

3ª PARTE: ALGEBRA MULTILINEAL. FORMA CANONICA DE JORDAN.

TEMA 15: ALGEBRA MULTILINEAL

1. PRODUCTO TENSORIAL

* APLICACIONES BILINEALES: Sean E, F y G espacios vectoriales sobre un cuerpo K . Se dice que una aplicación $\varphi: E \times F \rightarrow G$ es bilineal si

- $\varphi(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda \varphi(x_1, y) + \mu \varphi(x_2, y)$, $\forall x_1, x_2 \in E, \forall y \in F, \forall \lambda, \mu \in K$.
- $\varphi(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda \varphi(x, y_1) + \mu \varphi(x, y_2)$, $\forall x \in E, \forall y_1, y_2 \in F, \forall \lambda, \mu \in K$.

Si $G = K$ se dice que φ es una forma bilineal.

OBSERVACION: La imagen de una aplicación bilineal no es en general un subespacio vectorial, es decir, si $\varphi: E \times F \rightarrow G$ es bilineal el conjunto $H = \{ \varphi(x, y) \mid (x, y) \in E \times F \}$ no es subespacio vectorial de G . Llamaremos $\text{Im } \varphi$ al subespacio vectorial de G engendrado por H .

1.1. PROPOSICION: Si E_1 y F_1 son subespacios respectivos de E y F y $\varphi: E \times F \rightarrow G$ es bilineal, entonces $\varphi|_{E_1 \times F_1}: E_1 \times F_1 \rightarrow G$ es bilineal.

Demostr: Trivial. (*)

1.2. PROPOSICION: Supongamos que $E = \bigoplus_{\alpha} E_{\alpha}$ y $F = \bigoplus_{\beta} F_{\beta}$. Si para cada par de índices (α, β) existe una aplicación bilineal $\varphi_{\alpha\beta}: E_{\alpha} \times F_{\beta} \rightarrow G$, entonces existe una única aplicación bilineal $\varphi: E \times F \rightarrow G$ tal que $\varphi|_{E_{\alpha} \times F_{\beta}} = \varphi_{\alpha\beta}$.

Demostr: Todo elemento $x \in E$ es de la forma $x = \sum_{\alpha} x_{\alpha}$ con $x_{\alpha} \in E_{\alpha}$, siendo esta suma finita. De la misma manera $y = \sum_{\beta} y_{\beta}$.

Definimos entonces

$$\varphi(x, y) = \sum_{\alpha, \beta} \varphi_{\alpha\beta}(x_{\alpha}, y_{\beta})$$

φ , así definida, es bilineal trivialmente, y verifica que $\varphi|_{E_{\alpha} \times F_{\beta}} = \varphi_{\alpha\beta}$, cualquiera que sea (α, β) .

Veamos que es única. Supongamos que $\psi: E \times F \rightarrow G$ es bilineal y verifica que $\psi|_{E_{\alpha} \times F_{\beta}} = \varphi_{\alpha\beta}$; entonces:

$$\psi(x, y) = \psi\left(\sum_{\alpha} x_{\alpha}, \sum_{\beta} y_{\beta}\right) = \sum_{\alpha, \beta} \psi(x_{\alpha}, y_{\beta}) = \sum_{\alpha, \beta} \varphi_{\alpha\beta}(x_{\alpha}, y_{\beta}) = \varphi(x, y).$$

(*) Sean E_1 y F_1 subespacios de E y F , y $\varphi_1: E_1 \times F_1 \rightarrow G$ bilineal. Cabe preguntarse si existe $\varphi: E \times F \rightarrow G$ bilineal que extienda a φ_1 . La respuesta es afirmativa, pero la extensión no es única. Sea E_2 un subespacio suplementario de E_1 en E ($E = E_1 \oplus E_2$), y F_2 el de F_1 en F . Dado $x \in E_2$ y $y \in F_2$

**** PRODUCTO TENSORIAL:** Un producto tensorial es una aplicación bilineal

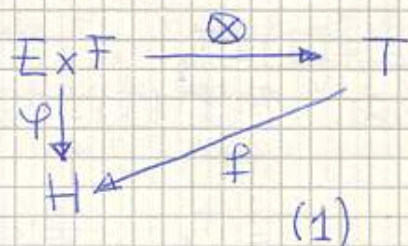
$$\otimes : E \times F \longrightarrow T$$

donde E, F y T son espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K , y que verifica las propiedades:

\otimes_1) $\text{Im } \otimes = T$, es decir, T está generado por $\{x \otimes y \mid (x, y) \in E \times F\}$.

\otimes_2) \otimes satisface la siguiente propiedad universal:

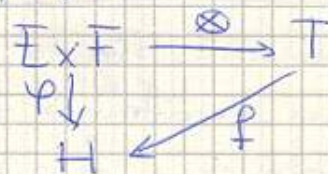
"Si $\varphi : E \times F \rightarrow H$ es bilineal de $E \times F$ en un espacio vectorial H , existe una aplicación lineal $f : T \rightarrow H$



haciendo conmutativo el diagrama (1), es decir, tal que $\varphi = f \circ \otimes$.

1.3. PROPOSICION: Si una aplicación bilineal $\otimes : E \times F \rightarrow T$ satisface \otimes_1) y \otimes_2), entonces satisface la propiedad:

\otimes) Si H es un espacio vectorial y $\varphi : E \times F \rightarrow H$ es bilineal, existe una única aplicación lineal $f : T \rightarrow H$ tal que $\varphi = f \circ \otimes$.



Recíprocamente si \otimes satisface la propiedad \otimes), entonces es un producto tensorial.

Demostr.: \Rightarrow \otimes_2) da la existencia de f . Veamos que es única. Representaremos $\otimes(x, y) = x \otimes y$. Entonces, $f(x \otimes y) = \varphi(x, y)$. Supongamos que $f_1 : T \rightarrow H$ es lineal y hace conmutativo el diagrama (1), es decir, $f_1(x \otimes y) = \varphi(x, y)$.

Luego $f_1(x \otimes y) = f(x \otimes y)$, $\forall (x, y) \in E \times F$.

Puesto que $\{x \otimes y \mid (x, y) \in E \times F\}$ genera a T , por \otimes_1), debe ser $f_1 = f$.

\Leftarrow Trivialmente, \otimes) \Rightarrow \otimes_2). Falta ver que $\text{Im } \otimes = T$.

Sea T_1 el subespacio generado por $\{x \otimes y \mid (x, y) \in E \times F\}$, es decir, $T_1 = \text{Im } \otimes$. Consideremos el diagrama

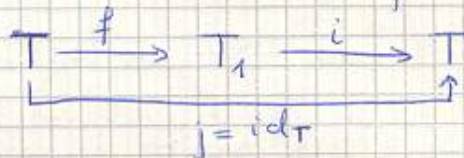


donde $l(x, y) = x \otimes y$, $\epsilon \in l$ es la inclusión de l_1 en l .
Entonces existe una única aplicación lineal $f: T \rightarrow T_1$ tal que $f \circ \otimes = \varphi$.

La aplicación $i \circ \varphi: E \times F \rightarrow T$ es bilineal. Luego, existe una única aplicación lineal $j: T \rightarrow T$ tal que $j \circ \otimes = i \circ \varphi$.

Como $i \circ \varphi = \otimes$, y j es única, necesariamente debe ser $j = \text{id}_T$.
Puesto que los diagramas son conmutativos se tiene que $j = i \circ f$.

Como $f(T) = T_1$ e $i(T_1) = T$



se tiene, $(i \circ f)(T) = T$.

Además $j(T) = T$.

Luego $T = T_1$. c.q.d.

• PROPIEDADES DEL PRODUCTO TENSORIAL:

1.4. PROPOSICIÓN: Sean E, F y \mathbb{F} espacios vectoriales sobre un cuerpo K .

Sea $\{a_1, \dots, a_r\}$ un sistema libre de E y $\{b_1, \dots, b_r\}$ una familia de vectores de F . Si $\sum_{i=1}^r a_i \otimes b_i = 0$, entonces $b_i = 0, i=1, \dots, r$.

Demostr.: Siendo a_1, \dots, a_r linealmente independientes, siempre podemos encontrar r formas lineales f_1, \dots, f_r sobre E (elementos de $E^* = \mathcal{L}(E, K)$) tales que $f_i(a_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ (delta de Kronecker).

Sean g_1, \dots, g_r r formas lineales cualesquiera sobre F . Construimos entonces la siguiente forma bilineal sobre $E \times F$:

$$\begin{aligned} \varphi: E \times F &\longrightarrow K \\ (x, y) &\longmapsto \varphi(x, y) = \sum_{i=1}^r f_i(x) \cdot g_i(y) \quad (*) \end{aligned}$$

Consideremos el diagrama siguiente



En virtud de (\otimes) , existe una única aplicación lineal $h: T \rightarrow K$ tal que $h \circ \otimes = \varphi$.

$$\begin{aligned} \text{Entonces } h\left(\sum_{i=1}^r a_i \otimes b_i\right) &= \sum_{i=1}^r \varphi(a_i, b_i) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r f_j(a_i) \cdot g_j(b_i) = \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \delta_{ji} \cdot g_j(b_i) = \sum_{i=1}^r g_i(b_i) \end{aligned}$$

Puesto que $\sum_{i=1}^r a_i \otimes b_i = 0$ debe ser $\sum_{i=1}^r g_i(b_i) = 0$ y, siendo las g_i

(*) Es trivial que φ es una forma bilineal: $\varphi(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \sum_{i=1}^r f_i(\lambda x_1 + \mu x_2) \cdot g_i(y) = \lambda \sum_{i=1}^r f_i(x_1) \cdot g_i(y) + \mu \sum_{i=1}^r f_i(x_2) \cdot g_i(y)$.

formas lineales arbitrarias sobre F debe ser $b_i = 0, i=1, \dots, r$ csqd.

1.5. COROLARIO: Dados $a \in E$ y $b \in F$ se tiene que $a \otimes b = 0$ si, y solo si, $a=0$ ó $b=0$.

Demostr.: \Rightarrow Si $a \otimes b = 0$, por el teorema anterior debe ser $a=0$ ó $b=0$.

\Leftarrow Si $a=0$, $a \otimes b = \otimes(0, b) = 0$. csqd.

1.6. PROPOSICION: Sea $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ una base de E . Entonces cada vector $v \in T = \text{Im } \otimes$ admite una expresión de la forma $v = \sum_\alpha e_\alpha \otimes b_\alpha$ donde $b_\alpha = 0$ salvo para un número finito de índices. Además b_α está unívocamente determinado por v .

Demostr.: Si $v \in T$, admite una expresión del tipo

$$v = \sum_i x_i \otimes y_i, \quad (x_i, y_i) \in E \times F$$

donde esta suma es finita. Para cada i , $x_i = \sum_\alpha \lambda_{i\alpha} e_\alpha$ donde $\lambda_{i\alpha} = 0$ salvo, quizás, para un número finito de ellos.

$$\begin{aligned} \text{Entonces } v &= \sum_i \left(\sum_\alpha \lambda_{i\alpha} e_\alpha \right) \otimes y_i = \sum_i \sum_\alpha \lambda_{i\alpha} (e_\alpha \otimes y_i) = \\ &= \sum_\alpha \sum_i \lambda_{i\alpha} (e_\alpha \otimes y_i) = \sum_\alpha (e_\alpha \otimes \sum_i \lambda_{i\alpha} y_i) = \sum_\alpha e_\alpha \otimes b_\alpha \end{aligned}$$

donde $b_\alpha = \sum_i \lambda_{i\alpha} y_i$

Si v admite otra expresión del tipo: $v = \sum_\alpha e_\alpha \otimes b'_\alpha$

se tiene que $v - v = 0 = \sum_\alpha e_\alpha \otimes (b_\alpha - b'_\alpha)$ y, según 1.4. Proposición debe ser $b_\alpha - b'_\alpha = 0, \forall \alpha$. csqd.

1.7 PROPOSICION: Todo elemento z de $T = \text{Im } \otimes$ admite una expresión de la forma $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ donde $\{x_i\}_{i=1}^n$ e $\{y_i\}_{i=1}^n$ son sistemas libres de E y F respectivamente.

Demostr.: Sea $z \in T \setminus \{0\}$. Por definición de T , z admite una expresión como suma finita de elementos de la forma $x_i \otimes y_i$ con $x_i \in E$ e $y_i \in F$.

Siempre podremos suponer que $z = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ es una expresión minimal de z como suma de elementos $x_i \otimes y_i$, en el sentido de que otra expresión de z de este tipo tendrá más sumandos. Veamos que entonces $\{x_i\}_{i=1}^n$ e $\{y_i\}_{i=1}^n$ son sistemas libres.

Si $n=1$, $z = x \otimes y$ y, puesto que $z \neq 0$, debe ser $x \neq 0$ e $y \neq 0$ y ya está probado.

Supongamos $n \geq 2$ y que $\{x_i\}_{i=1}^n$ no es libre. Podemos

$$= \sum_{i=1}^{n-1} x_i \otimes y_i + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (x_i \otimes y_n) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i \otimes y_i + \sum_{i=1}^{n-1} x_i \otimes (\lambda_i y_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} (x_i \otimes y_i + x_i \otimes \lambda_i y_n) = \sum_{i=1}^{n-1} [x_i \otimes (y_i + \lambda_i y_n)]$$

lo cual está en contradicción con el carácter minimal de n . Debe ser entonces $\{x_i\}_{i=1}^n$ libre. Análogamente, $\{y_i\}_{i=1}^n$ es libre. c.s.g.d.

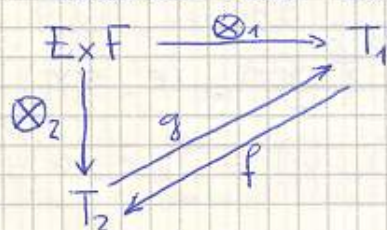
2. Existencia y unicidad del producto tensorial de dos espacios vectoriales.

2.1. TEOREMA: (Unicidad del producto tensorial)

Sean E, F, T_1 y T_2 espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K .

Sean $\otimes_1: E \times F \rightarrow T_1$ y $\otimes_2: E \times F \rightarrow T_2$ aplicaciones bilineales que satisfacen la propiedad universal \otimes (Proposición 1.3). Entonces existe un isomorfismo ϕ entre los espacios vectoriales T_1 y T_2 tal que $\phi(x \otimes_1 y) = x \otimes_2 y$, $\forall (x, y) \in E \times F$.

Demostr.: Consideremos el diagrama



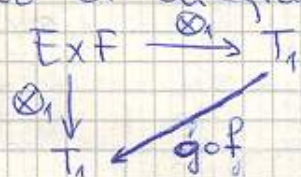
Puesto que \otimes_1 satisface \otimes , existe un único homomorfismo $f: T_1 \rightarrow T_2$ tal que $f \circ \otimes_1 = \otimes_2$.

Puesto que \otimes_2 satisface \otimes , existe un único homomorfismo $g: T_2 \rightarrow T_1$ tal que $g \circ \otimes_2 = \otimes_1$.

Queremos ver que f es biyectiva, con lo cual, haciendo $f = \phi$ quedará probado el teorema. Si tiene que

$$f \circ g \circ \otimes_2 = \otimes_2 \quad \text{y} \quad g \circ f \circ \otimes_1 = \otimes_1$$

Luego $g \circ f$ es una aplicación lineal de T_1 en sí mismo haciendo conmutativo el diagrama



Como \otimes_1 satisface \otimes , existe un único homomorfismo h de T_1 en sí mismo tal que $h \circ \otimes_1 = \otimes_1$. Como la identidad en T_1 satisface esto, debe ser $h = \text{id}_{T_1}$ y $g \circ f = \text{id}_{T_1}$.

Análogamente $f \circ g = \text{id}_{T_2}$.

Por tanto, $f = \phi$ es un isomorfismo de T_1 en T_2 .

Además $\forall (x,y) \in E \times F$, $f(x \otimes_1 y) = (f \circ \otimes_1)(x,y) = \otimes_2(x,y) = x \otimes_2 y$. c.s.g.d

2.2. TEOREMA: Sean E y F espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K . Entonces existe un espacio vectorial T sobre K y una aplicación bilineal $\otimes: E \times F \rightarrow T$ que satisface las condiciones de producto tensorial.

Demostri.: • Dado un conjunto A y el cuerpo K denotamos por $\mathcal{G}(A)$ el conjunto de las aplicaciones de A en K de soporte finito, es decir $\varphi: A \rightarrow K$ es un elemento de $\mathcal{G}(A)$ si $\varphi(x) = 0$ para casi todos los $x \in A$ (salvo, quizás, para un número finito).

Podemos dotar a $\mathcal{G}(A)$ de estructura de espacio vectorial sobre K ; para ello definimos

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x), \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{G}(A), \forall x \in A.$$

$$(\lambda \cdot \varphi)(x) = \lambda \cdot \varphi(x), \quad \forall \lambda \in K, \forall \varphi \in \mathcal{G}(A), \forall x \in A.$$

Se prueba que $(\mathcal{G}(A); K; +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Definimos para cada $x \in A$, $\varphi_x: A \rightarrow K$
 $x \mapsto 1$
 $y \mapsto 0, \text{ si } y \neq x$

Entonces $\mathcal{B} = \{ \varphi_x \mid x \in A \}$ es base de $\mathcal{G}(A)$:

- Sea $\varphi \in \mathcal{G}(A)$. Entonces $\exists \{x_i\}_{i=1}^n \subset A \mid \varphi(x_i) = \alpha_i \neq 0$ y $\varphi(x) = 0$ si $x \notin \{x_i\}_{i=1}^n$. Entonces trivialmente $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_{x_i}$
 - Sea $\{x_i\}_{i=1}^n \subset A$ y supongamos que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_{x_i} = 0$. Veamos que $\lambda_i = 0, \forall i$. Por hipótesis, $(\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_{x_i})(x_j) = 0, \forall x \in A$. En particular $\forall i \in \{1, \dots, n\}, (\sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_{x_j})(x_i) = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$.
- Luego \mathcal{B} es base de $\mathcal{G}(A)$.

• Hagamos ahora la demostración del teorema 2.2. Dados los espacios vectoriales E y F sobre K consideremos el espacio vectorial $\mathcal{G}(E \times F)$.

Dado $(x,y) \in E \times F$ denotaremos por $1 \cdot (x,y) \equiv (x,y)$ la aplicación de $E \times F$ en K que asocia a (x,y) el 1 y a (x',y') el 0 si $(x',y') \neq (x,y)$. Llamaremos $\mathcal{V}(E,F)$ el subespacio vectorial de $\mathcal{G}(E \times F)$ generado por los vectores de las formas siguientes

(I) $(\lambda x_1 + \mu x_2, y) - \lambda(x_1, y) - \mu(x_2, y)$
 $(x, \lambda y_1 + \mu y_2) - \lambda(x, y_1) - \mu(x, y_2)$ $\lambda, \mu \in K, x_1, x_2, x \in E, y_1, y_2, y \in F$ (*)

Consideremos el espacio vectorial cociente $T = \frac{\mathcal{G}(E \times F)}{\mathcal{V}(E,F)}$

Definimos una aplicación \otimes de $E \times F$ en T de la forma

$$\otimes: E \times F \longrightarrow \frac{\mathcal{G}(E \times F)}{\mathcal{N}(E, F)} = T$$

$$(x, y) \longmapsto x \otimes y = 1 \cdot (x, y) + \mathcal{N}(E, F) = (x, y) + \mathcal{N}(E, F)$$

Se trata de ver que \otimes es un producto tensorial.

$$\begin{aligned} - \otimes \text{ es bilineal: } & \otimes(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = (\lambda x_1 + \mu x_2, y) + \mathcal{N}(E, F) = \\ & = (\lambda x_1 + \mu x_2, y) - [(\lambda x_1 + \mu x_2, y) - \lambda(x_1, y) - \mu(x_2, y)] + \mathcal{N}(E, F) \end{aligned}$$

pues $(\lambda x_1 + \mu x_2, y) - \lambda(x_1, y) - \mu(x_2, y) \in \mathcal{N}(E, F)$.

$$\text{Luego } \otimes(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = [\lambda(x_1, y) + \mu(x_2, y)] + \mathcal{N}(E, F) =$$

$$= [\lambda(x_1, y) + \mathcal{N}(E, F)] + [\mu(x_2, y) + \mathcal{N}(E, F)] =$$

$$= \lambda[(x_1, y) + \mathcal{N}(E, F)] + \mu[(x_2, y) + \mathcal{N}(E, F)] = \lambda \cdot \otimes(x_1, y) + \mu \cdot \otimes(x_2, y)$$

Análogamente se prueba que $\otimes(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda \cdot \otimes(x, y_1) + \mu \cdot \otimes(x, y_2)$.

$$- \otimes_1) \text{ Im } \otimes = T = \frac{\mathcal{G}(E \times F)}{\mathcal{N}(E, F)}:$$

Siendo $\{1 \cdot (x, y) / (x, y) \in E \times F\}$ base de $\mathcal{G}(E \times F)$, $\{1 \cdot (x, y) + \mathcal{N}(E, F) / (x, y) \in E \times F\}$ es sistema de generadores de T .

$$\text{Pero } \{1 \cdot (x, y) + \mathcal{N}(E, F) / (x, y) \in E \times F\} = \otimes(E \times F)$$

Como $\text{Im } \otimes = \langle \otimes(E \times F) \rangle$ se tiene que $\text{Im } \otimes = \frac{\mathcal{G}(E \times F)}{\mathcal{N}(E, F)}$.

$$- \otimes_2) : \text{ Sea } H \text{ un espacio vectorial y } \varphi: E \times F \rightarrow H \text{ una aplicación bilineal. Se trata de ver que existe una aplicación lineal } \bar{g} \text{ de } T \text{ en } H \text{ tal que } \bar{g} \circ \otimes = \varphi.$$

Sabemos que $\{1 \cdot (x, y) / (x, y) \in E \times F\}$ es base de $\mathcal{G}(E \times F)$. Dado $(x, y) \in E \times F$, $\varphi(x, y) \in H$. Existe entonces una única aplicación lineal $g: \mathcal{G}(E \times F) \rightarrow H$ tal que $g(1 \cdot (x, y)) = \varphi(x, y)$, $\forall (x, y) \in E \times F$.

Definimos entonces

$$\begin{aligned} \bar{g}: \frac{\mathcal{G}(E \times F)}{\mathcal{N}(E, F)} & \longrightarrow H \\ z + \mathcal{N}(E, F) & \longmapsto g(z) \end{aligned}$$

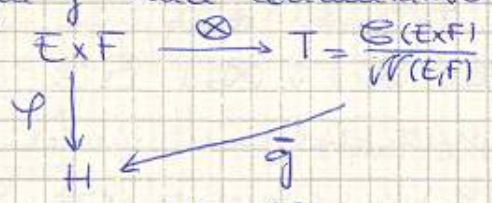
Veamos que \bar{g} está bien definida: Supongamos que $z_1 + \mathcal{N}(E, F) = z_2 + \mathcal{N}(E, F)$ queramos ver que $g(z_1) = g(z_2)$. Es equivalente a esto probar que si $z_1 - z_2 \in \mathcal{N}(E, F)$, entonces $g(z_1 - z_2) = 0$, es decir, basta ver que $\mathcal{N}(E, F) \subseteq \text{Ker } g$. Por definición, $\mathcal{N}(E, F)$ está generado por los vectores de la forma (I); basta ver entonces que la imagen por g de un vector del tipo (I) es cero:

$$\begin{aligned} g[(\lambda x_1 + \mu x_2, y) - \lambda(x_1, y) - \mu(x_2, y)] &= g(\lambda x_1 + \mu x_2, y) - \lambda g(x_1, y) - \mu g(x_2, y) \stackrel{(*)}{=} \\ &= \varphi(\lambda x_1 + \mu x_2, y) - \lambda \varphi(x_1, y) - \mu \varphi(x_2, y) = 0, \text{ pues } \varphi \text{ es bilineal.} \end{aligned}$$

Luego \bar{g} está bien definida.

Que \bar{g} es homomorfismo es trivial.

Veamos que \bar{g} hace conmutativo el diagrama



es decir que $\bar{g} \circ \otimes = \varphi$

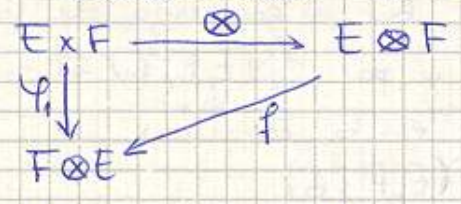
$$\forall (x, y) \in E \times F, (\bar{g} \circ \otimes)(x, y) = \bar{g}(1(x, y) + \mathcal{V}(E, F)) = g(x, y) = \varphi(x, y) \text{ c.s.q.d.}$$

DEFINICION: Dados dos espacios vectoriales E y F sobre un cuerpo K definimos el producto tensorial de E y F como el par $(E \otimes F, \otimes)$ donde $E \otimes F$ es un espacio vectorial sobre K y $\otimes: E \times F \rightarrow E \otimes F$ un producto tensorial.

* PROPIEDADES DEL PRODUCTO TENSORIAL DE DOS ESPACIOS VECTORIALES.

2.3. Proposición: Sean E y F espacios vectoriales. Entonces $E \otimes F$ y $F \otimes E$ son isomorfos (propiedad conmutativa del producto tensorial).

Demostr: Consideremos el diagrama



Donde $\varphi_1(x, y) = y \otimes x, \forall (x, y) \in E \times F$. Trivialmente, φ_1 es bilineal.

Luego existe una única aplicación lineal $f: E \otimes F \rightarrow F \otimes E$ tal que $f \circ \otimes = \varphi_1$, es decir, tal que $f(x \otimes y) = y \otimes x, \forall (x, y) \in E \times F$.

De la misma forma, considerando el diagrama



donde $\varphi_2(y, x) = x \otimes y, \forall (y, x) \in F \times E$, y existe una única aplicación lineal $g: F \otimes E \rightarrow E \otimes F$ tal que $g(y \otimes x) = x \otimes y, \forall (y, x) \in F \times E$.
Entonces

$$\begin{aligned}
 &\forall (x, y) \in E \times F, (g \circ f)(x \otimes y) = x \otimes y \\
 &\forall (y, x) \in F \times E, (f \circ g)(y \otimes x) = y \otimes x.
 \end{aligned}$$

Luego $g \circ f: E \otimes F \rightarrow E \otimes F$ es lineal y coincide con la identidad en $E \otimes F$ en un sistema de generadores de $E \otimes F$.

Luego $g \circ f = id_{E \otimes F}$. Análogamente, $f \circ g = id_{F \otimes E}$.

Luego f es biyectiva. c.s.q.d.

- Hemos definido el producto tensorial como una aplicación bilineal que satisface las propiedades \otimes_1) y \otimes_2). Esta definición se puede generalizar para aplicaciones multilineales: Sean E_1, \dots, E_n y F espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K . Decimos que una aplicación n -lineal $\otimes: E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ es un producto tensorial si satisface las dos propiedades siguientes: \otimes_1) $\text{Im } \otimes = F$, donde $\text{Im } \otimes$ es el espacio vectorial engendrado por los vectores $\otimes(x_1, \dots, x_n)$ cuando (x_1, \dots, x_n) recorre $E_1 \times \dots \times E_n$; \otimes_2) Para cada aplicación n -lineal $\varphi: E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow H$ existe una aplicación lineal $f: F \rightarrow H$ tal que $f \circ \otimes = \varphi$.

Se prueba la existencia y "unicidad" de $E_1 \otimes \dots \otimes E_n$. En el caso $n=3$ se prueba que $E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3) \cong (E_1 \otimes E_2) \otimes E_3$ (propiedad asociativa del producto tensorial).

2.4. PROPOSICIÓN: Sean E, F y G espacios vectoriales sobre un cuerpo K . Si denotamos por $\mathcal{L}(E \otimes F; G)$ el conjunto de las aplicaciones lineales de $E \otimes F$ en G y por $\mathcal{L}_2(E, F; G)$ el conjunto de las aplicaciones bilineales de $E \times F$ en G tenemos

$$\mathcal{L}(E \otimes F; G) \cong \mathcal{L}_2(E, F; G).$$

En general, para aplicaciones n -lineales

$$\mathcal{L}(E_1 \otimes \dots \otimes E_n; G) \cong \mathcal{L}_n(E_1, \dots, E_n; G).$$

Demostración: Haremos la demostración para $n=2$.

Definimos la aplicación

$$\phi: \mathcal{L}(E \otimes F; G) \longrightarrow \mathcal{L}_2(E, F; G)$$

$$f \longmapsto \phi(f) = f \circ \otimes$$

$$\begin{array}{ccc} E \times F & \xrightarrow{\otimes} & E \otimes F \\ f \circ \otimes \downarrow & & \swarrow f \\ G & & \end{array}$$

1) ϕ está bien definida: Veamos que si $f \in \mathcal{L}(E \otimes F; G)$ entonces $f \circ \otimes \in \mathcal{L}_2(E, F; G)$.

$$(f \circ \otimes)(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = f[(\lambda x_1 + \mu x_2) \otimes y] = f[\lambda(x_1 \otimes y) + \mu(x_2 \otimes y)] =$$

$$= \lambda f(x_1 \otimes y) + \mu f(x_2 \otimes y) = \lambda (f \circ \otimes)(x_1, y) + \mu (f \circ \otimes)(x_2, y)$$

Análogamente para la segunda coordenada.

2) ϕ es homomorfismo de espacios vectoriales: trivial

3) ϕ es sobre: Sea $\varphi \in \mathcal{L}_2(E, F; G)$. Entonces existe $f \in \mathcal{L}(E \otimes F; G)$ tal que $f \circ \otimes = \varphi$, es decir, $\exists f \in \mathcal{L}(E \otimes F; G) / \phi(f) = \varphi$.

4) ϕ es inyectiva: Sean $f, f' \in \mathcal{L}(E \otimes F; G)$ tal que $f \circ \otimes = f' \circ \otimes$.

Entonces $\forall (x,y) \in E \times F$, $f_1(x \otimes y) = f_2(x \otimes y)$, es decir, f_1 y f_2 coinciden sobre un sistema de generadores de $E \otimes F$. Luego $f_1 = f_2$. c.q.d.

2.5. PROPOSICION: Sea $f \in \mathcal{L}(E \otimes F, G)$ y $\varphi = f \circ \otimes \in \mathcal{L}_2(E, F; G)$. Entonces

- a) f es sobre si, y solo si, φ satisface \otimes_1 , es decir, $\text{Im } \varphi = G$.
- b) f es inyectiva si, y solo si, φ satisface \otimes_2 .

a) \Rightarrow Sea $f \in \mathcal{L}(E \otimes F, G)$. Se trata de probar que $\text{Im } \varphi = G$ donde $\text{Im } \varphi$ es el subespacio engendrado por los vectores $\varphi(x,y)$ cuando (x,y) recorre $E \times F$.

Siendo f lineal y $\{x \otimes y / (x,y) \in E \times F\}$ un sistema de generadores de $E \otimes F$ se tiene que $S = \{f(x \otimes y) / (x,y) \in E \times F\}$ genera a $f(E \otimes F)$. Siendo f sobre, $f(E \otimes F) = G$. (1)

Como $S = \{(f \circ \otimes)(x,y) / (x,y) \in E \times F\} = \{\varphi(x,y) / (x,y) \in E \times F\}$ se tiene que el subespacio de G engendrado por S es G por (1). Es decir, $\text{Im } \varphi = G$.

\Leftarrow Si $\text{Im } \varphi = G$, G está generado por los vectores de la forma $f(x \otimes y)$ cuando $(x,y) \in E \times F$.

Luego dado $g \in G$, $\exists \{\lambda_i\}_{i=1}^n \in K$ y $\exists \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n \in E \times F$ tal que $g = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i \otimes y_i) = f\left[\sum_{i=1}^n (\lambda_i x_i \otimes y_i)\right]$

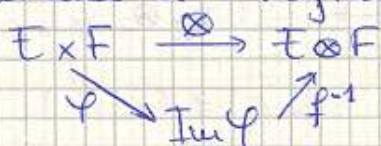
Como $\sum_{i=1}^n (\lambda_i x_i \otimes y_i) \in E \otimes F$, queda visto que f es sobre.

b) \Rightarrow Si f es inyectiva, $\text{Im } f \cong E \otimes F$, pues f es lineal. Puesto que $\text{Im } \varphi = \text{Im } f$ (*), $\text{Im } \varphi \cong E \otimes F$, y este isomorfismo es f^{-1} . Veamos que φ satisface \otimes_2 .

Sea H un espacio vectorial y $\psi: E \times F \rightarrow H$ bilineal.

Entonces existe $g: E \otimes F \rightarrow H$ lineal tal que $g \circ \otimes = \psi$

Si consideramos el diagrama



tenemos que $\otimes = f^{-1} \circ \varphi$

Luego $(g \circ f^{-1}) \circ \varphi = \psi$.

Como $g \circ f^{-1} \in \mathcal{L}(\text{Im } \varphi, H)$, siempre se puede extender a una aplicación lineal $\bar{g}: G \rightarrow H$ y esta aplicación verifica $\bar{g} \circ \varphi = \psi$. Luego φ verifica \otimes_2 .

⇐ Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E \times F & \xrightarrow{\varphi} & G \\ \otimes \downarrow & \searrow g & \\ E \otimes F & & \end{array}$$

Como φ satisface \otimes_2 , $\exists g: G \rightarrow E \otimes F$ lineal tal que

$$(g \circ \varphi)(x, y) = x \otimes y.$$

$$\text{Pero } \varphi(x, y) = f(x \otimes y).$$

$$\text{Luego } (g \circ \varphi)(x, y) = x \otimes y \Rightarrow (g \circ f)(x \otimes y) = x \otimes y.$$

Como $g \circ f$ es lineal y coincide con la identidad en un sistema de generadores. Luego f es inyectiva. c.q.d.

2.6. PROPOSICION: Sean $\{E_\alpha\}$ y $\{F_\beta\}$ dos familias de espacios vectoriales.

Supongamos que para cada par de índices (α, β) tenemos un producto

tensorial $\otimes_{\alpha, \beta}^p: E_\alpha \times F_\beta \rightarrow E_\alpha \otimes_{\alpha, \beta}^p F_\beta$. Sea $E = \bigoplus_{\alpha} E_\alpha$ y

$F = \bigoplus_{\beta} F_\beta$. Entonces la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \otimes: E \times F & \longrightarrow & \bigoplus_{\alpha, \beta} (E_\alpha \otimes_{\alpha, \beta}^p F_\beta) \\ ((x_\alpha), (y_\beta)) & \longmapsto & (x_\alpha \otimes_{\alpha, \beta}^p y_\beta)_{\alpha, \beta} \end{array}$$

es un producto tensorial.

Demostr.: \otimes_1) Veamos que los elementos de la forma $(x_\alpha \otimes_{\alpha, \beta}^p y_\beta)_{\alpha, \beta}$ generan $\bigoplus_{\alpha, \beta} (E_\alpha \otimes_{\alpha, \beta}^p F_\beta)$.

Si $z \in \bigoplus_{\alpha, \beta} (E_\alpha \otimes_{\alpha, \beta}^p F_\beta)$, $z = (z_\alpha^\beta)_{\alpha, \beta}$ con $z_\alpha^\beta \in E_\alpha \otimes_{\alpha, \beta}^p F_\beta$.

Siendo $\otimes_{\alpha, \beta}^p$ un producto tensorial, $z_\alpha^\beta = \sum_{i \in I_\alpha^\beta} x_\alpha^i \otimes_{\alpha, \beta}^p y_\beta^i$ donde I_α^β es un conjunto finito de índices.

Consideremos la aplicación

$$\begin{array}{ccc} i_{\alpha, \beta}: E_{\alpha_1} \otimes_{\alpha_1, \beta_1}^{p_1} F_{\beta_1} & \longrightarrow & \bigoplus_{\alpha, \beta} (E_\alpha \otimes_{\alpha, \beta}^p F_\beta) \\ x_{\alpha_1} \otimes_{\alpha_1, \beta_1}^{p_1} y_{\beta_1} & \longmapsto & (x_{\alpha_1} \otimes_{\alpha_1, \beta_1}^{p_1} y_{\beta_1})_{\alpha_1, \beta_1} \end{array}$$

donde $x_\alpha \otimes_{\alpha, \beta}^p y_\beta = 0$ si $(\alpha, \beta) \neq (\alpha_1, \beta_1)$.

Podemos escribir entonces

$$z = \sum_{\alpha, \beta} i_{\alpha, \beta}(z_\alpha^\beta) = \sum_{\alpha, \beta} i_{\alpha, \beta} \left(\sum_{i \in I_\alpha^\beta} x_\alpha^i \otimes_{\alpha, \beta}^p y_\beta^i \right) =$$

$$= \sum_{\alpha, \beta} \sum_{i \in I_\alpha^\beta} (x_\alpha^i \otimes_{\alpha, \beta}^p y_\beta^i), \text{ que es una suma finita}$$

las sumas en α, β y en i .

Luego z es una suma finita de elementos de la forma $(x_\alpha \otimes_{\alpha, \beta}^p y_\beta)_{\alpha, \beta}$.

⊗₂) Sea $\Psi: E \times F \rightarrow H$ una aplicación bilineal. Consideramos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E \times F & \xrightarrow{\otimes} & \bigoplus_{\alpha, \beta} (E_{\alpha} \otimes_{\alpha}^{\beta} F_{\beta}) \\ \Psi \downarrow & & \\ H & & \end{array} \quad (I)$$

Ψ induce una aplicación bilineal $\Psi_{\alpha, \beta}$ de $E_{\alpha} \times F_{\beta}$ en H . Tenemos entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_{\alpha} \times F_{\beta} & \xrightarrow{\otimes_{\alpha}^{\beta}} & E_{\alpha} \otimes_{\alpha}^{\beta} F_{\beta} \\ \Psi_{\alpha, \beta} \downarrow & \searrow g_{\alpha, \beta} & \\ H & & \end{array}$$

Existe entonces una aplicación lineal $g_{\alpha, \beta}: E_{\alpha} \otimes_{\alpha}^{\beta} F_{\beta} \rightarrow H$ tal que $g_{\alpha, \beta} \circ \otimes_{\alpha}^{\beta} = \Psi_{\alpha, \beta}$.

Tenemos que $\Psi((x_{\alpha}), (y_{\beta})) = \sum_{\alpha, \beta} \Psi_{\alpha, \beta}(x_{\alpha}, y_{\beta})$. Queremos construir

una aplicación lineal $g: \bigoplus_{\alpha, \beta} (E_{\alpha} \otimes_{\alpha}^{\beta} F_{\beta}) \rightarrow H$ tal que

$g \circ \otimes = \Psi$. Basta definir g para los elementos de un sistema de generadores de $\bigoplus_{\alpha, \beta} (E_{\alpha} \otimes_{\alpha}^{\beta} F_{\beta})$. Definimos

$$g((x_{\alpha} \otimes_{\alpha}^{\beta} y_{\beta})_{\alpha, \beta}) = \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha, \beta}(x_{\alpha} \otimes_{\alpha}^{\beta} y_{\beta})$$

Fácilmente se comprueba que g es lineal.

Veamos que hace conmutativo el diagrama (I):

$$\begin{aligned} (g \circ \otimes)((x_{\alpha}), (y_{\beta})) &= g((x_{\alpha}) \otimes (y_{\beta})) = g((x_{\alpha} \otimes_{\alpha}^{\beta} y_{\beta})_{\alpha, \beta}) = \\ &= \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha, \beta}(x_{\alpha} \otimes_{\alpha}^{\beta} y_{\beta}) = \sum_{\alpha, \beta} \Psi_{\alpha, \beta}(x_{\alpha}, y_{\beta}) = \Psi((x_{\alpha}), (y_{\beta})). \quad \text{csqd.} \end{aligned}$$