérifiant

$$\alpha' \circ (\mu * u) = \alpha \quad .$$

Ceci définit bien $\mathcal{G}$, et la définition de w,t est évidente. Partons, par exemple, d'un triple $(\mathcal{G},w,t)$ et voyons comment $\mathcal{G}$ se récupère à partir de $(\mathcal{G}_o,\varepsilon)$ de la façon décrite plus haut. On a un morphisme

$$\mathcal{G}_o \times \text{TORS}(\mathbb{G}_m) \longrightarrow \mathcal{G}$$

défini par $(X,P) \longmapsto P \overset{\mathbb{G}_m}{\times} X$: en effet, $\mathbb{G}_m$ agit sur tout objet de $\mathcal{G}$ par l'intermédiaire du morphisme $w : \mathbb{G}_m \longrightarrow Z = \underline{\text{Aut}}(\text{id}_{\mathcal{G}})$. De plus, ce morphisme de gerbes est évidemment lié par le morphisme de liens conoyau de $\tilde{\varepsilon}$, $c : L_o \times \mathbb{G}_m \longrightarrow L$, comme on le voit en passant à une extension de k sur laquelle les gerbes $\mathcal{G}_o$, $\mathcal{G}$ sont

neutres. Soit $\mathcal{G}_o \times \mathrm{TORS}(\mathbb{G}_m) \longrightarrow \mathcal{G}'$ le morphisme de gerbes (lié par c) défini comme plus haut. On a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_o \times \mathrm{TORS}(\mathbb{G}_m) & \longrightarrow & \mathcal{G}' \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{G} \end{array} \quad ,$$

qu'il faut compléter par un morphisme $\mathcal{G}' \longrightarrow \mathcal{G}$. Pour ceci, on considère le morphisme de gerbes (GIRAUD [1] IV, 2.3.2)

$$\mathrm{HOM}_L(\mathcal{G}', \mathcal{G}) \longrightarrow \mathrm{HOM}_c(\mathcal{G}_o \times \mathrm{TORS}(\mathbb{G}_m), \mathcal{G}) \ .$$

D'après loc.cit, ce sont des gerbes liées par Z , et il est clair que le morphisme lui-même est lié par id_Z , donc est une équivalence (loc.cit. 2.2.6) et le triangle précédent peut être complété.

3.1.4.3. Soit $\underline{T} = (\underline{C}, w, T)$ un triple de Tate, définissant un triple $(\mathcal{G}, w, t)$. La gerbe $\mathcal{G}_o$ introduite en 3.1.4, munie du morphisme évident $\mathcal{G}_o \longrightarrow \mathcal{G}$ et de l'isomorphisme entre $\mathcal{G}_o \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathrm{TORS}(\mathbb{G}_m)$ et le morphisme trivial $\mathcal{G}_o \longrightarrow \mathrm{TORS}(\mathbb{G}_m)$, correspond à une catégorie tannakienne $\underline{C}_o$ munie d'un morphisme

$$Q : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}_o$$

et d'un isomorphisme

$$q : Q(T) \simeq \underline{1} \ ;$$

de plus, le couple (Q,q) est solution du problème universel qu'on devine.

Supposons que $\underline{C}$ soit semi-simple et soit S l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets simples de $\underline{C}$; alors $\underline{C}_o$ l'est aussi et l'ensemble correspondant S_o s'identifie par Q au quotient de S par la relation d'équivalence qu'identifie deux objets simples de $\underline{C}$ si l'un se déduit de l'autre en tensorisant par une puissance de T . Ceci résulte des assertions suivantes, valables sans hypothèse de semi-simplicité :

a) Si V,W sont des objets de $\underline{C}$ homogènes de même degré, l'application

$$\mathrm{Hom}(V,W) \longrightarrow \mathrm{Hom}(QV,QW)$$

est bijective.

b) Si V (resp. W) est un objet de $\underline{C}$ homogène de degré n (resp. m) et V,W deviennent isomorphes dans $\underline{C}_o$, alors $n-m$ est pair, $n-m = 2k$, et $W \simeq V(k)$.

D'après III, 3.2.4 et 3.2.4.2, il suffit de prouver ces assertions après extension arbitraire du corps k, donc on peut supposer que $\underline{C}$, $\underline{C}_o$ sont neutres et que la situation est

$$\underline{\mathrm{Rep}}_o(G) \longrightarrow \underline{\mathrm{Rep}}_o(G_o) \quad ,$$

auquel cas, c'est trivial puisque $G = G_o \times \mathbb{G}_m/\mu_2$ (3.1.2).

3.1.4.4. Remarquons qu'il résulte des explicitations de 3.1.3, 3.1.4.2 que la gerbe $\mathcal{G}$ est neutre (resp. algébrique réductive) si et seulement si $\mathcal{G}_o$ est neutre (resp. algébrique, réductive). On n'a pas le même dictionnaire pour la connexité ; si $\mathcal{G}_o$ est (localement la gerbe des torseurs d'un groupe) connexe, il en est ainsi de $\mathcal{G}$, mais la réciproque n'est pas vraie en général.

3.2. Polarisations.

3.2.1. Soient K un sous-corps de $\mathbb{R}$, et $\underline{T} = (\underline{C},w,T)$ un triple de Tate (où $w : \mathbb{G}_m \longrightarrow Z = \underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\mathrm{id}_{\underline{C}})$ définit la graduation par le poids, T désigne l'objet de Tate). Une polarisation (graduée) π du triple de Tate $(\underline{C},w,T)$ consiste en la donnée pour chaque objet V de $\underline{C}$, homogène de poids n, d'une classe d'équivalence $\pi(V)$ de formes de Weil $V \otimes V \longrightarrow T^{\otimes -n}$ (2.3.1) de parité $(-1)^n$, vérifiant les conditions suivantes :

PG1) Si V,W sont des objets de $\underline{C}$ homogènes de même poids, $\varphi \in \pi(V)$,

$\psi \in \pi(W)$, alors $\varphi \oplus \psi \in \pi(V \oplus W)$.

PG2) Si V,W sont des objets homogènes de $\underline{C}$, $\varphi \in \pi(V)$, $\psi \in \pi(W)$, alors $\varphi \otimes \psi \in \pi\ (V \otimes W)$.

PG3) Le morphisme identité $T \otimes T \longrightarrow T^{\otimes 2}$ appartient à $\pi(T)$.

Si $V \in$ ob $\underline{C}$ est homogène et $\varphi \in \pi(V)$, on dit que φ est une forme positive pour π .

L'ensemble des polarisations du triple $\underline{T} = (\underline{C},w,T)$ sera noté $\mathrm{Pol}(\underline{C},w,T)$ ou $\mathrm{Pol}(\underline{T})$.

3.2.1.1. En procédant de la même façon qu'en 2.4 on prouve pour les polarisations graduées des résultats analogues à ceux démontrés pour les polarisations homogènes en 2.4.1.1, 2.4.2, 2.4.3.1 et 2.4.3.3.

De même, on adoptera la convention

3.2.1.2. Convention. Dans ce qui suit, on se limite au cas $K = \mathbb{R}$, et on ne considèrera que des $\mathbb{R}$-catégories tannakiennes algébriques.

3.2.2. D'après 3.1.1 on a un dictionnaire entre les triples de Tate $(\underline{C},w,T)$ et les triples $(\mathcal{C},w,t)$, ou encore par 3.1.4.1 et 3.1.4.3 avec les couples $(\mathcal{C}_o,\varepsilon)$, ou $(\underline{C}_o,\varepsilon)$. Voici comment on étend le dictionnaire $(\underline{C},w,T) \longmapsto (\underline{C}_o,\varepsilon)$ aux polarisations.

3.2.2.1. Proposition. Le triple $(\underline{C},w,T)$ est polarisable (i.e. $\mathrm{Pol}(\underline{C},w,T) \neq \emptyset$) si et seulement si la catégorie tannakienne $\underline{C}_o$ est polarisable et si de plus on a $\varepsilon_{\underline{C}_o} = \varepsilon \pmod{Z_o(\mathbb{R})^2}$ (voir 2.5.3). En outre, on a une bijection canonique

$$Q : \mathrm{Pol}(\underline{C},w,T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pol}_{\varepsilon}(\underline{C}_o) ,$$

et en particulier l'ensemble $\mathrm{Pol}(\underline{C},w,T)$ est un pseudo-torseur sous le groupe ${}_2Z_o(\mathbb{R})$.

3.2.2.2. Preuve. Elle ne présente pas de difficulté, à l'aide de la discussion 3.1.4.3. Par exemple, si $\pi \in \mathrm{Pol}(\underline{T})$, et $V \in \mathrm{ob}\ \underline{C}$ est homogène de degré n , on a une bijection canonique, définie par 3.1.4.3 a) et $q : Q(T) \simeq \underline{1}$

$$\mathrm{Hom}(V \otimes V, T^{\otimes n}) \simeq \mathrm{Hom}(QV \otimes QV, \underline{1}) ,$$

les éléments de $\pi(V)$ se correspondant avec ceux de $Q(\pi)\ (QV)$ par cette bijection.

3.2.3. Le dictionnaire précédent permet de ramener les questions sur les polarisations graduées, aux polarisations homogènes.

3.2.3.1. Théorème. Soit L un lien algébrique affine sur $\mathbb{R}$ de centre Z , et soient $t : L \longrightarrow \mathbb{G}_m$, $w : \mathbb{G}_m \longrightarrow Z$ des morphismes vérifiant $t \circ w = -2$, (voir 3.1.2). Alors,

1) Si $(\underline{C},w,T)$ est un triple de Tate lié par (L,w,t), $\mathrm{Pol}(\underline{C},w,T)$ est un pseudo-torseur sous ${}_2Z_o(\mathbb{R})$.

2) Si $(\underline{C},w,T)$, $(\underline{C}',w,T')$ sont des triples de Tate munis de polarisations π , π' , il existe une équivalence $(\underline{C},w,T) \cong (\underline{C}',w,T')$ et une seule à isomorphisme (non unique) près respectant les polarisations.

3) Supposons que L soit connexe ou abélien. Alors (L,w,t) est polarisable (i.e. il existe $(\underline{C},w,T)$ lié par (L,w,t) qui soit polarisable) si et seulement si $L_o = \mathrm{Ker}(t)$ est le lien d'un groupe compact. Dans ce cas, le triple polarisable $(\underline{C},w,T)$ (bien défini à équivalence près par 2)) est neutre si et seulement si $\varepsilon = w(-1) \in Z_o(\mathbb{R})^2$.

3.2.3.2. Les assertions 1), 2) résultent des assertions 1), 2), 3) de 2.4.5.1 et du dictionnaire établi plus haut. L'assertion 3) sera prouvée et précisée davantage au numéro suivant. Remarquons d'ores et déjà que le cas où L est abélien suit aussitôt de 2.4.5.1 et du dictionnaire précédent.

3.3. Cas neutre.

3.3.0. On maintient la convention 3.2.1.2.

3.3.1. Soit (G,w,t) un triple

$$\mathbb{G}_m \xrightarrow{w} G \xrightarrow{t} \mathbb{G}_m$$

où w est central et $t \circ w = -2$. Par 3.1.3, la donnée du triple (G,w,t) revient à celle d'un triple de Tate neutralisé ; la catégorie tannakienne neutralisée sous-jacente à celui-ci est $\underline{\mathrm{Rep}}_o(G)$.

Soit $C \in G_o(\mathbb{R})$ tel que $C^2 = \varepsilon = w(-1)$; une forme bilinéaire $\varphi : V \otimes V \longrightarrow T^{\otimes -n}$ sur un G-module V homogène de poids n est dite de C-polarisation si la forme bilinéaire sur le $\mathbb{R}$-vectoriel V

$$\varphi^C(x,y) = \varphi(x,Cy)$$

est symétrique définie positive, i.e. si en considérant V comme G_o-module, φ est une forme de C-polarisation (2.7.1).

On dit qu'un élément $C \in G_o(\mathbb{R})$ tel que $C^2 = \varepsilon$ est hodgien si chaque G-module homogène V possède une forme de C-polarisation et que le triple (G,w,t) est hodgien s'il existe un élément hodgien dans $G_o(\mathbb{R})$. Chaque élément hodgien $C \in G_o(\mathbb{R})$ définit une polarisation π_C de (G,w,t) et les polarisations obtenues ainsi sont appelées hodgiennes. La proposition suivante, dont la démonstration n'offre pas de difficulté, ramène l'étude des C-polarisations des triples (G,w,t) à celle des C-polarisations des $\mathbb{R}$-groupes algébriques affines (2.7.1).

3.3.1.1. Proposition. Le triple (G,w,t) est hodgien si et seulement si le $\mathbb{R}$-groupe G_o est hodgien et si l'invariant $\varepsilon_{\underline{C}_o}$ $(\underline{C}_o = \mathrm{Rep}_o(G_o))$ est égal à $\varepsilon = w(-1)$ mod $Z_o(\mathbb{R})^2$ (voir 2.5.3). Les éléments de $G_o(\mathbb{R})$ hodgiens relativement à (G,w,t) sont exactement les éléments qui sont hodgiens au sens de 2.7.1 et qui vérifient $C^2 = \varepsilon$.

3.3.2. On va déterminer maintenant les triples de Tate polarisables dans des cas particuliers importants et compléter ainsi la preuve de 3.2.3.1 3).

Soit L un lien algébrique affine connexe de centre Z, et soient $t : L \longrightarrow \mathbb{G}_m$, $w : \mathbb{G}_m \longrightarrow Z$ vérifiant $tw = -2$. On a des liens L_o, L' de centres Z_o, Z' comme dans 3.1.2. Si (L,w,t) est polarisable (3.2.3.1 2)), L est réductif (et étant connexe, il est représentable, par 1.1.2), et par 3.2.3.1 1) il existe un triple de Tate unique à équivalence près $(\underline{C},w,T)$ qui soit polarisable. On notera $\mathcal{G}$ la gerbe associée à $\underline{C}$.

Ces notations posées, on a

3.3.2.1. Théorème 1) Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) (L,w,t) est polarisable.

(ii) L' est le lien d'un $\mathbb{R}$-groupe compact

(iii) L_o est le lien d'un $\mathbb{R}$-groupe compact.

Dans ce cas $\underline{C}$ est neutre si et seulement si $w(-1) \in Z_o(\mathbb{R})^2$.

2) Supposons (L,w,t) polarisable et $\underline{C}$ neutre. Alors le triple $(\underline{C},w,T)$ est C-polarisable et L_o est connexe.

3) Supposons (L,w,t) polarisable et L_o non connexe. Alors $\mathcal{G}$ est le produit de $\mathrm{TORS}(G')$ par la seule gerbe non neutre de groupe μ_2, où G' est le seul $\mathbb{R}$-groupe compact avec $\mathrm{lien}(G') = L'$.

3.3.2.2. Preuve. Prouvons 1). On notera que chacune des conditions (i),(ii),(iii) entraîne que L est représentable. On peut donc poser $L = \mathrm{lien}(G)$, $L' = \mathrm{lien}(G')$ $L_o = \mathrm{lien}(G_o)$, où $G' = \mathrm{Coker}(w : \mathbb{G}_m \longrightarrow G)$, $G_o = \mathrm{Ker}(t : G \longrightarrow \mathbb{G}_m)$. Prouvons (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i). Si (L,w,t) est polarisable, on voit aussitôt qu'une polarisation de $(\underline{C},w,T)$ induit une polarisation sur la sous-catégorie $\underline{C}'$ de $\underline{C}$ des objets de poids 0. Puisque le lien de $\underline{C}'$ est visiblement L' et que L' est connexe, on obtient (ii) par 2.4.5.1. Supposons maintenant que G' est compact ;

alors G_o en tant qu'extension du groupe compact connexe G' par le groupe fini constant $\mathrm{Im}(\varepsilon : \mu_2 \longrightarrow G_o)$ est également compact. Enfin (iii) $\Rightarrow$ (i) suit de 3.2.2.1 et de 2.6.1.

La dernière assertion suit également de 2.6.1.

Prouvons 2). Si $\underline{C}$ est neutre, G_o doit être connexe ; autrement, il y aurait un morphisme $G_o \longrightarrow \mu_2$ envoyant ε en -1, et une ε-polarisation de $\underline{C} = \underline{\mathrm{Rep}}_o(G_o)$ induirait une (-1)-polarisation de $\underline{\mathrm{Rep}}_o(\mu_2)$. Or, il n'existe pas de telle polarisation sur $\underline{\mathrm{Rep}}_o(\mu_2)$, $\mathrm{Pol}(\mu_2)$ est uniquement composé de polarisations symétriques (voir 2.4.5.1). Puisque G_o est connexe, $\underline{C}$ est C-polarisable par 2.8.2 et 3.3.1.1.

L'assertion 3) n'offre pas de difficulté.

Chapitre VI : EXEMPLES TIRES DE LA GEOMETRIE ALGEBRIQUE

§ 1. Systèmes locaux et modules stratifiés

1.1. Systèmes locaux

1.2. Modules stratifiés

§ 2. Structures de Hodge

2.1. Structures de Hodge

2.2. Variations de structures de Hodge

§ 3. F-cristaux

3.1. Généralités

3.2. F-cristaux sur un corps parfait

3.3. Cas d'un corps algébriquement clos

3.4. Cas d'un corps fini

3.5. Appendice : catégories tannakiennes à lien diagonalisable

§ 4. Motifs

4.1. Motifs sans conjectures

4.1.0. Préliminaires

4.1.1. La catégorie $\underline{CV}(k)$ des correspondances

4.1.2. La catégorie $\underline{M}^{+}(k)$ des motifs effectifs

4.1.3. La catégorie des motifs

4.1.4. Motifs et théories de cohomologie

4.1.5. Motifs effectifs de degré $0, 1$.

4.2. La catégorie tannakienne des motifs

4.3. Niveaux

4.4. La polarisation canonique

4.5. Motifs en caractéristique nulle

4.6. Motifs en caractéristique non nulle

Appendice : Conjectures en géométrie algébrique

A0. Relations d'équivalence pour les cycles algébriques

0.1. Cycles algébriques

0.2. Relations d'équivalence

0.3. Correspondances algébriques

A1. Théories de cohomologie

1.1. Définitions

1.2. Remarques diverses

1.3. Correspondances cohomologiques

1.4. Exemples

A2. Les conjectures standard

2.1. Notations

2.2. Conjectures de type Lefschetz

2.3. Conjectures de type Hodge

2.4. La conjonction des conjectures standard

A3. Conséquences des conjectures standard

A4. La conjecture de Tate

A5. La conjecture de Hodge

§ 1. SYSTEMES LOCAUX ET MODULES STRATIFIES

1.1. Systèmes locaux.

1.1.1. Soit X un espace topologique connexe ; rappelons qu'un système local (ensembliste) est un espace X' au-dessus de X qui localement sur la base X est de la forme $X' = X \times I$, où I est un espace discret. On peut aussi définir un système local comme étant un faisceau localement constant sur X, i.e. un faisceau qui localement sur X soit associé à un préfaisceau constant.

Choisissons un point $x \in X$; ceci détermine un foncteur de la catégorie $\underline{SLoc}(X)$ des systèmes locaux sur X vers la catégorie des ensembles, le foncteur "fibre en x"

$$\varphi_x : \underline{SLoc}(X) \longrightarrow \underline{Ens} .$$

Si $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ est un lacet au point x, puisque tout système local sur $[0,1]$ est constant, on voit que γ détermine un automorphisme du foncteur φ_x, qui dépend uniquement de la classe de γ dans $\pi_1(X,x)$ et multiplicativement en celle-ci. Ceci signifie que φ_x se relève en un foncteur

$$\tilde{\varphi}_x : \underline{SLoc}(X) \longrightarrow \underline{Ens}(\pi) \quad ,$$

où $\underline{Ens}(\pi)$ est la catégorie des ensembles munis d'une action de $\pi = \pi_1(X,x)$. Si X est un espace localement connexe par arc et localement simplement connexe par arc, ce foncteur est une équivalence de catégories. Si X est, par exemple, seulement localement connexe, le groupe $\pi_1(X,x)$ n'est plus adapté pour interpréter $\underline{SLoc}(X)$ mais on peut le remplacer avantageusement par le "pro-groupe fondamental" de X (voir 1.1.2).

1.1.1.1. Soient X un espace topologique connexe non vide, k un corps. On notera $\underline{SLoc}(X,k)$ la catégorie des systèmes locaux en k-vectoriels de rang fini (i.e. des faisceaux de modules localement libres de rang fini sur le faisceau d'anneaux simple de valeurs k sur X). Elle est munie d'une structure k-linéaire et d'une loi $\otimes$ ACU évidentes, pour lesquelles c'est une catégorie tannakienne sur k, qui est neutre.

En effet, chaque point $x \in X$ définit un foncteur fibre ω_x : $\underline{SLoc}(X,k) \longrightarrow \underline{Modf}(f)$, qui se relève même en un foncteur $\tilde{\omega}_x$: $\underline{SLoc}(X,k) \longrightarrow \underline{Rep}_o(\pi_1(X,x))$ à valeurs dans les k-vectoriels munis d'une action de $\pi_1(X,x)$.

1.1.1.2. Supposons X localement connexe par arc et localement simplement connexe par arc. Alors, les foncteurs $\tilde{\omega}_x$ sont des équivalences de catégories tannakiennes. En d'autres termes, si $x \in X$, le <u>groupe d'holonomie</u> de $\underline{SLoc}(X,k)$ en ω_x (III 3.2.1.2) est l'enveloppe k-algébrique du groupe discret $\pi_1(X,x)$. Notons ce groupe $H(X,x)$, et $H(X,x)^o$ sa composante neutre. Si E est un système local, il lui correspond un k-groupe algébrique $H(E,x)$, le <u>groupe d'holonomie</u> de E en ω_x (III 3.2.1.2) ; c'est l'enveloppe algébrique de $\pi_1(X,x)$ dans $\underline{GL}(E_x)$, où $E_x = \omega_x(E)$. Le quotient H/H^o est un groupe pro-étale, et définit une sous-$\otimes$-catégorie pleine $\underline{C}^o$ de $\underline{C} = \underline{SLoc}(X,k)$. On voit aussitôt que $H/H^o = \hat{\pi}$ le groupe profini complété séparé de $\pi_1(X,x)$ pour la topologie des sous-groupes d'indice fini et que si E est un objet de $\underline{C}$, E appartient à $\underline{C} \iff H(E,x)$ est fini $\iff$ E devient trivial après un revêtement fini $X' \longrightarrow X$.

1.1.1.3. Remarquons qu'en général $\underline{SLoc}(X,k)$ possède des foncteurs fibre non isomorphes à ceux définis par des points de X. En effet, ces derniers sont deux à deux isomorphes, et il suffit de choisir k et X tels que

$$H^1(k,H(X,x)) \neq \{1\} ,$$

en vertu de la classification des foncteurs fibre II 3.2.3.3. Par exemple, $k = \mathbb{R}$ et X tel que $\pi_1(X,x) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

1.1.2. On indique ici comment on peut généraliser l'exemple précédent. Soit X un topos (SGA 4 IV) supposé connexe et localement connexe ; rappelons (ARTIN-MAZUR [1] § 9) qu'un objet non vide U de X est <u>connexe</u> si chaque fois que $U = U_1 \amalg U_2$, soit $U_1 = \emptyset$ ou $U_2 = \emptyset$, que le topos X est <u>connexe</u> si l'objet final e de X est connexe, et enfin que X est localement connexe si tout objet de X est somme disjointe d'objets connexes. Un <u>système local</u> (ensembliste) de X est un objet de X

qui localement est associé à un ensemble (i.e. un faisceau localement constant). On peut associer au topos X (voir loc. cit. § 10 et aussi SGA 3, X 7.5, SGA 4, IV 2.7.5), muni d'un point $x : \underline{Ens} \longrightarrow X$, un pro-groupe strict $\pi_1(X,x) = (G_i)_{i\in I} = \underline{G}$ (i.e. un système projectif de groupes G_i dont les morphismes de transition sont surjectifs) qui permet de donner une interprétation de la catégorie $\underline{SLoc}(X)$ des systèmes locaux sur X en termes d'ensembles munis d'une action "continue" de $\pi_1(X,x)$. Si E est un système local sur X, l'ensemble $x^{-1}(E)$ est de façon naturelle un $\underline{G}$-ensemble (voir SGA 4, IV 2.7.1 pour la définition d'un $\underline{G}$-ensemble). Cette construction définit un foncteur

$$\tilde{\varphi}_x : \underline{SLoc}(X) \longrightarrow \underline{Ens}(\underline{G})$$

et on vérifie que c'est une équivalence de catégories.

1.1.2.1. Si k est un corps, on définit la catégorie tannakienne $\underline{Sloc}(X,k)$ des systèmes locaux en k-vectoriels de rang fini. Si $x : \underline{Ens} \longrightarrow X$ est un point du topos X, il résulte de ce qui précède que le foncteur fibre $\omega_x : \underline{SLoc}(X,k) \longrightarrow \underline{Modf}(k)$ induit une équivalence de catégories tannakiennes

$$\tilde{\omega}_x : \underline{SLoc}(X,k) \xrightarrow{\approx} \underline{Rep}_o(\underline{G}) ,$$

où $\underline{Rep}_o(\underline{G})$ dénote la catégorie tannakienne des k-vectoriels de rang fini munis d'une action continue de $\underline{G} = (G_i) = \pi_1(X,x)$. On vérifie aussitôt qu'on a

$$\underline{Rep}_o(\underline{G}) = \varinjlim \underline{Rep}_o(G_i) ,$$

et que si H_i dénote l'enveloppe k-algébrique de G_i, H l'enveloppe k-algébrique de $\underline{G}$, on a

$$H \simeq \varprojlim H_i ,$$

et que les morphismes de transition sont des épimorphismes (II 4.3.2 g)).

1.1.3. Gardons le topos X, et soit ℓ un nombre premier. On va introduire la catégorie tannakienne $\underline{SLoc}_\ell(X)$ sur $\mathbb{Q}_\ell$ des faisceaux ℓ-adiques. Un <u>système local</u>

ℓ-adique est un système projectif $(E_n)_{n\geq 1}$ où E_n est un système local sur X de $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$ - modules libres de rang fini et E_n se déduit de E_{n+1} par réduction mod.ℓ^n . La catégorie ainsi obtenue est une $\otimes$-catégorie ACU $\mathbb{Z}_\ell$ - linéaire de façon évidente, pour laquelle les Hom sont libres de rang fini sur $\mathbb{Z}_\ell$. La catégorie $\underline{SLoc}_\ell(X)$ des faisceaux ℓ-adiques a, par définition, les mêmes objets et pour deux objets E , E' on pose

$$\mathrm{Hom}(E,E') = \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell}(E,E') \quad .$$

On vérifie sans peine qu'on a ainsi une $\otimes$-catégorie ACU abélienne $\mathbb{Q}_\ell$-linéaire. On a même mieux : si $x : \underline{Ens} \longrightarrow X$ est un point de X , si $\underline{G} = (G_i) = \pi_1(X,x)$, et si on note $\hat{\underline{G}} = \varprojlim \hat{G}_i$ le complété profini de $\underline{G}$, on voit que la donnée d'un système local ℓ-adique E revient à celle d'un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre de rang fini E_x où $\hat{\underline{G}}$ opère continument ($\hat{\underline{G}}$ muni de la topologie profinie et E_x de la topologie ℓ-adique) ; on en déduit que le choix d'un point x définit une équivalence de la $\otimes$-catégorie ACU $\underline{SLoc}_\ell(X)$ avec la catégorie $\underline{Rep.cont.}_o(\hat{\underline{G}})$ des $\mathbb{Q}_\ell$-vectoriels de rang fini où $\hat{\underline{G}}$ opère continument. Ceci provient de ce que, $\hat{\underline{G}}$ étant compact, tout $\mathbb{Q}_\ell$-vectoriel de rang fini d'une action continue de $\hat{\underline{G}}$ possède un $\mathbb{Z}_\ell$-réseau stable sous $\hat{\underline{G}}$.

Comme conséquence de la discussion : chaque point x du topos X définit un foncteur fibre ω_x de la catégorie tannakienne $\underline{SLoc}_\ell(X)$, et le groupe d'holonomie de celle-ci en ω_x est "l'enveloppe algébrique ℓ-adique" du groupe profini complété séparé du pro-groupe fondamental $\pi_1(X,x)$.

1.1.4. Soit S un schéma, et soit $S_{ét}$ le site étale de S qui a comme catégorie sous-jacente celle des S-schémas étales, et donnant lieu à un topos $X = \tilde{S}_{ét}$. Chaque point géométrique ξ de S définit un point x de X ; si S est connexe localement noethérien, le topos X est connexe et localement connexe, et ξ définit un pro-groupe $\underline{G} = \pi_1(X,x)$: c'est le pro-groupe fondamental élargi de SGA 3, X § 6. On trouve que ξ définit un foncteur fibre ω_ξ sur la catégorie tannakienne

$\underline{SLoc}(S_{ét},k) = \underline{SLoc}(X,k)$ des systèmes locaux en k-vectoriels sur X (k un corps donné), appelés aussi systèmes locaux étales sur S (en k-vectoriel de rang fini). De plus, ω_ξ définit une équivalence de catégories tannakiennes entre $\underline{SLoc}(S_{ét},k)$ et $\underline{Rep}_o(\underline{G})$.

Rappelons la propriété suivante des morphismes étales (SGA 4, VIII, 1.1) : soit $S' \longrightarrow S$ un morphisme entier, surjectif et radiciel (i.e. un homéomorphisme universel) ; alors le foncteur changement de base $S_{ét} \longrightarrow S'_{ét}$ est une équivalence de sites. On en déduit en particulier des équivalences de catégories tannakiennes

$$\underline{SLoc}(S_{ét},k) \simeq \underline{SLoc}(S'_{ét},k) \quad .$$

1.1.4.1. Une autre topologie qu'on peut introduire sur Et/S est celle engendrée par la prétopologie pour laquelle les familles couvrantes sont les familles surjectives formées de morphismes étales et finis (c'est la topologie étale finie globale). Elle donne lieu à un topos X , et si ξ est un point géométrique de S , x le point de X qu'il définit, le pro-groupe fondamental $\pi_1(X,x)$ n'est autre que le groupe fondamental pro-fini $\pi_1(S,\xi)$ étudié en SGA 1, V . Les systèmes locaux sur X sont les systèmes locaux étales somme disjointe de systèmes locaux étales qui se trivialisent après un revêtement étale, et $\pi_1(S,\xi)$ est le complété profini du $\underline{G}$ considéré plus haut. Les deux notions coïncident si S est géométriquement unibranche.

Si on note $\underline{SLoc}(S_{étf},k)$ la catégorie des systèmes locaux en k-vectoriels de rang fini sur X , on voit que le choix d'un point géométrique ξ de S définit un foncteur fibre

$$\omega_\xi : \underline{SLoc}(S_{étf},k) \longrightarrow \underline{Modf}(k)$$

et que le groupe d'holonomie de $\underline{SLoc}(S_{étf},k)$ en ω_ξ est le groupe profini $(\pi_1(S,\xi))_k$.

1.1.5. Soit S un schéma localement, de type fini sur $\mathbb{C}$, et notons X le topos étale fini de S ($X = \widetilde{S}_{étf}$, voir 1.1.4.1), X' le topos associé à la topologie

usuelle de $S(\mathbb{C})$. On a un morphisme de topos

$$X' \longrightarrow X ,$$

qui induit un morphisme de catégories tannakiennes (par image inverse) pour tout corps k ,

$$\underline{SLoc}(S_{étf},k) \longrightarrow \underline{Sloc}(S(\mathbb{C}),k) .$$

Soit $s \in S(\mathbb{C})$, il est connu (SGA 4, XI 4.3) que le groupe fondamental profini $\pi_1(S,s)$ s'identifie au complété profini $(\pi_1(S(\mathbb{C}),s))\hat{}$ de $\pi_1(S(\mathbb{C}),s)$. On déduit de 1.1.2.1 et de la fin de 1.1.1.2 que le foncteur précédent identifie $\underline{SLoc}(S_{étf},k)$ a la sous-catégorie pleine de $\underline{SLoc}(S(\mathbb{C}),k)$ des systèmes locaux sur $S(\mathbb{C})$ ayant un groupe d'holonomie fini.

1.2. Modules stratifiés

1.2.1. Soit X un schéma localement de type fini sur un corps k ; pour chaque $n \geq 1$, soit $D^n(1)$ le n-ième voisinage infinitésimal de X dans $X \times_k X$, et

$$D^n(1) \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} X$$

les morphismes induits par les projections de $X \times X$ sur X . De même, soit $D^n(2)$ le n-ième voisinage infinitésimal de X dans $X \times_k X \times_k X$, muni de projections

$$D^n(2) \underset{p_{13}}{\overset{p_{12}}{\overset{p_{23}}{\rightrightarrows}}} D^n(1)$$

$$D^n(2) \underset{q_3}{\overset{q_1}{\overset{q_2}{\rightrightarrows}}} X ,$$

vérifiant des relations évidentes avec les p_i $(i = 1,2)$. De plus, on a des immersions fermées

$$D^n(1) \longrightarrow D^{n+1}(1)$$

compatibles avec les morphismes précédents. On notera

$$\hat{X}(1) = \varinjlim D^n(1)$$

$$\hat{X}(2) = \varinjlim D^n(2)$$

les schémas formels complétés formels de $X \times X$ (resp. $X \times X \times X$) le long de la diagonale ; ils sont munis de morphismes

$$\hat{X}(2) \;\underset{\longrightarrow}{\overset{p_{12}}{\overset{p_{23}}{\overset{p_{13}}{\longrightarrow}}}}\; \hat{X}(1) \;\underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}}\; X$$

et

$$\hat{X}(2) \;\underset{\longrightarrow}{\overset{q_1}{\overset{q_2}{\overset{q_3}{\longrightarrow}}}}\; X \quad .$$

Si E est un module cohérent sur X (ou plus généralement, un objet sur X d'une catégorie fibrée au-dessus de $\underline{\mathrm{Sch}}_{/X}$), une n-<u>connexion</u> sur E (voir GROTHENDIECK [4], Appendix) est une donnée de descente sur E relativement au diagramme

$$D^n(2) \;\underset{\longrightarrow}{\overset{\longrightarrow}{\overset{\longrightarrow}{\longrightarrow}}}\; D^n(1) \;\rightrightarrows\; X \quad ,$$

i.e. un isomorphisme

$$\alpha : p_1^*(E) \xrightarrow{\sim} p_2^*(E)$$

vérifiant la condition de transitivité

$$p_{23}^*(\alpha) \circ p_{12}^*(\alpha) = p_{13}^*(\alpha) \quad .$$

Une <u>stratification</u> sur E est un système de n-connexions sur E ($n \geq 1$) compatibles entre elles, i.e. telles que la n-connexion du système soit induite par la (n+1)-connexion ; on peut aussi voir une stratification comme une donnée de descente relative au diagramme

$$\hat{X}(2) \;\underset{\longrightarrow}{\overset{\longrightarrow}{\overset{\longrightarrow}{\longrightarrow}}}\; \hat{X}(1) \;\rightrightarrows\; X \quad .$$

Si E est un module cohérent sur X possédant une stratification relativement à k, on voit sans difficulté que E est un $\underline{O}_X$-module localement libre (de rang fini) ; en effet, on se ramène comme d'habitude au cas où X est local, puis local complet, enfin local artinien. Dans ce dernier cas, si $X = \mathrm{Spec}(A)$ où A est une k-algèbre locale artinienne, on a

$$\hat{X}(1) = X \times X$$

$$\hat{X}(2) = X \times X \times X ,$$

et une stratification sur un A-module de type fini se réduit à une donnée de descente habituelle ; le module se descend, et en particulier est libre.

1.2.1.1. Supposons k de caractéristique zéro et X lisse sur k. Si E est un module cohérent sur X, on voit facilement que la donnée d'une stratification sur E relativement à k revient à celle d'une connexion à courbure nulle sur E relativement à k (voir DELIGNE [2], I 2.21 pour cette notion) ; ceci provient de la structure locale bien connue de l'algèbre des opérateurs différentiels sur un schéma lisse (EGA IV 16.11.2) et de ce que k est de caractéristique 0.

1.2.2. Soit X un k-schéma connexe et localement de type fini, et notons $\underline{\mathrm{Strat}}(X/k)$ la catégorie des $\underline{O}_X$-modules cohérents munis d'une stratification. C'est de façon évidente une $\otimes$-catégorie ACU k-linéaire. Elle est abélienne, comme il résulte aussitôt du fait qu'un $\underline{O}_X$-module cohérent stratifié est localement libre (1.2.1). De plus, si k'/k est une extension de k, $x \in X(k')$, le changement de base $x : \mathrm{Spec}(k') \longrightarrow X$ définit un $\otimes$-foncteur ACU k-linéaire

$$\omega_x : \mathrm{Strat}(X/k) \longrightarrow \underline{\mathrm{Modf}}(k') .$$

qu'on vérifie être fidèle et exact. Comme la loi $\otimes$ ACU de $\underline{\mathrm{Strat}}(X/k)$ fait de celle-ci une $\otimes$-catégorie rigide (I 5.1.1), on voit que $\underline{\mathrm{Strat}}(X/k)$ est une catégorie tannakienne sur k.

1.2.2.1. De façon générale, si S est un k-schéma, $x \in X(S)$, on note

$$\omega_x : \underline{\mathrm{Strat}}(X/k) \longrightarrow \underline{\mathrm{Loclib}}(S)$$

le foncteur fibre défini par le changement de base $x : S \longrightarrow X$. Le S-groupe $\underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega_x)$ sera noté $H(X,x)$ ou simplement $H(x)$ et appelé <u>groupe d'holonomie</u> de X au point x ; de même, on posera $H(X,x)^o$ ou $H^o(x)$ pour la composante neutre du groupe d'holonomie, et on l'appellera <u>groupe d'holonomie restreint</u> de X au point x. Si E est un module stratifié sur X, il engendre une sous-catégorie tannakienne de $\underline{\mathrm{Strat}}(E/k)$, et il lui correspond un S-groupe $H_E(x)$ quotient de $H(x)$, appelé <u>groupe d'holonomie</u> de E au point x, et sa composante neutre $H_E^o(x)$, le <u>groupe d'holonomie restreint</u> de E au point x.

1.2.2.2. En particulier, si $\mathrm{id}_x \in X(X)$, on obtient comme foncteur fibre le foncteur

$$\underline{\mathrm{Strat}}(X/k) \longrightarrow \underline{\mathrm{Loclib}}(X)$$

"oubli de la stratification", qu'on notera $E \longmapsto E_o$. Supposons que $X(k) \neq \emptyset$ (par exemple si k est algébriquement clos), et soit $x \in X(k)$ un point rationnel. D'après la théorie générale (II 4.1.1), le foncteur $\omega_x : \underline{\mathrm{Strat}}(X/k) \longrightarrow \underline{\mathrm{Modf}}(k)$ induit une équivalence de catégories tannakiennes

$$\tilde{\omega}_x : \underline{\mathrm{Strat}}(X/k) \xrightarrow{\approx} \underline{\mathrm{Rep}}_o(H(x)) , \tag{1.2.2.1}$$

où $H(x)$ est le groupe d'holonomie de X au point x. Le foncteur $E \longmapsto E_o$ correspond à un torseur à droite P sous le X-groupe affine $H(x)_X$, et on a un isomorphisme fonctoriel en E (II 3.2.3.4, 4.2.2)

$$E_o \simeq P \times^{H(x)} E_x , \tag{1.2.2.2}$$

où $E_x = \omega_x(E)$. Si P_E désigne le torseur sous $(H_E(x))_X$ image directe de P par $H(x) \longrightarrow H_E(x)$, on peut écrire cet isomorphisme comme

$$E_o \simeq P_E \times^{H_E(x)} E_x \quad ; \tag{1.2.2.3}$$

sous cette forme on reconnaît mieux le classique théorème de réduction du groupe

structural de E au groupe d'holonomie.

1.2.3. Soient X localement de type fini sur k, $x \in X(k)$. On a donc un foncteur fibre $\omega_x : \underline{Strat}(X/k) \longrightarrow \underline{Modf}(k)$, le groupe d'holonomie $H(x) = \underline{Aut}^{\otimes}(\omega_x)$; le foncteur oubli $E \longmapsto E_o$ se déduit de $(\omega_x)_X$ par un torseur P sous $H(x)_X$ de la façon expliquée en 1.2.2.2. En fait, le torseur P est muni d'une stratification relativement à k ; ceci provient de ce que le foncteur oubli est muni d'une stratification évidente par la définition même de $\underline{Strat}(X/k)$, et de ce que P est l'image de ce foncteur oubli par l'équivalence de champs (sur $\underline{Sch}_{/k}$) (II 4.2.2)

$$FIB_o(\underline{Strat}(X/k)) \xrightarrow{\approx} TORS(H(k))$$

$$\omega \longmapsto \underline{Isom}^{\otimes}(\omega_x, \omega) \quad .$$

Il en résulte que l'action de tordre par P un $H(x)$-objet A (d'une catégorie fibrée sur $\underline{Sch}_{/k}$ disons) munit l'objet obtenu $P \times^{H(x)} A$ d'une stratification relativement à k ; on vérifie aussitôt que l'isomorphisme (1.2.2.2) se relève en un isomorphisme de $\underline{O}_X$-modules stratifiés relativement à k

$$E \simeq P \times^{H(x)} E_x \quad .$$

1.2.3.1. Soit $\underline{D}$ une catégorie tannakienne. La donnée d'un morphisme $\omega : \underline{D} \longrightarrow \underline{Strat}(X/k)$ équivaut à celle d'un foncteur fibre $\omega_o : \underline{D} \longrightarrow \underline{Loclib}(X)$ muni d'une stratification relativement à k. Si on a fixé $x \in X(k)$, la donnée d'un morphisme $\underline{D} \longrightarrow \underline{Strat}(X/k)$ revient à celle d'un couple (ω, Q) d'un foncteur fibre $\omega : \underline{D} \longrightarrow \underline{Modf}(k)$ et d'un torseur Q sous G_X muni d'une stratification relativement à k, où $G = \underline{Aut}^{\otimes}(\omega)$.

En particulier, faisons $\underline{D} = \underline{Rep}_o(G)$, où G est un k-groupe affine. On trouve que la donnée d'un torseur à droite sous G_X muni d'une stratification relativement à k revient à celle d'un couple (ω, ξ) d'un morphisme $\underline{Rep}_o(G) \longrightarrow \underline{Strat}(X/k)$ et d'un $\otimes$-isomorphisme $\xi : \omega_x \circ \omega \xrightarrow{\sim} \omega_o^F$.

1.2.4. Fixons un schéma X connexe et localement de type fini sur un corps k. On posera $\underline{SLoc}'(X)$ (resp. $\underline{SLoc}(X)$) pour la catégorie tannakienne sur k des systèmes locaux en k-vectoriels de rang fini sur X, en munissant X de la topologie étale (resp. étale finie globale) (voir 1.1.4, 1.1.4.1). On a un morphisme de catégories tannakiennes

$$\underline{SLoc}(X) \longrightarrow \underline{SLoc}'(X) \tag{1.2.4.1}$$

qui identifie $SLoc(X)$ à la sous-catégorie pleine des systèmes locaux qui deviennent triviaux après un revêtement étale ; si X est normal, c'est une équivalence de catégories.

Soit F un objet de $\underline{SLoc}'(X)$ et notons $F \otimes_k \underline{O}_X$ le $\underline{O}_X$-module localement libre qu'il définit de façon évidente. Celui-ci est muni d'une stratification canonique ; cela provient de ce que les morphismes $X \longrightarrow D^n(1)$, $X \longrightarrow D^n(2)$ $(n \geq 1)$ sont entiers surjectifs et radiciels et de la remarque avant 1.1.4.1. On obtient ainsi des morphismes de catégories tannakiennes

$$\underline{SLoc}'(X) \longrightarrow \underline{Strat}(X/k) \tag{1.2.4.2}$$

$$\underline{SLoc}(X) \longrightarrow \underline{Strat}(X/k) \quad . \tag{1.2.4.3}$$

1.2.4.1. Proposition. *Si k est algébriquement clos, (1.2.4.3) identifie $SLoc(X)$ à la sous-catégorie pleine des modules stratifiés E qui sont trivialisés par un revêtement étale $X' \longrightarrow X$; si on choisit $x \in X(k)$, ceci revient à dire que le groupe d'holonomie de E en x est constant fini. En particulier, si $H = H(x)$, (1.2.4.3) définit un isomorphisme*

$$H/H^{\circ} \xrightarrow{\sim} (\pi_1(X,x))_k \quad . \tag{1.2.4.4}$$

1.2.4.2. Preuve. Si F est un objet de $\underline{SLoc}(X)$, il est clair que $F \otimes_k \underline{O}_X$ se trivialise après un revêtement étale (à savoir, celui qui trivialise F), et aussi que le groupe d'holonomie de $F \otimes_k \underline{O}_X$ en x est fini constant ; ce dernier est en effet un sous-groupe de (en fait il est égal à) l'image de $\pi_1(X,x)$ dans $Aut(F_x)$,

qui est finie. Il faut montrer comment à un module stratifié E tel que $H_E(x)$ soit fini constant on peut associer un système local F ; les vérifications de ce qu'on obtient ainsi un foncteur quasi-inverse seront triviales comme d'habitude.

Posons G pour le k-groupe fini constant $H_E(x)$, P pour le G_X-torseur à droite P_E (1.2.2.2). C'est un torseur sous un groupe fini constant, donc il devient trivial sur un revêtement étale de X, par exemple P lui-même. D'autre part, G agit sur le k-vectoriel E_x fibre en x, mais il agit aussi sur le système local constant sur X de valeur E_x, qu'on notera E_X (c'est ici qu'il est essentiel que G soit fini constant). Par définition, le système local F qu'on attache à E est

$$F = P \overset{G_x}{\times} E_X \quad .$$

La dernière assertion est conséquence formelle de ce qui précède ; en effet, $\underline{\mathrm{Rep}}_o(H/H^o)$ s'identifie à la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Rep}}_o(H)$ des H-modules tels que l'action de H se factorise par un quotient fini constant.

1.2.4.3. Remarque. Soient k'/k une extension de corps algébriquement clos, X un k-schéma connexe localement de type fini ; notons $X' = X \times_k k'$. On a un $\otimes$-foncteur ACU k-linéaire

$$\underline{\mathrm{Strat}}(X/k) \longrightarrow \underline{\mathrm{Strat}}(X'/k') \quad ,$$

et si $x \in X(k)$ d'image $x' \in X'(k')$, on en déduit un morphisme de k'-groupes

$$H(x') \longrightarrow (H(x))_{k'} \quad . \tag{1.2.4.5}$$

On vient de prouver que le morphisme induit par (1.2.4.5) sur les groupes de composantes connexes n'est autre que

$$\pi_1(X',x') \longrightarrow \pi_1(X,x) \quad .$$

Celui-ci est un isomorphisme si k est de caractéristique zéro, ou si X est propre (SGA 1, X 1.8). On peut se demander si (1.2.4.5) lui-même est un isomorphisme dans ces cas, i.e. si la formation du groupe d'holonomie commute au changement de

corps algébriquement clos. On verra dans des exemples en 1.2.6 qu'il n'en est rien.

1.2.5. Soient k un corps de caractéristique zéro, X un k-schéma connexe et localement de type fini, qu'on supposera lisse pour simplifier (cette restriction n'est pas essentielle). Les modules stratifiés coïncident alors avec les modules munis d'une connexion à courbure nulle (1.2.1.1). On note $\underline{\text{Strat.rég}}(X/k)$. La sous-catégorie pleine de $\underline{\text{Strat}}(X/k)$ des modules stratifiés dont la connexion est régulière, au sens de DELIGNE [2], II 4.5. Cette condition sur un module stratifié est stable par $\oplus, \otimes$, $\underline{\text{Hom}}$ et on obtient ainsi un nouvel exemple de catégorie tannakienne. Si X est propre, la condition de régularité est vide et $\underline{\text{Strat.reg}}(X/k) = \underline{\text{Strat}}(X/k)$.

L'intérêt de cet exemple est que si $k = \mathbb{C}$, le foncteur $E \longmapsto E^{an}$ définit une équivalence de catégories tannakiennes de $\underline{\text{Strat.rég}}(X/C)$ avec la catégorie tannakienne $\underline{\text{Strat.an.}}(X(\mathbb{C}))$ des fibrés vectoriels holomorphes sur $X(\mathbb{C})$ munis d'une connexion holomorphe à courbure nulle ; or, cette dernière est canoniquement équivalente avec la catégorie tannakienne des systèmes locaux en $\mathbb{C}$-vectoriels de rang fini sur $X(\mathbb{C})$, comme il résulte de la théorie des équations différentielles ordinaires, et si on choisit $x \in X(\mathbb{C})$, elle est équivalente avec la catégorie des représentations dans des vectoriels complexes de rang fini du groupe discret $\pi = \pi_1(X(\mathbb{C}),x)$. On obtient ainsi une interprétation algébrique de la catégorie des représentations de π , ou encore de son enveloppe algébrique.

1.2.6. Exemples.

a) Soient K un corps algébriquement clos de caractéristique 0 , X la droite projective moins deux points sur K . On s'intéresse à la catégorie $\underline{\text{Strat.rég}}(X/K)$ des fibrés vectoriels (V,∇) à connexion intégrable et régulière sur X . Soit s une section ensembliste de la projection canonique $K \longrightarrow K/\mathbb{Z}$ qui envoie $\mathbb{Z}$ en 0 . Il existe alors une extension unique de V en un fibré $\tilde{V}$ sur $\mathbb{P}^1$ tel que la connexion ∇ ne présente que des pôles logarithmiques aux points 0 , ∞ et que le résidu de la connexion ∇ au point 0 , qui est un endomorphisme

$$N : M \longrightarrow M$$

de la fibre M de $\widetilde{V}$ en 0 ait ses valeurs propres dans l'image de s (DELIGNE [2], II 5.4). D'autre part, si M est un K-vectoriel de rang fini muni d'un endomorphisme N vérifiant la condition précédente, on lui associe le fibré vectoriel $V = M \otimes_k \underline{O}_X$ muni de la connexion $\nabla : V \longrightarrow V \otimes \Omega'_X$ dont la valeur en $m \in M$ est donnée par

$$\nabla(m) = -N(m) \otimes \frac{dt}{t} \quad ,$$

Ces constructions sont inverses l'une de l'autre ; c'est clair si on part d'un couple (M,N) , et si on part de (V,∇), on se ramène par le principe de Lefschetz au cas $K = \mathbb{C}$, où c'est connu.

Lemme. La catégorie Strat.rég(X/K) est équivalente à la catégorie des couples (M,N) d'un K-vectoriel M de rang fini et d'un endomorphisme N de M ayant ses valeurs propres dans l'image de la section choisie s .

Cette équivalence est K-linéaire mais n'est compatible aux lois $\otimes$ que si on se restreint d'une part aux couples (M,N) avec N nilpotent, d'autre part aux (V,∇) correspondants (i.e. tels que la connexion soit unipotente). On déduit du lemme que les objets simples de Strat.rég(X/K) sont de rang 1 et que le groupe des classes d'objets simples est canoniquement isomorphe à $K/\mathbb{Z}$. On tire sans difficultés.

Proposition. On a une équivalence de catégories tannakiennes

$$\text{Strat.rég}(X/K) \simeq \text{Rep}_0(\mathbb{G}_a \times D(K/\mathbb{Z})) \quad .$$

On peut prouver qu'en tant que groupes ensemblistes, $K/\mathbb{Z}$ et K^* sont isomorphes (non canoniquement). Le groupe d'holonomie $\mathbb{G}_a \times D(K/\mathbb{Z})$ est alors isomorphe à l'enveloppe algébrique sur K de $\mathbb{Z}$. Sa formation ne commute pas au changement de corps algébriquement clos.

b) Soit X une variété abélienne sur un corps algébriquement clos de

caractéristique nulle K . Il résulte du principe de Lefschetz que les objets simples de Strat(X/K) sont de rang 1 , i.e. tout fibré vectoriel à connexion intégrable (V,∇) possède une filtration horizontale dont les quotients successifs sont inversibles. L'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés inversibles à connexion intégrable est donné par le $\mathbb{H}^1$ (hypercohomologie) du complexe logarithmique tronqué $L = \left[\underline{O}_X^* \xrightarrow{dlog} \Omega_X^1\right]$ (KATZ [1] , 7.2.1). De la suite exacte de cohomologie correspondant à la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Omega_X^1[-1] \longrightarrow L \longrightarrow \underline{O}_X^* \longrightarrow 0$$

et de la définition de la variété abélienne duale $\hat{X}$, on tire la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(X,\Omega_X^1) \longrightarrow \mathbb{H}^1(X,L) \longrightarrow \hat{X}(K) \longrightarrow 0 .$$

On voit aussi dans cet exemple, que la formation du groupe d'holonomie ne commute pas à l'extension du corps algébriquement clos.

§ 2. STRUCTURES DE HODGE

2.1. Structures de Hodge.

2.1.2. Une structure de Hodge réelle V est un vectoriel réel $V_{\mathbb{R}}$ de rang fini muni d'une bigraduation du complexifié $V_{\mathbb{C}}$

$$V_{\mathbb{C}} = \sum_{p,q} V^{p,q}$$

vérifiant la condition $\bar{V}^{p,q} = V^{q,p}$ (DELIGNE [4],2.1.4) ; on définit de façon évidente les morphismes de structures de Hodge réelles. Le produit tensoriel d'espaces vectoriels bigradués définit une loi ⊗ ACU sur la catégorie abélienne $\mathbb{R}$-linéaire Hodge($\mathbb{R}$) des structures de Hodge réelles, pour laquelle Hodge($\mathbb{R}$) est rigide (I 5.1.1). D'autre part, le foncteur oubli $V \longmapsto V_{\mathbb{R}}$ est un ⊗-foncteur strict fidèle exact, et d'après la théorie générale (II. 4.1.1) définit une ⊗-équivalence de Hodge($\mathbb{R}$) avec la ⊗-catégorie des représentations linéaires d'un

certain $\mathbb{R}$-groupe affine dans des $\mathbb{R}$-vectoriels de rang fini.

Dans le cas présent, le calcul de ce groupe ne présente pas de difficulté. C'est le groupe, noté $\mathbb{S}$, obtenu par restriction à la Weil de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$ du groupe multiplicatif sur $\mathbb{C}$

$$\mathbb{S} = \prod_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} .$$

On a

$$\mathbb{S}(\mathbb{R}) = \mathbb{C}^* .$$

de plus, S est un groupe de type multiplicatif, et peut être décrit par son groupe de caractères $M = \mathrm{Hom}(S_{\mathbb{C}}, \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}})$ muni de l'automorphisme $\sigma : M \longrightarrow M$ induit par la conjugaison complexe. On a

$$M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

$$\sigma(n,m) = (m,n) .$$

La catégorie tannakienne $\underline{\mathrm{Hodge}}(\mathbb{R})$ est munie, en plus du foncteur oubli $V \longmapsto V_{\mathbb{R}}$, de deux structures supplémentaires importantes.

2.1.1.1. $\underline{\mathrm{Hodge}}(\mathbb{R})$ est munie d'une $\otimes$-graduation centrale de type $\mathbb{Z}$ (IV 1.2.2.1). En effet, si V est une structure de Hodge réelle, et si $n \in \mathbb{Z}$, le sous-vectoriel $\sum_{p+q=n} V^{pq}$ de $V_{\mathbb{C}}$ est défini sur $\mathbb{R}$, et définit ainsi une sous-structure de Hodge, notée V^n ; on a

$$V = \sum_n V^n .$$

Cette $\otimes$-graduation est appelée la graduation par le poids, elle correspond à un morphisme

$$w : \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{S}$$

dont le transposé

$$t_w : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

est donné par

$$t_w(n,m) = n + m .$$

2.1.1.2. On définit la structure de Hodge réelle de Tate notée T ou $\mathbb{R}(1)$ comme la structure de Hodge T de bidegré $(-1,-1)$ avec $T_{\mathbb{R}} = 2\pi i\,\mathbb{R}$ ($= i\mathbb{R}$, mais voir 2.1.2). Elle est de poids -2, et définit un morphisme

$$t : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{G}_m$$

$$t(\lambda) = \lambda\bar{\lambda} \qquad \text{si} \quad \lambda \in \mathbb{S}(\mathbb{R}) = \mathbb{C}^* ;$$

on a la formule

$$t \circ w = -2 .$$

Le triple (Hodge($\mathbb{R}$), w, $\mathbb{R}(1)$) est un triple de Tate, au sens de V 3.1.1, qui est neutre (V 3.1.3) ; pour qu'il soit neutralisé il faudrait de plus se donner un isomorphisme $\mathbb{R} \simeq i\mathbb{R}$ (ici i est une racine carrée de -1, indéterminée par ailleurs).

2.1.1.3. Soient V un $\mathbb{R}$-vectoriel de rang fini, n un entier. Il est équivalent de se donner une structure de Hodge de poids n sur V ou une filtration décroissante (exhaustive séparée) F de $V_{\mathbb{C}}$ telle que pour p,q avec $p+q = n+1$, le morphisme canonique $F^pV \oplus \overline{F^qV} \longrightarrow V_{\mathbb{C}}$ soit un isomorphisme.

Voici comment on passe de l'une à l'autre de ces données

a) Si $V_{\mathbb{C}} = \sum_{p+q=n} V^{p,q}$, on pose

$$F^pV = \sum_{p' \geq p} V^{p',q} ;$$

la filtration F est appelée la filtration de Hodge.

b) Si F est une filtration comme plus haut, on pose

$$V^{pq} = F^pV \cap \overline{F^qV} .$$

2.1.2. Soit A un sous-anneau de $\mathbb{R}$; une A-structure de Hodge V est un A-module de type fini V_A muni d'une graduation de type $\mathbb{Z}$

$$V_A = \sum_n V_A^n$$

où chaque V_A^n est libre et $V_{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R} \otimes_A V_A^n$ est muni d'une structure de Hodge réelle de poids n .

On note $'\underline{\mathrm{Hodge}}(A)$ la $\otimes$-catégorie rigide (I 5.1.1) des A-structures de Hodge ; elle est munie d'une $\otimes$-graduation de type $\mathbb{Z}$ évidente (appelée graduation par le poids), ainsi que d'un objet de Tate $A(1)$. On a

$$A(1)_A = 2\pi i A \subset \mathbb{C}$$

$$A(1)_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}(1) \ .$$

2.1.2.1. Si $A = K$ est un corps, $'\underline{\mathrm{Hodge}}(K)$ est une catégorie tannakienne sur K , et le foncteur oubli $V \longmapsto V_K$ identifie $'\underline{\mathrm{Hodge}}(K)$ à la catégorie tannakienne $\underline{\mathrm{Rep}}_o('G)$ où $'G$ est le K-groupe des $\otimes$-automorphismes du foncteur fibre précédent. La graduation et l'objet de Tate $K(1)$ définissent des morphismes

$$\mathbb{G}_m \xrightarrow{w} {}'G \xrightarrow{t} \mathbb{G}_m \ ,$$

où w est central et on a $t \circ w = -2$. Si $K = \mathbb{R}$, $'\underline{\mathrm{Hodge}}(\mathbb{R}) = \underline{\mathrm{Hodge}}(\mathbb{R})$ et on retrouve la discussion de 2.1.1 avec $'G = \mathbb{S}$; en général, par exemple si $K = \mathbb{Q}$, on ne peut espérer avoir une description explicite de $'G$, qui est un groupe pro-algébrique et n'est ni commutatif ni pro-réductif.

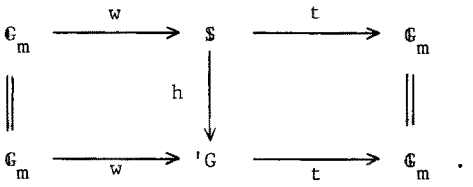
2.1.2.2. Soit toujours $K \subset \mathbb{R}$ un corps ; le $\otimes$-foncteur ACU

$$'\underline{\mathrm{Hodge}}(K) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hodge}}(\mathbb{R}) \ ,$$

qui à une K-structure de Hodge V associe la structure de Hodge réelle $V_{\mathbb{R}}$ définit un morphisme de $\mathbb{R}$-groupes (qui permet d'ailleurs, d'après la théorie générale, de reconstruire ce foncteur)

$$h : \mathbb{S} \longrightarrow {}'G_{\mathbb{R}} \ ,$$

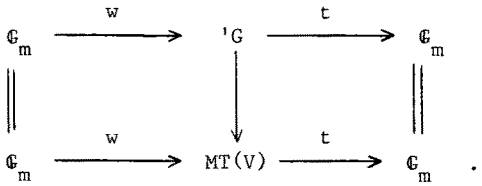
qui rend commutatif le diagramme



2.1.2.3. Gardons les notations de 2.1.2.1, et soit V une K-structure de Hodge. Si $\underline{C}(V)$ est la sous-catégorie tannakienne de $'\underline{\text{Hodge}}(K)$ engendrée par V et $K(1)$, il lui correspond un K-groupe algébrique $MT(V)$ (II 4.3.2) quotient de $'G$ et appelé groupe de Mumford-Tate de la K-structure de Hodge V. On peut décrire comme en 4.3.2 b) la sous-catégorie $\underline{C}(V)$. Puisque $\underline{C}(V)$ contient l'objet de Tate $K(1)$ et est munie de la $\otimes$-graduation induite par celle de $'\underline{\text{Hodge}}(K)$, on a des morphismes

$$\mathbb{G}_m \xrightarrow{w} MT(V) \xrightarrow{t} \mathbb{G}_m$$

vérifiant $t \circ w = -2$, et un diagramme commutatif



2.1.3. Soient V une structure de Hodge réelle de poids n, $\varphi : V \otimes V \longrightarrow \mathbb{R}(-n)$ une forme bilinéaire (V 2.1.1). On dit que φ est une forme de polarisation de V si la forme bilinéaire à valeurs réelles $(x,y) \longmapsto (2\pi i)^n \varphi(x,Cy)$ sur le $\mathbb{R}$-vectoriel $V_{\mathbb{R}}$ est symétrique définie positive. Dans cette définition i est une racine carrée de -1, et C est l'élément correspondant dans $S(\mathbb{R}) = \mathbb{C}^*$; toutefois, la définition est indépendante du choix de i, comme on le vérifie aussitôt. Plus généralement, si A est un sous-anneau de $\mathbb{R}$, V une A-structure de Hodge de poids n, une forme bilinéaire $\varphi : V \otimes V \longrightarrow A(-n)$ est appelée une forme de polarisation de V si $\varphi_{\mathbb{R}}$ est une forme de polarisation de la structure de Hodge réelle $V_{\mathbb{R}}$. On voit que la forme $\varphi_{\mathbb{R}}$ est de parité $(-1)^n$.

Une A-structure de Hodge est polarisable si elle possède une forme de polarisation ; les A-structures de Hodge polarisables sont stables par $\oplus$, $\otimes$, Hom et définissent donc une sous-$\otimes$-catégorie rigide pleine de 'Hodge(A) , qui sera notée Hodge(A) . Si A est un corps, c'est une catégorie tannakienne.

2.1.3.1. Soit K un sous-corps de $\mathbb{R}$. Il résulte de la théorie générale développée au chap V que le triple de Tate (Hodge(K), w , K(1)) est muni d'une polarisation π pour laquelle, si V est une K-structure de Hodge, $\pi(V)$ est l'ensemble des formes de polarisation de V (2.1.3). En particulier, le K-groupe G quotient de 'G qui correspond à Hodge(K) est pro-réductif, de plus, si $G_o = \mathrm{Ker}\ (t : G \longrightarrow \mathbb{G}_m)$, le $\mathbb{R}$-groupe pro-algébrique $(G_{o\mathbb{R}})_C$ est compact (voir V 2.7.3.1, 3.3.1.1 ; ici C est l'image par $h : \mathbb{S} \longrightarrow G_{\mathbb{R}}$ de i).

2.1.3.2. Voici un rafinement de ce qui précède, qui résulte également du chap. V . Soit V une K-structure de Hodge, et notons H son groupe de Mumford-Tate (2.1.2.3), $H_o = \mathrm{Ker}\ (t : H \longrightarrow \mathbb{G}_m)$. Alors, V est polarisable si et seulement si $(H_{o\mathbb{R}})_C$ est un $\mathbb{R}$-groupe compact.

En particulier, si $K = \mathbb{R}$, toute structure de Hodge réelle est polarisable, ce qui justifie à posteriori l'ambiguïté de notation Hodge($\mathbb{R}$) = 'Hodge($\mathbb{R}$) .

2.1.4. Soit X un tore complexe, i.e. un groupe de Lie complexe compact connexe. La théorie de Hodge pour les variétés kählériennes munit le groupe abélien libre de type fini $H^1(X,\mathbb{Z})$ d'une $\mathbb{Z}$-structure de Hodge de type $\{(1,0),(0,1)\}$ et de rang $2\dim(X)$. Le foncteur $X \longmapsto H^1(X,\mathbb{Z})$ est une anti-équivalence de la catégorie des tores complexes avec celle des $\mathbb{Z}$-structures de Hodge de type $\{(1,0),(0,1)\}$; d'après Riemann, il induit une anti-équivalence de la catégorie des variétés abéliennes avec celle des $\mathbb{Z}$-structures de Hodge polarisables du type précédent (voir MUMFORD [2], chap. 1 pour tout ceci). En particulier, si Isab($\mathbb{C}$) dénote la catégorie des variétés abéliennes sur $\mathbb{C}$ à isogénie près, $\mathrm{Isab}(\mathbb{C})^o$ est équivalente à la catégorie des $\mathbb{Q}$-structures de Hodge polarisables de type $\{(1,0),(0,1)\}$; on identifiera ces

deux catégories par cette équivalence.

Soit V une $\mathbb{Q}$-structure de Hodge polarisable de type $\{(1,0),(0,1)\}$, H son groupe de Mumford-Tate (le noyau H_o de $t : H \longrightarrow \mathbb{G}_m$ a été introduit dans MUMFORD [1] sous le nom de groupe de Hodge de V). Le groupe H a des propriétés spéciales, en plus du fait que $(H_{o\mathbb{R}})_C$ est compact, qui méritent d'être signalées (voir DELIGNE [5] 7.3, 7.4).

a) $H_{\mathbb{C}}$ n'a pas de facteur de type exceptionnel.

b) $H_{\mathbb{R}}/\underline{Cent}(H_{\mathbb{R}}) = H_{ad}$ est un $\mathbb{R}$-groupe semi-simple de type hermitien : i.e. le centre d'un compact maximal est de dimension positive, ou encore le quotient de H_{ad} par un compact maximal est un domaine hermitien symétrique (HELGASON [1] VIII Thm. 6.1).

c) La structure de Hodge de $\underline{h} = \underline{Lie}(H)$ est de type $\{(0,0),(1,-1),(-1,1)\}$ (en effet, $\underline{h} \subset \underline{End}(V)$).

2.2. Variations de structures de Hodge.

2.2.0. On peut imaginer plusieurs variantes au-dessus d'une base S de la notion de structure de Hodge. Voici la plus simple : une famille continue de structures de Hodge V sur un espace topologique S est un système local $V_{\mathbb{Z}}$ sur S de groupes abéliens libres de type fini, chaque fibre $V_{\mathbb{Z},s}$ $(s \in S)$ étant munie d'une structure de Hodge V_s qui dépend continument de s. On peut dans la définition remplacer $\mathbb{Z}$ par un sous-anneau A de $\mathbb{R}$; si A est un corps et S est connexe, on obtient des exemples de catégories tannakiennes munis de structures supplémentaires de graduation et d'objet de Tate, et pour lesquelles on peut faire une discussion analogue à celle de 2.1 (qui est d'ailleurs le cas particulier $S = *$).

On développera ici une autre variante, davantage motivée par les exemples géométriques : celle de variation de structures de Hodge (voir GRIFFITHS [1],[2], DELIGNE [3]).

2.2.1. Soit S un espace analytique complexe, supposé non-singulier pour simplifier. Une variation de structures de Hodge de poids n ($n \in \mathbb{Z}$) sur S consiste en la donnée

a) d'un système local $V_{\mathbb{Z}}$ en $\mathbb{Z}$-modules libres de type fini.

b) d'une filtration finie F du $\underline{O}_S$-module localement libre $V_S = \underline{O}_S \otimes_{\mathbb{Z}} V_{\mathbb{Z}}$, vérifiant les conditions

i) en chaque point $s \in S$, la filtration induite par F sur $V_{S,s} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} V_{\mathbb{Z},s}$ définit une structure de Hodge sur $V_{\mathbb{Z},s}$ (2.1.1.3).

ii) Si $\nabla = V_S \longrightarrow \Omega^1_S \otimes V_S$ est la connexion naturelle sur V_S ayant $V_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ comme faisceau des sections horizontales, on a $\nabla(F^p V) \subset \Omega^1_S \otimes F^{p-1} V$.

On définit une variation de structures de Hodge V sur S comme un système local $V_{\mathbb{Z}}$ en $\mathbb{Z}$-modules libres de type fini muni d'une graduation

$$V_{\mathbb{Z}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} V^n_{\mathbb{Z}}$$

et sur chaque $V^n_{\mathbb{Z}}$ d'une variation de structures de Hodge de poids n. Si A est un sous-anneau de $\mathbb{R}$, on définit la notion de A-variation de structures de Hodge sur S : il suffit de remplacer $\mathbb{Z}$ par A. On obtient ainsi une $\otimes$-catégorie rigide A-linéaire (I 5.1.1), notée $'\underline{\text{Hodge}}(S,A)$, munie d'un $\otimes$-foncteur rigide A-linéaire "oubli" $V \longmapsto V_A$ vers la $\otimes$-catégorie $\underline{\text{SLoc}}(S,A)$ des systèmes locaux en A-modules libres de type fini ; si S est connexe cette dernière peut d'ailleurs s'identifier, moyennant le choix d'un point base $s \in S$, à la $\otimes$-catégorie rigide des A-modules libres de type fini munis d'une action A-linéaire de $\pi_1(S,s)$ (voir 1.1.1).

La $\otimes$-catégorie $'\underline{\text{Hodge}}(S,A)$ est munie d'une $\otimes$-graduation évidente, la graduation par le poids ; aussi on a un objet de Tate, noté $A(1)$, qu'on laisse au lecteur le soin de définir en s'inspirant de 2.1.2. L'objet de Tate est de poids -2.

2.2.1.1. La définition précédente est motivée par l'exemple géométrique suivant : soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme projectif et lisse d'espaces analytiques (S non singulier), alors le faisceau $R^n f_*(\mathbb{Z})$ $(n \geq 0)$ est muni d'une variation de structures de Hodge naturelle de poids n (voir par exemple DELIGNE [3] § 3 pour une description détaillée). Si $s \in S$, la structure de Hodge sur $\mathbb{R}^n f_*(\mathbb{Z})_s = H^n(X_s, \mathbb{Z})$ est celle donnée par la théorie de Hodge classique.

2.2.1.2. Soient S un espace analytique lisse connexe, K un sous-corps de $\mathbb{R}$. Alors $'\underline{\text{Hodge}}(S,K)$, $\underline{\text{SLoc}}(S,K)$ sont des catégories tannakiennes sur K et on dispose d'un morphisme de catégories tannakiennes

$$'\underline{\text{Hodge}}(S,K) \longrightarrow \underline{\text{SLoc}}(S,K) \quad .$$

Si on choisit un point $s \in S$, on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} '\underline{\text{Hodge}}(S,K) & \longrightarrow & \text{SLoc}(S,K) \qquad (\cong \underline{\text{Rep}}_o(\pi)) \\ \omega_s \downarrow & & \downarrow \omega_s \\ '\underline{\text{Hodge}}(K) & \longrightarrow & \underline{\text{Modf}}(K) \end{array} ,$$

où ω_s est, dans chaque cas, le foncteur "fibre en s", les flèches horizontales sont évidentes, et $\pi = \pi_1(S,s)$. Le foncteur fibre composé sur $'\underline{\text{Hodge}}(S,K)$ donne lieu à un K-groupe $\Gamma(s)$ qui reçoit d'une part le groupe 'G défini par $'\underline{\text{Hodge}}(K)$

$$'G \longrightarrow \Gamma(s) ,$$

d'autre part le groupe d'holonomie H(S,s) de S en s, enveloppe K-algébrique du groupe discret $\pi_1(S,s)$

$$H(S,s) \longrightarrow \Gamma(s) ;$$

la donnée de ce dernier morphisme revenant d'ailleurs à celle du morphisme de groupes discrets qu'on en déduit

$$\pi_1(S,s) \longrightarrow \Gamma(s)(K) .$$

Enfin, le choix de $s \in S$ permet d'interpréter les données de l'objet de Tate et de la graduation par le poids en termes des morphismes w,t

$$\mathbb{G}_m \xrightarrow{w} \Gamma(s) \xrightarrow{t} \mathbb{G}_m ,$$

et le morphisme $h(s) : \mathbb{S} \longrightarrow \Gamma(s)_{\mathbb{R}}$ défini par le foncteur $V \longmapsto (V_{\mathbb{R}})_s$ rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{G}_m & \xrightarrow{w} & \mathbb{S} & \xrightarrow{t} & \mathbb{G}_m \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle h(s)} & & \| \\ \mathbb{G}_m & \xrightarrow[w]{} & \Gamma(s) & \xrightarrow[t]{} & \mathbb{G}_m \end{array} .$$

2.2.1.3. On définit comme en 2.1.2.3 le <u>groupe de Mumford-Tate en un point</u> $s \in S$, $MT_s(V)$, d'une K-variation V ; il est muni de morphismes

$$\mathbb{G}_m \xrightarrow{w} MT_s(V) \xrightarrow{t} \mathbb{G}_m ,$$

d'un morphisme

$$MT(V_s) \longrightarrow MT_s(V)$$

compatible avec w,t, et enfin il reçoit le groupe d'holonomie du système local V_K.

2.2.2. Soient A un sous-anneau de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, V une A-variation de structures de Hodge de poids n sur un espace analytique lisse S. Une forme bilinéaire $\varphi : V \otimes V \longrightarrow A(-n)$ est une <u>polarisation</u> de V si pour chaque $s \in S$, φ_s est une polarisation de la A-structure de Hodge V_s (2.1.3). On peut développer la discussion d'une façon analogue à 2.1.3, et donner (tout au moins si A est un corps) des critères pour que V soit polarisable en termes du groupe de Mumford-Tate de V.

Le résultat de Riemann rappelé en 2.1.4 se généralise de la façon suivante (d'après A. Borel ; voir DELIGNE [5], 5.2) : si S est un $\mathbb{C}$-schéma lisse, le

foncteur $[f : X \longrightarrow S] \longmapsto R^1 f_*(\mathbb{Z})$ définit une antiéquivalence de la catégorie des S-schémas abéliens avec celle des variations de structures de Hodge polarisables sur $S(\mathbb{C})$ de type $\{(1,0),(0,1)\}$.

§ 3. F-CRISTAUX

Dans tout ce paragraphe, on fixe un nombre premier p .

3.1. Généralités.

3.1.1. Soit S un schéma de caractéristique p . On regardera S comme un schéma au-dessus de l'anneau $\mathbb{Z}_p$ des entiers p-adiques ; l'idéal maximal $p\mathbb{Z}_p$ de $\mathbb{Z}_p$ est muni d'une unique structure d'idéal à puissances divisées (provenant de ce que pour $n \geq 1$, la valuation p-adique de $p^n/n!$ est positive), ce qui permet de considérer le topos p-cristallin de S relativement à $\mathbb{Z}_p$ (BERTHELOT [1], 2.1), qui sera noté S_{cris} . Le morphisme de Frobenius absolu de S , $f_s : S \longrightarrow S$ (rappelons que c'est l'identité sur l'espace topologique sous-jacent à S , $x \longmapsto x^p$ sur les anneaux de sections), induit par fonctorialité du topos p-cristallin (loc. cit. 3.2) un morphisme de topos (annelés)

$$\sigma : S_{cris} \longrightarrow S_{cris} .$$

Un F-cristal sur S (terminologie provisoire, voir 3.1.3) est un module localement libre de rang fini M sur le topos annelé S_{cris} muni d'un morphisme de modules $F_M : \sigma^*(M) \longrightarrow M$ (appelé le Frobenius de M). Un F-cristal est non dégénéré s'il existe un entier $i \geq 0$ et un morphisme $V : M \longrightarrow \sigma^*(M)$ vérifiant $VF = p^i id$.

3.1.1.1. Un morphisme de F-cristaux est un morphisme entre les modules sous-jacents qui commute avec les Frobenius. On obtient ainsi une catégorie $\mathbb{Z}_p$-linéaire , notée Fcris(S).

3.1.1.2. Si (M,F_M) , $(M',F_{M'})$ sont des F-cristaux, leur produit tensoriel est le F-cristal ayant $M \otimes M'$ comme module sous-jacent, $F_M \otimes F_{M'}$ comme Frobenius. Ceci définit une loi $\otimes$ ACU $\mathbb{Z}_p$-linéaire sur $\underline{\text{Fcris}}(S)$ (I 0.1.2, 2.4.1). La $\otimes$-catégorie $\underline{\text{Fcris}}(S)$ ne possède en général pas d'objets $\underline{\text{Hom}}$(I 3.1.1).

3.1.2. Notons $\underline{\text{SLoc}}(S,\mathbb{Z}_p)$ la $\otimes$-catégorie $\mathbb{Z}_p$-linéaire rigide des systèmes locaux p-adiques sur S pour la topologie étale (1.1.3). On définit un $\otimes$-foncteur ACU $\mathbb{Z}_p$-linéaire

$$\underline{\text{SLoc}}(S,\mathbb{Z}_p) \longrightarrow \underline{\text{Fcris}}(S) \tag{3.1.2.1}$$

de la façon suivante : soit $E = (E_n)_{n\geq 1}$ un tel système local p-adique, et soit (U,T) un objet du site p-cristallin de S , i.e. U un ouvert de S et T un épaississement à puissances divisées de U (ceci signifie qu'on se donne un $\mathbb{Z}_p$-schéma T , une immersion fermée $U \longrightarrow T$, des puissances divisées sur l'idéal $\mathcal{J}$ de U dans T compatibles avec celles sur $\mathbb{Z}_p$, et qu'on suppose qu'il existe $k > 0$ tel que $p^k\mathcal{J} = 0$). Puisque p est alors nilpotent sur T , il existe $n > 1$ et un morphisme de faisceaux d'anneaux sur T , $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \longrightarrow \underline{O}_T$; on pose

$$M(U,T) = \underline{O}_T \otimes_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} E_n^T ,$$

où E_n^T est le faisceau zariskien sur T déduit du faisceau étale sur T correspondant à E_n/U par l'équivalence entre les sites étales sur U et T rappelées en 1.1.4.

On voit aussitôt qu'on obtient ainsi un module localement libre de rang fini M sur S_{cris} , qui est muni d'un isomorphisme canonique $F_M : \sigma^*(M) \xrightarrow{\sim} M$. Ce dernier provient de la compatibilité de la construction précédente avec les changements de base, et de ce qu'on a $f_S^*(E) \simeq E$, où $f_S : S \longrightarrow S$ est le Frobenius absolu de S . Le F-cristal (M,F_M) est par définition la valeur en E du foncteur (3.1.2.1).

3.1.2.1. Proposition. Supposons que S soit un schéma lisse sur un corps k

(de caractéristique p). Alors le foncteur (3.1.2.1) est pleinement fidèle et son image essentielle est formée des F-cristaux M pour lesquels F est un isomorphisme.

3.1.2.2. Voici une esquisse de preuve, que j'ai appris de Katz : il suffit de montrer comment à un F-cristal (M,F_M), où F_M est un isomorphisme, on peut associer un système local p-adique $E = (E_n)_{n\geq 1}$. Le système E doit être pensé comme le sous-faisceau de M de points fixes sous F_M, donc chaque E_n est le sous-faisceau de points fixes sous F_M modulo p^n. Précisons davantage la définition des E_n, en supposant S affine (il est clair qu'on a le droit de se localiser). Soit W un anneau de Cohen de corps résiduel k (EGA O_{IV}, 19.8.4, 19.8.6) et posons $W_n = W/p^nW$. Choisissons un système S_n, σ_n de relèvements compatibles de S et de f_S où les S_n sont des schémas lisses sur W_n, et $\sigma_n : S_n \longrightarrow S_n$ induit sur la fibre spéciale f_S (SGA 1, III). Le F-cristal M définit des modules localement libres M_n sur S_n munis d'isomorphismes $F_n : \sigma_n^*(M_n \xrightarrow{\sim} M_n$, et on pose $\tilde{E}_n$ pour le faisceau des points fixes de F_n, et on vérifie par récurrence en n que ce sont des faisceaux étales localement constants sur S_n (définissant donc des objets analogues E_n sur S par 1.1.4) en $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ - modules libres de type fini, et que le système $(E_n)_{n\geq 1}$ est un système local p-adique. Pour $n = 1$, M_1 est un O_S-module localement libre muni d'un isomorphisme F_1 p-linéaire ; si on écrit les équations définissant les points fixes de F_1, on trouve que celles-ci définissent un revêtement étale de S, sur lequel E_1 se trivialise. On procède de même pour trouver des points fixes mod.p^2 induisant un point fixe mod.p donné, et ainsi de suite.

3.1.3. On notera $\underline{\text{Fcris}}^+(S)$ la $\otimes$-catégorie ACU $\mathbb{Q}_p$-linéaire ayant comme objets les F-cristaux non-dégénérés (3.1.1) et comme morphismes entre deux tels F-cristaux M,M'

$$\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{Hom}(M,M') .$$

Soit L le F-cristal ayant $\underline{O}_{S_{cris}}$ comme module sous-jacent et p.id comme Frobenius ; il est évidemment non dégénéré. De plus, L est un objet 1-régulier de $\underline{Fcris}^{+}(S)$ (I 0.1.3). Soit $\underline{Fcriso}(S)$ la $\otimes$-catégorie ACU $\mathbb{Q}_p$-linéaire qu'on obtient rendant L inversible (voir 4.4.1 pour une description générale de ce procédé). Il y a un $\otimes$-foncteur ACU $\mathbb{Q}_p$-linéaire

$$\underline{Fcris}^{+}(S) \longrightarrow \underline{Fcriso}(S) \tag{3.1.3.1}$$

qui est pleinement fidèle, et pour tout objet M de $\underline{Fcriso}(S)$ il existe $n \geq 0$ tel que $M \otimes L^{\otimes n}$ se trouve dans $\underline{Fcris}^{+}(S)$. Les objets de $\underline{Fcriso}(S)$ seront appelés F-isocristaux, ou plus simplement (puisque c'est surtout d'eux qu'on parlera) F-cristaux. Les F-isocristaux provenant de $\underline{Fcris}^{+}(S)$ sont appelés effectifs, et l'inverse de L est le F-isocristal de Tate.

L'importance de $\underline{Fcriso}(S)$ provient de ce qu'elle est rigide (I 5.1.1) : en rendant L inversible on a aussi introduit pour chaque F-cristal non dégénéré $(M,F_M) = M$ un F-isocristal $\overset{\vee}{M}$; il suffit de poser $\overset{\vee}{M} = L^{\otimes -n} \otimes M'$ où M' est le F-cristal ayant $M^* = \underline{Hom}(M,\underline{O}_{S_{cris}})$ comme module sous-jacent, ${}^tV$ comme Frobenius, et où ${}^tV : \sigma^*(M^*) \longrightarrow M^*$ est le transposé d'un morphisme $V : M \longrightarrow \sigma^*(M)$ vérifiant $VF = p^n id$ (3.1.1).

3.1.3.1. Le $\otimes$-foncteur (3.1.2.1) induit un foncteur rigide $\mathbb{Q}_p$-linéaire

$$\underline{SLoc}_p(S) \longrightarrow \underline{Fcriso}(S) \tag{3.1.3.2}$$

des faisceaux p-adiques sur S (pour la topologie étale) dans les F-isocristaux. Ce foncteur est pleinement fidèle si S est lisse sur un corps k (par exemple si S lui-même est le spectre d'un corps).

3.1.4. Soit k un corps de caractéristique p , et posons $S = Spec(k)$; on remplacera S par k dans les notations attribuées aux catégories définies plus haut. Ainsi par exemple $\underline{Fcriso}(k)$ est la catégorie de F-isocristaux sur k (ou plutôt sur S).

Soit W un anneau de Cohen ayant k comme corps résiduel (EGA O_{IV}, 19.8.4, 19.8.6), et pour chaque $n \geq 1$ posons $W_n = W/p^nW$ qui est une algèbre formellement lisse sur $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ (loc.cit.). On sait (voir BERTHELOT [2], 2.7 pour un énoncé semblable) que la catégorie des modules localement libres de rang fini sur k_{cris} est équivalente à celle des W-modules libres de rang fini M, munis dans chaque M/p^nM d'une connexion à courbure nulle et nilpotente relativement au morphisme $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \longrightarrow W_n$ $(n \geq 1)$, ces connexions étant compatibles entre entre elles. Il résulte facilement de cette description que la $\otimes$-catégorie $\mathbb{Q}_p$-linéaire $\underline{Fcris}^+(k)$ est <u>abélienne</u>, et en particulier que $\underline{Fcriso}(k)$ est <u>une catégorie tannakienne sur</u> $\mathbb{Q}_p$. Comme on le verra au 3.3, cette catégorie tannakienne est en général non neutre, i.e. ne possède pas de foncteur fibre à valeurs dans $\mathbb{Q}_p$. Toutefois, si W est un anneau de Cohen de corps résiduel k et si K est son corps de fractions, elle possède un foncteur fibre canonique à valeurs dans K.

3.1.5. Soit $u : S' \longrightarrow S$ un morphisme de schémas de caractéristique p. Il définit un morphisme de topos annelés (BERTHELOT [1], 3.2)

$$u_{cris} : S'_{cris} \longrightarrow S_{cris} ,$$

et comme u commute avec les Frobenius de S, S' ($uf_{S'} = f_S u$), on obtient un $\otimes$-foncteur ACU $\mathbb{Z}_p$-linéaire "image inverse", ou "changement de base"

$$u^* : \underline{Fcris}(S) \longrightarrow \underline{Fcris}(S') ,$$

induisant des $\otimes$-foncteurs ACU $\mathbb{Q}_p$-linéaires

$$u^* : \underline{Fcris}^+(S) \longrightarrow \underline{Fcris}^+(S')$$

$$u^* : \underline{Fcriso}(S) \longrightarrow \underline{Fcriso}(S') .$$

On a aussi une compatibilité du changement de base avec les foncteurs (3.1.2.1), (3.1.3.2). On a par exemple un carré commutatif à $\otimes$-isomorphisme près

(3.1.5.1)
$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{SLoc}}_p(S) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Fcriso}}(S) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle u^*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle u^*} \\ \underline{\mathrm{SLoc}}_p(S') & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Fcriso}}(S') \end{array}$$

où les flèches horizontales sont données par (3.1.3.2).

3.2. F-cristaux sur un corps parfait.

3.2.0. Si k est un corps parfait de car.p , on note $W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt sur k (SERRE [1] II § 6), $K(k)$ son corps des fractions ; on notera aussi $W_n(k)$ les anneaux de vecteurs de Witt de longueur n , $W_n(k) = W(k)/p^nW(k)$. Les anneaux $W(k)$, $W_n(k)$, $K(k)$ dépendent de façon fonctorielle du corps parfait k , en particulier, l'automorphisme de Frobenius de k , $x \longmapsto x^p$ se relève en un unique automorphisme σ de $W(k)$; on notera aussi σ les automorphismes correspondants de $W_n(k)$, $K(k)$.

3.2.1. L'explicitation donnée en 3.1.4 pour les modules localement libres sur k_{cris} se simplifie dans le cas où k est parfait : la donnée d'un module localement libre de rang fini G sur k_{cris} revient à celle d'un $W(k)$-module libre de type fini M . Cette assertion peut se prouver sans peine de façon directe, mais pour voir qu'elle résulte de la description 3.1.4, c'est-à-dire que dans loc. cit. on peut oublier les connexions sur les $M_n = M/p^nM$, il suffit de remarquer qu'on a $\Omega^1_{W_n/\Lambda_n} = 0$ où $\Lambda_n = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.

Il résulte d'ici que $\underline{\mathrm{Fcris}}(k)$ est équivalente à la catégorie des $W(k)$-modules libres de type fini M munis d'un endomorphisme σ-linéaire F_M , $\underline{\mathrm{Fcris}}^+(k)$ équivalente avec la $\otimes$-catégorie ACU $\mathbb{Q}_p$-linéaire des $K(k)$-vectoriels de rang fini M munis d'un isomorphisme σ-linéaire F_M ayant la propriété de laisser stable un réseau (ou encore, comme on le vérifie aussitôt, tel que l'ensemble des itérés F_M^n , $n \geq 1$, soit borné dans le vectoriel $\mathrm{End}(M)$). Enfin $\underline{\mathrm{Fcriso}}(k)$

s'identifie à la catégorie des $K(k)$-vectoriels de rang fini M munis d'un automorphisme σ-linéaire F_M ; ceci provient de ce que pour n assez grand, $p^n F_M$ laisse invariant un réseau et de la définition de $\underline{\text{Fcriso}}(k)$ (3.1.3).

3.2.1.1. Rappelons qu'on a un morphisme de catégories tannakiennes, qui est pleinement fidèle

$$\underline{\text{SLoc}}_p(k) \longrightarrow \underline{\text{Fcriso}}(k) \ . \tag{3.2.1.1}$$

L'image essentielle de ce foncteur est formée par les F-cristaux (M,F_M) tels qu'il existe un réseau dans M stable par F_M et F_M^{-1} ; ceci signifie aussi que M et M sont des F-cristaux effectifs, ou encore que l'ensemble des itérés F_M^n $(n \in \mathbb{Z})$ est borné.

3.2.1.2. On notera $\mathcal{G}(k)$ la gerbe tannakienne sur $\mathbb{Q}_p$ correspondant à $\underline{\text{Fcriso}}(k)$, $\underline{\pi}_p(k)$ la gerbe tannakienne sur $\mathbb{Q}_p$ correspondant à $\underline{\text{SLoc}}_p(k)$ (III 3.2). Rappelons que $\underline{\text{SLoc}}_p(k)$ est neutre ; de façon précise, le choix d'une clôture algébrique $\bar{k}$ de k identifie $\underline{\text{SLoc}}_p(k)$ avec la catégorie des $\mathbb{Q}_p$-vectoriels de rang fini munis d'une action continue de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$.

Le morphisme (3.2.1.1) définit un épimorphisme de gerbes (III 3.3.3 c))

$$\mathcal{G}(k) \longrightarrow \underline{\pi}_p(k) \ . \tag{3.2.1.2}$$

3.2.2. Si k'/k est une extension de corps, on a un carré commutatif (à isomorphisme près) de gerbes sur $\mathbb{Q}_p$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(k') & \longrightarrow & \mathcal{G}(k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{\pi}_p(k') & \longrightarrow & \underline{\pi}_p(k) \end{array} \ , \tag{3.2.2.1}$$

où les flèches verticales sont les flèches (3.2.1.2), et où les flèches horizontales proviennent des foncteurs changement de base

(3.2.2.2) $\underline{\mathrm{Fcriso}}(k) \longrightarrow \underline{\mathrm{Fcriso}}(k')$

(3.2.2.3) $\underline{\mathrm{SLoc}}_p(k) \longrightarrow \underline{\mathrm{SLoc}}_p(k')$.

En termes de l'explicitation donnée en 3.2.1 pour $\underline{\mathrm{Fcriso}}(k)$, le foncteur (3.2.2.2) associe à (M,F_M) $M \otimes_{W(k)} W(k')$ muni du Frobenius déduit de F_M par extension des scalaires.

3.2.2.1. Supposons que k' et k soient des corps algébriquement clos. D'après MANIN [1], II § 2, (3.2.2.2) est une équivalence de catégories tannakiennes sur $\mathbb{Q}_p$; en effet, en loc.cit. Manin classifie les objets simples de $\underline{\mathrm{Fcriso}}(k)$ pour k un corps algébriquement clos. Il trouve que cette classification est indépendante de k et que ces objets sont définis sur $\mathbb{F}_p$, i.e. proviennent de $\mathrm{Fcriso}(\mathbb{F}_p)$ (voir aussi 3.3.3 plus loin).

3.2.2.2. De ce qui précède, on déduit que si k est un corps parfait $\mathcal{G}(\bar{k}) \longrightarrow \mathcal{G}(k)$ est un monomorphisme de gerbes. En effet, ce qui précède entraîne par III 3.3.3 c) que le composé $\mathcal{G}(\bar{k}) \longrightarrow \mathcal{G}(k) \longrightarrow \mathcal{G}(\mathbb{F}_p)$ est un monomorphisme de gerbes.

3.2.3. Soit k'/k une extension galoisienne de corps parfaits, et soit $\pi_p(k'/k)$ la gerbe quotient de $\pi_p(k)$ correspondant à la sous-catégorie tannakienne de $\underline{\mathrm{SLoc}}(k)$ des faisceaux p-adiques devenant triviaux sur k' . Alors, <u>la suite de gerbes sur</u> $\mathbb{Q}_p$

(3.2.3.1) $\mathcal{G}(k') \longrightarrow \mathcal{G}(k) \longrightarrow \pi_p(k'/k) \longrightarrow 1$

<u>est exacte</u> (i.e. pour une extension L convenable de $\mathbb{Q}_p$, la suite de L-groupes qu'on obtient en choisissant un objet sur L de $\mathcal{G}(k')$ est exacte). Ceci signifie simplement, compte tenu du dictionnaire de III 3.2.3.1, que dans le diagramme de catégories tannakiennes sur $\mathbb{Q}_p$

(3.2.3.2) $\underline{\mathrm{SLoc}}_p(k) \longrightarrow \underline{\mathrm{Fcriso}}(k) \longrightarrow \underline{\mathrm{Fcriso}}(k')$

les F-cristaux (M,F_M) sur k qui deviennent triviaux sur k' sont exactement ceux

qui proviennent d'un faisceau p-adique sur k devenant trivial sur k' : en effet, si (M,F_M) est envoyé en (M',F'_M) et celui-ci est trivial, en particulier l'ensemble des itérés F'^n $(n \in \mathbb{Z})$ est borné, donc il en est de même pour l'ensemble des itérés F^n, ce qui prouve par 3.2.1.1 que M,F_M provient d'un faisceau p-adique ; il est clair que celui-ci se trivialise sur k'.

3.2.3.1. Proposition. Soit k'/k une extension galoisienne de corps parfaits. Alors, la suite de gerbes tannakiennes sur $\mathbb{Q}_p$

$$1 \longrightarrow \mathcal{G}(k') \longrightarrow \mathcal{G}(k) \longrightarrow \underline{\pi}_p(k'/k) \longrightarrow 1 \quad , \tag{3.2.3.3}$$

est exacte. En particulier, si k est un corps parfait

a) on a une extension de gerbes (voir 3.3 pour la structure $\mathcal{G}(\bar{k})$)

$$1 \longrightarrow \mathcal{G}(\bar{k}) \longrightarrow \mathcal{G}(k) \longrightarrow \underline{\pi}_p(k) \longrightarrow 1 \quad . \tag{3.2.3.4}$$

b) les morphismes $\mathcal{G}(k) \longrightarrow \mathcal{G}(\mathbb{F}_p)$, $\mathcal{G}(k) \longrightarrow \underline{\pi}_p(k)$, induisent une équivalence de gerbes

$$\mathcal{G}(k) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}(\mathbb{F}_p) \times_{\underline{\pi}_p(\mathbb{F}_p)} \underline{\pi}_p(k) \tag{3.2.3.5}$$

3.2.3.2. Preuve. Pour prouver l'exactitude de (3.2.3.3) il suffit de prouver que le morphisme $\mathcal{G}(k') \longrightarrow \mathcal{G}(k)$ est un monomorphisme de gerbes. Ceci a déjà été fait en 3.2.2.2 si $k' = \bar{k}$; le cas général s'en déduit par un diagram-chasing dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & & 1 \\
 & & \uparrow & & \uparrow \\
1 & \longrightarrow & \underline{\pi}_p(k') & \longrightarrow & \underline{\pi}_p(k) \\
 & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \mathcal{G}(k') & \longrightarrow & \mathcal{G}(k) \\
 & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \mathcal{G}(\bar{k}) & = & \mathcal{G}(\bar{k}) \\
 & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & 1 & & 1
\end{array}$$

Enfin, b) résulte formellement de l'énoncé principal une fois qu'on rappelle que $\underline{\mathrm{Fcriso}}(\bar{\mathbb{F}}_p) \longrightarrow \underline{\mathrm{Fcriso}}(\bar{k})$ est une équivalence de catégories tannakiennes (voir 3.2.2.1).

3.3. Cas d'un corps algébriquement clos.

3.3.1. Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique. Dans MANIN [1], chap. II, on détermine la structure de la catégorie abélienne $\underline{\mathrm{Fcris}}^+(k)$ des F-isocristaux effectifs sur k (3.1.3, 3.2.1). On trouve que c'est une catégorie semi-simple, et que l'ensemble des classes d'isomorphismes d'objets simples de $\underline{\mathrm{Fcris}}^+(k)$ se trouve en correspondante biunivoque avec l'ensemble $\mathbb{Q}^+$ des nombres rationnels ≥ 0 de la façon suivante. Soit $z = \frac{s}{r}$ l'écriture normalisée d'un élément z de $\mathbb{Q}^+$, i.e. $s = 0$, $r = 1$, ou bien $s,r \geq 1$ et $(s,r) = 1$; alors on note E_z le F-cristal (M,F_M) où

$$M = K[T]/(T^r - p^s) ,$$

et F_M est induit par l'endomorphisme F de $K[T]$

$$F(f(T)) = T.f^{\sigma}(T) .$$

Ici $K = K(k)$, et $f^{\sigma}(T)$ est le polynôme obtenu en appliquant σ aux coefficients de $f(T)$. L'objet E_z est simple et la bijection précédente est celle qui associe à z la classe de E_z. On prouve aussi (loc.cit.) que si $z, z' \in \mathbb{Q}^+$, le F-cristal $E_z \otimes E_{z'}$ est isotypique de type $E_{z+z'}$.

L'objet unité de $\underline{\mathrm{Fcris}}^+(k)$ correspond à E_o, l'objet L défini en 3.1.3 est isomorphe à E_1 comme on voit sur la définition. On en déduit que la catégorie $\underline{\mathrm{Fcriso}}(k)$ des F-isocristaux sur k est semi-simple, que le produit tensoriel des deux objets isotypiques est isotypique, et que le groupe des types de $\underline{\mathrm{Fcriso}}(k)$ (voir 3.5.1) est canoniquement isomorphe à $\mathbb{Q}$.

3.3.2. Théorème. La catégorie tannakienne Fcriso(k) a comme lien le groupe diagonalisable $D(\mathbb{Q})$; moyennant l'isomorphisme du corps de classe local $Br(\mathbb{Q}_p) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, la classe de Fcriso(k) dans $H^2(\mathbb{Q}_p, D(\mathbb{Q})) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, Br(\mathbb{Q}_p))$ est la projection canonique $\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

3.3.2.1. Preuve. Compte tenu de 3.5, il suffit de prouver le

3.3.2.2. Lemme. Si $z = s/r \in \mathbb{Q}^+$, et $A_z = \mathrm{End}(E_z)$, alors A_z est un corps gauche de centre $\mathbb{Q}_p$ dont la classe dans $Br(\mathbb{Q}_p)$ correspond à s/r par l'isomorphisme $Br(\mathbb{Q}_p) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Puisque E_z est simple, A_z est un corps gauche ; si on explicite A en termes de la base $1, T, \ldots, T^{r-1}$ du K-vectoriel $K[T]/(T^r - p^s)$ sous-jacent à E_z , on voit que A est isomorphe à l'algèbre des matrices $r \times r$ $u = (u_{ij})$ avec coefficients dans K qui vérifient les formules

$$\begin{cases} u_{1,1} = \sigma(u_{r,r}) & \\ u_{i+1,j+1} = \sigma(u_{i,j}) & 1 \leq i,j \leq r-1 \\ u_{1,j+1} = p^{-s}\sigma(u_{r,j}) & 1 \leq j \leq r-1 \\ u_{i+1,1} = p^{s}\sigma(u_{i,r}) & 1 \leq i \leq r-1 \end{cases}$$

Il résulte aussitôt d'ici que

$$\sigma^r(u_{ij}) = u_{ij} \quad ,$$

i.e. que les coefficients u_{ij} se trouvent dans $K_r = K(\mathbb{F}_{p^r})$, l'extension non ramifiée de degré r de $\mathbb{Q}_p$ contenue dans K , et que, en tant que K_r-vectoriel, A est de rang r ; l'explicitation précédente donne un morphisme de $\mathbb{Q}_p$-algèbres

$$A \longrightarrow M_r(K_r) \quad ,$$

d'où un isomorphisme de K_r-algèbres simples

$$f : K_r \otimes_{\mathbb{Q}_p} A \xrightarrow{\sim} M_r(K_r) \quad .$$

En particulier, le centre de A est $\mathbb{Q}_p$. Rappelons maintenant le calcul de l'invariant d'une $\mathbb{Q}_p$-algèbre simple centrale B dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (voir par exemple SERRE [1] X § 5 et XII § 3) : soit L une extension finie galoisienne non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ qui décompose B , donc $L = K_n$ pour un certain n , et choisissons un isomorphisme

$$f : K_n \otimes_{\mathbb{Q}_p} B \xrightarrow{\sim} M_d(K_n)$$

avec une algèbre de matrices. Si σ est le Frobenius, engendrant $\mathrm{Gal}(K_n/\mathbb{Q}_p) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\sigma(f)$ l'isomorphisme déduit de p par l'extension des scalaires $\sigma : K_n \longrightarrow K_n$, l'automorphisme $f^1 \circ \sigma(f)$ de $M_d(K_n)$ est intérieur (voir Bourbaki, Algèbre, chap. 8 § 10, th. 1), soit $f^{-1} \circ \sigma(f) = \mathrm{int}(t)$. On vérifie aussitôt que le cobord δ de la 1-cochaîne t de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ à valeurs dans $GL_d(K_n)$ est un 2-cocycle $\delta \in H^2(K_n/\mathbb{Q}_p, \mathbb{G}_m)$, i.e. que

$$\delta = t \circ \sigma(t) \ldots \sigma^{n-1}(t)$$

est dans le centre de $GL_d(K_n)$, i.e. $\delta \in K_n^*$; si $v : K_n^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ est la valuation normalisée de K_n^* (i.e. $v(p) = 1$) , $v(\delta)$ définit un élément $\overline{v(\delta)}$ dans $H^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et l'invariant de la $\mathbb{Q}_p$-algèbre simple B est l'image canonique $v(\delta)/n$ de $\overline{v(\delta)}$ dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Reprenons ceci dans notre cas : on a $L = K_r$, et on dispose d'un isomorphisme

$$f : K_r \otimes_{\mathbb{Q}_p} A \xrightarrow{\sim} M_r(K_r) \quad .$$

On voit aussitôt qu'on peut prendre pour t la matrice de F_M (avec les notations de 3.3.1), et qu'on a $\delta = p^s$, d'où $v(\delta) = s$ et la classe de A est s/r mod.1 .

3.3.3. On peut déduire aussitôt de ce qui précède l'indépendance de Fcriso(k) en le corps algébriquement clos ; il suffit de remarquer que si $\sigma : k \longrightarrow k'$ est un morphisme de corps algébriquement clos, et

$$\sigma^* : \underline{\text{Fcriso}}(k) \longrightarrow \underline{\text{Fcriso}}(k')$$

le morphisme de catégories tannakiennes sur $\mathbb{Q}_p$ qu'on en déduit, $\sigma^*(E_z) = E_z$ pour $z \in \mathbb{Q}^+$. En effet, le F-cristal E_2 sur k provient d'un F-cristal sur $\mathbb{F}_p$, à savoir

(3.3.3.1) $$\mathbb{Q}_p[T]/(T^r - p^s) \quad .$$

Il en résulte que σ^* est une équivalence de catégories tannakiennes <u>respectant les $\otimes$-graduations de type $\mathbb{Q}$</u>.

3.3.3.1. Voici une conséquence utile de ces remarques. Soit k un corps parfait de caractéristique p, $\bar{k}$ une clôture algébrique de k. L'extension $K(\bar{k})$ de $K(k)$ est galoisienne et on a

(3.3.3.2) $$\mathrm{Gal}(K(\bar{k})/K(k)) = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \quad .$$

Soit M un F-cristal sur k, $\bar{M}$ son image dans $\underline{\text{Fcriso}}(\bar{k})$; le F-cristal $\bar{M}$ est muni d'une graduation de type $\mathbb{Q}$, sur laquelle agit $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. D'après ce qui précède, cette graduation est invariante sous cette action, donc elle provient d'une graduation

$$M = \sum_{z \in Q} M^z$$

du F-cristal M sur k. En effet, si E (resp. $\bar{E}$) est le vectoriel sur $K(k)$ (resp. $K(\bar{k})$) sous-jacent à M (resp. $\bar{M}$), on a

$$\bar{E} = K(\bar{k}) \otimes_{K(k)} E \quad ,$$

et l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ correspond par l'identification (3.3.3.2) à l'action évidente de $\mathrm{Gal}(K(\bar{k})/K(k))$ sur $\bar{E}$.

Il en résulte que, pour tout corps parfait k de caractéristique p, $\underline{\mathrm{Fcriso}}(k)$ est muni d'une $\otimes$-graduation de type $\mathbb{Q}$, fonctorielle en k. Cette $\otimes$-graduation sera appelée la graduation par les pentes, les pentes d'un F-cristal M étant les $z \in \mathbb{Q}$ tels que $M^2 \neq 0$. Un objet est isopentique s'il n'a qu'une seule pente. Enfin, on vérifie que les F-cristaux de pente nulle sont exactement ceux qui proviennent d'un faisceau p-adique (voir 3.2.1.1).

3.4. Cas d'un corps fini.

3.4.1. Traitons d'abord le cas du corps premier $\mathbb{F}_p$. On a $K(\mathbb{F}_p) = \mathbb{Q}_p$, et la catégorie tannakienne $\underline{\mathrm{Fcriso}}(\mathbb{F}_p)$ s'interprète simplement comme la catégorie des $\mathbb{Q}_p$- vectoriels M de rang fini, munis d'un automorphisme F_M. Le foncteur fibre canonique $(M,F_M) \longmapsto M$ identifie $\underline{\mathrm{Fcriso}}(\mathbb{F}_p)$ à la catégorie des représentations linéaires dans des $\mathbb{Q}_p$-vectoriels de rang fini du $\mathbb{Q}_p$-groupe G, enveloppe algébrique de $\mathbb{Z}$; ce dernier est simplement le produit du groupe $\mathbb{G}_a$ par le groupe de type multiplicatif ayant comme module galoisien de caractères $\bar{\mathbb{Q}}_p^*$ avec l'action évidente de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ (décomposition de Jordan d'un automorphisme d'un vectoriel de rang fini).

La catégorie tannakienne $\underline{\mathrm{SLoc}}_p(\mathbb{F}_p)$ sur $\mathbb{Q}_p$ des faisceaux p-adiques sur $\mathbb{F}_p$ s'identifie à celle des $\mathbb{Q}_p$-vectoriels de rang fini M, munis d'un automorphisme F_M tel que l'action correspondante de $\mathbb{Z}$, $n \longmapsto F^n$, se prolonge à un homomorphisme continu $\hat{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathrm{Aut}(M)$, où on met sur M la topologie p-adique (remarquons que cette identification provient du choix d'une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$; on prendra le corps résiduel de la clôture algébrique $\bar{\mathbb{Q}}_p$ de $\mathbb{Q}_p$ choisie plus haut).

Sur ces descriptions, on voit qu'il y a un $\otimes$-foncteur pleinement fidèle évident

$$\underline{\mathrm{SLoc}}_p(\mathbb{F}_p) \longrightarrow \underline{\mathrm{Fcriso}}(\mathbb{F}_p) \quad . \tag{3.4.1.1}$$

Le $\mathbb{Q}_p$-groupe G' des automorphismes du foncteur oubli sur $\underline{\mathrm{SLoc}}_p(\mathbb{F}_p)$ s'identifie au groupe quotient de l'enveloppe algébrique de $\mathbb{Z}$, produit de $\mathbb{G}_a$ par le groupe de

type multiplicatif ayant comme module galoisien de caractères le sous-module de $\overline{\mathbb{Q}_p^*}$ des unités p-adiques (i.e. des $x \in \bar{\mathbb{Q}}_p^*$ tels que $v_p(x) = 1$). On obtient une suite exacte de $\mathbb{Q}_p$-groupes

(3.4.1.2) $$0 \longrightarrow D(\mathbb{Q}) \longrightarrow G \longrightarrow G' \longrightarrow 0 \ .$$

On prendra garde que le morphisme (3.4.1.1) n'est pas le morphisme habituel (3.2.1.1) ; toutefois, l'image essentielle des deux foncteurs est la même, i.e. les F-cristaux de pente nulle. On vérifie aussitôt en explicitant la définition de (3.2.1.1) que (3.4.1.1) se déduit de (3.2.1.1) en tordant ce dernier par le G'-torseur P sur $\mathbb{Q}_p$ suivant (voir II 3.2.3.4) : on a un morphisme de $\mathbb{Q}_p$-groupes

$$G' \longleftarrow (\mathbb{Z})_{\mathbb{Q}_p} = \varprojlim (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathbb{Q}_p}$$

évident, et P est l'image par ce morphisme du $\mathbb{Z}$-torseur dont la classe dans $H^1(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_{\mathbb{Q}_p}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p), \mathbb{Z})$ est la projection canonique de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ sur le groupe de Galois de l'extension maximale non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$, à savoir $\mathbb{Z}$.

On déduit de ceci et de 3.2.3.1, 3.3.2

3.4.1.1. Proposition. Dans la suite exacte de gerbes

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}(\bar{\mathbb{F}}_p) \longrightarrow \mathcal{G}(\mathbb{F}_p) \longrightarrow \underline{\pi}_p(\mathbb{F}_p) \longrightarrow 0 \ ,$$

$\mathcal{G}(\bar{\mathbb{F}}_p)$ s'identifie à la gerbe des relèvements dans $\mathcal{G}(\mathbb{F}_p)$ de la section P de $\underline{\pi}_p(\mathbb{F}_p)$ (GIRAUD [1], IV 2.5.4.1).

3.4.1.2. En fait, toute la proposition peut se déduire directement de 3.2.3.1 et 3.3.2. Il suffit de vérifier que le cobord de P relativement à la suite exacte (3.4.1.2) coïncide dans $H^2(\mathbb{Q}_p, D(\mathbb{Q}))$ avec la classe de $\mathcal{G}(\bar{\mathbb{F}}_p)$, égale par loc. cit. à la projection canonique $\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ lorsqu'on fait l'identification

$$H^2(\mathbb{Q}_p, D(\mathbb{Q})) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \ .$$

3.4.1.3. Remarque. Soit (M,F_M) un F-cristal sur $\mathbb{F}_p$; F est un automorphisme du $\mathbb{Q}_p$-vectoriel M, et il est clair que les pentes du F-cristal M sont les valuations (normalisée par $v(p) = 1$) des valeurs propres de F.

3.4.2. Soient $r \geq 1$, $\mathbb{F}_{p^r}$ le corps fini à p^r éléments (on choisit une clôture algébrique $\mathbb{Q}_p$ de $\mathbb{Q}_p$, d'où une clôture algébrique $\mathbb{F}_p$ de $\mathbb{F}_p$ et des corps $\mathbb{F}_{p^r}$). On notera $K_r = K(\mathbb{F}_{p^r})$ le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt sur $\mathbb{F}_{p^r}$; c'est l'extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de degré r, engendrée par les racines (p^r-1)-ièmes de l'unité. Le groupe de Galois de $K_r/\mathbb{Q}_p$ s'identifie à celui de $\mathbb{F}_{p^r}/\mathbb{F}_p$, i.e. à $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$. On déduit de 3.2.3.1, qu'on a une suite exacte de gerbes tannakiennes

$$(3.4.2.1) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{G}(\mathbb{F}_{p^r}) \longrightarrow \mathcal{G}(\mathbb{F}_p) \longrightarrow (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow 0$$

et qu'on a un isomorphisme de gerbes

$$(3.4.2.2) \qquad \mathcal{G}(\mathbb{F}_{p^r}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}(\mathbb{F}_p) \times_{\underline{\pi}_p(\mathbb{F}_p)} \underline{\pi}_p(\mathbb{F}_{p^r}) \quad ;$$

le morphisme $\underline{\pi}_p(\mathbb{F}_{p^r}) \longrightarrow \underline{\pi}_p(\mathbb{F}_p)$ provient de la multiplication par r dans $\hat{\mathbb{Z}}$.

Soit (M,F_M) un F-cristal sur $\mathbb{F}_{p^r}$; l'application $F_M^r : M \longrightarrow M$ est K_r-linéaire, et on peut regarder (M,F_M^r) comme un objet de la catégorie tannakienne $[\underline{\mathrm{Fcriso}}(\mathbb{F}_p)]_{K_r}$, i.e. comme un F-cristal sur $\mathbb{F}_p$ muni d'une action de K_r (II 1.5.2). On définit ainsi un $\otimes$-foncteur ACU $\mathbb{Q}_p$-linéaire

$$(3.4.2.3) \qquad \underline{\mathrm{Fcriso}}(\mathbb{F}_{p^r}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Fcriso}}(\mathbb{F}_p)_{K_r} \ ,$$

d'où un morphisme de catégories tannakiennes sur K_r

$$(3.4.2.4) \qquad \underline{\mathrm{Fcriso}}(\mathbb{F}_{p^r})_{K_r} \longrightarrow \underline{\mathrm{Fcriso}}(\mathbb{F}_p)_{K_r} \ .$$

De ce qui précède, on déduit aussitôt

3.4.2.1. Proposition. Le morphisme (3.4.2.4) est une équivalence de catégories tannakiennes sur K_r .

3.4.2.2. Corollaire. Si (M,F_M) est un F-cristal sur $\mathbb{F}_{p^r}$, les pentes de (M,F_M) sont les valuations des valeurs propres de F_M^r (normalisées par $v(p^r) = 1$).

Ceci découle de la proposition et de 3.4.1.3 (voir aussi MANIN [1], II § 3).

3.5. Appendice : catégories tannakiennes à lien diagonalisable.

On fixe un corps K supposé pour simplifier de caractéristique 0 ($\mathbb{Q}_p$ dans les applications).

3.5.1. Proposition. Soit $\underline{C}$ une catégorie tannakienne sur K . Alors, le lien de $\underline{C}$ est un K-groupe diagonalisable (SGA 3, I 4.4) si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées.

a) $\underline{C}$ est semi-simple.

b) Le produit tensoriel de deux objets isotypiques est isotypique.

Dans ce cas, le lien de $\underline{C}$ est $D(M)$, où M est le groupe des types de $\underline{C}$ (i.e. le groupe défini par le $\otimes$ d'objets isotypiques de $\underline{C}$) .

3.5.1.1. Preuve. Si le lien de $\underline{C}$ est diagonalisable, on vérifie aussitôt, en se ramenant au cas neutre, que les conditions a), b), sont vérifiées. Inversement, supposons les conditions a), b) vérifiées ; on a un morphisme de liens évident

$$D(M) \longrightarrow \underline{\mathrm{Cent}}(\text{lien } \underline{C}) = \underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\mathrm{id}_{\underline{C}}) ,$$

et il suffit de vérifier localement sur K pour la topologie fpqc que ce morphisme identifie $D(M)$ au lien de $\underline{C}$. On peut donc supposer qu'il existe un foncteur fibre $\omega : \underline{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Modf}}(K)$ (III 3.2). Je vais montrer que chaque objet simple de $\underline{C}$ est de rang 1 , ce qui entraînera aussitôt que $\underline{C}$ s'identifie grâce à ω à la catégorie

$\underline{\mathrm{Grad}}_o(M)$ des K-vectoriels gradués de type M et de rang fini, et on sait que le lien de celle-ci est M (IV 1.2.1). En effet, si E est simple de rang r, $E \otimes \check{E}$ est isotypique, donc constant et $\mathrm{End}(E) \simeq \mathrm{Hom}(\underline{1}, E \otimes \check{E})$ est de rang r^2 ; on en déduit que ω induit un isomorphisme

$$\omega : \mathrm{End}(E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_K(\omega(E)) \qquad (\simeq M_r(K))$$

et $\mathrm{End}(E)$ étant un corps, on a $r = 1$.

La dernière assertion de 3.5.1 est contenue dans ce qui précède.

3.5.1.2. Remarque. Une catégorie tannakienne à lien diagonalisable $\underline{C}$ possède la propriété supplémentaire suivante :

si E est un objet simple de $\underline{C}$, $\mathrm{End}(E)$ est un corps gauche de centre K.

3.5.2. Soit M un groupe abélien, et soit $D(M)$ le K-groupe diagonalisable qu'il définit. On explicitera ici le groupe $H^2(K,D(M))$, étant entendu qu'il est calculé pour la topologie fpqc (cf. chap. III).

Si $M = \mathbb{Z}$, il y a un isomorphisme canonique

$$H^2(K,\mathbb{G}_m) \simeq \mathrm{Br}(K) \tag{3.5.2.1}$$

de $H^2(K,\mathbb{G}_m)$ avec le groupe $\mathrm{Br}(K)$ des classes de K-algèbres simples centrales ; si A est une telle algèbre, la classe de cohomologie de A est la classe de la gerbe sur K_{qc} (III 3.1) dont la fibre en un K-schéma S est la catégorie des couples (E,φ) d'un $\underline{O}_S$-module localement libre E et d'un isomorphisme de $\underline{O}_S$-algèbres $\varphi : \underline{\mathrm{End}}_{\underline{O}_S}(E) \xrightarrow{\sim} A \otimes_K \underline{O}_S$. (voir GIRAUD [1], V 4.2). En général, on a un morphisme de groupes, fonctoriel en M

$$\xi : H^2(K,D(M)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathrm{Br}(K)) \quad , \tag{3.5.2.2}$$

défini de la façon suivante : si $x \in H^2(K,D(M))$, $m \in M$,

$$\xi(x)(m) = \varphi_m^*(x) ,$$

où $\varphi_m : \mathbb{Z} \longrightarrow M$ est défini par $\varphi_m(1) = m$, et

$$\varphi_m^* : H^2(K,D(M)) \longrightarrow H^2(K,D(\mathbb{Z})) \simeq Br(K)$$

est le morphisme induit en cohomologie.

3.5.2.1. Proposition. Le morphisme (3.5.2.2) est un isomorphisme.

3.5.2.2. Preuve. C'est vrai pour $M = \mathbb{Z}$, auquel cas (3.5.2.2) se réduit à (3.5.2.1). C'est aussi vrai si $M = \mathbb{Z}^{(I)}$, où I est un ensemble quelconque, puisque les deux termes transforment sommes en produits. Pour le terme de gauche, on voit en utilisant l'interprétation géométrique du H^2 comme ensemble de classes d'équivalence de gerbes, que le H^2 commute avec les produits de K-groupes affines (on remarquera que ceci tient à la nature de la topologie fpqc , le même énoncé étant faux pour la topologie fppf par exemple).

En général, on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^{(I)} \longrightarrow \mathbb{Z}^{(J)} \longrightarrow M \longrightarrow 0 ,$$

d'où

$$0 \longrightarrow D(M) \longrightarrow \mathbb{G}_m^J \longrightarrow \mathbb{G}_m^I \longrightarrow 0 .$$

Puisque $H^1(K,\mathbb{G}_m^I) = 0$ (même raisonnement), on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^2(K,D(M)) \longrightarrow H^2(K,\mathbb{G}_m)^J \longrightarrow H^2(K,\mathbb{G}_m)^I ,$$

et on conclut aussitôt.

3.5.2.3. Corollaire. Une catégorie tannakienne à lien diagonalisable sur un corps algébriquement clos K est neutre (III 3.2.1).

En effet, $Br(K) = 0$.

3.5.3. Proposition. Soit $\underline{C}$ une catégorie tannakienne sur K à lien diagonalisable, et soit M le groupe des types de $\underline{C}$. Alors, la classe de $\underline{C}$ dans $H^2(K,D(M))$ (III 2.3) correspond par l'isomorphisme 3.5.2.2 à l'homomorphisme $M \longrightarrow Br(K)$ qui à un objet isotypique E associe la classe de l'algèbre simple centrale $End(E)$. (voir 3.5.1.2).

3.5.3.1. Preuve. Soit E un objet isotypique de $\underline{C}$, $A = End(E)$, et notons $\mathfrak{C}_A$ la gerbe définie par A (voir 3.5.2), $\mathfrak{C} = FIB_o(\underline{C})$ la gerbe des foncteurs fibre sur $\underline{C}$ (III 3.2.2), qui définit la classe de cohomologie de $\underline{C}$. On a un morphisme de gerbes

$$\mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{C}_A$$

défini ainsi : si S est un K-schéma, $\omega : \underline{C} \longrightarrow \underline{Loclib}(S)$ un foncteur fibre, la valeur de ce morphisme en ω est le couple $(\omega(E),\varphi)$, où φ est le morphisme de $\underline{O}_S$-algèbres $\varphi : A \otimes_K \underline{O}_S \longrightarrow \underline{End}_{\underline{O}_S}(\omega(E))$ induit par ω (la vérification de ce que φ est un isomorphisme se fait comme la fin de la preuve 3.5.1.1). Si la classe de E dans M est notée m, on voit sans peine que le lien de ce morphisme de gerbes est le morphisme $D(M) \longrightarrow \mathfrak{C}_m$ déduit de $\varphi_m : \mathbb{Z} \longrightarrow M$. On conclut par la définition même du morphisme $\varphi_m^* : H^2(K,D(M)) \longrightarrow H^2(K,\mathfrak{C}_m)$ (GIRAUD [1], IV 3.1.5).

§ 4. MOTIFS

Dans les numéros 4.1 à 4.4, on fixe un corps k. On utilisera de façon constante les notations et définitions de l'Appendice. Les constructions faites en 4.1 se trouvent aussi dans MANIN [2], KLEIMAN [2], et sont mises ici pour la comodité du lecteur. Les développements du n° 4.2 à la fin sont conjecturaux.

4.1.0. Préliminaires. On fixe une relation d'équivalence admissible pour les cycles algébriques $\sim$ (A 0.2.1), qui en pratique sera alg ou num (A 0.2.2). La $\mathbb{Q}$-algèbre graduée $C_{\sim}(X)$ sera simplement notée $C(X)$.

Dans ce numéro on construira une $\otimes$-catégorie ACU $\dot{M}(k)$ (ou plus simplement $\dot{M}(k)$) qui à la contrainte de commutativité près est la catégorie des motifs. On procède par étapes en partant de $\underline{V}(k)$ et en ajoutant à chaque fois, soit des objets, soit des morphismes. Le premier stade de ce processus est la catégorie des correspondances de degré zéro $\underline{CV}^0(k)$ définie en A 0.3.3.

4.1.1. La catégorie $\underline{CV}(k)$ des correspondances. On fait de cette catégorie, définie en A 0.3.3.3, une $\otimes$-catégorie ACU de la façon suivante. Si X,Y sont des objets de $\underline{CV}(k)$, i.e. des k-schémas lisses et projectifs, on pose

$$X \otimes Y = X \times Y \ ;$$

si $f \in C(X \times X')$, $g \in C(Y \times Y')$ sont des correspondances algébriques, $f \otimes g \in C(X \times Y \times X' \times Y')$ est simplement le cycle algébrique déduit de $f \times g$ par l'isomorphisme canonique $X \times X' \times Y \times Y' \simeq X \times Y \times X' \times Y'$. La loi $\otimes$ ainsi définie est munie d'une contrainte ACU évidente (I 2.4.1), et elle est $\mathbb{Q}$-linéaire. Si, avec les notations précédentes, f (resp. g) est de degré i (resp. j), $f \otimes g$ est de degré $i+j$. Ceci entraîne que $\underline{CV}^0(k)$ est une sous-$\otimes$-catégorie de $\underline{CV}(k)$.

Soit $\varphi : Y \longrightarrow X$ un morphisme de k-schémas lisses et projectifs, et notons $\Gamma(\varphi)$ la classe dans $C(X \times Y)$ du graphe $\Gamma_\varphi \subset X \times Y$ de φ. C'est une correspondance de X dans Y de degré zéro (l'ordre X,Y est ici important), et on définit ainsi un foncteur (contravariant)

(4.1.1.1) $$\underline{V}(k)^{o} \longrightarrow \underline{CV}^{o}(k) \quad ,$$

qui est même un $\otimes$-foncteur ACU strict (I 4.1.1). Ceci permet d'interpréter $\underline{CV}^{o}(k)$ comme la catégorie ayant mêmes objets que $\underline{V}(k)$ et dans laquelle on a ajouté aux morphismes de k-schémas les correspondances ayant la codimension appropriée.

La $\otimes$-catégorie ACU qu'on obtient ainsi, à savoir $\underline{CV}^{o}(k)$, a l'avantage sur $\underline{V}(k)$ d'être linéaire, et même $\mathbb{Q}$-linéaire. Toutefois, elle n'est pas abélienne, et il y a même des endomorphismes p avec la propriété $p^2 = p$ (i.e. des <u>projecteurs</u>) qui ne possèdent pas de noyau. On remédie à la non existence des noyaux de projecteurs, en les introduisant de façon formelle (voir 4.1.2), et on verra au numéro suivant comment les conjectures standard entraînent que ceci suffit à rendre abélienne la catégorie.

4.1.2. <u>La catégorie $\underline{M}^{+}(k)$ des motifs effectifs</u>.

4.1.2.1. Rappelons quelques définitions et constructions (SGA 4, IV 7.5). Une catégorie $\underline{C}$ est <u>karoubienne</u> si pour tout objet X de $\underline{C}$, et tout projecteur p de X, le noyau du couple

$$X \underset{p}{\overset{id_X}{\rightrightarrows}} X$$

est représentable. Il faut et il suffit pour cela que le conoyau du couple précédent soit représentable, et dans ce cas $\mathrm{Ker}(id_X,p)$ et $\mathrm{Coker}(id_X,p)$ sont canoniquement isomorphes. Pour toute catégorie $\underline{C}$ il existe une catégorie karoubienne $\mathrm{kar}(\underline{C})$ et un foncteur $\varphi : \underline{C} \longrightarrow \mathrm{kar}(\underline{C})$ universel pour les foncteurs de $\underline{C}$ dans une catégorie karoubienne, i.e. tel que si $\underline{C}'$ est une catégorie karoubienne le foncteur

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{kar}(\underline{C}),\underline{C}') \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{C},\underline{C}')$$

$$f \longmapsto f \circ \varphi$$

soit une équivalence de catégories. Voici une construction de $\mathrm{kar}(\underline{C})$, φ . Les objets de $\mathrm{kar}(\underline{C})$ sont les couples (X,p) d'un objet X de $\underline{C}$ et d'un projecteur p de X , et si (X,p) , (Y,q) sont deux tels objets

$$\mathrm{Hom}((X,p),(Y,q)) = \{f : X \longrightarrow Y \,/\, qfp = f\} \tag{4.1.2.1}$$

Le foncteur $\varphi : \underline{C} \longrightarrow \mathrm{kar}(\underline{C})$ est défini par

$$\varphi(X) = (X,\mathrm{id}_X) \quad . \tag{4.1.2.2}$$

Il est pleinement fidèle. Pour ce choix de $\mathrm{kar}(\underline{C})$, on a pour des catégories $\underline{C}$, $\underline{C}'$ un isomorphisme canonique

$$\mathrm{kar}(\underline{C} \times \underline{C}') \simeq \mathrm{kar}(\underline{C}) \times \mathrm{kar}(\underline{C}') \quad .$$

On en déduit que si $\underline{C}$ est une $\otimes$-catégorie (resp. une $\otimes$-catégorie ACU,...) $\mathrm{kar}(\underline{C})$ est munie de façon naturelle d'une structure de même type.

Soit $\underline{C}$ une catégorie linéaire, et soit p un projecteur d'un objet X de $\underline{C}$. Alors $\mathrm{id}_X - p$ est aussi un projecteur, et si $\underline{C}$ est karoubienne, on a de façon canonique

$$X = \ker(p) \oplus \ker(\mathrm{id}_X - p) \quad .$$

Si $\underline{C}$ n'est pas karoubienne, son enveloppe karoubienne $\mathrm{kar}(\underline{C})$ est également linéaire et on a

$$(X,\mathrm{id}_X) = (X,\mathrm{id}_X - p) \oplus (X,p) \quad .$$

Dans cette expression, $(X,\mathrm{id}_X - p)$ correspond au noyau de p , (X,p) à l'image de p . De façon plus générale, si X est un objet de la catégorie linéaire $\underline{C}$, toute décomposition

$$\mathrm{id}_X = \sum_{i=1}^{n} p_i \quad ,$$

de l'identité en somme de projecteurs deux à deux orthogonaux, définit une décomposition de $X = (X,\mathrm{id}_X)$

(4.1.2.3) $$X = \bigoplus_{i=1} (X,p_i) ,$$

i.e. une décomposition en somme des images des projecteurs. Si $\underline{C}$ est une $\otimes$-catégorie linéaire, explicitons pour terminer, la somme directe et le $\otimes$ d'objets dans $kar(\underline{C})$

(4.1.2.4) $$\begin{cases} (X,p) \oplus (Y,q) = (X \oplus Y , p \oplus q) \\ (X,p) \otimes (Y,q) = (X \otimes Y , p \otimes q) \quad . \end{cases}$$

4.1.2.2. La catégorie des motifs effectifs $\underline{M}^+(k)$ est définie par

(4.1.2.5) $$\underline{M}^+(k) = kar(\underline{CV}^o(k)) .$$

Un motif effectif est donc un couple (X,p) d'un k-schéma lisse et projectif X et d'un élément idempotent p dans l'anneau des correspondances de degré 0 de X dans X . On a un $\otimes$-foncteur ACU strict $\mathbb{Q}$-linéaire

$$\underline{CV}^o(k) \longrightarrow \underline{M}^+(k) ,$$

qui composé avec (4.1.1.1) donne un $\otimes$-foncteur ACU

$$k : \underline{V}(k)^o \longrightarrow \underline{M}^+(k) .$$

Si $X \in ob\ \underline{V}(k)$, $h(X)$ s'appelle le motif de X , ou encore la cohomologie motivique de X . L'égalité

(4.1.2.6) $$h(X \times Y) = h(X) \times h(Y)$$

peut s'interpréter comme la formule de Künneth en cohomologie motivique.

4.1.2.3. Soient X un k-schéma lisse projectif et connexe de dimension n , x un point fermé de X de degré $d(x)$. L'élément

$$e_X = d(x)^{-1} x \in C^n(X)$$

est indépendant du choix d'un point fermé x , et définit un isomorphisme $C^n(X) \simeq \mathbb{Q}$.

On vérifie aussitôt que les endomorphismes de $h(X)$

$$p_X = pr_1^*(e_X) \ , \quad q_X = pr_2^*(e_X) \in C^n(X \times X)$$

sont des projecteurs. De façon plus générale, si Y , Z sont aussi connexes de dimension n , et si on pose

$$p_{Y,X} = pr_X^*(e_X) \in C^n(X \times Y)$$

$$q_{Y,X} = pr_Y^*(e_Y) \in C^n(X \times Y) \quad ,$$

on a

$$\text{(4.1.2.7)} \qquad \begin{cases} p_{Z,Y} \circ p_{Y,X} = p_{Z,X} \\ q_{Z,Y} \circ q_{Z,X} = q_{Z,X} \quad . \end{cases}$$

Ceci signifie que les $p_{Y,X}$ (resp. $q_{Y,X}$) constituent un système transitif d'isomorphismes entre les motifs effectifs (X,p_X) (resp. (X,q_X)) pour X connexe de dimension n : en effet, on a $id_{(X,p)} = p$ pour un motif effectif (X,p).

En fait, pour définir les $p_{Y,X}$ comme morphismes dans $\underline{CV}^o(k)$, on n'utilise pas la condition $\dim Y = \dim X$, condition qui est toutefois indispensable dans la définition des $q_{Y,X}$. On voit donc que les motifs effectifs (X,p_X) sont canoniquement isomorphes ; on peut en particulier faire $X = \mathrm{Spec}(k)$, d'où

$$\text{(4.1.2.8)} \qquad (X,p_X) \simeq \underline{1}$$

où $\underline{1}$ désigne comme d'habitude l'objet unité $h(\mathrm{Spec}(k))$.

4.1.2.4. Restent à calculer les (X,q_X) , pour X de dimension n . On peut faire $X = (\mathbb{P}^1)^n$. Le motif effectif

$$\text{(4.1.2.9)} \qquad L = (\mathbb{P}^1, q_{\mathbb{P}^1})$$

est appelé le <u>motif de Lefschetz</u>. On en déduit aussitôt que

(4.1.2.10) $$(X,q_X) \simeq L^{\otimes n} ,$$

d'où une décomposition canonique pour le motif d'un k-schéma lisse projectif et connexe de dimension $n \neq 0$,

(4.1.2.11) $$h(X) = \underline{1} \oplus h^+(X) \oplus L^{\otimes n} ,$$

où $h^+(X) = (X, id_X - p_X - q_X)$ (cette notation est légitime si X est géométriquement connexe). Si $X = \mathbb{P}^1$, $id_X = p_X + q_X$, d'où

(4.1.2.12) $$h(\mathbb{P}^1) = \underline{1} \oplus L .$$

La connaissance de $C(\mathbb{P}^n)$ et de $C(\mathbb{P}^n \times X)$ en tant que $C(X)$-algèbre (A 0.2.3) permet de prouver facilement

4.1.2.5. Proposition. On a une décomposition

(4.1.2.13) $$h(\mathbb{P}^n) = \underline{1} \oplus L \oplus \ldots \oplus L^{\otimes n} ;$$

d'autre part, le motif L est 1-régulier (I 0.1.3), i.e. l'application

$$\mathrm{Hom}(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M \otimes L , N \otimes L) \quad f \longmapsto f \otimes id_L$$

est bijective. En particulier, $\mathrm{End}(L^{\otimes n}) \simeq \mathbb{Q}$.

4.1.3. La catégorie des motifs.

4.1.3.1. On présente d'abord une construction générale dans les $\otimes$-catégories, celle de rendre inversible un objet 1-régulier (I 0.1.3). Soient $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie ACU, L un objet 1-régulier de $\underline{C}$. On veut construire une $\otimes$-catégorie ACU $\underline{C}[L^{-1}]$ et un $\otimes$-foncteur

$$\varphi : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}[L^{-1}]$$

tel que $\varphi(L)$ soit inversible et qui soit universel pour les $\otimes$-catégories aient cette propriété. Voici une construction : les objets de $\underline{C}[L^{-1}]$ sont les couples (M,m) d'un objet M de $\underline{C}$ et d'un entier $m \in \mathbb{Z}$. Si (M,m) , (N,n)

sont deux tels objets,

$$\text{(4.1.3.1)} \qquad \mathrm{Hom}((M,m),(N,n)) = \varinjlim_{N\geq n,m} \mathrm{Hom}(M \otimes L^{N-m},\ N \otimes L^{N-n}) \ ,$$

les flèches de transition étant évidentes, ainsi que la composition de morphismes. La loi $\otimes$ est définie par

$$\text{(4.1.3.2)} \qquad (M,m) \otimes (N,n) = (M \otimes N\ ,\ m+n) \ ,$$

et le $\otimes$-foncteur φ par

$$\varphi(M) = (M,0) \ .$$

On a un isomorphisme canonique

$$\varphi(L) = (\underline{1},-1) \ ,$$

et on voit que l'objet

$$T = (\underline{1},1)$$

est un inverse pour $\varphi(L)$. On adopte la notation suivante : si M est un objet de $\underline{C}$, $m \in \mathbb{Z}$, on note $M(m)$ l'objet (M,m) ; si on identifie $\underline{C}$ à une sous-catégorie de $\underline{C}[L^{-1}]$ par φ , on a un isomorphisme canonique

$$M(m) \simeq M \otimes T^{\otimes m} \ .$$

4.1.3.2. La <u>catégorie des motifs</u> $\dot{M}(k)$ est définie par

$$\text{(4.1.3.3)} \qquad \underline{\dot{M}}(k) = \underline{M}^{+}(k)[L^{-1}] \ ,$$

où L est le motif de Lefschetz. Un motif M peut s'écrire donc sous la forme

$$M = M' \otimes T^{\otimes n}$$

où M' est effectif et T , l'inverse du motif de Lefschetz, est appelé le <u>motif de Tate</u> , où $M'' = M' \otimes L$.

On a un $\otimes$-foncteur ACU $\mathbb{Q}$-linéaire pleinement fidèle

$$\underline{M}^{+}(k) \longrightarrow \dot{\underline{M}}(k) \quad ,$$

d'où un $\otimes$-foncteur ACU, appelé encore cohomologie motivique

$$h : \underline{V}(k)^{o} \longrightarrow \dot{\underline{M}}(k) \quad .$$

4.1.3.3. Remarque. La terminologie "catégorie des motifs" employée pour $\dot{\underline{M}}(k)$ est provisoire. Au numéro suivant on modifiera de façon non triviale la contrainte de commutativité de $\dot{\underline{M}}(k)$. La $\otimes$-catégorie ACU obtenue ainsi, notée $\underline{M}(k)$, sera la vraie catégorie des motifs.

4.1.3.4. La $\otimes$-catégorie des motifs, munie du motif de Tate, permet de reconstituer la $\otimes$-catégorie $\underline{CV}(k)$ des correspondances. Il faut prouver que si X , Y sont des k-schémas lisses projectifs, on peut reconstruire le groupe $\mathrm{Hom}^{i}(X,Y)$ des correspondances de degré i , pour $i \in \mathbb{Z}$. Supposons, pour simplifier, X connexe de dimension n ; alors, on définit une bijection canonique, si $i,j \in \mathbb{Z}$

$$\mathrm{Hom}(h(X)(i),h(Y)(j)) \simeq C^{n+j-i}(X \times Y) \qquad (4.1.3.4)$$
$$\| \qquad\qquad (4.1.3.4)$$
$$\mathrm{Hom}^{j-i}(X,Y) \qquad (4.1.3.4)$$

Pour ce faire, on remarque d'abord qu'on peut supposer, soit $i = 0$ et $j \leq 0$, soit $i \leq 0$ et $j = 0$, suivant que $j-i$ est négatif ou positif. Traitons le premier cas, le second étant analogue : il faut définir une bijection, pour $j \leq 0$

$$C^{n+j}(X \times Y) \simeq \mathrm{Hom}(h(X),h(Y) \otimes L^{\otimes -j}) \quad .$$

Celle-ci est induite par le diagramme commutatif (voir 4.1.2.5 et A 0.2.3)

$$\begin{array}{ccc} C^{n}(X \times Y \times \mathbb{P}^{-j}) & = & \mathrm{Hom}(h(X),h(Y \times \mathbb{P}^{-j})) \\ \| & & \| \\ \bigoplus_{r=0}^{-j} C^{n-r}(X \times Y) & \simeq & \bigoplus_{r=0}^{-j} \mathrm{Hom}(h(X),h(Y) \otimes L^{\otimes r}) \end{array}$$

4.1.3.5. Proposition. La catégorie des motifs est une $\otimes$-catégorie rigide (I 5.1.1). Si X est un k-schéma lisse projectif et connexe de dimension n, on a un isomorphisme canonique

$$h(X)^\vee \simeq h(X)(n) = h(X) \otimes T^{\otimes n} ,$$

l'évaluation $h(X)^\vee \otimes h(X) \longrightarrow \underline{1}$ (I 3.1.1) se déduisant de $h(X \times X) \xrightarrow{h(\Delta)} h(X) \longrightarrow L^{\otimes n}$, où $h(X) \longrightarrow L^{\otimes n}$, est la projection canonique (4.1.2.11).

4.1.3.6. Preuve. On définit un foncteur

$$\dot{\underline{M}}(k)^o \longrightarrow \dot{\underline{M}}(k) \qquad M \longmapsto \check{M}$$

et des morphismes canoniques

$$ev_M : \check{M} \otimes M \longrightarrow \underline{1}$$

en étendant en plusieurs étapes le foncteur

$$\underline{V}'(k)^o \longrightarrow \dot{\underline{M}}(k) \qquad X \longmapsto h(X)(\dim X)$$

muni du morphisme d'évaluation explicité en 4.1.3.5. On utilise pour ceci les propriétés universelles des foncteurs $\underline{V}'(k) \longrightarrow \underline{V}(k)$ (pour la somme directe), $\underline{CV}^o(k) \longrightarrow \underline{M}^+(k)$, $\underline{M}^+(k) \longrightarrow \dot{\underline{M}}(k)$.

Si M,N sont des motifs, on pose

$$\underline{Hom}(M,N) = \check{M} \otimes N ,$$

muni de l'évaluation $\underline{Hom}(M,N) \otimes M \longrightarrow N$ évidente

$$\check{M} \otimes N \otimes M \simeq \check{M} \otimes M \otimes N \xrightarrow{ev_M \otimes id_N} N .$$

Pour vérifier que c'est un objet $\underline{Hom}$, il suffit de prouver que si X, Y, Z sont des schémas lisses projectifs, où X (resp. Y) est connexe de dimension n (resp. m)

$$\mathrm{Hom}(h(X),h(Y)(m) \otimes h(Z)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(h(X \times Y),h(Z)) .$$

Compte tenu de 4.1.3.4, cette bijection n'est autre que

$$C^{n+m}(X \times Y \times Z) = C^{n+m}(X \times Y \times Z)$$

Le reste de la proposition est maintenant trivial.

4.1.4. Motifs et théories de cohomologie.

4.1.4.1. Dans ce numéro on suppose que la relation d'équivalence pour les cycles $\sim$ fixée en 4.1.0 est l'équivalence algébrique. On note $\underline{M} = \dot{\underline{M}}(k)$.

4.1.4.2. Soient $(\underline{C},w,T_{\underline{C}})$ un triple comme dans A 1.1.1, (H,γ,Tr) une théorie de cohomologie à valeurs dans ce triple. On associe à $H = (H,\gamma,Tr)$ un couple (ω_H,ξ_H) d'un $\otimes$-foncteur rigide

$$\omega_H : \underline{M} \longrightarrow \underline{C}$$

et d'un isomorphisme

$$\xi_H : \omega_H(T) \xrightarrow{\sim} T_{\underline{C}}$$

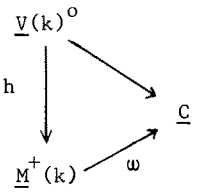
de la façon suivante : le foncteur

$$H : \underline{V}(k)^o \longrightarrow \underline{C}^+ \longrightarrow \underline{C}$$

s'étend à $\underline{CV}(k)$, en utilisant les applications induites par γ et Tr (voir A 1.3.2)

$$C^i(X \times Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H(X),H(Y)(i-n))$$

où $n = \dim X$. Puisque $\underline{C}$ est par hypothèse karoubienne, le $\otimes$-foncteur ACU $\underline{CV}^o(k) \longrightarrow \underline{C}$ s'étend à $\underline{M}^+(k)$, d'où un triangle commutatif



D'autre part, les axiomes d'une théorie de cohomologie donnent un isomorphisme canonique

$$H(\mathbb{P}^1) = \underline{1} \oplus T_{\underline{C}}^{\otimes -1} \quad ,$$

d'où , par (4.1.2.12), un isomorphisme

$$\xi' : \omega(L) \xrightarrow{\sim} T_{\underline{C}}^{\otimes -1} \quad ;$$

en particulier, $\omega(L)$ est inversible donc par 4.1.3.1, ω définit un $\otimes$-foncteur ACU

$$\omega_H : \underline{M} \longrightarrow \underline{C}$$

et ξ' un isomorphisme

$$\xi_H : \omega_H(T) \simeq T_{\underline{C}} \quad .$$

4.1.4.3. Proposition. La correspondance $(H,\gamma,Tr) \longrightarrow (\omega_H,\xi_H)$ définit une équivalence de la catégorie $TC(k,(\underline{C},w,T_{\underline{C}}))$ des théories de cohomologie sur k à valeurs dans $(\underline{C},w,T_{\underline{C}})$ avec la catégorie des couples (ω,ξ) d'un $\otimes$-foncteur rigide $\omega : \underline{M} \longrightarrow \underline{C}$ et d'un isomorphisme $\xi : \omega(T) \longrightarrow T_{\underline{C}}$, tels que ω transforme motifs effectifs en objets de $\underline{C}$ à degrés positifs.

4.1.4.4. Voici comment (ω,ξ) définit une théorie de cohomologie (H,γ,Tr) . On pose $H = \omega \circ h$, et si X est connexe de dimension n , $h(X)(n) \longrightarrow \underline{1}$ le morphisme canonique déduit de (4.1.2.11), Tr_X est l'image par ω de ce morphisme. Enfin, pour définir γ on se sert des isomorphismes (4.1.3.4)

$$\mathrm{Hom}(h(X)(i),h(Y)(j)) \simeq C^{n+j-i}(X \times Y)$$

et de $\xi : h(T) \simeq T_{\underline{C}}$.

4.1.5. Motifs effectifs de degré 0,1.

4.1.5.1. Un motif effectif M est de degré 0 s'il est facteur direct du motif d'un k-schéma de dimension zéro. La catégorie des motifs effectifs de degré zéro, notée $\underline{M}^{+0}(k)$, est la sous-catégorie karoubienne de $\underline{M}^{+}(k)$ engendrée par les $h(X)$, $\dim X = 0$; c'est une sous-$\otimes$-catégorie de $\underline{M}^{+}(k)$.

Choisissons une clôture algébrique $\bar{k}$ de k , et soit $\Gamma = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. On a un $\otimes$-foncteur

$$\underline{M}^{+0}(k) \longrightarrow \underline{\mathrm{Rep.cont.}}_{0}(\Gamma)$$

des motifs effectifs de degré 0 vers les $\mathbb{Q}$-vectoriels de rang fini munis d'une action continue du groupe profini Γ (i.e. se factorisant par un quotient fini), dont la valeur en $h(X)$ est donnée par

$$\mathbb{Q}^{X(\bar{k})}$$

muni de l'action continue évidente de Γ . On vérifie sans peine que c'est une $\otimes$-équivalence, identifiant un motif effectif de degré 0 à un $\mathbb{Q}$-vectoriel de rang fini à action continue de $\Gamma = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$.

4.1.5.2. La catégorie $\underline{M}^{+1}(k)$ des motifs effectifs de degré 1 est la sous-catégorie additive karoubienne de $\underline{M}^{+}(k)$ engendrée par les motifs $h^{+}(X)$ (4.1.2.4) pour X une courbe (i.e. géométriquement connexe de dimension 1). On prouve dans MANIN [2], § 10, qu'il y a une équivalence canonique de catégories $\mathbb{Q}$-linéaires

$$\underline{M}^{+1}(k) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Isab}}(k) \quad ,$$

où $\underline{\mathrm{Isab}}(k)$ est la catégorie abélienne semi-simple des variétés abéliennes sur k , à isogénie près. L'équivalence associe à $h^{+}(X)$ la jacobienne de X , J_X .

4.2. La catégorie tannakienne des motifs.

4.2.0. On considère ici la catégorie des motifs construite en utilisant l'équivalence numérique des cycles, i.e. (4.1.0)

$$\underline{\dot{M}}(k) = \underline{\dot{M}}_{num}(k) .$$

On suppose de plus l'existence d'une théorie de cohomologie à valeurs dans un corps de caractéristique zéro vérifiant les conjectures standard (A 2.4.1) ; par exemple, on peut supposer la validité des conjectures standard pour une cohomologie ℓ-adique (A 1.4.1).

Si $\underline{T} = (\underline{C},w,T_{\underline{C}})$ est un triple de Tate (V 3.1.1), théorie de cohomologie à valeurs dans $\underline{T}$ signifie théorie de cohomologie à valeurs dans $\underline{T}$ vérifiant les conjectures standard (A 1.1.5, A 2.4.4).

On maintient ces conventions en 4.3-4.6.

4.2.1. On va construire une $\otimes$-graduation naturelle sur la catégorie $\underline{\dot{M}}(k)$. Rappelons que ceci signifie que chaque motif M est muni d'une décomposition

$$M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M^n$$

canonique, et compatible en un sens évident avec la loi $\otimes$.

Pour ce faire, on procède par étapes

4.2.1.1. Soit X un k-schéma projectif, lisse et connexe de dimension n . D'après A (3.2.1), on a une décomposition dans l'anneau $C^n(X \times X)$ des endomorphismes de X dans $\underline{CV}^0(k)$

$$(4.2.1.1) \qquad id_X = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \pi_X^i ,$$

où $\pi_X^i = 0$ pour $i \notin [0,2n]$. D'autre part, si Y est de dimension m , on a

(4.2.1.2) $$\pi^k_{X\times Y} = \sum_{i+j=k} \pi^i_X \otimes \pi^i_Y$$

On sait aussi (A 3.2) que les π^i_X ne dépendent pas de la théorie de cohomologie choisie. Les constructions qui suivent reposent uniquement sur les π^i_X .

4.2.1.2. Les π^i_X sont des projecteurs orthogonaux, comme on le voit aussitôt, et la formule (4.2.1.1) définit une décomposition du motif $h(X)$ dans $\underline{M}^+(k)$ (4.1.2.1)

(4.2.1.3) $$h(X) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} h^i(X)$$

où $h^i(X) = (X,\pi^i_X)$ avec les notations de 4.1.2. D'autre part, la décomposition (4.2.1.1) est fonctorielle dans la catégorie $\underline{CV}^o(k)$, ce qui signifie ceci : si $f \in C^n(X \times Y)$, i.e. $f : X \longrightarrow Y$ dans $\underline{CV}^o(k)$, alors

$$\pi^i_Y \circ f = f \circ \pi^i_X \quad ,$$

ce qui est une autre façon de dire que $H(f) : H(X) \longrightarrow H(Y)$ est homogène de degré 0 . En fait, le commutant des π^i_X $(0 \leq i \leq 2n)$ dans l'anneau $C(X\times X)$ des correspondances algébriques, est exactement $C^n(X\times X)$.

De ce qui précède, et de (4.2.1.2), on déduit une $\otimes$-graduation de $\underline{M}^+(k)$, caractérisé comme la seule pour laquelle on a

$$h(X)^i = h^i(X) \ .$$

On remarquera que le motif L est homogène de degré 2.

4.2.1.3. La $\otimes$-graduation de $\underline{M}^+(k)$ s'étend de façon immédiate en une $\otimes$-graduation de $\dot{\underline{M}}(k)$. On a

(4.2.1.4) $$(M,n)^i = (M^{i+2n},n) \qquad i \in \mathbb{Z} \ .$$

4.2.1.4. On utilise cette graduation pour modifier la contrainte de commutativité de $\dot{\underline{M}}(k)$, qui munie de cette nouvelle loi $\otimes$ ACU, sera notée $\underline{M}(k)$. C'est la

véritable catégorie des motifs, qu'on étudie dans ce qui suit. Voici comment on procède : si M , N sont des motifs, et $\dot{\psi} : M \otimes N \simeq N \otimes M$ est l'isomorphisme de commutativité, alors

$$\dot{\psi} = \oplus \dot{\psi}^{p,q}$$

où $\dot{\psi}^{p,q} : M^p \otimes N^q \simeq N^q \otimes M^p$; on note ψ le nouvel isomorphisme de commutativité, défini par

$$\psi = \oplus \psi^{p,q}$$

(4.2.1.5)

$$\psi^{p,q} = (-1)^{pq} \dot{\psi}^{p,q} \quad .$$

On remarquera que pour que cette modification ait un sens il a été essentiel de supposer la validité des conjectures de type Lefschetz. Cette modification est, à son tour, essentielle pour étudier la catégorie des motifs du point de vue des catégories tannakiennes.

4.2.2. Théorème. $\underline{M}(k)$ est une catégorie tannakienne sur $\mathbb{Q}$, et semi-simple.

4.2.2.1. Preuve. Soit (H,γ,Tr) une théorie de cohomologie sur k à valeurs dans un corps de caractéristique zéro K . Elle définit un $\otimes$-foncteur rigide

$$\omega_H : \dot{\underline{M}}(k) \longrightarrow \underline{Gradf}^{+}(K) \quad .$$

En modifiant la contrainte de commutativité de $\dot{\underline{M}}(k)$, on a fait exactement ce qu'il fallait pour interpréter ω_H comme un $\otimes$-foncteur rigide

$$\omega_H : \underline{M}(k) \longrightarrow \underline{Gradf}(K) \ ,$$

où dans la contrainte de commutativité de $\underline{Gradf}(K)$ il n'y a pas de signe. D'ailleurs, par 4.2.1, la donnée du foncteur précédent équivaut à celle d'un $\otimes$-foncteur rigide, noté encore

$$\omega_H : \underline{M}(k) \longrightarrow \underline{Modf}(K) \quad .$$

Ce $\otimes$-foncteur, qui est $\mathbb{Q}$-linéaire, est fidèle, comme il résulte de A 2.4.1 c). Il en résulte que le théorème de Krull-Remak-Schmidt est valable dans $\underline{M}(k)$: tout motif M s'écrit comme somme finie des motifs indécomposables. Pour prouver 4.2.2, il suffit de prouver que $\underline{M}(k)$ est une catégorie abélienne semi-simple, ou encore, par ce qui précède, qu'un motif indécomposable M est simple : soit $i : N \hookrightarrow M$ un sous-objet simple de M, $N \neq 0$; il est clair que M est homogène, soit p son degré. On peut d'ailleurs, quitte à tensoriser par une puissance de T, supposer M et N effectifs, ce qui entraîne qu'on obtient M (resp. N) comme facteur direct d'un motif effectif $h^p(X)$ (resp. $h^p(Y)$), soit

$$M \oplus M' = h^p(X)$$

$$N \oplus N' = h^p(Y)$$

Soit $u : h^p(Y) \longrightarrow h^p(X)$ le morphisme donné par la matrice

$$u = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$u' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

son transposé $u' : h^p(X) \longrightarrow h^p(Y)$ défini en A 3.3 (on suppose X,Y polarisés). Alors (loc.cit.)

$$Tr(u'u) = Tr(a\,i) > 0 \ ,$$

d'où

$$ai \neq 0$$

et ai est un automorphisme, puisque N est simple. Le morphisme

$$j = (ai)^{-1}a : M \longrightarrow N$$

est une rétraction pour i, et $M = N$.

4.2.2.2. Remarque. La $\otimes$-catégorie rigide $\underline{\dot{M}}(k)$ n'est pas tannakienne. En effet, si elle l'était, on déduirait aussitôt de là que $\underline{\mathrm{Gradf}}^{+}(k)$ est tannakienne, ce qui est évidemment faux.

4.2.3. On a vu au cours de la preuve de 4.2.2 comment une théorie de cohomologie $\underline{H}$ à valeurs dans K détermine un foncteur fibre (III 3.2.1.2)

$$\omega_{\underline{H}} : \underline{M}(k) \longrightarrow \underline{\mathrm{Modf}}(K)$$

muni d'un isomorphisme

$$\xi_{\underline{H}} : \omega_{\underline{H}}(T) \xrightarrow{\sim} K .$$

Ceci reste valable si on remplace K par un $\mathbb{Q}$-schéma S (A 1.1.4).

Si, de façon plus générale, on prend une théorie de cohomologie $\underline{H}$ à valeurs dans une catégorie tannakienne $\underline{C}$ (A 1.1.5.1), on trouve un couple $(\omega_{\underline{H}},\xi_{\underline{H}})$ d'un morphisme de catégories tannakiennes

$$\omega_{\underline{H}} : \underline{M}(k) \longrightarrow \underline{C}$$

et d'un isomorphisme

$$\xi_{\underline{H}} : \omega_{\underline{H}}(T) \xrightarrow{\sim} \underline{1}$$

Enfin, plus généralement encore, si $\underline{H}$ est une théorie de cohomologie à valeurs dans un triple de Tate $\underline{T} = (\underline{C},w,T)$, on trouve un couple $(\omega_{\underline{H}},\xi_{\underline{H}})$ d'un morphisme

$$\omega_{\underline{H}} : \underline{M}(k) \longrightarrow \underline{C}$$

de catégories tannakiennes compatible aux $\otimes$-graduations et d'un isomorphisme

$$\xi_{\underline{H}} : \omega_{\underline{H}}(T) \xrightarrow{\sim} T .$$

Les énoncés suivants résultent de ce qui précède et de 4.1.4.2.

4.2.3.1. Proposition. Soit S un $\mathbb{Q}$-schéma. La correspondance $H \longmapsto (\omega_H, \xi_H)$ définit une équivalence de catégories de $TC(k,S)$ avec la catégorie des couples (ω,ξ) d'un foncteur fibre $\omega : \underline{M}(k) \longrightarrow \underline{Loclib}(S)$ et d'un isomorphisme $\xi : \omega(T) \xrightarrow{\sim} \underline{O}_S$.

4.2.3.2. Proposition. Soit $\underline{C}$ une catégorie tannakienne sur un corps de caractéristique zéro. La correspondance $H \longmapsto (\omega_H, \xi_H)$ définit une équivalence de catégories de $\underline{TC}(k,\underline{C})$ avec la catégorie des couples (ω,ξ) d'un morphisme $\omega : \underline{M}(k) \longrightarrow \underline{C}$ et d'un isomorphisme $\xi : \omega(T) \xrightarrow{\sim} \underline{1}$.

4.2.3.3. Proposition. Soit $\underline{T} = (\underline{C}, w, T_{\underline{C}})$ un triple de Tate sur un corps de sur un corps de caractéristique zéro. La correspondance $H \longmapsto (\omega_H, \xi_H)$ définit une équivalence de catégories de $\underline{TC}(k,\underline{T})$ avec la catégorie des couples (ω,ξ) d'un morphisme $\omega : \underline{M}(k) \longrightarrow \underline{C}$ compatible avec les $\otimes$-graduations centrales de $\underline{M}(k)$ et $\underline{C}$, et d'un isomorphisme $\xi : \omega(T) \xrightarrow{\sim} T_{\underline{C}}$.

4.2.4. Scholie. La catégorie $\underline{M}(k)$ des motifs est une catégorie tannakienne semi-simple sur $\mathbb{Q}$, correspondant donc à une $\mathbb{Q}$-gerbe tannakienne $\mathcal{G}$ (III 2.2.2) dont le lien L est représenté, localement pour la topologie fpqc, par un groupe pro-réductif (III 3.3.3 b)). Elle est munie d'une $\otimes$-graduation canonique, qui correspond à un morphisme de gerbes central

$$TORS(\mathbb{G}_m) \longrightarrow \mathcal{G} ,$$

ou encore (IV 1.3) à un morphisme de $\mathbb{Q}$-groupes abéliens

$$\mathbb{G}_m \longrightarrow \underline{Cent}(L) .$$

L'objet T de Tate, qui est inversible et correspond ainsi à un morphisme de gerbes

$$\mathcal{G} \longrightarrow TORS(\mathbb{G}_m)$$

est de degré -2 , i.e. le morphisme composé

$$\mathrm{TORS}(\mathbb{G}_m) \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathrm{TORS}(\mathbb{G}_m)$$

provient du morphisme

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_m &\longrightarrow \mathbb{G}_m \\ \lambda &\longmapsto \lambda^{-2} \quad . \end{aligned}$$

Enfin, si $\mathcal{G}_0$ est la gerbe noyau de $\mathcal{G} \longrightarrow \mathrm{TORS}(\mathbb{G}_m)$, on a un isomorphisme canonique de gerbes

$$\mathcal{G}_0 \simeq \underline{TC}(k) \quad ,$$

où $\underline{TC}(k)$ est le champ sur $\underline{Sch}_{/\mathbb{Q}}$ des théories de cohomologie (A 1.1.4) .

4.2.5. Supposons la validité des conjectures standard pour la cohomologie ℓ-adique, où ℓ est un nombre premier fixé différent de la caractéristique de k . On en déduit un morphisme de catégories tannakiennes (A 4.3)

$$\underline{M}(k) \longrightarrow \underline{\mathrm{Grad}}\ \underline{\mathrm{Tate}}(k) \quad , \tag{4.2.5.1}$$

ou encore un morphisme de catégories tannakiennes sur $\mathbb{Q}_\ell$,

$$\underline{M}(k)_{\mathbb{Q}_\ell} \longrightarrow \underline{\mathrm{Grad}}\ \underline{\mathrm{Tate}}(k) \tag{4.2.5.2}$$

(voir III 3.2.4 pour le procédé d'extension des scalaires dans les catégories tannakiennes). Si on note G_ℓ le $\mathbb{Q}_\ell$-groupe des automorphismes du foncteur fibre à valeurs dans $\mathbb{Q}_\ell$ défini par la cohomologie ℓ-adique, et on garde les notations de A 4.3, on a un diagramme commutatif de $\mathbb{Q}_\ell$-groupes

(4.2.5.3)
$$\begin{array}{ccc} G \times \mathbb{G}_m & \longrightarrow & G_\ell \\ {\scriptstyle \mathrm{pr}}\downarrow & & \downarrow \\ G & \longrightarrow & \Gamma_{\mathbb{Q}_\ell} \end{array}$$

où $G \times \mathbb{G}_m \longrightarrow G_\ell$ est induit par (4.2.5.2), $G \longrightarrow \Gamma_{\mathbb{Q}_\ell}$ est la projection canonique (loc.cit.) et $G_\ell \longrightarrow \Gamma_{\mathbb{Q}_\ell}$ est l'épimorphisme défini par l'inclusion dans $\underline{M}(k)$ des motifs effectifs de degré zéro (voir 4.1.5.1).

Si on admet la conjecture de Tate (A 4), (4.2.5.2) est pleinement fidèle, i.e. $G \times \mathbb{G}_m \longrightarrow G_\ell$ est un épimorphisme, et il résulte du diagramme (4.2.5.3) que $\Gamma_{\mathbb{Q}_\ell}$ s'identifie au groupe des composantes connexes de G_ℓ. En particulier

4.2.5.1. Proposition. Si k est algébriquement clos, le lien de $\underline{M}(k)$ est connexe.

4.3. Niveaux.

4.3.0. On note $\underline{M}$ la catégorie tannakienne $\underline{M}(k)$ définie en 4.2 ; si $n \in \mathbb{Z}$, $\underline{M}^n$ désigne la sous-catégorie pleine des motifs de degré n, $\underline{M}^{+n}$ la sous-catégorie pleine des motifs effectifs de degré n. Si $n < 0$, $M^{+n} = 0$.

4.3.1. Soit M un motif de degré n ; si $i \in \mathbb{Z}$, on dit que M est de niveau $\leq n - 2i$ si le motif $M(i)$ est effectif. Si $k \in \mathbb{Z}$, on dira aussi que M est de niveau $\leq k$ (resp. $< k$) si M est de niveau $\leq k$ ou $\leq k-1$ (resp. $\leq k-1$ ou $\leq k-2$) suivant la parité de $n-k$; donc, si M est de niveau $\leq k$ et $k \leq k'$, M est de niveau $\leq k'$.

Les assertions suivantes sont immédiates :

a) niveau de $M < 0 \iff M = 0$.

b) niveau de $M \leq k \iff$ niveau de $M(i) \leq K \qquad \forall\, i \in \mathbb{Z}$

c) si M de degré n, niveau de $M \leq n \iff M$ est effectif.

d) si M est de degré n, et si niveau de $M \leq n - 2i$, tout sous-objet de M est de niveau $\leq n-2i$.

Le niveau définit une filtration croissante de $\underline{M}^n$ par des sous-catégories abéliennes (et semi-simples).

4.3.2. Soit M un motif de degré n, et soit $i \in \mathbb{Z}$. On note M_{n+2i} le plus grand sous-motif de M de niveau $\leq n+2i$. On définit ainsi une filtration croissante du motif M, appelée filtration par les niveaux

$$(4.3.2.1) \qquad \ldots \supset M_{n+2i+2} \supset M_{n+2i} \supset \ldots \ ;$$

si M est effectif, $M_n = M$. On dit qu'un motif effectif M de degré n est purement de niveau n, si $M_{n-2} = 0$, i.e. si la filtration précédente n'a qu'un cran. On note $\underline{M}[n]$ la sous-catégorie pleine de $\underline{M}^{+n}$ des motifs purs de niveau n. On a un foncteur évident

$$(4.3.2.2) \qquad \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \left[L^{\otimes i} \otimes \underline{M}[n-2i] \right] \longrightarrow \underline{M}^n$$

défini par

$$(M_{n-2i})_{i\in\mathbb{Z}} \longmapsto \bigoplus_i L^{\otimes i} \otimes M_{n-2i} \ .$$

4.3.3. Proposition. Le foncteur (4.3.2.2) est une équivalence de catégories ; en particulier, il induit une équivalence de catégories

$$(4.3.3.1) \qquad \bigoplus_{i\geq 0} L^{\otimes i} \otimes \underline{M}[n-2i] \xrightarrow{\sim} M^{+n} \ .$$

4.3.3.1. Preuve. Il suffit de voir que si M est un motif de degré n, la filtration par les niveaux (4.3.2.1) splitte canoniquement. Il est clair qu'elle splitte, parce que $\underline{M}$ est une catégorie semi-simple, la canonicité suit de ce que dans l'inclusion

$$\underline{M}_{n+2i} \subset \underline{M}_{n+2i+2}$$

il existe un unique supplémentaire direct de $\underline{M}_{n+2i}$: en effet, si $N = M_{n+2i+2}/M_{n+2i}$, $\mathrm{Hom}(N, M_{n+2i}) = 0$ comme il suit aussitôt de la définition de la filtration par les niveaux.

4.3.4. Soit M un motif de degré n. Si n est pair, la filtration par les niveaux a la forme

$$M_{n+2i} \supset \ldots \supset M_2 \supset M_o \supset 0 \quad ;$$

si n est impair, elle est de la forme

$$M_{n+2i} \supset \ldots \supset M_3 \supset M_1 \supset 0 \quad .$$

Dans le premier cas, $n = 2k$, et $M_o(k)$ est un motif effectif de degré 0, correspondant ainsi (4.1.5) à un $\mathbb{Q}$-vectoriel de rang fini muni d'une action de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. Sa formation est fonctorielle en M.

Dans le second cas, $n = 2k+1$, et $M_1(k)$ est un motif effectif de degré 1, correspondant ainsi (4.1.5) à une variété abélienne à isogénie près sur k. Sa formation est aussi fonctorielle en M. Si X est un k-schéma lisse projectif et $M = h^{2k+1}(X)$, on peut penser $M_1(k)$ comme la "partie algébrique de la jacobienne intermédiaire d'ordre k de X".

4.3.5. Soit X un k-schéma lisse projectif et connexe de dimension n, muni d'une section hyperplane lisse comme dans A 2.1.2. On note encore $\underline{\ell}$ l'image par Δ_X de $\ell \in C^1(X)$,

$$\underline{\ell} = \Delta_X(\ell) \in C^{n+1}(X \times X) \; ;$$

c'est donc (4.1.3.4) un morphisme

$$\underline{\ell} : h(X) \longrightarrow h(X)(1) \quad ;$$

les applications

$$C^i(X) \longrightarrow C^{i+1}(X)$$

qu'il induit sont celles notées $\underline{\ell}$ en A 2.1.2. Soit $i \leq n$; les conjectures de type Lefschetz (A 2.2) entraînent que

$$\underline{\ell}^{n-i} : h^i(X) \longrightarrow h^{2n-i}(X)(n-i)$$

est un isomorphisme de motifs. En particulier, elles impliquent : <u>si</u> $j \in \mathbb{N}$ <u>le motif</u> $h^j(X)$ <u>est de niveau</u> $\leq \inf(j, 2n-j) \leq n$.

4.4. La polarisation canonique.

4.4.1. La catégorie des motifs $\underline{M}(k)$, munie de sa $\otimes$-graduation centrale et du motif T de Tate, est un triple de Tate sur $\mathbb{Q}$, au sens de V 3.1.1. Dans ce numéro on construit une polarisation canonique sur ce triple de Tate.

4.4.2. Soit X un k-schéma projectif lisse et connexe de dimension n, muni d'une "polarisation" $\ell \in C^1(X)$. La polarisation de X définit des morphismes de motifs (A 2.2.2 et A 2.2.4)

$$* : h^i(X) \longrightarrow h^{2n-i}(X)\ (n-i) .$$

On notera φ_ℓ la forme bilinéaire

$$\varphi_\ell : h^i(X) \otimes h^i(X) \longrightarrow T^{\otimes -i}$$

définie par

$$\varphi_\ell : h^i(X) \otimes h^i(X) \xrightarrow{id \otimes *} h^i(X) \otimes h^{2n-i}(X)(n-i) \longrightarrow h^{2n}(X)(n-i) \xrightarrow{Tr} T^{\otimes -i}$$

Elle est $(-1)^i$-symétrique, et il résulte de A 3.3 que les formes φ_ℓ sont des formes de Weil compatibles deux à deux (V 2.3.1). De plus, si X,Y sont des k-schémas projectifs lisses connexes, munis de polarisations ℓ_X, ℓ_Y, la forme $\varphi_X \otimes \varphi_Y$ sur $h^i(X) \otimes h^j(Y)$ à valeurs dans $T^{\otimes -i-j}$ est déduite (à un facteur positif près, voir KLEIMAN [1], 3.11) de la forme $\varphi_{X \times Y}$ sur $h^{i+j}(X \times Y)$ lorsqu'on polarise $X \times Y$ par $\ell_X \otimes 1_Y + 1_X \otimes \ell_Y$.

On déduit de cette discussion que l'ensemble des formes de Weil du type précédent définit une polarisation sur le triple de Tate des motifs (V 3.2.1).

4.4.3. Supposons la validité des conjectures standard et de la conjecture de Tate pour une cohomologie ℓ-adique (A 4), où ℓ est un nombre premier différent de la

caractéristique. Supposons d'abord k algébriquement clos ; alors, le lien de la catégorie tannakienne $\underline{M}^0(k)$ des motifs de degré zéro (pas nécessairement effectifs) est connexe par 2.2.5. D'autre part, la polarisation du triple de Tate des motifs définie plus haut, induit sur $\underline{M}^0(k)$ une polarisation symétrique au sens de V 2.4.1. Il en résulte, d'après V 2.4.5.1.4) que $\underline{M}^0(k)$ est "ind-neutre" sur le corps des réels : chaque fois qu'on prend une sous-catégorie tannakienne de $M^0(k)$ $\otimes$-engendrée par un nombre fini (ou plus généralement une infinité dénombrable) d'objets, il existe un foncteur fibre à valeurs dans $\mathbb{R}$. D'après loc. cit. il en existe même un foncteur fibre unique (à isomorphisme non unique près) ayant la propriété de transformer les formes de polarisation en des formes définies positives.

Ces conclusions d'ind-neutralité sur $\mathbb{R}$ sont valables aussi si k n'est pas algébriquement clos ; on a en effet un morphisme de catégories tannakiennes

$$\underline{M}(k) \longrightarrow \underline{M}(\bar{k}) \quad .$$

Résumons la discussion

4.4.3.1. Proposition. Soit N une sous-catégorie tannakienne algébrique (III 3.3.1) de la catégorie $\underline{M}^{2\cdot}(k)$ des motifs de degré pair. Il existe sur N un foncteur fibre à valeurs dans $\mathbb{R}$.

4.4.3.2. Remarque. On peut interpréter ceci en disant qu'il existe le morceau pair d'une théorie de cohomologie à valeurs dans $\mathbb{R}$. Il est bien connu, d'après Serre, qu'en caractéristique $\neq 0$, il n'y a pas de théorie de cohomologie à valeurs dans $\mathbb{R}$.

4.5. Motifs en caractéristique nulle.

4.5.0. $\underline{M}$ dénote la catégorie des motifs sur un corps k de caractéristique nulle. Les théories de cohomologie envisagées sont supposées vérifier les conjectures standard (A2).

4.5.1. La cohomologie de Hodge et de De Rham définissent des foncteurs fibre sur la catégorie des motifs à valeurs dans k (A 1.4.2, 1.4.3)

$$h_{Hdg}, h_{DR} : \underline{M} \longrightarrow \underline{Modf}(k) .$$

La filtration de Hodge de la cohomologie de De Rham (loc. cit.) définit une $\otimes$-filtration exacte F de h_{DR} (IV 2.1.1.1) et par A 1.4.3 on a un isomorphisme canonique de foncteurs fibre

(4.5.1.1) $$gr_F h_{DR} \simeq h_{Hdg} .$$

La donnée d'un scindage de la filtration F revient à celle d'un isomorphisme $h_{DR} \simeq h_{Hdg}$ respectant les filtrations de Hodge et induisant l'identité sur les gradués associés (IV 2.2.1). Si on restreint h_{DR} à une sous-catégorie tannakienne algébrique $\underline{N}$ de $\underline{M}$ on sait qu'il existe un tel scindage de la filtration de Hodge (IV 2.4).

4.5.1.1. Supposons que $k = \mathbb{C}$, dans ce cas la théorie de Hodge fournit un scindage canonique

$$h_{DR} \simeq h_{Hdg}$$

de la filtration de Hodge, qui est de nature transcendante.

4.5.2. Supposons que $k = \mathbb{C}$. Alors, la cohomologie de Betti-Hodge (A 1.4.4) définit un foncteur fibre

$$h_{BH} : \underline{M} \longrightarrow \underline{Hodge}(\mathbb{Q})$$

compatible avec les $\otimes$-graduations et un isomorphisme

$$h_{BH}(T) \simeq T$$

où T désigne respectivement le motif de Tate et la structure de Hodge de Tate. En d'autres termes, on a un morphisme du triple de Tate des motifs sur C (4.4.1) dans celui défini par $\underline{\text{Hodge}}(\mathbb{Q})$ (2.1.3.1). Par définition des polarisations sur $\underline{M}$ (4.4) et sur $\underline{\text{Hodge}}(\mathbb{Q})$ (2.1.3.1) et d'après WEIL [1], chap. IV, th. 7, on voit que le morphisme de triples de Tate défini par la cohomologie de Betti-Hodge est compatible avec les polarisations.

4.5.2.1. Il résulte facilement de (4.1.3.4) et de A 5.1 que la forme simple de la conjecture de Hodge équivaut à la pleine fidélité du foncteur h_{BH}.

De même, on vérifie aussitôt que la forme généralisée de la conjecture de Hodge équivaut à l'assertion suivante sur h_{BH} :

Si M est un motif sur $\mathbb{C}$, M est effectif si et seulement si la structure de Hodge $h_{BH}(M)$ est effective, i.e. si elle est à bidegrés positifs.

Donc, si on accepte la conjecture de Hodge, le foncteur h_{BH} identifie $\underline{M}(\mathbb{C})$ à une sous-catégorie tannakienne pleine de $\underline{\text{Hodge}}(\mathbb{Q})$; la $\otimes$-graduation de la catégorie des motifs est induite par celle de $\underline{\text{Hodge}}(\mathbb{Q})$; la structure de Hodge de Tate T se trouve dans $\underline{M}(\mathbb{C})$; la polarisation de la catégorie des motifs est induite par celle de $\underline{\text{Hodge}}(\mathbb{Q})$; enfin, la structure des niveaux (4.3) de $\underline{M}(\mathbb{C})$ est induite par celle de Hodge$(\mathbb{Q})$ (définie par le niveau de Hodge, voir A 5.2.1). Bien entendu, on ne connaît aucune caractérisation de l'image de $\underline{M}(\mathbb{C})$ dans $\underline{\text{Hodge}}(\mathbb{Q})$, i.e. des structures de Hodge qui sont algébriques. En degré 1, elles le sont toutes, d'après la théorie des variétés abéliennes (MUMFORD [2], chap. 1). D'après Griffiths, si on fixe des nombres de Hodge $h^{a,b}$ définissant un poids ≥ 2, et à l'exception de quelques cas, les structures de Hodge algébriques définissent un ensemble maigre dans l'espace de modules des structures de Hodge polarisables.

4.6. Motifs en caractéristique non nulle.

4.6.0. $\underline{M}$ dénote la catégorie des motifs sur un corps k de caractéristique p non nulle. Les théories de cohomologie envisagées sont supposées vérifier les conjectures standard (A2).

4.6.1. Soit ℓ un nombre premier $\neq p$. La cohomologie ℓ-adique (A 1.4.1 et A 4.4) définit un foncteur fibre h_ℓ à valeurs dans la catégorie tannakienne neutre $\underline{\mathrm{Tate}}(k)$ sur $\mathbb{Q}_\ell$

$$h_\ell : \underline{M}_{\mathbb{Q}_\ell} \longrightarrow \underline{\mathrm{Tate}}(k) ,$$

ou encore, un morphisme de catégories tannakiennes

$$\underline{M}_{\mathbb{Q}_\ell} \longrightarrow \underline{\mathrm{Grad}}\ \underline{\mathrm{Tate}}(k) . \tag{4.6.1.1}$$

Il résulte de (4.1.3.4) et de A 4.4 que la conjecture de Tate équivaut à la pleine fidélité du foncteur (4.6.1.1) ; ceci revient aussi à dire que le morphisme de gerbes (resp. de liens) induit par (4.6.1.1) est un épimorphisme.

4.6.2. Si $\ell = p$, la "cohomologie p-adique" est donnée par la cohomologie cristalline, qui définit un morphisme de catégories tannakiennes

$$h_{cris} : \underline{M}_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow \underline{\mathrm{Fcriso}}(k) .$$

4.6.3. Faisons $k = \mathbb{F}_p$. On verra ici comment les conjectures standard et la conjecture de Tate, jointes à des résultats de Honda et de Tate, permettent de donner une description de la catégorie tannakienne $\underline{M} = \underline{M}(\mathbb{F}_p)$ en termes de théorie des groupes (des descriptions analogues sont valables pour $k = \mathbb{F}_{p^r}$, $r \geq 1$).

4.6.3.1. Le lien de $\underline{M}$ est un $\mathbb{Q}$-groupe abélien G ; on a une extension

$$0 \longrightarrow G^0 \longrightarrow G \longrightarrow \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow 0$$
$$\wr$$
$$\hat{\mathbb{Z}}_{\mathbb{Q}}$$

où G^o , composante de G , s'identifie au lien de $\underline{M}(\bar{\mathbb{F}}_p)$.

La propriété pour un lien d'être représenté par un groupe abélien est locale pour la topologie envisagée (GIRAUD [1], IV 1.2.3), dans ce cas la topologie fpqc sur $\underline{Sch}_{/\mathbb{Q}}$. Il suffit de voir que le lien de $\underline{M}_{\mathbb{Q}_\ell}$ $(\ell \neq p)$ est abélien, et cela résulte de la conjecture de Tate sous sa forme 4.6.1 et du fait que le lien de $\underline{Tate}(k)$ est un $\mathbb{Q}_\ell$-groupe abélien, à savoir l'enveloppe pro-algébrique ℓ-adique de $\hat{\mathbb{Z}}$. La dernière assertion de 4.6.3.1 résulte aussitôt de la discussion en 4.2.5.

4.6.3.2. Le $\mathbb{Q}$-groupe G^o est un groupe de type multiplicatif dont le module galoisien M de caractères est le groupe multiplicatif des p-nombres de Weil, muni de l'action évidente de $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Rappelons qu'un p-nombre de Weil est un nombre algébrique π tel qu'il existe un entier $i \in \mathbb{Z}$ tel que π et tous ses conjugués sur $\mathbb{Q}$ soient de valeur absolue $p^{i/2}$; l'entier i est le poids du p-nombre de Weil. D'après HONDA [1] (voir aussi TATE [3]), l'ensemble des classes d'isogénie des variétés abéliennes simples, i.e. des classes d'isomorphisme de motifs effectifs simples de degré 1 (4.1.5) est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des classes de conjugaison de p-nombres de Weil de poids 1.

Il est clair que G^o est de type multiplicatif, puisqu'il est abélien et pro-réductif ; la détermination de M comme ensemble de p-nombres de Weil est facile à partir du résultat de Honda cité plus haut et des conjectures de Weil, qui entraînent que pour un objet simple X de $\underline{M}$, l'endomorphisme de frobenius $\pi \in End(X)$ est un p-nombre de Weil dont le poids est égal au degré de X .

4.6.3.3. Pour rendre complète la description de $\underline{M}$, il faut expliciter l'élément $\tau \in H^2(\mathbb{Q},G)$ qui correspond à $\underline{M}$ dans la classification des catégories tannakiennes de lien G . Le morphisme de catégories tannakiennes

$$\underline{M} = \underline{M}(\mathbb{F}_p) \longrightarrow \underline{M}(\bar{\mathbb{F}}_p)$$

lié par $G^o \longrightarrow G$, montre que τ <u>est image par</u> $H^2(\mathbb{Q},G^o) \longrightarrow H^2(\mathbb{Q},G)$ <u>de l'élément</u>

$$\tau_o \in H^2(\mathbb{Q},G^o)$$

<u>correspondant à</u> $\underline{M}(\bar{\mathbb{F}}_p)$.

4.6.3.4. D'après TATE [2], pour connaître τ_o il suffit de connaître son image dans toutes les places finies de $\mathbb{Q}$, i.e. il suffit de connaître pour tout nombre premier ℓ

$$(\tau_o)_\ell \in H^2(\mathbb{Q}_\ell,(G^o)_{\mathbb{Q}_\ell}) \ .$$

L'existence de la cohomologie ℓ-adique pour $\ell \neq p$ prouve que dans ce cas, $(\tau_o)_\ell = 0$. Il reste à connaître $(\tau_o)_p$; on dispose de la cohomologie cristalline

$$h_{cris} : \underline{M}(\bar{\mathbb{F}}_p) \longrightarrow \underline{Fcriso}(\bar{\mathbb{F}}_p) \ ,$$

et on connaît bien la catégorie tannakienne $\underline{Fcriso}(\bar{\mathbb{F}}_p)$ (3.3.2) : son lien est le groupe diagonalisable $D(\mathbb{Q})$ et moyennant l'isomorphisme du corps de classe local $Br(\mathbb{Q}_p) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, la classe τ' de Fcriso dans $H^2(\mathbb{Q}_p,D(\mathbb{Q})) = Hom(\mathbb{Q},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est la projection canonique $\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. D'autre part, le lien de h_{cris} est le morphisme de $\mathbb{Q}_p$-groupes

$$D(\mathbb{Q}) \longrightarrow G^o_{\mathbb{Q}_p}$$

dont le transposé sur les modules de caractères

$$M \longrightarrow \mathbb{Q}$$

est la valuation p-adique sur les p-nombres de Weil, normalisée par $v_p(p) = 1$.

La classe $(\tau_o)_p$ est simplement l'image de τ' par le morphisme induit en cohomologie

$$H^2(\mathbb{Q}_p,D(\mathbb{Q})) \longrightarrow H^2(\mathbb{Q}_p,G^o_{\mathbb{Q}_p}) \ .$$

4.6.3.4. <u>Remarque</u>. On a obtenu en même temps une description de la catégorie tannakienne $\underline{M}(\bar{\mathbb{F}}_p)$.

APPENDICE : CONJECTURES EN GEOMETRIE ALGEBRIQUE

On fixe un corps k . On note $\underline{V}(k)$ (resp. $\underline{V}'(k)$) la catégorie des k-schémas lisses projectifs (resp. et connexes). Ce sont des $\otimes$-catégories ACU, la loi $\otimes$ étant le produit.

A 0. Relations d'équivalence pour les cycles algébriques

0.1. Cycles algébriques.

0.1.1. Si X est un k-schéma lisse et projectif, $Z(X)$ désigne le groupe des cycles de X , gradué par la codimension ; c'est le groupe abélien libre engendré par les points (fermés ou non) de X , ou encore, par les sous-schémas intègres de X . Si $X = \coprod X_i$ est la décomposition de X en ses composantes connexes, on a un isomorphisme canonique de groupes gradués

$$Z(X) \simeq \bigoplus_i Z(X_i) \quad . \tag{0.1.1.1}$$

Si X est connexe de dimension n , on définit l'application degré

$$< > : Z(X) \longrightarrow \mathbb{Z} \tag{0.1.1.2}$$

comme étant celle qui prend la valeur zéro sur les points de codimension $< n$, et sur un point $x \in X$ de codimension n (i.e. un point fermé), on a

$$< x > = \deg(k(x)/k) = [k(x)/k] \quad . \tag{0.1.1.3}$$

On définit en général l'application degré en utilisant (0.1.1.1).

0.1.2. Soient X,Y des k-schémas lisses et projectifs. Le produit des sous-schémas intègres de X et Y définit un morphisme de groupes abéliens

(0.1.2.1) $$Z(X) \otimes Z(Y) \longrightarrow Z(X \times Y)$$

$$a \otimes b \longrightarrow a \times b \ .$$

Si $\varphi : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de k-schémas, on définit une application linéaire

$$\varphi_* : Z(X) \longrightarrow Z(Y)$$

de la façon suivante : si $x \in X$ est un élément de la base de $Z(X)$, et on pose $d(x) = \dim \overline{\{x\}}$, $d(y) = \dim \overline{\{y\}}$, où $y = \varphi(x)$, alors

(0.1.2.2) $$\varphi_*(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } d(x) > d(y) \\ [k(x)/k(y)]y & \text{si } d(x) = d(y) \end{cases} .$$

Par exemple, si $\varphi : X \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$ est le morphisme canonique,

(0.1.2.3) $$\varphi_* = < > \ .$$

0.1.3. Soient $a,b \in Z(X)$ des cycles dans un k-schéma lisse et projectif. Le produit d'intersection de a,b (lorsqu'il est défini, voir par exemple SERRE [3], chap. V) sera noté $a.b$. Si a (resp.b) est homogène de degré i (resp. j), $a.b$ est homogène de degré $i+j$.

Soit $\varphi : X \longrightarrow Y$ un morphisme de k-schémas lisses et projectifs. On a alors une "application" linéaire qui n'est pas partout définie

$$\varphi^* : Z(Y) \longrightarrow Z(X) \ .$$

On a par exemple, si $a \in Z(X)$, $b \in Z(X)$ et $\Delta : X \longrightarrow X \times X$ est l'application diagonale

$$a.b = \Delta^*(a \times b) .$$

Les opérations φ_* , φ^* sont reliées entre elles de la façon suivante :

$$\varphi_*(a.\varphi^*(b)) = \varphi_*(a).b \qquad a \in Z(X) , a \in Z(Y) .$$

C'est la <u>formule de projection</u>, valable lorsque les deux termes sont définis.

Signalons enfin la formule suivante, valable lorsque les deux termes sont définis

$$\varphi^*(b) = pr_{X_*}(pr_Y^*(b).\Gamma_\varphi) ,$$

où $b \in Z(Y)$, pr_X , pr_Y sont les projections de $X \times Y$ sur X , Y et où $\Gamma_\varphi \in Z(X \times Y)$ est la classe du graphe de φ .

0.1.4. Si $X \xrightarrow{\varphi} X' \xrightarrow{\varphi'} X''$ sont des morphismes dans $\underline{V}(k)$, on a

$$\varphi'_* \circ \varphi_* = (\varphi' \circ \varphi)_*$$

et lorsque ceci a un sens

$$\varphi^* \circ \varphi'^* = (\varphi' \circ \varphi)^* .$$

L'application φ_* ne respecte pas les degrés ni le produit d'intersection lorsqu'il est défini ; si X (resp. X') est connexe de dimension n (resp. n') φ_* est homogène de degré 0 et commute avec les produits.

On voit que $Z(X)$ est un foncteur covariant de X en tant que groupe abélien, "contravariant" de X en tant que "anneau" gradué.

0.2. <u>Relations d'équivalence</u>.

0.2.1. <u>Une relation d'équivalence admissible</u> $\sim$ pour les cycles algébriques, est

une loi qui à chaque $X \in \text{ob } \underline{V}(k)$ associe une relation d'équivalence $\sim_X$ sur $Z(X)$ qui soit bifonctorielle en X (voir 0.1.4), compatible avec la structure de groupe gradué de $Z(X)$, et qui vérifie la condition suivante : si $a,b \in Z(X)$, il existe $a' \sim a$, $b' \sim b$ tels que $a'.b'$ est défini.

Le quotient $Z_\sim(X)$ de $Z(X)$ par la relation $\sim_X$ est un anneau gradué commutatif avec 1 qui dépend de façon contravariante de X et covariante si on ne retient que la structure de groupe abélien. Il est appelé l'anneau des <u>classes de cycles pour l'équivalence</u> $\sim$.

On posera

$$C_\sim(X) = \mathbb{Q} \otimes Z_\sim(X) \quad .$$

0.2.2. Voici quelques exemples de relations d'équivalence admissible : l'équivalence rationnelle, l'équivalence algébrique, l'équivalence numérique, notées respectivement rat, alg, num. On a

(0.2.2.1) $$\text{rat} > \text{alg} > \text{num}$$

où $\geq$ est la relation de finesse. En fait, on vérifie que rat est la plus fine des relations d'équivalence admissible, num la moins fine (KLEIMAN [2], prop. (3.5)).

0.2.3. Soient $\sim$ une relation d'équivalence admissible, $x \in \mathbb{P}^1(k)$. Alors, l'image t de x dans $Z^1_\sim(\mathbb{P}^1)$ est indépendante de x, et on a un isomorphisme d'anneaux gradués

(0.2.3.1) $$Z_\sim(\mathbb{P}^1) \simeq \mathbb{Z}[t]/(t^2) \quad .$$

De façon plus générale, si x est un hyperplan dans $\mathbb{P}^n$ (rationnel sur k), l'image t de x dans $Z^1_\sim(\mathbb{P}^n)$ est indépendante de x et on a un isomorphisme d'anneaux gradués

(0.2.3.2) $$Z_\sim(\mathbb{P}^n) \simeq \mathbb{Z}[t]/(t^{n+1}) \quad .$$

La validité de ces assertions provient de (0.2.2.1) et de leur validité bien connue pour num , rat (voir GROTHENDIECK [2]). Par la même méthode, on prouve que si $X \in \mathrm{ob}\ \underline{V}(k)$, la projection $X \times \mathbb{P}^n \longrightarrow X$ fait de $Z_{\sim}(X \times \mathbb{P}^n)$ une $Z_{\sim}(X)$-algèbre isomorphe à $Z_{\sim}(X) \otimes Z_{\sim}(\mathbb{P}^n)$, i.e.

$$Z_{\sim}(X \times \mathbb{P}^n) \simeq Z_{\sim}(X)[t]/(t^{n+1}) \quad . \tag{0.2.3.3}$$

0.3. Correspondances algébriques.

On fixe une relation d'équivalence admissible $\sim$, et on pose $C(X)$ pour $C_{\sim}(X)$.

0.3.1. Si $X,Y \in \mathrm{ob}(\underline{V}(k))$, les éléments de $C(X \times Y)$ seront appelés correspondances algébriques de X dans Y . Si X est connexe de dimension n , et si $i \in \mathbb{Z}$, les correspondances de degré i de X dans Y sont les éléments de $C^{n+i}(X \times Y)$. On obtient ainsi une graduation de type $\mathbb{Z}$ sur le groupe $C(X \times Y)$ des correspondances algébriques, pour X connexe. Dans le cas général, si $X = \coprod X_i$ est la décomposition de X en ses composantes connexes, on définit la graduation par le dégré sur $C(X \times Y)$ via l'isomorphisme canonique

$$C(X \times Y) = \bigoplus_i C(X_i \times Y) \quad .$$

0.3.2. Soient X, Y, $Z \in \mathrm{ob}(\underline{V}/k))$. On définit une application $\mathbb{Q}$-bilinéaire $(a,b) \longmapsto b \circ a$, appelée composition

$$C(X \times Y) \times C(Y \times Z) \longrightarrow C(X \times Z)$$

par la formule

$$b \circ a = (p_{X \times Z})_*(p^*_{X \times Y}(a).p^*_{Y \times Z}(b)) \quad .$$

Cette composition est associative ; de plus, si a (resp.b) est de degré i (resp. j), $b \circ a$ est de degré $i+j$. Si on prend comme triple d'objets de $\underline{V}(k)$ $\mathrm{Spec}(k)$, X, Y, on a une application $\mathbb{Q}$-bilinéaire

$$C(X) \times C(X \times Y) \longrightarrow C(Y)$$

d'où une application Q-linéaire

$$C(X \times Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(C(X),C(Y)) \ .$$

On vérifiera que si $\varphi : X \longrightarrow Y$ (resp. $\psi : Y \longrightarrow X$) est un morphisme, et si $\Gamma(\varphi)$ (resp. $\Gamma(\psi)$) est l'image de son graphe dans $C(X \times Y)$, le morphisme $C(X) \longrightarrow C(Y)$ qu'il détermine n'est autre que φ_* (resp. ψ^*).

0.3.3. On notera $\underline{CV}(k)$, et on appellera catégorie des correspondances, la catégorie ayant les mêmes objets que $\underline{V}(k)$ et les correspondances algébriques comme morphismes. C'est une catégorie additive $\mathbb{Q}$-linéaire qui est munie d'une structure $\mathbb{Z}$-graduée : les Hom sont des groupes abéliens $\mathbb{Z}$-gradués et la composition est compatible avec cette graduation. Si X,Y sont des objets de $\underline{CV}(k)$,

$$\mathrm{Hom}(X,Y) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}^i(X,Y) \ ,$$

où $\mathrm{Hom}^i(X,Y)$ est le groupe des correspondances de X dans Y de degré i.

La sous-catégorie de $\underline{CV}(k)$ ayant mêmes objets et comme morphismes ceux qui sont de degré 0 sera notée $\underline{CV}^0(k)$; c'est aussi une catégorie additive $\mathbb{Q}$-linéaire et on a un foncteur additif $\mathbb{Q}$-linéaire d'inclusion

$$\underline{CV}^0(k) \longrightarrow \underline{CV}(k) \ .$$

Remarquons que dans les deux cas la somme directe est la réunion disjointe de k-schémas.

A 1. Théories de cohomologie

1.1. Définitions.

1.1.1. On aura à considérer des triples $(\underline{C},w,T_{\underline{C}})$ d'une $\otimes$-catégorie rigide (I 5.1.1) karoubienne (4.1.2) et $\mathbb{Q}$-linéaire $\underline{C}$, d'une $\otimes$-graduation de type $\mathbb{Z}$ w de $\mathrm{id}_{\underline{C}}$ et d'un objet inversible $T_{\underline{C}}$ (ou plus simplement T) de degré -2 pour w. Si V est

un objet de $\underline{C}$ on utilisera les notations

$$\Gamma(V) = \mathrm{Hom}(\underline{1},V) \qquad \text{(I 1.3.1)}$$

$$V(n) = V \otimes T^{\otimes n} \ .$$

On notera $\underline{C}^+$ la sous-$\otimes$-catégorie pleine de $\underline{C}$ des objets à degrés positifs.

Une <u>théorie de cohomologie</u> sur k à valeurs dans le triple $(\underline{C},w,T_{\underline{C}})$ est un triple (H,γ,Tr) formé de

1.1.1.1. <u>Un $\otimes$-foncteur</u> ACU.

$$H : \underline{V}'(k)^o \longrightarrow \underline{C}^+ \ .$$

Puisque chaque objet X de $\underline{V}'(k)$ est une cogèbre ACU (I 6.1) avec comultiplication $\Delta : X \longrightarrow X \times X$ est counité $X \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$, $H(X)$ est une algèbre ACU de $\underline{C}^+$, qui dépend fonctoriellement de X. De même

$$\oplus\, \Gamma(H^{2i}(X)(i))$$

est une $\mathbb{Q}$-algèbre graduée ACU.

1.1.1.2. <u>Une famille $\gamma = (\gamma^i)_{i\in\mathbb{N}}$ de transformations naturelles</u>

$$\gamma^i_X : C^i(X) \otimes \underline{1} \longrightarrow H^{2i}(X)(i) \ ,$$

où $C^i(X) = C^i_{alg}(X)$ avec les notations de 0.2. On peut aussi regarder les γ^i_X comme des applications $\mathbb{Q}$-linéaires

$$\gamma^i_X : C^i(X) \longrightarrow \Gamma(H^{2i}(X)(i)) \ .$$

1.1.1.3. <u>Une famille de morphismes</u>

$$Tr_X : H(X)(n) \longrightarrow \underline{1} \ ,$$

où $n = \dim(X)$. La donnée de Tr_X revient à celle d'un morphisme

$$Tr_X : H^{2n}(X)(n) \longrightarrow \underline{1} \ .$$

Ces données vérifiant les axiomes

1.1.1.4. *Si* X,Y *sont des objets de* $\underline{V}'(k)$, *le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} C(X) \otimes_{\mathbb{Q}} C(Y) & \xrightarrow{\gamma_X \otimes \gamma_Y} & H(X) \otimes H(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \wr \\ C(X \times Y) & \xrightarrow[\gamma_{X \times Y}]{} & H(X \times Y) \end{array} \ .$$

On en déduit que $\gamma_X : C(X) \otimes \underline{1} \longrightarrow H(X)$ est un morphisme d'algèbres ACU .

1.1.1.5. *Si* X , Y *sont des objets de* $\underline{V}'(k)$, *on a*

$$Tr_{X \times Y} = Tr_X \otimes Tr_Y$$

moyennant des identifications évidentes.

1.1.1.6. *Si* X *est un objet de* $\underline{V}'(k)$ *et* $\dim X = n$, *on a un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} C^n(X) \otimes \underline{1} & \longrightarrow & H^{2n}(X) \\ \downarrow \wr & & \downarrow Tr_X \\ \mathbb{Q} \otimes \underline{1} & \sim & \underline{1} \end{array}$$

où $\mathbb{Q} \simeq C^n(X)$ *est l'isomorphisme canonique* (voir par exemple 4.1.2.3) ; *si* X *est géométriquement connexe*, γ_X^n *est un isomorphisme*. On a ainsi dans ce dernier cas

$$Tr_X : H^{2n}(X)(n) \xrightarrow{\sim} \underline{1}$$

1.1.1.7 $$H^1(\mathbb{P}^1) = 0 .$$

1.1.1.8. Si X est de dimension n, pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'accouplement

$$H^i(X) \otimes H^{2n-i}(X) \longrightarrow H^{2n}(X) \simeq T^{\otimes -n}$$

définit une dualité (la dualité de Poincaré) :

$$H'(X) \simeq H^{2n-i}(X)(n) .$$

Ceci permet, si $\varphi : X \longrightarrow Y$ est un morphisme dans $\underline{V}'(k)$ de définir le morphisme de Gysin

$$\varphi_* : H^j(X) \longrightarrow H^{j+2(m-n)}(Y)(m-n)$$

où m (resp. n) est la dimension de Y (resp. X), comme le transposé de $\varphi^* = H(\varphi)$.

1.1.1.9. Si $\varphi : X \longrightarrow Y$ est un morphisme, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} C^i(X) \otimes \underline{1} & \xrightarrow{\gamma_X^i} & H^{2i}(X)(i) \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_*} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_*(i)} \\ C^{i+m-n}(Y) \otimes \underline{1} & \xrightarrow{\gamma_Y^{i+m-n}} & H^{2(i+m-n)}(Y)(i+m-n) \end{array} .$$

1.1.2. Si $(H,\gamma,Tr),(H',\gamma',Tr')$ sont des théories de cohomologie sur $\underline{V}(k)$ à valeurs dans $(\underline{C},w,T)$, un morphisme de (H,γ,Tr) dans (H',γ',Tr') est un $\otimes$-morphisme unifère $H \longrightarrow H'$ compatible avec γ et Tr dans un sens évident. On obtient ainsi une catégorie $\underline{TC}(h,(\underline{C},w,T))$.

1.1.3. Un morphisme d'un triple $(\underline{C},w,T)$ dans un triple $(\underline{C}',w',T')$ est un couple (u,ξ) d'un $\otimes$-foncteur rigide $u : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ compatible avec les graduations w,w' et d'un isomorphisme

$$\xi : u(T) \simeq T' .$$

Un tel morphisme définit un foncteur

$$\underline{TC}(k,(\underline{C},w,T)) \longrightarrow \underline{TC}(k,(\underline{C}',w,T)) .$$

1.1.4. Soit S un $\mathbb{Q}$-schéma, et soit $\underline{C} = \underline{\mathrm{Grad}}^{\pm}\ \underline{\mathrm{Loclib}}(S)$ la $\otimes$-catégorie rigide des $\underline{O}_S$-modules localement libres munis d'une graduation de type $\mathbb{Z}$; la contrainte de commutativité est donnée par la "règle de Koszul" : si E (resp. F) est de degré p (resp. q), l'isomorphisme

$$E \otimes F \xrightarrow{\sim} F \otimes E$$

envoie $x \otimes y$ en $(-1)^{pq}\, y \otimes x$. La $\otimes$-catégorie $\underline{C}$ est évidemment munie d'une $\otimes$-graduation w de type $\mathbb{Z}$, et on pose

$$T = \underline{O}_S[-2] .$$

Une théorie de cohomologie sur k à valeurs dans le triple $(\underline{C},w,T)$ sera dite plus simplement à valeurs dans S , ou à valeurs dans A si $S = \mathrm{Spec}(A)$, et la catégorie de ces théories de cohomologie sera notée $\underline{TC}(k,S)$ ou $\underline{TC}(k,A)$ suivant les cas. On remarquera que pour S un $\mathbb{Q}$-schéma variable, les $\underline{TC}(k,S)$ définissent une catégorie fibrée $\underline{TC}(k)$ sur $\underline{\mathrm{Sch}}_{/\mathbb{Q}}$, qui est même un champ pour la topologie fpqc sur $\underline{\mathrm{Sch}}_{/\mathbb{Q}}$ comme on le voit aussitôt.

1.1.5. Soit $\underline{T}$ un $(\underline{C},w,T)$ un triple de Tate sur un corps de caractéristique zéro (V 3.1.1). Une <u>théorie de cohomologie à valeurs dans</u> $\underline{T}$ est une théorie de cohomologie à valeurs dans le triple $(\dot{\underline{C}},w,T)$, où $\dot{\underline{C}}$ est égale à $\underline{C}$ en tant que $\otimes$-catégorie AU et a comme contrainte de commutativité

$$\dot{\psi}_{X,Y} : X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X$$

l'isomorphisme

$$\dot{\psi}_{X,Y} = \oplus(-1)^{pq}\psi^{pq} ,$$

où $\psi = \oplus \psi^{p,q}$ est la décomposition de l'isomorphisme de commutativité ψ de $\underline{C}$ pour la graduation w. On obtient une catégorie $\underline{TC}(k,\underline{T})$.

1.1.5.1. Soit $\underline{C}$ une catégorie tannakienne sur un corps de caractéristique zéro, et formons le triple de Tate $(\underline{Gradf}(\underline{C}),w,\underline{1}[-2])$ formé de la catégorie tannakienne $\underline{Gradf}(\underline{C})$ des objets de $\underline{C}$ munis d'une graduation de type $\mathbb{Z}$, de la graduation évidente w, et de l'objet $\underline{1}$ placé en degré -2. Une théorie de cohomologie à valeurs dans ce triple sera appelée une <u>théorie de cohomologie à valeurs dans $\underline{C}$</u>. Cet exemple généralise 1.1.4 dans le cas où S est le spectre d'un corps. On notera la catégorie de ces théories de cohomologie $\underline{TC}(k,\underline{C})$.

1.2. Remarques diverses.

1.2.1. Si (H,γ) est une théorie de cohomologie comme dans 1.1, H s'étend par additivité à un $\otimes$-foncteur ACU

$$H : \underline{V}(k)^{o} \longrightarrow \underline{C}^{+} \quad ;$$

on a si $X = \coprod X_i$ est la décomposition en composantes connexes d'un k-schéma lisse projectif

$$H(X) = \bigoplus_i H(X_i) \quad .$$

1.2.2. Avec les notations de 1.1.3, la catégorie $\underline{TC}(k,(\underline{C},w,T))$ est un groupoïde, i.e. tout morphisme $(H,\gamma) \longrightarrow (H',\gamma')$ de théories de cohomologies est un isomorphisme. Cela se prouve à l'aide de la dualité de Poincaré (1.1.1.6) par la même méthode que I 5.2.3.

1.2.3. Si on dispose de la résolution de singularités (par exemple si k est de caractéristique zéro), dans la définition d'une théorie de cohomologie, on peut éliminer la donnée de γ.

1.3. Correspondances cohomologiques.

1.3.1. Fixons une théorie de cohomologie comme dans 1.1.1. Rappelons que si $\varphi : X \longrightarrow Y$ est un morphisme dans $\underline{V}'(k)$, on a défini en 1.1.1.8 le morphisme de Gysin

$$\varphi_* : H(X) \longrightarrow H(Y)\ (m-n) \quad ,$$

où m est la dimension de Y (resp. X). Il est clair que si $\varphi'' = \varphi' \circ \varphi$, on a

$$\varphi''_* = \varphi'_*(m-n) \circ \varphi_* \quad ,$$

et enfin que si $\varphi : X \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$ est le morphisme canonique, on a

$$\varphi_* = \mathrm{Tr}_X \quad .$$

1.3.2. Soient X,Y des objets de $\underline{V}'(k)$. On appellera souvent $H(X \times Y)$ l'objet des correspondances cohomologiques. Ceci provient de ce qu'on a un isomorphisme canonique

$$H(X \times Y) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(H(X),H(Y))(-n) \quad ,$$

où $n = \dim X$, déduit de la dualité de Poincaré. Via cet isomorphisme, $\gamma_{X \times Y}$ induit des applications $\mathbb{Q}$-linéaires

$$C^{n+i}(X \times Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H(X),H(Y)(i))$$

associant à une correspondance algébrique une correspondance cohomologique. Ces applications sont compatibles avec la composition de correspondances (0.3.2).

1.3.3. Explicitons ce qui précède dans le cas d'une théorie de cohomologie à valeurs dans un corps K (1.1.4). L'isomorphisme

$$H : H(X) \otimes H(Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(HX,HY)$$

est défini par

$$H(x \otimes y)(x') = (-1)^{pp'}\ \mathrm{Tr}_X(xx')y \quad ,$$

où $x \in H^p(X)$, $x' \in H^{p'}(X)$, $y \in H(Y)$. Si $n = \dim X$, l'isomorphisme H fait correspondre les éléments de $H(X) \otimes H(Y)$ homogènes de degré $2n+d$ $(d \in \mathbb{Z})$ avec les applications K-linéaires $H(X) \longrightarrow H(Y)$ homogènes de degré d . Enfin, on vérifie aussitôt que l'isomorphisme H se calcule aussi par la formule plus maniable suivante

$$H : H(X \times Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(HX,HY)$$

$$H(z)(x) = (pr_Y)_* (z.pr_X^*(x)) .$$

1.4. Exemples.

1.4.1. Cohomologie ℓ-adique. Soit ℓ un nombre premier différent de la caractéristique de k , et posons $\underline{C} = \underline{\mathrm{Gradf}}(\mathbb{Q}_\ell)$ munie de sa $\otimes$-graduation w évidente (A 1.1.4). Enfin, soit T le $\mathbb{Q}_\ell$-vectoriel de rang un

$$T = \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \varprojlim_n \mu_{\ell^n}(\bar{k})$$

placé en degré -2 , où $\mu_{\ell^n}(\bar{k})$ est le groupe des racines ℓ^n-ièmes de l'unité dans $\bar{k}$, une clôture algébrique de k choisie une fois pour toutes. Si $X \in \mathrm{ob}\ \underline{V}(k)$, la cohomologie ℓ-adique de X est par définition

$$H_\ell(X) = \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \varprojlim_n H(\bar{X}_{ét}, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}) ,$$

où $\bar{X}_{ét}$ est le site étale de $\bar{X} = X \times \bar{K}$. La théorie de cohomologie ℓ-adique est développée en SGA 4, SGA 5, où sont notamment démontrés les axiomes de A 1.1 (voir SGA 4 XVII, XVIII, SGA 5 V).

1.4.2. Cohomologie de Hodge. Supposons k de caractéristique zéro. La cohomologie de Hodge H_{Hdg} est une théorie de cohomologie à valeurs dans k , définie par

$$H_{Hdg}(X) = \sum_{p,q} H^q(X, \Omega^p_{X/k}) .$$

La dualité de Poincaré, ainsi que le morphisme trace

$$H^n(X,\Omega^n_{X/k}) \longrightarrow k$$

proviennent de la dualité de Serre (n = dim X).

1.4.3. Cohomologie de De Rham. Avec les mêmes hypothèses que plus haut, la cohomologie de De Rham H_{DR} est une théorie de cohomologie à valeurs dans k, définie par

$$H_{DR}(X) = \mathbb{H}(X,\Omega_{X/k}) ,$$

où le terme de gauche désigne l'hypercohomologie du complexe des formes différentielles. Cette cohomologie est l'aboutissement de la suite spectrale correspondante d'hypercohomologie

$$E_1^{pq} = H^q(X,\Omega^p_{X/k}) \Longrightarrow H_{DR}^{p+q}(X) .$$

D'après la théorie de Hodge, cette suite spectrale dégénère, donnant un isomorphisme de théories de cohomologie

$$gr_F H_{DR} \simeq H_{Hdg} ;$$

la filtration F sur l'aboutissement $H_{DR}(X)$ est appelée la filtration de Hodge.

1.4.4. Cohomologie de Betti-Hodge. Supposons $k = \mathbb{C}$; la cohomologie de Betti-Hodge H_{BH} est une théorie de cohomologie à valeurs dans le triple de Tate (A 1.1.5) défini par Hodge($\mathbb{Q}$) (VI 2.1.3) . On a

$$H_{BH}(X)_{\mathbb{Q}} = H(X(\mathbb{C}),\mathbb{Q})$$

la bigraduation sur $H^n_{BH}(X)_{\mathbb{C}} = H^n(X(\mathbb{C}),\mathbb{C})$ (n étant un entier) provenant de l'isomorphisme canonique

$$H^n(X(\mathbb{C}),\mathbb{C}) \simeq H^n_{DR}(X)$$

et de ce que la filtration de Hodge sur $H^n_{DR}(X)$ est n-opposée à sa conjuguée, i.e. vérifie la condition de VI 2.1.1.3 (voir DELIGNE [1], 5.2, pour une discussion plus détaillée). Le fait que $H^n_{BH}(X)$ soit un objet de Hodge($\mathbb{Q}$) , i.e. soit

polarisable, provient de la théorie de Hodge (WEIL [1], chap. IV, th. 7).

Remarquons que si on choisit une racine carrée i de -1 dans $\mathbb{C}$, pour chaque objet X de $\underline{V}(\mathbb{C})$ connexe de dimension n, i définit une orientation de la variété $X(\mathbb{C})$, et on a un morphisme trace

$$Tr_X : H^{2n}(X(\mathbb{C}),\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q} .$$

L'élément i définit aussi un isomorphisme de $\mathbb{Q}$-vectoriels de rang 1, $T_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{Q}$, où T est la structure de Hodge de Tate (VI 2.1.2). Un tel choix étant fait, on appellera cohomologie de Betti la théorie de cohomologie H_{Betti} à valeurs dans $\mathbb{Q}$ qu'il définit.

1.4.5. Cohomologie cristalline. Supposons k de caractéristique non nulle, et parfait pour simplifier. Dans ce cas, la cohomologie cristalline, introduite par GROTHENDIECK [4] et développée par BERTHELOT [3], définit une théorie de cohomologie H_{cris} à valeurs dans le corps des fractions $K(k)$ de l'anneau $W(k)$ des vecteurs de Witt sur k. En fait, si X est un objet de $\underline{V}(k)$, le $K(k)$-vectoriel $H_{cris}(X)$ est muni d'une structure de F-isocristal gradué (VI 3.1.3 et 3.2.1) ; l'isomorphisme $F : H_{cris}(X)^{\sigma} \longrightarrow H_{cris}(X)$ provenant du frobenius relatif de X/k. De plus $H^2_{cris}(\mathbb{P}^1_k)$ est canoniquement isomorphe à l'inverse du F-isocristal de Tate (VI 3.1.3). On voit ainsi que la cohomologie cristalline définit une théorie de cohomologie à valeurs dans le triple $(\underline{C},w,T)$ où $\underline{C} = \underline{Grad}^{+} \underline{Fcriso}(k)$, w est la graduation évidente et T est le F-isocristal de Tate placé en degré -2.

A 2. Les conjectures standard (voir GROTHENDIECK [5], KLEIMAN [1])

2.1. Notations.

2.1.1. On fixe un corps K de caractéristique nulle, et une théorie de cohomologie (H,γ,Tr) sur k à valeurs dans K. Si $X \in \text{ob } \underline{V}(k)$, on note $C(X)$ le groupe gradué (par la codimension) des cycles algébriques pour l'équivalence cohomologique

sur X , tensorisé par $\mathbb{Q}$

$$C(X) = Z_H(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \quad .$$

L'application γ_X induit des injections

$$\gamma^i : C^i(X) \hookrightarrow H^{2i}(X) \qquad i \in \mathbb{Z} \ .$$

2.1.2. Soit X un k-schéma projectif, lisse, connexe de dimension n , et soit $\ell \in C^1(X)$ la classe d'une section hyperplane lisse (on peut même, si l'on veut, supposer X polarisé, i.e. muni d'une immersion $X \hookrightarrow \mathbb{P}_k^N$) . On note encore ℓ l'homomorphisme homogène de degré 1 (resp. 2)

$$\ell : C(X) \longrightarrow C(X) \quad (\text{resp. } \ell : H(X) \longrightarrow H(X)) \ ,$$

et on a des carrés commutatifs

(2.1.2.1)
$$\begin{array}{ccc} C^i(X) & \xrightarrow{\ell} & C^{i+1}(X) \\ \downarrow{\scriptstyle \gamma_X^i} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_X^i} \\ H^{2i}(X) & \longrightarrow & H^{2i+2}(X) \end{array} \qquad i \in \mathbb{Z} \ .$$

Si $0 \leq i \leq n$, on pose

(2.1.2.2)
$$P^i(X) = \mathrm{Ker}[\ell^{n-i+1} : H^i(X) \longrightarrow H^{2n-i+2}(X)] \ ,$$

et si $p \in \mathbb{Z}$, $0 \leq 2p \leq n$

(2.1.2.3)
$$C^p_{P_r}(X) = C^p(X) \cap P^{2p}(X) \quad .$$

Les éléments de $P^i(X)$ sont appelés primitifs.

2.2. Conjectures de type Lefschetz.

2.2.1. Supposons X polarisé, et soient $i : Y \hookrightarrow X$ une section hyperplane

lisse, $\ell \in C^1(X)$ la classe qu'elle définit. Le "théorème" de Lefschetz faible dit que les morphismes de Gysin

$$H^i(Y) \longrightarrow H^{i+2}(X) \tag{2.2.1.1}$$

sont surjectifs pour $i = n-1$, des isomorphismes pour $i \geq n$. Le "théorème" de Lefschetz fort dit que pour $i \leq n$

$$\underline{\ell}^{n-i} : H^i(X) \longrightarrow H^{2n-i}(X) \tag{2.2.1.2}$$

est un isomorphisme.

Ces "théorèmes" sont effectivement prouvés en caractéristique zéro tandis qu'en cohomologie ℓ-adique seul le théorème de Lefschetz faible a été prouvé (SGA 4 XIV è 3) et aucun d'eux n'a été démontré en cohomologie cristalline. Ils sont, cependant, conjecturés.

Dans ce qui suit, on supposera que (H,γ,Tr) vérifie les deux théorèmes de Lefschetz.

2.2.2. Gardons les notations précédentes. On déduit aussitôt du théorème de Lefschetz fort, une décomposition de la cohomologie

$$H^i(X) = \sum_{j \geq \max(i-n,0)} \underline{\ell}^j P^{i-2j}(X) \qquad i \in \mathbb{Z} \ ; \tag{2.2.2.1}$$

i.e. pour chaque $x \in H^i(X)$, il existe des $x_j \in P^{i-2j}(X)$ uniques tel que

$$x = \Sigma\, \underline{\ell}^j(x_j) \ . \tag{2.2.2.2}$$

A l'aide de cette décomposition, on définit des opérateurs $*$, λ, par

$$\begin{cases} *x = \Sigma\, (-1)^{(i-2j)i-2j+1)/2}\ \underline{\ell}^{n-i+j}(x_j) \\ \\ \lambda(x) = \sum_{j \geq \max(i-n,1)} \underline{\ell}^{j-1}(x_j) \end{cases} \tag{2.2.2.3}$$

On peut encore expliciter λ , qui est homogène de degré -2 , comme étant celui qui rend commutatifs les carrés

(2.2.2.4)
$$\begin{array}{ccc} H^i(X) & \xrightarrow{\sim} & H^{2n-i}(X) \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \underline{\ell} \\ H^{i-2}(X) & \xrightarrow{\sim} & H^{2n-i+2}(X) \end{array} ;$$

en particulier on a

(2.2.2.5) $$\lambda \circ \underline{\ell} = \mathrm{id} .$$

On a aussi la formule

(2.2.2.6) $$** = \mathrm{id} .$$

L'opérateur $* : H^i \longrightarrow H^{2n-i}$ diffère par un facteur ≥ 0 de celui défini en WEIL [1] .

2.2.3. Voici les conjectures de type Lefschetz, énoncées pour X munie de ℓ

$A(X,\ell)$: Si $0 \leq 2p \leq n$, l'application

$$\underline{\ell}^{n-2p} : C^p(X) \longrightarrow C^{n-p}(X)$$

est bijective.

$B(X)$: La correspondance cohomologique $\lambda \in \mathrm{Hom}(H(X),H(X))$, provient de $C(X \times X)$, i.e. est algébrique.

La conjecture $B(X)$ entraîne $A(X,\ell)$ et est plus maniable que celle-ci. Comme la notation l'indique, elle ne dépend pas de la section hyperplane lisse choisie. Elle est stable par produits, sections hyperplanes, et est vérifiée par les courbes (trivialement), les variétés abéliennes, les variétés de drapeaux. D'autre part $A(X \times X, \ell_X \otimes 1 + 1_X \otimes \ell_X)$ entraîne $B(X)$. On voit donc qu'il y a équivalence

entre la validité de A(X) ou de B(X) pour tous les X .

2.2.4. La validité de la conjecture A(X) induit une décomposition de $C^i(X)$ ($i \in \mathbb{Z}$)

$$C^i(X) = \sum_{j \geq \max(2i-n,0)} \underline{\ell}^j \, C^{i-j}_{Pr}(X) \quad . \tag{2.2.4.1}$$

On en déduit aussi que $* : H^{2i}(X) \longrightarrow H^{2n-2i}(X)$ (en supposant $2i \leq n$) envoie $C^i(X)$ dans $C^{n-i}(X)$. La conjecture B(X) entraîne que cet opérateur est induit par un élément de $C(X \times X)$.

2.3. Conjecture de type Hodge. (ou de positivité de Hodge).

Soit $X \in \text{ob } \underline{V}'(k)$ de dimension n , et muni de $\ell \in C'(X)$ comme dans 2.1.2.

La conjecture est la suivante :

Hdg(X) : Si $0 \leq 2p \leq n$, la forme bilinéaire symétrique

$$C^p_{Pr}(X) \times C^p_{Pr}(X) \longrightarrow Q \tag{2.3.1}$$

$$(x,y) \longmapsto (-1)^p Tr_X(\underline{\ell}^{n-2p} \times y)$$

est définie positive.

En caractéristique nulle, cette conjecture résulte de la théorie de Hodge (voir WEIL [1]).

2.4. La conjonction des conjectures standard.

2.4.1. On a l'équivalence de

a) A(X) et Hdg(X) sont valables pour tout X .

b) B(X) et Hdg(X) sont valables pour tout X .

c) Pour tout X , on a Hdg(X) et

D(X) : L'équivalence numérique et l'équivalence cohomologique (par rapport à (H,γ)) pour les cycles algébriques coïncident.

Remarquons que D(X) équivaut à dire que l'accouplement $C^i(X) \otimes_{\mathbb{Q}} C^{n-i}(X) \longrightarrow \mathbb{Q}$ est une dualité.

C'est l'ensemble de ces conjectures qu'on appelle les conjectures standard (y compris les deux théorèmes de Lefschetz).

2.4.2. Supposons la validité des conjectures standard, et soit X comme dans 2.3. On a alors si $0 \leq 2p \leq n$ une décomposition (2.2.4.1)

$$C^p(X) = \Sigma\, \underline{\ell}^j\, C_{Pr}^{i-j}(X)$$

et par transport des formes (2.3.1) sur les $C_{Pr}^{i-j}(X)$, on obtient une forme bilinéaire symétrique définie positive

(2.4.2.1) $$C^p(X) \otimes_{\mathbb{Q}} C^p(X) \longrightarrow \mathbb{Q} \quad ,$$

qui s'explicite

(2.4.2.2) $$(x,y) \longmapsto \mathrm{Tr}_X(x.{}^*y) \quad ,$$

où l'opération * a été définie dans (2.2.2.3).

2.4.3. Supposons que (H,γ), (H',γ') soient des théories de cohomologie sur k à valeurs dans K, vérifiant les théorèmes de Lefschetz, et telles que les relations d'équivalence cohomologique pour les cycles algébriques qu'elles définissent coïncident. Alors, les conjectures standard sont valables pour (H,γ) si et seulement elles le sont pour (H',γ'). De plus, dans ce cas, les correspondances algébriques dans $C(X \times X)$ définies par les opérations λ, *, sont les mêmes pour H et H'.

2.4.4. Soit (H,γ,Tr) une théorie de cohomologie à valeurs dans un triple $(\underline{C},w,T_{\underline{C}})$ comme dans 1.1.1. Avec des modifications évidentes, les conjectures

standard gardent encore un sens dans ce contexte.

A 3. Conséquences des conjectures standard

On fixe une théorie de cohomologie (H,γ,Tr) à valeurs dans un corps K de caractéristique nulle pour laquelle on suppose la validité des conjectures standard.

3.1. La conséquence qui a motivé les conjectures standard, est les conjectures de Weil, pour la discussion desquelles je renvoie à GROTHENDIECK [5], KLEIMAN [1]. Ici, on s'intéresse plutôt à des conséquences utiles pour l'étude de la catégorie des motifs.

3.2. Soient $X,Y \in \text{ob } \underline{V}(k)$; pour $i \in \mathbb{Z}$, on a

$$C^i(X \times Y) \hookrightarrow H^{2i}(X \times Y) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} H^{2i-j}(X) \otimes H^j(Y) \quad .$$

Il résulte des conjectures standard que les composantes de Künneth d'un élément de $C^i(X \times Y)$ sont encore dans $C^i(X \times Y)$. Ceci équivaut encore à l'énoncé plus simple suivant : si X est de dimension n, les composantes de Künneth $\pi_X^i \in H^{2n-i}(X) \otimes H^i(X)$ du cycle diagonal $\Delta_X \in C^n(X \times X)$, sont algébriques. D'où une décomposition dans $C^n(X \times X)$

$$\Delta_X = \sum_{i=0}^{2n} \pi_X^i \quad . \tag{3.2.1}$$

De plus, les π_X^i ne dépendent pas de la théorie de cohomologie vérifiant les conjectures standard choisies.

3.3. Soient $X,Y \in \text{ob } \underline{V}(k)$ polarisées. On a alors des formes bilinéaires non dégénérées

$$H(X) \otimes H(X) \longrightarrow K$$

$$H(Y) \otimes H(Y) \longrightarrow K$$

données par

$$(x,x') \longmapsto \mathrm{Tr}_X(x.{}^*x')$$

$$(y,y') \longmapsto \mathrm{Tr}_Y(y.{}^*y') \ .$$

On voit facilement alors que si

$$u : H(X) \longrightarrow H(Y)$$

est défini par une correspondance algébrique dans $C(X \times Y)$, et si on note $u' : H(Y) \longrightarrow H(X)$ son transposé pour ces formes non dégénérées, on a que u' est algébrique et que

$$(3.3.1) \qquad \begin{cases} \mathrm{Tr}(uu') = \mathrm{Tr}(u'u) \in \mathbb{Q} \\ u \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Tr}(uu') > 0 \end{cases} .$$

On en conclut par exemple que la $\mathbb{Q}$-algèbre $C(X \times X)$ des correspondances algébriques de X dans X (voir 0.3) est semi-simple (voir 4.2.2 pour un résultat plus précis).

A 4. La conjecture de Tate

4.0. On fixe un nombre premier ℓ différent de la caractéristique de k , et une clôture algébrique $\bar{k}$ de k . Si X est un objet de $\underline{V}(k)$, on note $Z_H(X)$ l'anneau gradué des classes de cycles algébriques pour la relation d'équivalence définie par la cohomologie ℓ-adique, et on pose

$$C(X) = \mathbb{Q} \otimes Z_H(X)$$

$$C_\ell(X) = \mathbb{Q}_\ell \otimes Z_H(X) \ .$$

4.1. Rappelons (A 1.4.1) la définition de la cohomologie ℓ-adique : si $X \in \mathrm{ob}\ \underline{V}(k)$

$$H_\ell(X) = \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \varprojlim_n H(\bar{X}_{ét}, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}) \ .$$

On voit sur cette définition que par fonctorialité du site étale, le groupe de Galois $\Gamma = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ agit de façon continue sur le $\mathbb{Q}_\ell$-vectoriel de rang fini $H_\ell(X)$, ce dernier étant muni de la topologie ℓ-adique. Si $x \in C^p(X)$, la classe de cohomologie de x, $\gamma(x) \in H_\ell^{2p}(X)(p)$, est invariante par l'action de Γ, d'où une injection

$$C^p(X) \longrightarrow H_\ell^{2p}(X)(p)^\Gamma . \tag{4.1.1}$$

La conjecture de Tate (TATE [1]) précise cette situation, dans le cas où k est un corps de type fini sur le corps premier (voir 4.4 pour le cas général).

Si k est de type fini sur le corps premier l'image de (4.1.1) engendre le $\mathbb{Q}_\ell$-vectoriel des classes de cohomologie invariantes, i.e.

$$\mathbb{Q}_\ell . C^p(X) = \left[H_\ell^{2p}(X)(p)\right]^\Gamma . \tag{4.1.2}$$

4.2. Si k est de type fini sur le corps premier, notons $\underline{\mathrm{Tate}}(k)$ la catégorie des $\mathbb{Q}_\ell$-vectoriels de rang fini munis d'une action continue de $\Gamma = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$; ses objets seront appelés des modules de Tate. La catégorie $\underline{\mathrm{Tate}}(k)$ est munie d'une loi $\otimes$ ACU évidente, ainsi que d'une structure $\mathbb{Q}_\ell$-linéaire. Pour ces structures, c'est une catégorie tannakienne sur $\mathbb{Q}_\ell$ (III 3.2.1), munie d'un foncteur fibre évident sur $\mathbb{Q}_\ell$, à savoir l'oubli de l'action de Γ.

La cohomologie ℓ-adique induit un $\otimes$-foncteur fidèle $\mathbb{Q}$-linéaire de la catégorie $\underline{CV}^0(k)$ des correspondances de degré nul (A 0.3.3) dans la catégorie des modules de Tate gradués (voir A 1.3.2).

$$H_\ell : \underline{CV}^0(k) \longrightarrow \underline{\mathrm{Grad}}\ \underline{\mathrm{Tate}}(k)$$

et la conjecture de Tate entraîne que si X, Y sont des objets de $\underline{CV}^0(k)$, l'inclusion

$$\mathrm{Hom}(X,Y) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(H_\ell(Y), H_\ell(X))$$

induit une égalité

$$\mathbb{Q}_\ell . \mathrm{Hom}(X,Y) = \mathrm{Hom}(H_\ell(Y), H_\ell(X))$$

4.3. Supposons maintenant k quelconque, on pose alors

$$\underline{\mathrm{Tate}}(k) = \varinjlim_{k'} \underline{\mathrm{Tate}}(k')$$

où k' parcourt les sous-corps de k de type fini sur le corps premier, les foncteurs de transition

$$\underline{\mathrm{Tate}}(k') \longrightarrow \underline{\mathrm{Tate}}(k'')$$

pour k''/k' étant induits par les morphismes de groupes

$$\mathrm{Gal}(\bar{k}''/k'') \longrightarrow \mathrm{Gal}(\bar{k}'/k) .$$

La catégorie $\underline{\mathrm{Tate}}(k)$ des modules de Tate est encore une catégorie tannakienne neutre sur $\mathbb{Q}_\ell$, qui dépend fonctoriellement du corps k.

Si on note G le $\mathbb{Q}_\ell$-groupe des automorphismes du foncteur oubli de $\underline{\mathrm{Tate}}(k)$, G° sa composante neutre, on voit sans peine qu'on a un isomorphisme canonique

$$G/G^\circ \simeq \Gamma_{\mathbb{Q}_\ell} ,$$

où $\Gamma_{\mathbb{Q}_\ell}$ est le $\mathbb{Q}_\ell$-groupe profini associé à $\Gamma = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. En particulier, si k est algébriquement clos, G est connexe.

4.4. Soit X un objet de $\underline{V}(k)$; alors les $H^i_\ell(X)$ sont de façon naturelle des modules de Tate. En effet, il existe un sous-corps k' de k de type fini sur le corps premier et un objet X' de $\underline{V}(k')$ tel que $X = X' \times_{k'} k$. On a un isomorphisme canonique

$$H^i_\ell(X) = H^i_\ell(X')$$

qui définit sur $H^i_\ell(X)$ une action de $\mathrm{Gal}(\bar{k}'/k)$. L'objet de $\underline{\mathrm{Tate}}(k)$ obtenu ainsi ne dépend que de X. On voit donc, que pour k général la cohomologie ℓ-adique

définit un $\otimes$-foncteur Q-linéaire et fidèle à valeurs dans les modules de Tate gradués

$$H_\ell : \underline{CV}^0(k) \longrightarrow \underline{\text{Grad}}\ \underline{\text{Tate}}(k) .$$

La conjecture de Tate énoncée plus haut entraîne que si $X,Y \in \text{ob}\ \underline{CV}(k)$, l'inclusion

$$\text{Hom}(X,Y) \hookrightarrow \text{Hom}(H_\ell(Y),H_\ell(X))$$

induit une égalité

$$\mathbb{Q}_\ell.\text{Hom}(X,Y) = \text{Hom}(H_\ell(Y),H_\ell(X)) .$$

A 5. La conjecture de Hodge

5.0. Dans ce numéro, le corps k est le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Si X est un objet de $\underline{V}(\mathbb{C})$, C(X) dénote l'anneau gradué des classes de cycles algébriques pour la relation d'équivalence définie par la cohomologie de Hodge (A 1.4.2) tensorisé par $\mathbb{Q}$

$$C(X) = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} Z_{Hdg}(X) .$$

5.1. Soit X un $\mathbb{C}$-schéma lisse projectif et connexe, et notons H(X) sa cohomologie de Betti-Hodge

$$H(X) = H_{BH}(X) = H(X(\mathbb{C}),\mathbb{Q}) ,$$

définie en A 1.4.2 . On a une décomposition de Hodge

$$H(X)_{\mathbb{C}} = \sum_{p,q} H^{p,q}(X) ,$$

$$H^{p,q}(X,\Omega^p_{X/\mathbb{C}})$$

et si $p \in \mathbb{N}$, on sait que la classe d'un cycle de codimension p dans X est de type (p,p) ; on a donc une inclusion

$$C^p(X) \hookrightarrow H^{p,p}(X) \cap H^{2p}(X) \tag{5.1.1}$$

La conjecture de Hodge sous sa forme simple est :

Hodge (2p,p) : L'inclusion (5.1.1) est une égalité .

On notera que, tout comme la conjecture de Tate en cohomologie ℓ-adique, cette caractérisation des classes de cohomologie algébriques entraîne l'algébricité des composantes de Künneth de la diagonale $\Delta_X \in C(X \times X)$ (voir A 3.2) .

5.1.1. La cohomologie de Betti-Hodge induit un $\otimes$-foncteur fidèle $\mathbb{Q}$-linéaire (voir A 1.3.2)

$$H_{BH} : CV^0(\mathbb{C}) \longrightarrow \underline{\text{Hodge}}(\mathbb{Q}) \quad . \tag{5.1.2}$$

La conjecture de Hodge entraîne que ce foncteur est pleinement fidèle.

5.2. Gardons les notations de 5.1 . Si $i,p \in \mathbb{N}$, on note $\text{Filt}'^p H^i(X)$ le sous-$\mathbb{Q}$-vectoriel de $H^i(X) = H^i(X(\mathbb{C}),\mathbb{Q})$ des classes de cohomologie qui s'annulent sur un ouvert de la forme $X - T$ où T est une partie Z de codimension $\geq p$. En fait, $\text{Filt}'^p H^i(X)$ est une sous-structure de Hodge de $H^i(X)$, i.e. le sous-vectoriel $\text{Filt}'^p H^i(X)_{\mathbb{C}}$ de $H^i(X)_{\mathbb{C}} = H^i(X(\mathbb{C}),\mathbb{C})$ est stable sous la décomposition en types p,q. Ceci suit de ce que $\text{Filt}'^p H^i(X)$ est aussi le sous-espace engendré par les images des morphismes de structures de Hodge

$$H^{i-2q}(Y)(-q) \longrightarrow H^i(X)$$

induits par des morphismes $Y \longrightarrow X$ où Y est de dimension $n-q \leq n-p$ et $n = \dim X$ (voir GROTHENDIECK [6],§ 1 et DELIGNE [6], 8.2.8). Il résulte aussi de cette caractérisation qu'on a

$$\text{Filt}'^p H^i(X) \subset \left[\text{Filt}^p H^i(X)_{\mathbb{C}}\right] \cap H^i(X) \quad , \tag{5.2.1}$$

où $\text{Filt}^p H^i(X)_{\mathbb{C}} = \sum_{r \geq p} H^{r,i-r}(X)$.

La conjecture de Hodge, sous sa forme généralisée, corrigée par Grothendieck (loc. cit.) est

Hodge(i,p) : L'inclusion (5.2.1) fait de $\mathrm{Filt}'^{p} H^{i}(X)$ le plus grand sous-$\mathbb{Q}$-vectoriel du terme de droite qui soit une sous-structure de Hodge de $H^{i}(X)$.

Pour $i = 2p$, cette conjecture se réduit à la précédente. On trouvera dans GROTHENDIECK [6] des commentaires sur cette conjecture.

5.2.1. Soit V une $\mathbb{Q}$-structure de Hodge de poids i . On peut caractériser le plus grand sous-$\mathbb{Q}$-vectoriel de $\mathrm{Filt}^{p}V_{\mathbb{C}} \cap V_{\mathbb{Q}}$ qui soit une structure de Hodge comme étant le plus grand sous-objet V' de V tel que $V'(p)$ soit à bidegrés positifs ; c'est ce qu'on pourrait appeler la partie V_{i-2p} de niveau de Hodge $\leq i-2p$, en s'inspirant de 4.3 (les structures de Hodge effectives étant celles à bidegrés positifs).

BIBLIOGRAPHIE

ARTIN M., MAZUR B. [1] : Etale homotopy. Lecture Notes in Mathematics 100, Springer-Verlag 1969.

BENABOU J. [1] : Thèse, Paris 1966.

——————— [2] : Comptes-rendus Acad. Sc. Paris, 260, 1965, p. 752-755.

BERTHELOT P. [1] : Comptes-rendus Acad. Sc. Paris, 269, 1969, p. 297-300.

——————— [2] : Comptes-rendus Acad. Sc. Paris, 269, 1969, p. 357-360.

——————— [3] : Thèse, Paris 1972 ; à paraître dans les Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag.

BOREL A. [1] : Linear Algebraic Groups, Benjamin 1969.

BOREL A., TITS J., [1] : Groupes réductifs. Publ. de l'IHES 27, p. 55-152, Presses Universitaires de France 1965.

DELIGNE P. [1] : Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales. Publ. Math. de l'IHES 35, p. 259-278, Presses Universitaires de France 1968.

——————— [2] : Equations différentielles à points singuliers réguliers. Lecture Notes in Mathematics 163, Springer-Verlag 1970.

——————— [3] : Travaux de Griffiths, Séminaire Bourbaki, 376 (mai-juin 1970). Lecture Notes in Mathematics 180, Springer-Verlag 1971.

——————— [4] : Théorie de Hodge, II. Publ. Math. de l'IHES 40, p 5-58, Presses Universitaires de France 1971.

——————— [5] : La conjecture de Weil pour les surfaces K3 , Inventiones math. 15, p. 206-226, Springer-Verlag 1972.

——————— [6] : Théorie de Hodge, III. Notes miméographiées, IHES, Bures-sur-Yvette, France (1972).

DEMAZURE M. [1] : Schémas en groupes réductifs, Thèse, Paris 1964. Bull. Soc. Math. France 93, 1965, p. 369-413.

DEMAZURE M., GABRIEL P. [1] : Groupes algébriques, tome I. Masson & Cie, Paris et North-Holland, Amsterdam 1970.

DYNKIN E.B [1] : Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras. AMS Translations 6 , 1957, p. 111-244.

EILENBERG S. KELLY G.M. [1] : Closed categories, in Proc. Conf. on Categorical Algebra, La Jolla 1965, p. 421-562. Springer-Verlag 1966.

GABRIEL P. [1] : Des catégories abéliennes. Bull. Soc. Math. France 90, 1962, p. 323-448.

GIRAUD J. [1] : Cohomologie non abélienne. Springer-Verlag 1971.

GRIFFITHS P.A [1] : Periods of integrals on algebraic manifolds : summary of main results and discussion of open problems. BAMS, 76, 1970, p. 228-296.

——————— [2] : Periods of integrals on algebraic manifolds. Publ. Math. de l'IHES 38, p. 125-180, Presses Universitaires de France, 1971.

GROTHENDIECK A. [1] : Exposé 6 in Séminaire C. Chevalley 1956-1958 : Classification des groupes de Lie algébriques. IHP, Paris 1958.

——————— [2] : Exposé 4 in Séminaire C. Chevalley 1958 : Anneaux de Chow et applications. IHP, Paris 1958.

——————— [3] : On the De Rham cohomology of algebraic varieties. Publ. Math. de l'IHES 29, p. 95-103, Presses Universitaires de France 1966.

——————— [4] : Crystals and the De Rham cohomology of schemes. Notes by I. Coates and O. Jussila in Dix exposés sur la cohomologie des schémas. Masson & Cie, Paris et North-Holland, Amsterdam 1968.

GROTHENDIECK A. [5] : Standard conjectures on algebraic cycles, in Proc. of the Bombay Colloquium on Algebraic Geometry, Oxford Univ. Press 1968.

———————— [6] : Hodge's general conjecture is false for trivial reasons. Topology 8, p. 299-303. Pergamon Press 1969.

HARDER G. [1] : Halbeinfache Gruppenschemata über Dedekindringen. Inventiones math. 4, p. 165-191. Springer-Verlag 1967.

HELGASON S. [1] : Differential geometry and symmetric spaces, Academic Press 1962.

HOCHSCHILD G. [1] : The structure of Lie groups. Holden-Day 1965.

HONDA T. [1] : Isogeny classes of abelian varieties over finite fields. Journal of the Math. Soc. of Japan 20 1-2 , 1968, p. 83-95.

KATZ N. [1] : Algebraic solutions of differential equations : p-curvature and the Hodge filtration. Preprint available at IHES, 91 - Bures-sur-Yvette, France.

KELLY G.M. [1] : On Mac Lane's conditions for coherence of natural associativities, commutativities, etc. Journal of Algebra 4, 1964, p. 397-402.

KELLY G.M., MAC LANE S. [1] : Coherence in closed categories. Journal of Pure and Applied Algebra 1 1, 1971, p. 97-140.

KLEIMAN S. [1] : Algebraic cycles and the Weil conjectures, in Dix exposés sur la cohomologie des schémas. Masson & Cie, Paris et North-Holland, Amsterdam 1968.

———————— [2] : Motives, in Proc. of the 5th. Nordic summer school, Oslo 1970. Wolters-Noordhoff, Holland 1972.

KOSTANT B. [1] : The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group. Amer. Journal of Math. 81, 4, 1959, p. 973-1032.

MAC LANE S. [1] : Natural associativity and commutativity. Rice University Studies 49, 1963, p. 28-46.

MANIN Yu. [1] : The theory of commutative formal groups over fields of finite characteristic. Usp. Mat. Nauk 18, 1963, p. 3-90 (en russe). English translation : Russian math. surveys 18, 1963, p. 1-83.

——————— [2] : Correspondences, motives and monoidal transformations. Mat. Sbornik 77 (119), p. 475-507, AMS Translations (1970).

MUMFORD D. [1] : Families of abelian varieties, in Algebraic groups and discontinuous subgroups. Proceedings of Symp. in Pure and Applied Math. vol. IX, AMS 1966.

——————— [2] : Abelian varieties. Oxford Univ. Press 1970.

NAGATA M. [1] : Complete reducibility of rational representations of a matric group. J. Math. Kyoto Univ. 1 1 , 1961, p. 87-99.

SERRE J.P. [1] : Corps locaux. Hermann, Paris 1962.

——————— [2] : Cohomologie galoisienne. Lecture Notes in Mathematics 5, Springer-Verlag 1965.

——————— [3] : Algèbre locale, multiplicités. Lecture Notes in Mathematics 11 , Springer-Verlag 1965.

——————— [4] : Groupes de Grothendieck des schémas en groupes réductifs déployés. Publ. Math. de l'IHES 34, p. 37-52, Presses Universitaires de France 1968.

TATE J. [1] : Algebraic cycles and poles of zeta functions, in Arithmetical Algebraic Geometry, proceedings of a conference held at Purdue University, 1963. Harper & Row, New York 1965.

——————— [2] : The cohomology groups of tori in finite Galois extensions of number fields. Nagoya Math. Journal 27, 709-719.

——————— [3] : Classes d'isogénie des variétés abéliennes sur un corps fini (d'après T. Honda), Séminaire Bourbaki, 352 (novembre 1968).

WEIL A. [1] : Variétés kählériennes. Hermann, Paris 1958.

EGA Eléments de Géométrie Algébrique, par J. DIEUDONNE, A. GROTHENDIECK Publ. Math. de l'IHES 4, 8, ... Presses Universitaires de France.

SGA 1 Séminaire de Géométrie Algébrique de l'IHES 1960-61, dirigé par A. GROTHENDIECK. Lecture Notes in Mathematics 224, Springer-Verlag 1971.

SGA 3 Séminaire de Géométrie Algébrique de l'IHES 1963-64, dirigé par M. DEMAZURE, A. GROTHENDIECK. Lecture Notes in Mathematics 151-153, Springer-Verlag 1970.

SGA 4 Séminaire de Géométrie Algébrique de l'IHES 1963-64, dirigé par M. ARTIN, A. GROTHENDIECK. A paraître dans Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag.

INDEX TERMINOLOGIQUE

Adjoint (d'un morphisme)	V 2.1.2.1, 2.1.4
algèbre (dans une ⊗-catégorie)	I 6.1.1
algèbre commutative, associative, unifère, AC , AU , CU , ACU	I 6.1.2
algèbre opposée	I 6.1.1
algèbre produit tensoriel	I 6.1.1
A-algèbre	II 1.0.2
A-algèbre coreprésentable	II 1.2.1
A-algèbre des distributions (sur un A-monoïde)	II 3.0.2
A-algèbre représentable	II 1.2.2
Bigèbre (dans une ⊗-catégorie)	I 6.1.3
catégorie à petits objets	II 2.3.1
catégorie des motifs	VI 4.1.3.2, 4.2.1.4
catégorie des motifs effectifs	VI 4.1.2.2
catégorie ind-tannakienne	III 1.1.1
catégorie ind-tannakienne neutre	III 1.1.1.2
catégorie karoubienne	VI 4.1.2.1
catégorie A-linéaire	I 0.1.2
catégorie noethérienne, localement noethérienne	II 2.3.4.2
catégorie tannakienne	III 3.2.1
catégorie tannakienne algébrique	III 3.3.1
catégorie tannakienne neutre	III 3.2.1
catégorie tannakienne polarisable	V 2.4.4
catégorie tannakienne polarisée	V 2.4.5.1
B-catégorie O_B-linéaire, B-linéaire	I 4.5.4
B-⊗-catégorie	I 4.5.1.1
B-⊗-catégorie fibrée	I 4.5.5
B-⊗-catégorie O_B-linéaire, B-linéaire	I 4.5.4
L-catégorie ind-tannakienne	III 2.3.3
⊗-catégorie	I 0.1.1
⊗-catégorie AC, AU, CU, ACU	I 2.1.1, 2.2.1, 2.3, 2.4.1

$\otimes$-catégorie associative	I	1.1.1
$\otimes$-catégorie commutative	I	1.2.1
$\otimes$-catégorie A-linéaire	I	0.1.2
$\otimes$-catégorie opposée	I	0.1.4
$\otimes$-catégorie rigide	I	5.1.1
$\otimes$-catégorie symétrique	I	0.1.4
cogèbre	I	6.1.1.1
cogèbre coassociative, cocommutative, coünifère	I	6.1.2.2
cohomologie ℓ-adique	VI	A 1.4.1
cohomologie cristalline	VI	A 1.4.5
cohomologie de Betti-Hodge	VI	A 1.4.4
cohomologie de De Rham	VI	A 1.4.3
cohomologie de Hodge	VI	A 1.4.2
comodule (dans une $\otimes$-catégorie)	I	6.2.2
comodule coplat	II	2.4.3
comodule coünifère	I	6.2.2
n-connexion	VI	1.2.1
contrainte AC, AU, CU, ACU	I	2.1.1, 2.2.1 2.3, 2.4.1
contrainte d'associativité	I	1.1.1
contrainte de commutativité	I	1.2.1
contrainte de commutativité stricte	I	1.2.3
contrainte d'unité	I	1.3.1
contrainte opposée, symétrique	I	1.4
contraintes cohomologues	I	1.1.3, 1.2.3,2.1.3
coproduit tensoriel (de comodules)	II	2.4.3
correspondance algébrique	VI	A 0.3.1
correspondance cohomologique	VI	A 1.3.2
F-cristal	VI	3.1.1, 3.1.3
F-cristal isopentique	VI	3.3.3.1
distributions (sur un monoïde)	II	3.0.2
distributions de Dirac	II	3.0.2
donnée de descente (pour une catégorie linéaire)	III	1.2.1
$\otimes$-donnée de descente	III	1.3.5.1

Elément hodgien (d'un $\mathbb{R}$-groupe algébrique)	V	2.7.2, 3.3.1
enveloppe algébrique (d'un groupe topologique,)	V	0.3.1
enveloppe représentable (d'un $\underline{A}$-module)	II	1.1.2.3
$\otimes$-équivalence	I	4.4.1

Faisceau ℓ-adique	VI	1.1.3
filtration de Hodge	VI	2.1.1.3, A 1.4.3
filtration par les niveaux	VI	4.3.2
$\otimes$-filtration admissible	IV	2.2.1
$\otimes$-filtration centrale	IV	2.2.6
$\otimes$-filtration de type unipotent	IV	2.5.2.2
$\otimes$-filtration exacte	IV	2.1.1
$\otimes$-filtration localement scindable	IV	2.2.1
$\otimes$-filtration scindable	IV	2.2.1
$\otimes$-filtrations opposées	IV	2.3.1, 2.3.3
foncteur borné	II	2.3.1
foncteur fibre	II	3.2.1, 4.2
foncteur fibre à valeurs dans un schéma	III	3.2.1.2
foncteur relativement exact	II	2.4.2
$\otimes$-foncteur	I	4.1.1
$\otimes$-foncteur AC, AU, CU, ACU	I	4.2.4
$\otimes$-foncteur associatif	I	4.2.1
$\otimes$-foncteur commutatif	I	4.2.2
$\otimes$-foncteur compatible avec les $\underline{\text{Hom}}$	I	4.3.1
$\otimes$-foncteur A-linéaire	I	4.1.3
$\otimes$-foncteur rigide	I	5.2.1
$\otimes$-foncteur strict	I	4.1.1
$\otimes$-foncteur unifère	I	4.2.3
$\underline{B}$-$\otimes$-foncteur	I	4.5.3
forme bilinéaire	V	2.1.1
forme bilinéaire non dégénérée	V	2.1.1
forme de C-polarisation	V	2.7.1, 3.3.1
forme de Weil	V	2.3.1, 2.3.5
forme positive (pour une polarisation)	V	2.4.1, 3.2.1
forme sesquilinéaire	V	2.2.1
forme sesquilinéaire conjuguée	V	2.2.5
forme sesquilinéaire non dégénérée	V	2.2.1
formes de Weil compatibles	V	2.3.1, 2.3.5

$\otimes$-générateur	II	4.3.1
gerbe	III	2.1.1
gerbe neutre	III	2.1.1.1
gerbe tannakienne	III	2.2.1
gerbe tannakienne algébrique	III	3.1.0
L-gerbe	III	2.1.4
graduation de type I	IV	1.1.1
graduation par le poids	V	3.1.1
$\otimes$-graduation	IV	1.2.2
$\otimes$-graduation centrale	IV	1.2.2.1
groupe de Mumford-Tate (d'une structure de Hodge)	VI	2.1.2.3
groupe d'holonomie (d'un schéma, d'un module stratifié)	VI	1.2.2.1
groupe d'holonomie (d'une catégorie en un foncteur fibre)	III	3.2.1.2
groupe d'holonomie restreint (d'un schéma, d'un module stratifié)	VI	1.2.2.1
$\mathbb{R}$-groupe anisotrope, compact	V	0.3.2
$\mathbb{R}$-groupe hodgien	V	2.7.2
$\mathbb{R}$-groupe polarisable	V	2.7.1
Inverse (pour un objet inversible)	I	2.5.4
Inverse AU (pour un objet inversible)	I	2.5.5.2
F-isocristal	VI	3.1.3
Lien	III	2.1.3
Lien abélien	III	2.1.3
Lien algébrique	III	3.1.4
Lien polarisable	V	2.4.5.1, 2.6.1.2
Lien réductif	V	1.1.2
Lien représentable	III	2.1.3
linéairement compact (espace vectoriel)	II	1.4.1
loi $\otimes$	I	0.1.1
Module stratifié	VI	1.2.1
A-module (dans une $\otimes$-catégorie)	I	6.2.1
A-module unifère	I	6.2.1

$\underline{A}$-module	II	1.0.2
$\underline{A}$-module coreprésentable	II	1.1.1
$\underline{A}$-module représentable	II	1.1.1
G-module, G-A-module	II	3.0.3
$\mathfrak{G}$-module	III	3.3.2
$\mathfrak{G}$-module fidèle	III	3.3.2
morphisme de catégories ind-tannakiennes	III	1.1.1.1
morphisme de catégories tannakiennes	III	3.2.1.1
morphisme de foncteurs fibre	II	3.2.1, 4.2
morphisme de Gysin	VI	A 1.1.1.8
morphisme de théories de cohomologie	VI	A 1.1.2
morphisme d'unités	I	1.3.4
morphisme d'unités réduites	I	1.3.2.2
$\otimes$-morphisme	I	4.1.1
$\otimes$-morphisme unifère	I	4.2.3.
$\underline{B}$-$\otimes$-morphisme	I	4.5.3
$\underline{B}$-$\otimes$-morphisme unifère	I	4.5.3
motif (d'une variété)	VI	4.1.2.2
motif de Lefschetz	VI	4.1.2.4
motif de Tate	VI	4.1.3.2
motif purement de niveau n	VI	4.3.2
Niveau de Hodge	VI	A 5.2.1
niveau d'un motif	VI	4.3.1
p-nombre de Weil	VI	4.6.3.2
Objet de Tate	V	3.1.1
objet $\underline{Hom}$, $\underline{Moh}$	I	3.1.1
objet inversible	I	2.5.0
objet noethérien	II	2.3.4.2
objet réflexif	I	3.2.3.3
objet n-régulier (n = 0,1,2)	I	0.1.3
objet n-régulier à gauche, à droite	I	0.1.3
objet unité	I	1.3.2
Parité (d'une forme non dégénérée)	V	2.1.2, 2.2.2
parité (d'une polarisation)	V	2.4.1

pente (d'un F-cristal)	VI	3.3.3.1
polarisation	V	2.4.1, 2.4.3, 3.2.1
polarisation hodgienne	V	2.7.2, 3.3.1
polarisation symétrique	V	2.4.1
produit tensoriel externe	II	1.5.1
pseudo-générateur	II	2.6.2
Quadruple de $\otimes$-équivalence	I	4.4.1
Rang (d'un objet)	I	5.1.4
relation d'équivalence admissible	VI	A 0.2.1
Scindage (d'une $\otimes$-filtration)	IV	2.1.1
signature (d'un objet inversible)	I	2.5.3
sous-catégorie de définition	II	2.2.1, 3.4
sous-objet isotrope, non isotrope, totalement isotrope	V	2.1.6
sous-objet orthogonal (à un sous-objet)	V	2.1.6
stratification	VI	1.2.1
structure A-linéaire	I	0.1.2
$\otimes$-structure	I	0.1.1
$\otimes$-structure A-linéaire	I	0.1.2
symétrie canonique	I	1.2.3
système local	VI	1.1.1
système local ℓ-adique	VI	1.1.3
Théorie de cohomologie	VI	A 1.1, 1.1.5
trace (d'un endomorphisme)	I	5.1.4
transposé (d'un endomorphisme)	V	2.1.2.1
transposé (d'un morphisme)	V	2.1.4
triple de Tate	V	3.1.1
triple de Tate neutralisé	V	3.1.3
triple de Tate neutre	V	3.1.3
triple de Tate polarisable	V	3.2.2.1

Unité (pour une ⊗-catégorie)	I	1.3.1
unité à gauche, à droite, bilatère	I	1.3.1.3
unité réduite	I	1.3.2