3ª PARTE: ALGEBRA MULTILINEAL. FORMA CANONICA DE JORDAN.

TEMA 15: ALGEBRA MULTILINEAL

1. PRODUCTO TENSORIAL

* APLICACIONES BILINEALES: Sean E, F y G espacios vectoriales sobre un cuerpo K. Se dice que una aplicación $\varphi : E\times F \to G$ es bilineal si

- $\varphi(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda\varphi(x_1,y) + \mu\varphi(x_2,y)$, $\forall x_1,x_2\in E, \forall y\in F, \forall \lambda,\mu\in K$.
- $\varphi(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda\varphi(x,y_1) + \mu\varphi(x,y_2)$, $\forall x\in E, \forall y_1,y_2\in F, \forall\lambda,\mu\in K$.

Si $G = K$ se dice que φ es una forma bilineal.

OBSERVACION: La imagen de una aplicación bilineal no es en general un subespacio vectorial, es decir, si $\varphi : E\times F\to G$ es bilineal el conjunto $H = \{\varphi(x,y) \mid (x,y)\in F\}$ no es subespacio vectorial de G. Llamaremos $\operatorname{Im}\varphi$ al subespacio vectorial de G engendrado por H.

1.1. PROPOSICION: Si E_1 y F_1 son subespacios respectivos de E y F y $\varphi : E\times F\to G$ es bilineal, entonces $\varphi_{|E_1\times F_1} : E_1\times F_1 \to G$ es bilineal.

Demostr: Trivial. (*)

1.2. PROPOSICION: Supongamos que $E = \bigoplus_\alpha E_\alpha$ y $F = \bigoplus_\beta F_\beta$. Si para cada par de índices (α,β) existe una aplicación bilineal $\varphi_{\alpha\beta} : E_\alpha\times F_\beta \to G$, entonces existe una única aplicación bilineal $\varphi : E\times F\to G$ tal que $\varphi_{|E_\alpha\times F_\beta} = \varphi_{\alpha\beta}$.

Demostr: Todo elemento $x\in E$ es de la forma $x = \sum_\alpha x_\alpha$ con $x_\alpha \in E_\alpha$, siendo esta suma finita. De la misma manera $y = \sum_\beta y_\beta$. Definimos entonces

$$\varphi(x,y) = \sum_{\alpha,\beta} \varphi_{\alpha\beta}(x_\alpha, y_\beta)$$

φ, así definida, es bilineal trivialmente, y verifica que $\varphi_{|E_\alpha\times F_\beta} = \varphi_{\alpha\beta}$, cualquiera que sea (α,β).

Veamos que es única. Supongamos que $\psi : E\times F \to G$ es bilineal y verifica que $\psi_{|E_\alpha\times F_\beta} = \varphi_{\alpha\beta}$; entonces:

$$\psi(x,y) = \psi\Big(\sum_\alpha x_\alpha, \sum_\beta y_\beta\Big) = \sum_{\alpha,\beta}\psi(x_\alpha,y_\beta) = \sum_{\alpha,\beta}\varphi_{\alpha\beta}(x_\alpha,y_\beta) = \varphi(x,y) \blacksquare$$

(*) Sean E_1 y F_1 subespacios de E y F, y $\varphi_1 : E_1\times F_1 \to G$ bilineal. Cabe preguntarse si existe $\varphi : E\times F\to G$ bilineal que extienda a φ_1. La respuesta es afirmativa, pero la extensión no es única. Sea E_2 el subespacio suplementario de E_1 en E ($E = E_1 \oplus E_2$), y F_2 el de F_1 en F. Dados $x\in E$, $y\in F$

** PRODUCTO TENSORIAL: Un producto tensorial es una aplicación bilineal

$$\otimes : E \times F \longrightarrow T$$

donde E, F y T son espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K, y que verifica las propiedades:

$\otimes_1$) $\operatorname{Im} \otimes = T$, es decir, T está generado por $\{\otimes(x,y) / (x,y) \in E \times F\}$.

$\otimes_2$) $\otimes$ satisface la siguiente propiedad universal:

"Si $\varphi : E \times F \to H$ es bilineal de $E \times F$ en un espacio vectorial H, existe una aplicación lineal $f : T \to H$ haciendo conmutativo el diagrama (1), es decir, tal que $\varphi = f \circ \otimes$"

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "\varphi"'] & T \arrow[dl, "f"] \\ H & \end{tikzcd} \qquad (1)$$

1.3. PROPOSICION: Si una aplicación bilineal $\otimes : E \times F \to T$ satisface $\otimes_1$) y $\otimes_2$), entonces satisface la propiedad:

$\otimes$) Si H es un espacio vectorial y $\varphi : E \times F \to H$ es bilineal, existe una única aplicación lineal $f : T \to H$ tal que $\varphi = f \circ \otimes$.

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "\varphi"'] & T \arrow[dl, "f"] \\ H & \end{tikzcd}$$

Recíprocamente si $\otimes$ satisface la propiedad $\otimes$), entonces es un producto tensorial.

Demostr.: $\Rightarrow$) $\otimes_2$) da la existencia de f. Veamos que es única. Representaremos $\otimes(x,y) = x \otimes y$. Entonces, $f(x \otimes y) = \varphi(x,y)$. Supongamos que $f_1 : T \to H$ es lineal y hace conmutativo el diagrama (1), es decir, $f_1(x \otimes y) = \varphi(x,y)$.

Luego $f_1(x \otimes y) = f(x \otimes y)$, $\forall (x,y) \in E \times F$.

Puesto que $\{x \otimes y / (x,y) \in E \times F\}$ genera a T, por $\otimes_1$), debe ser $f_1 = f$.

$\Leftarrow$) Trivialmente, $\otimes) \Rightarrow \otimes_2)$. Falta ver que $\operatorname{Im} \otimes = T$. Sea T_1 el subespacio generado por $\{x \otimes y / (x,y) \in E \times F\}$, es decir, $T_1 = \operatorname{Im} \otimes$. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "\varphi"'] & T \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "j"] \\ T_1 \arrow[r, "i"'] & T \end{tikzcd}$$

donde $\varphi(x,y) = x\otimes y$, e i es la inclusión de T_1 en T.
Entonces existe una única aplicación lineal $f: T \to T_1$ tal que $f\circ\otimes = \varphi$.

La aplicación $i\circ\varphi: E\times F \to T$ es bilineal. Luego, existe una única aplicación lineal $j: T\to T$ tal que $j\circ\otimes = i\circ\varphi$.
Como $i\circ\varphi = \otimes$, y j es única, necesariamente debe ser $j = id_T$.
Puesto que los diagramas son conmutativos se tiene que $j = i\circ f$

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "j = id_T"'] & T_1 \arrow[r, "i"] & T \end{tikzcd}$$

Como $f(T) = T_1$ e $i(T_1) = T_1$
se tiene, $(i\circ f)(T) = T_1$.
Además $j(T) = T$.
Luego $T = T_1$. c.s.q.d.

• PROPIEDADES DEL PRODUCTO TENSORIAL:

1.4. PROPOSICION: Sean E, F y Φ espacios vectoriales sobre un cuerpo K.
Sea $\{a_1,\dots,a_r\}$ un sistema libre de E y $\{b_1,\dots,b_r\}$ una familia de vectores de F. Si $\sum_{i=1}^{r} a_i\otimes b_i = 0$, entonces $b_i = 0$, $i=1,\dots,r$.

Demostr.: Siendo $a_1,\dots,a_r$ linealmente independientes, siempre podemos encontrar r formas lineales $f_1,\dots,f_r$ sobre E (elementos de $E^* = \mathcal{L}(E,K)$) tales que $f_i(a_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} = 1 \text{ si } i=j \\ = 0 \text{ si } i\neq j\end{cases}$ (delta de Kronëcker).

Sean $g_1,\dots,g_r$ r formas lineales cualesquiera sobre F. Construimos entonces la siguiente forma bilineal sobre $E\times F$:

$$\varphi: E\times F \longrightarrow K$$
$$(x,y) \longmapsto \varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{r} f_i(x)\cdot g_i(y) \qquad (*)$$

Consideremos el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} E\times F \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "\varphi"'] & T \arrow[dl, "h"] \\ K & \end{tikzcd}$$

En virtud de $\otimes)$, existe una única aplicación lineal $h: T\to K$ tal que $h\circ\otimes = \varphi$.
Entonces $h\left(\sum_{i=1}^{r} a_i\otimes b_i\right) = \sum_{i=1}^{r}\varphi(a_i,b_i) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} f_j(a_i)\cdot g_j(b_i) =$
$= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\delta_{ji}\cdot g_j(b_i) = \sum_{i=1}^{r} g_i(b_i)$

Puesto que $\sum_{i=1}^{r} a_i\otimes b_i = 0$ debe ser $\sum_{i=1}^{r} g_i(b_i) = 0$ y, siendo las g_i

(*) Es trivial que φ es una forma bilineal: $\varphi(\lambda x_1+\mu x_2, y) = \sum_{i=1}^{r} f_i(\lambda x_1+\mu x_2)\cdot g_i(y) = \lambda\sum f_i(x_1)g_i(y) + \mu\sum f_i(x_2)g_i(y)$.

formas lineales arbitrarias sobre F debe ser $b_i = 0$, $i=1,\dots,r$. c.s.q.d.

1.5. COROLARIO: Dados $a \in E$ y $b \in F$ se tiene que $a \otimes b = 0$ si, y solo si, $a = 0$ ó $b = 0$.

Demostr.: $\Rightarrow$ Si $a \otimes b = 0$, por el teorema anterior debe ser $a = 0$ ó $b = 0$.

$\Leftarrow$ Si $a = 0$, $a \otimes b = \otimes(0,b) = 0$. c.s.q.d.

1.6. PROPOSICION: Sea $(e_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ una base de E. Entonces cada vector $v \in T = \operatorname{Im} \otimes$ admite una expresión de la forma $v = \sum_\alpha e_\alpha \otimes b_\alpha$ donde $b_\alpha = 0$ salvo para un número finito de índices. Además b_α está unívocamente determinado por v.

Demostr.: Si $v \in T$, admite una expresión del tipo

$$v = \sum_i x_i \otimes y_i \quad , (x_i, y_i) \in E \times F$$

donde esta suma es finita. Para cada i, $x_i = \sum_\alpha \lambda_{i\alpha} e_\alpha$ donde $\lambda_{i\alpha} = 0$ salvo, quizás, para un número finito de ellos.

Entonces $v = \sum_i \left(\sum_\alpha \lambda_{i\alpha} e_\alpha\right) \otimes y_i = \sum_i \sum_\alpha \lambda_{i\alpha} (e_\alpha \otimes y_i) =$

$$= \sum_\alpha \sum_i \lambda_{i\alpha} (e_\alpha \otimes y_i) = \sum_\alpha \left(e_\alpha \otimes \sum_i \lambda_{i\alpha} y_i\right) = \sum_\alpha e_\alpha \otimes b_\alpha$$

donde $b_\alpha = \sum_i \lambda_{i\alpha} y_i$

Si v admite otra expresión del tipo: $v = \sum_\alpha e_\alpha \otimes b'_\alpha$ se tiene que $v - v = 0 = \sum_\alpha e_\alpha \otimes (b_\alpha - b'_\alpha)$ y, según 1.4. PROPOSICION debe ser $b_\alpha - b'_\alpha = 0$, $\forall \alpha$. c.s.q.d.

1.7 PROPOSICION: Todo elemento z de $T = \operatorname{Im} \otimes$ admite una expresión de la forma $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ donde $\{x_i\}_{i=1}^n$ e $\{y_i\}_{i=1}^n$ son sistemas libres de E y F respectivamente.

Demostr.: Sea $z \in T - \{0\}$. Por definición de T, z admite una expresión como suma finita de elementos de la forma $x_i \otimes y_i$ con $x_i \in E$ e $y_i \in F$. Siempre podremos suponer que $z = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ es una expresión minimal de z como suma de elementos $x_i \otimes y_i$, en el sentido de que otra expresión de z de este tipo tendrá más sumandos. Veamos que entonces $\{x_i\}_{i=1}^n$ e $\{y_i\}_{i=1}^n$ son sistemas libres.

Si $n = 1$, $z = x \otimes y$ y, puesto que $z \neq 0$, debe ser $x \neq 0$ e $y \neq 0$ y ya estaría probado.

Supongamos $n \geq 2$ y que $\{x_i\}_{i=1}^n$ no es libre. Podemos suponer

$$= \sum_{i=1}^{n-1} x_i \otimes y_i + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (x_i \otimes y_n) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i \otimes y_i + \sum_{i=1}^{n-1} x_i \otimes (\lambda_i y_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} (x_i \otimes y_i + x_i \otimes \lambda_i y_n) = \sum_{i=1}^{n-1} [x_i \otimes (y_i + \lambda_i y_n)]$$

lo cual está en contradicción con el carácter minimal de n. Debe ser entonces $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ libre. Análogamente, $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ es libre. c.s.q.d.

2. Existencia y unicidad del producto tensorial de dos espacios vectoriales.

2.1. TEOREMA: (Unicidad del producto tensorial).

Sean E, F, T_1 y T_2 espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K. Sean $\otimes_1 : E \times F \to T_1$ y $\otimes_2 : E \times F \to T_2$ aplicaciones bilineales que satisfacen la propiedad universal $\otimes)$ (Proposición 1.3.). Entonces existe un isomorfismo ϕ entre los espacios vectoriales T_1 y T_2 tal que $\phi(x \otimes_1 y) = x \otimes_2 y$, $\forall (x,y) \in E \times F$.

Demostr.: Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "\otimes_1"] \arrow[d, "\otimes_2"'] & T_1 \arrow[dl, shift left, "f"] \\ T_2 \arrow[ur, shift left, "g"] & \end{tikzcd}$$

Puesto que $\otimes_1$ satisface $\otimes)$, existe un único homomorfismo $f : T_1 \to T_2$ tal que $f \circ \otimes_1 = \otimes_2$.

Puesto que $\otimes_2$ satisface $\otimes)$, existe un único homomorfismo $g : T_2 \to T_1$ tal que $g \circ \otimes_2 = \otimes_1$.

Queremos ver que f es biyectiva, con lo cual, haciendo $f = \phi$ quedará probado el teorema. Se tiene que

$$f \circ g \circ \otimes_2 = \otimes_2 \quad y \quad g \circ f \circ \otimes_1 = \otimes_1$$

Luego $g \circ f$ es una aplicación lineal de T_1 en sí mismo haciendo conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "\otimes_1"] \arrow[d, "\otimes_1"'] & T_1 \arrow[dl, "g \circ f"] \\ T_1 & \end{tikzcd}$$

Como $\otimes_1$ satisface $\otimes)$, existe un único homomorfismo h de T_1 en sí mismo tal que $h \circ \otimes_1 = \otimes_1$. Como la identidad en T_1 satisface esto, debe ser $h = id_{T_1}$ y $g \circ f = id_{T_1}$.

Análogamente $f \circ g = id_{T_2}$.

Por tanto, $f = \phi$ es un isomorfismo de T_1 en T_2.

Además $\forall (x,y)\in E\times F$, $f(x\otimes_1 y) = (f\circ \otimes_1)(x,y) = \otimes_2(x,y) = x\otimes_2 y$. csqd

2.2. TEOREMA: Sean E y F espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K. Entonces existe un espacio vectorial T sobre K y una aplicación bilineal $\otimes: E\times F \to T$ que satisface las condiciones de producto tensorial.

Demostr.: • Dado un conjunto A y el cuerpo K denotamos por $\mathcal{C}(A)$ el conjunto de las aplicaciones de A en K de soporte finito, es decir $\varphi: A\to K$ es un elemento de $\mathcal{C}(A)$ si $\varphi(x)=0$ para casi todos los $x\in A$ (salvo, quizás, para un número finito).

Podemos dotar a $\mathcal{C}(A)$ de estructura de espacio vectorial sobre K; para ello definimos

$$(\varphi_1+\varphi_2)(x) = \varphi_1(x)+\varphi_2(x), \quad \forall \varphi_1,\varphi_2\in\mathcal{C}(A), \forall x\in A.$$
$$(\lambda\cdot\varphi)(x) = \lambda\cdot\varphi(x), \quad \forall\lambda\in K, \forall\varphi\in\mathcal{C}(A), \forall x\in A.$$

Se prueba que $(\mathcal{C}(A);K;+,\cdot)$ es un espacio vectorial.

Definimos para cada $x\in A$,
$$\varphi_x: A \longrightarrow K$$
$$x \longmapsto 1$$
$$y \longmapsto 0, \text{ si } y\neq x$$

Entonces $\mathcal{B}=\{\varphi_x \mid x\in A\}$ es base de $\mathcal{C}(A)$:

- Sea $\varphi\in\mathcal{C}(A)$. Entonces $\exists\{x_i\}_{i=1}^n\subset A \,/\, \varphi(x_i)=\alpha_i\neq 0$ y $\varphi(x)=0$ si $x\notin\{x_i\}_{i=1}^n$. Entonces trivialmente $\varphi=\sum_{i=1}^n \alpha_i\varphi_{x_i}$
- Sea $\{x_i\}_{i=1}^n\subset A$ y supongamos que $\sum_{i=1}^n\lambda_i\varphi_{x_i}=0$. Veamos que $\lambda_i=0, \forall i$. Por hipótesis, $(\sum_{i=1}^n\lambda_i\varphi_{x_i})(x)=0$, $\forall x\in A$. En particular $\forall i\in\{1,\dots,n\}$, $(\sum_{j=1}^n\lambda_j\varphi_{x_j})(x_i)=0 \Rightarrow \lambda_i=0$.

  Luego $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{C}(A)$.

•• Hagamos ahora la demostración del teorema 2.2. Dados los espacios vectoriales E y F sobre K consideremos el espacio vectorial $\mathcal{C}(E\times F)$.

Dado $(x,y)\in E\times F$ denotaremos por $1\cdot(x,y)\equiv(x,y)$ la aplicación de $E\times F$ en K que asocia a (x,y) el 1 y a (x',y') el 0 si $(x',y')\neq(x,y)$.

Llamaremos $\mathcal{N}(E,F)$ el subespacio vectorial de $\mathcal{C}(E\times F)$ generado por los vectores de las formas siguientes

$$\text{(I)}\quad \begin{array}{l}(\lambda x_1+\mu x_2, y)-\lambda(x_1,y)-\mu(x_2,y)\\ (x,\lambda y_1+\mu y_2)-\lambda(x,y_1)-\mu(x,y_2)\end{array} \qquad \lambda,\mu\in K,\ x_1,x_2,x\in E,\ y_1,y_2,y\in F. \ (*)$$

Consideremos el espacio vectorial cociente $T=\dfrac{\mathcal{C}(E\times F)}{\mathcal{N}(E,F)}$

Definimos una aplicación $\otimes$ de $E\times F$ en T de la forma

$$\otimes : E\times F \longrightarrow \frac{\mathcal{C}(E\times F)}{\mathcal{N}(E,F)} = T$$

$$(x,y) \longmapsto x\otimes y = 1\cdot(x,y)+\mathcal{N}(E,F) = (x,y)+\mathcal{N}(E,F).$$

Se trata de ver que $\otimes$ es un producto tensorial.

- $\otimes$ es bilineal: $\otimes(\lambda x_1+\mu x_2, y) = (\lambda x_1+\mu x_2, y)+\mathcal{N}(E,F) =$
$= (\lambda x_1+\mu x_2, y) - [(\lambda x_1+\mu x_2, y) - \lambda(x_1,y) - \mu(x_2,y)] + \mathcal{N}(E,F)$
pues $(\lambda x_1+\mu x_2, y) - \lambda(x_1,y) - \mu(x_2,y) \in \mathcal{N}(E,F)$.
Luego $\otimes(\lambda x_1+\mu x_2, y) = [\lambda(x_1,y)+\mu(x_2,y)] + \mathcal{N}(E,F) =$
$= [\lambda(x_1,y)+\mathcal{N}(E,F)] + [\mu(x_2,y)+\mathcal{N}(E,F)] =$
$= \lambda[(x_1,y)+\mathcal{N}(E,F)] + \mu[(x_2,y)+\mathcal{N}(E,F)] = \lambda\cdot\otimes(x_1,y)+\mu\cdot\otimes(x_2,y)$.
Análogamente se prueba que $\otimes(x,\lambda y_1+\mu y_2) = \lambda\cdot\otimes(x,y_1)+\mu\cdot\otimes(x,y_2)$.

- $\otimes_1)$ $\mathrm{Im}\,\otimes = T = \mathcal{C}(E\times F)/\mathcal{N}(E,F)$:
Siendo $\{1(x,y)\,/\,(x,y)\in E\times F\}$ base de $\mathcal{C}(E\times F)$, $\{1\cdot(x,y)+\mathcal{N}(E,F)\,/\,(x,y)\in E\times F\}$ es sistema de generadores de T.
Pero $\{1\cdot(x,y)+\mathcal{N}(E,F)\,/\,(x,y)\in E\times F\} = \otimes(E\times F)$
Como $\mathrm{Im}\,\otimes = \langle\otimes(E\times F)\rangle$ se tiene que $\mathrm{Im}\,\otimes = \mathcal{C}(E\times F)/\mathcal{N}(E,F)$.

- $\otimes_2)$: Sea H un espacio vectorial y $\varphi: E\times F\to H$ una aplicación bilineal. Se trata de ver que existe una aplicación lineal $\bar{g}$ de T en H tal que $\bar{g}\circ\otimes = \varphi$.
Sabemos que $\{1\cdot(x,y)\,/\,(x,y)\in E\times F\}$ es base de $\mathcal{C}(E\times F)$. Dado $(x,y)\in E\times F$, $\varphi(x,y)\in H$. Existe entonces una única aplicación lineal $g: \mathcal{C}(E\times F)\to H$ tal que $g(1\cdot(x,y)) = \varphi(x,y)$, $\forall (x,y)\in E\times F$.
Definimos entonces

$$\bar{g}: \frac{\mathcal{C}(E\times F)}{\mathcal{N}(E,F)} \longrightarrow H$$
$$z+\mathcal{N}(E,F) \longmapsto g(z)$$

Veamos que $\bar{g}$ está bien definida: Supongamos que $z_1+\mathcal{N}(E,F) = z_2+\mathcal{N}(E,F)$ queremos ver que $g(z_1)=g(z_2)$. Es equivalente a esto probar que si $z_1-z_2\in\mathcal{N}(E,F)$, entonces $g(z_1-z_2)=0$, es decir, basta ver que $\mathcal{N}(E,F)\subset \mathrm{Ker}\,g$. Por definición, $\mathcal{N}(E,F)$ está generado por los vectores de la forma (I); basta ver entonces que la imagen por g de un vector del tipo (I) es cero:
$g[(\lambda x_1+\mu x_2,y) - \lambda(x_1,y) - \mu(x_2,y)] = g(\lambda x_1+\mu x_2,y) - \lambda g(x_1,y) - \mu g(x_2,y) \overset{(*)}{=}$
$= \varphi(\lambda x_1+\mu x_2,y) - \lambda\varphi(x_1,y) - \mu\varphi(x_2,y) = 0$, pues φ es bilineal.
Luego $\bar{g}$ está bien definida.
Que $\bar{g}$ es homomorfismo es trivial.

Veamos que $\bar{g}$ hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} E\times F \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "\varphi"'] & T = \frac{\mathcal{E}(E\times F)}{\mathcal{N}(E,F)} \arrow[dl, "\bar{g}"] \\ H & \end{tikzcd}$$

es decir que $\bar{g}\circ\otimes = \varphi$.

$\forall (x,y)\in E\times F$, $(\bar{g}\circ\otimes)(x,y) = \bar{g}(1(x,y)+\mathcal{N}(E,F)) = g(x,y) = \varphi(x,y)$ c.s.q.d.

<u>DEFINICION</u>: Dados dos espacios vectoriales E y F sobre un cuerpo K definimos el producto tensorial de E y F como el par $(E\otimes F, \otimes)$ donde $E\otimes F$ es un espacio vectorial sobre K y $\otimes : E\times F \to E\otimes F$ un producto tensorial.

* PROPIEDADES DEL PRODUCTO TENSORIAL DE DOS ESPACIOS VECTORIALES.

<u>2.3. Proposición</u>: Sean E y F espacios vectoriales. Entonces $E\otimes F$ y $F\otimes E$ son isomorfos (propiedad conmutativa del producto tensorial).

Demostr.: Consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd} E\times F \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & E\otimes F \arrow[dl, "f"] \\ F\otimes E & \end{tikzcd}$$

Donde $\varphi_1(x,y) = y\otimes x$, $\forall (x,y)\in E\times F$. Trivialmente, φ_1 es bilineal. Luego existe una única aplicación lineal $f: E\otimes F \to F\otimes E$ tal que $f\circ\otimes = \varphi_1$, es decir, tal que $f(x\otimes y) = y\otimes x$, $\forall (x,y)\in E\times F$.

De la misma forma, considerando el diagrama

$$\begin{tikzcd} F\times E \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & F\otimes E \arrow[dl, "g"] \\ E\otimes F & \end{tikzcd}$$

donde $\varphi_2(y,x) = x\otimes y$, $\forall (y,x)\in F\times E$, y existe una única aplicación lineal $g: F\otimes E \to E\otimes F$ tal que $g(y\otimes x) = x\otimes y$, $\forall (y,x)\in F\times E$.

Entonces

$\forall (x,y)\in E\times F$, $(g\circ f)(x\otimes y) = x\otimes y$

y $\forall (y,x)\in F\times E$, $(f\circ g)(y\otimes x) = y\otimes x$.

Luego $g\circ f: E\otimes F \to E\otimes F$ es lineal y coincide con la identidad en $E\otimes F$ en un sistema de generadores de $E\otimes F$.

Luego $g\circ f = id_{E\otimes F}$. Análogamente, $f\circ g = id_{F\otimes E}$.

Luego f es biyectiva. c.s.q.d.

– Hemos definido el producto tensorial como una aplicación bilineal que satisface las propiedades $\otimes_1$) y $\otimes_2$). Esta definición se puede generalizar para aplicaciones multilineales: Sean $E_1, \dots, E_n$ y F espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K. Decimos que una aplicación n-lineal $\otimes : E_1 \times \dots \times E_n \to F$ es un producto tensorial si satisface las dos propiedades siguientes: $\otimes_1$) $\operatorname{Im} \otimes = F$, donde $\operatorname{Im} \otimes$ es el espacio vectorial engendrado por los vectores $\otimes(x_1, \dots, x_n)$ cuando $(x_1, \dots, x_n)$ recorre $E_1 \times \dots \times E_n$; $\otimes_2$) Para cada aplicación n-lineal $\varphi : E_1 \times \dots \times E_n \to H$ existe una aplicación lineal $f : F \to H$ tal que $f \circ \otimes = \varphi$.

Se prueba la existencia y "unicidad" de $E_1 \otimes \dots \otimes E_n$. En el caso $n=3$ se prueba que $E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3) \simeq (E_1 \otimes E_2) \otimes E_3$ (propiedad asociativa del producto tensorial).

2.4. PROPOSICION: Sean E, F y G espacios vectoriales sobre un cuerpo K. Si denotamos por $\mathcal{L}(E \otimes F; G)$ el conjunto de las aplicaciones lineales de $E \otimes F$ en G y por $\mathcal{L}_2(E, F; G)$ el conjunto de las aplicaciones bilineales de $E \times F$ en G tenemos

$$\mathcal{L}(E \otimes F; G) \simeq \mathcal{L}_2(E, F; G).$$

En general, para aplicaciones n-lineales

$$\mathcal{L}(E_1 \otimes \dots \otimes E_n; G) \simeq \mathcal{L}_n(E_1, \dots, E_n; G).$$

Demostración: Haremos la demostración para $n=2$.

Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{L}(E \otimes F; G) &\longrightarrow \mathcal{L}_2(E, F; G) \\ f &\longmapsto \phi(f) = f \circ \otimes \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "f \circ \otimes"'] & E \otimes F \arrow[dl, "f"] \\ G & \end{tikzcd}$$

1) ϕ está bien definida: Veamos que si $f \in \mathcal{L}(E \otimes F; G)$ entonces $f \circ \otimes \in \mathcal{L}_2(E, F; G)$.

$$(f \circ \otimes)(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = f[(\lambda x_1 + \mu x_2) \otimes y] = f[\lambda (x_1 \otimes y) + \mu (x_2 \otimes y)] =$$
$$= \lambda f(x_1 \otimes y) + \mu f(x_2 \otimes y) = \lambda (f \circ \otimes)(x_1, y) + \mu (f \circ \otimes)(x_2, y)$$

Analogamente para la segunda coordenada.

2) ϕ es homomorfismo de espacios vectoriales: trivial

3) ϕ es sobre: Sea $\varphi \in \mathcal{L}_2(E, F; G)$. Entonces existe $f \in \mathcal{L}(E \otimes F; G)$ tal que $f \circ \otimes = \varphi$, es decir, $\exists f \in \mathcal{L}(E \otimes F; G) \,/\, \phi(f) = \varphi$.

4) ϕ es inyectiva: Sean $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E \otimes F; G)$ tal que $f_1 \circ \otimes = f_2 \circ \otimes$.

Entonces $\forall (x,y)\in E\times F$, $f_1(x\otimes y)=f_2(x\otimes y)$, es decir, f_1 y f_2 coinciden sobre un sistema de generadores de $E\otimes F$. Luego $f_1=f_2$. c.s.q.d.

2.5. PROPOSICIÓN: Sea $f\in\mathcal{L}(E\otimes F, G)$ y $\varphi = f\circ\otimes \in \mathcal{L}_2(E,F;G)$. Entonces

a) f es sobre si, y sólo si, φ satisface $\otimes_1)$, es decir, $\operatorname{Im}\varphi = G$.
b) f es inyectiva si, y sólo si, φ satisface $\otimes_2)$.

a) $\Rightarrow$) Sea $f\in\mathcal{L}(E\otimes F, G)$. Se trata de probar que $\operatorname{Im}\varphi = G$ donde $\operatorname{Im}\varphi$ es el subespacio engendrado por los vectores $\varphi(x,y)$ cuando (x,y) recorre $E\times F$.
Siendo f lineal y $\{x\otimes y \,/\, (x,y)\in E\times F\}$ un sistema de generadores de $E\otimes F$ se tiene que $S=\{f(x\otimes y)\,/\,(x,y)\in E\times F\}$ genera a $f(E\otimes F)$. Siendo f sobre, $f(E\otimes F)=G$. (1)
Como $S=\{(f\circ\otimes)(x,y)\,/\,(x,y)\in E\times F\} = \{\varphi(x,y)\,/\,(x,y)\in E\times F\}$ se tiene que el subespacio de G engendrado por S es G por (1).
Es decir, $\operatorname{Im}\varphi = G$.
$\Leftarrow$) Si $\operatorname{Im}\varphi = G$, G está generado por los vectores de la forma $f(x\otimes y)$ cuando $(x,y)\in E\times F$.
Luego dado $g\in G$, $\exists \{\lambda_i\}_{i=1}^n\subset K$ y $\exists\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^n \subset E\times F$ tal que

$$g=\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i\otimes y_i) = f\left[\left(\sum_{i=1}^n(\lambda_i x_i\otimes y_i)\right)\right]$$

Como $\sum_{i=1}^n(\lambda_i x_i\otimes y_i)\in E\otimes F$, queda visto que f es sobre.
b) $\Rightarrow$) Si f es inyectiva, $\operatorname{Im} f\cong E\otimes F$, pues f es lineal.
Puesto que $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Im} f$ (*), $\operatorname{Im}\varphi\simeq E\otimes F$, y este isomorfismo es f^{-1}. Veamos que φ satisface $\otimes_2)$.
Sea H un espacio vectorial y $\psi: E\times F\to H$ bilineal.
Entonces existe $g: E\otimes F\to H$ lineal tal que $g\circ\otimes = \psi$.
Si consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd} E\times F \arrow[rr, "\otimes"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & E\otimes F \\ & \operatorname{Im}\varphi \arrow[ur, "f^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

tenemos que $\otimes = f^{-1}\circ\varphi$.
Luego $(g\circ f^{-1})\circ\varphi = \psi$.

Como $g\circ f^{-1}\in\mathcal{L}(\operatorname{Im}\varphi, H)$, siempre se puede extender a una aplicación lineal $\bar g: G\to H$ y esta aplicación sigue verificando que $\bar g\circ\varphi = \psi$. Luego φ verifica $\otimes_2)$.

$\Leftarrow$] Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} E\times F \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\otimes"'] & G \arrow[dl, "g"] \\ E\otimes F & \end{tikzcd}$$

Como φ satisface $\otimes_2)$, $\exists g: G \to E\otimes F$ lineal tal que $(g\circ\varphi)(x,y) = x\otimes y$.

Pero $\varphi(x,y) = f(x\otimes y)$.

Luego $(g\circ\varphi)(x,y) = x\otimes y \Rightarrow (g\circ f)(x\otimes y) = x\otimes y$.

Como $g\circ f$ es lineal y coincide con la identidad en un sistema de generadores. Luego f es inyectiva. csqd.

2.6. PROPOSICION: Sean $\{E_\alpha\}_\alpha$ y $\{F_\beta\}_\beta$ dos familias de espacios vectoriales. Supongamos que para cada par de índices (α,β) tenemos un producto tensorial $\otimes_\alpha^\beta : E_\alpha \times F_\beta \to E_\alpha \otimes_\alpha^\beta F_\beta$. Sea $E = \bigoplus_\alpha E_\alpha$ y $F = \bigoplus_\beta F_\beta$. Entonces la aplicación

$$\otimes : E \times F \longrightarrow \bigoplus_{\alpha,\beta} (E_\alpha \otimes_\alpha^\beta F_\beta)$$
$$((x_\alpha),(y_\beta)) \longmapsto (x_\alpha \otimes_\alpha^\beta y_\beta)_{\alpha,\beta}$$

es un producto tensorial.

Demostr.: $\otimes_1)$ Veamos que los elementos de la forma $(x_\alpha \otimes_\alpha^\beta y_\beta)_{\alpha,\beta}$ generan $\bigoplus_{\alpha,\beta}(E_\alpha \otimes_\alpha^\beta F_\beta)$.

Si $z \in \bigoplus_{\alpha,\beta}(E_\alpha \otimes_\alpha^\beta F_\beta)$, $z = (z_\alpha^\beta)_{\alpha,\beta}$ con $z_\alpha^\beta \in E_\alpha \otimes_\alpha^\beta F_\beta$.

Siendo $\otimes_\alpha^\beta$ un producto tensorial, $z_\alpha^\beta = \sum_{i\in I_\alpha^\beta} x_\alpha^i \otimes_\alpha^\beta y_\beta^i$ donde I_α^β es un conjunto finito de índices.

Consideremos la aplicación

$$i_{\alpha_1\beta_1} : E_{\alpha_1} \otimes_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{\beta_1} \longrightarrow \bigoplus_{\alpha,\beta}(E_\alpha \otimes_\alpha^\beta F_\beta)$$
$$x_{\alpha_1} \otimes_{\alpha_1}^{\beta_1} y_{\beta_1} \longmapsto (x_\alpha \otimes_\alpha^\beta y_\beta)_{\alpha,\beta}$$

donde $x_\alpha \otimes_\alpha^\beta y_\beta = 0$ si $(\alpha,\beta) \neq (\alpha_1,\beta_1)$.

Podemos escribir entonces

$$z = \sum_{\alpha,\beta} i_{\alpha\beta}(z_\alpha^\beta) = \sum_{\alpha,\beta} i_{\alpha\beta}\Big(\sum_{i\in I_\alpha^\beta} x_\alpha^i \otimes_\alpha^\beta y_\beta^i\Big) =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta}\sum_{i\in I_\alpha^\beta} (x_\alpha^i \otimes_\alpha^\beta y_\beta^i)$$, que es una suma finita pues lo son las sumas en α,β y en i.

Luego z es una suma finita de elementos de la forma $(x_\alpha \otimes_\alpha^\beta y_\beta)$

$\otimes_2$) Sea $\Psi: E\times F \longrightarrow H$ una aplicación bilineal. Consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd} E\times F \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "\Psi"'] & \bigoplus_{\alpha,\beta}(E_\alpha \otimes_\alpha^\beta F_\beta) \\ H & \end{tikzcd} \qquad (\mathrm{I})$$

Ψ induce una aplicación bilineal $\Psi_{\alpha,\beta}$ de $E_\alpha\times F_\beta$ en H

Tenemos entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} E_\alpha \times F_\beta \arrow[r, "\otimes_\alpha^\beta"] \arrow[d, "\Psi_{\alpha,\beta}"'] & E_\alpha \otimes_\alpha^\beta F_\beta \arrow[dl, "g_{\alpha,\beta}"] \\ H & \end{tikzcd}$$

Existe entonces una aplicación lineal $g_{\alpha,\beta}: E_\alpha \otimes_\alpha^\beta F_\beta \longrightarrow H$ tal que $g_{\alpha,\beta}\circ \otimes_\alpha^\beta = \Psi_{\alpha,\beta}$.

Tenemos que $\Psi((x_\alpha),(y_\beta)) = \sum_{\alpha,\beta} \Psi_{\alpha,\beta}(x_\alpha, y_\beta)$. Queremos construir una aplicación lineal $g: \bigoplus_{\alpha,\beta}(E_\alpha \otimes_\alpha^\beta F_\beta) \longrightarrow H$ tal que $g\circ\otimes = \Psi$. Basta definir g para los elementos de un sistema de generadores de $\bigoplus_{\alpha,\beta}(E_\alpha\otimes_\alpha^\beta F_\beta)$. Definimos

$$g\left((x_\alpha \otimes_\alpha^\beta y_\beta)_{\alpha,\beta}\right) = \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha,\beta}(x_\alpha \otimes_\alpha^\beta y_\beta)$$

Fácilmente se comprueba que g es lineal.

Veamos que hace conmutativo el diagrama (I):

$$(g\circ\otimes)((x_\alpha),(y_\beta)) = g\left((x_\alpha)\otimes(y_\beta)\right) = g\left((x_\alpha\otimes_\alpha^\beta y_\beta)_{\alpha,\beta}\right) =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha,\beta}(x_\alpha \otimes_\alpha^\beta y_\beta) = \sum_{\alpha,\beta}\Psi_{\alpha,\beta}(x_\alpha, y_\beta) = \Psi((x_\alpha),(y_\beta)). \text{ csqd.}$$