TEMA 1º: ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE 1er GRADO Y 1er ORDEN.

1. DEFINICIONES

DEFINICION: Una ecuación diferencial es una ecuación en la que intervienen funciones incógnitas y sus derivadas.

Cuando la función incógnita que aparece en la ecuación diferencial depende de una sola variable se llama ecuación diferencial ordinaria y cuando depende de dos o más variables se llama ecuación diferencial parcial o en derivadas parciales.

DEFINICION: El orden de una ecuación diferencial es el mayor entero positivo n tal que la n-sima derivada aparece en la ecuación.

DEFINICION: Sea una función $\phi: C \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$. Una ecuación diferencial de primer orden es una relación del tipo

$$\phi(x, y, y') = 0$$

Se entiende por solución de una ecuación diferencial ordinaria de 1er orden cualquier función $f: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en I tal que

$$\phi(x, f(x), f'(x)) = 0 \quad , \forall x \in I$$

En esta definición queda implícito que la terna $(x, f(x), f'(x)) \in C$, $\forall x \in I$.

Ejemplo: Vamos a resolver la E.D. (ecuación diferencial)

$$x + yy' = 0$$

Consideremos la función

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\longmapsto \phi(x,y,z) = x + yz \end{aligned}$$

Como $\dfrac{d}{dx}(x^2+y^2) = 2(x+yy')$ se tiene que

$x + yy' = 0$ si, y solo si, $x^2+y^2 = c$ (constante).

Entonces las soluciones de la E.D. son de la forma

$$\begin{aligned} f_c: I_c \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \pm\sqrt{c-x^2} \end{aligned} \qquad I_c =]-\sqrt{c}, \sqrt{c}[$$

cuyas gráficas son circunferencias de centro el origen y radio $\sqrt{C}$.

Aunque ϕ está definida en $\mathbb{R}^3$, las soluciones de la E.D. no tienen porque estar definidas en todo $\mathbb{R}$.

2. TIPOS DE E.D. DE 1^{er} ORDEN.

1^{er} tipo: $M(x,y) + N(x,y)\,y' = 0$ donde M y N son funciones definidas en una parte de $\mathbb{R}^2$ y valoradas en $\mathbb{R}$. A este tipo de E.D. se le llama casi-lineal.

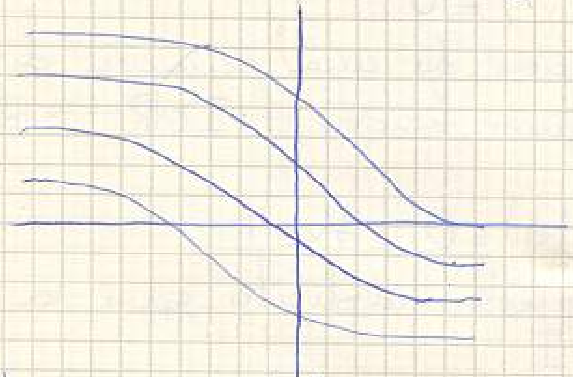
Ejemplos: ① $y' = g(x)$, o bien $g(x) - y' = 0$.

En este caso $M(x,y) = g(x)$ y $N(x,y) = -1$.

Si g es integrable, una solución de la E.D. es

$$G_c(x) = \int g(x)\,dx + C.$$

Todas las soluciones forman una familia de curvas que dependen de un solo parámetro C. Se le llama familia de curvas uniparamétricas. Encontrada una solución se hallan las demás mediante traslaciones verticales.



En todas las E.D. del tipo $y' = g(x)$ se verifica que por cada punto (x_0, y_0) pasa una solución:

Las soluciones son de la forma $f(x) = G(x) + C$ donde $G(x) = \int g(x)$

Luego la solución que pasa por (x_0, y_0) es $f(x) = G(x) + y_0 - G(x_0)$ pues si $y_0 = f(x_0)$ debe ser $y_0 = G(x_0) + C$, de donde $C = y_0 - G(x_0)$.

Una E.D. ordinaria de 1^{er} orden en forma normal es $y' = F(x,y)$.

② $y' = g(y)$ donde y es función de x. Por ejemplo $y' = y$.

Entonces, supuesto $y \neq 0$, $\frac{y'}{y} = 1$ e integrando $\operatorname{Ln}|y| = x + C$

Luego $|y| = e^{x+C}$, de donde $y = \pm K e^x$ $(K = e^C)$

La función nula también es solución de la E.D. $y' = y$.

2º tipo: (Ecuaciones diferenciales lineales de 1^er orden)

Son E.D. de la forma $a(x)\,y' + b(x)\,y + c(x) = 0$. Supondremos que a, b y c son funciones continuas en un intervalo I de $\mathbb{R}$.
Si $c = 0$ la E.D. se llama homogénea.
Se llaman E.D. lineales porque la aplicación
$$L : y \in C^1(I) \longmapsto a(x)\,y' + b(x)\,y \in \mathcal{C}(I)$$
es lineal.

– E.D. Lineales homogéneas: La ecuacion diferencial es $a(x)\,y' + b(x)\,y = 0$.
Supongamos que $a(x) \neq 0$, $\forall x \in I$. Entonces haciendo $p(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$ podemos escribir la E.D. en su forma normal de la siguiente forma:
$$y' = -p(x)\cdot y = F(x,y). \qquad (I)$$
Se resuelve de la siguiente forma:
$$y' = -p(x)\cdot y \Rightarrow \frac{y'}{y} = -p(x) \Rightarrow \ln|y| = -\int p(x) + C$$
de donde $|y| = e^{C} e^{-\int p(x)}$ o tambien $y = K e^{-P(x)}$
donde $P(x)$ es una primitiva de $p(x)$.
$P(x)$ existe pues $p(x)$ es continua; además $P(x)$ es derivable.
Probaremos ahora que
$$(y \text{ es solución de la E.D.}) \Longleftrightarrow (y\,e^{P(x)} = K \text{ (cte)})$$
Ya hemos probado la condición necesaria.
Por otra parte, si $y\,e^{P(x)} = K$, derivando tenemos $y'e^{P(x)} + y\,p(x)e^{P(x)} = 0$ o bien, $e^{P(x)}(y' + y\,p(x)) = 0$ lo cual equivale a que $y' + y\,p(x) = 0$ pues $e^{P(x)} \neq 0$; luego y es solución de la E.D. (I).
Por tanto, todas las soluciones de la E.D. (I) son de la forma $y = K e^{-P(x)}$, y recíprocamente.

– E.D. lineales no homogéneas: Supondremos aquí tambien $a(x) \neq 0$ $\forall x \in I$ y llamaremos $p(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$ y $q(x) = \frac{c(x)}{a(x)}$

2.1. PROPOSICION: Si $f(x)$ es solución de la E.D. $y' + p(x)\,y + q(x) = 0$ entonces la solución general (*) es $f(x) + K e^{-P(x)}$ (1)

Demostr.: Como f es solución se tiene que
$$f'(x) + p(x)\,f(x) + q(x) = 0$$
Además $[Ke^{-P(x)}]' + p(x)\,Ke^{-P(x)} = 0$, por ser $Ke^{-P(x)}$ solución de $y' + y\,p(x) = 0$
Sumando tenemos que $[f(x) + Ke^{-P(x)}]' + p(x)[f(x) + Ke^{-P(x)}] + q(x) = 0$. c.q.d.

(*) Entendemos por solución general una expresión del tipo (1) tal que ...

• METODO DE VARIACION DE CONTANTE para encontrar una solución de la E.D. no homogénea de la forma $K(x) \cdot e^{-P(x)}$.

Consideremos

$$f(x) = \left(-\int q(x) e^{P(x)} dx\right) \cdot e^{-P(x)}$$

Veamos que es solución de la E.D.

$$f'(x) + p(x) \cdot f(x) + q(x) = -q(x) e^{P(x)} e^{-P(x)} + p(x) e^{-P(x)} \int q(x) e^{P(x)} dx +$$
$$+ p(x) \left(-\int q(x) e^{P(x)} dx\right) e^{-P(x)} + q(x) = 0.$$

La solución general será entonces

$$y_g(x) = \left[-\int q(x) e^{P(x)} dx\right] e^{-P(x)} + C e^{-P(x)} \qquad (\mathrm{II})$$

• PROBLEMA DEL VALOR INICIAL (O DE CAUCHY) para E.D. lineales no homogéneas.

Sea $F: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ donde D es un dominio (abierto y conexo) de $\mathbb{R}^2$. Consideremos la E.D. $y' = F(x, y)$. El problema del valor inicial consiste en encontrar una solución de la E.D. que pase por (x_0, y_0). El siguiente teorema resuelve el problema del valor inicial para E.D. lineales no homogéneas.

2.2. TEOREMA: Dada la E.D. $y' + p(x) \cdot y + q(x) = 0$ donde $p(x)$ y $q(x)$ son continuas en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Dado un punto $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ existe una única solución de la E.D. que pasa por (x_0, y_0).

Demostr: Denotaremos por $K(x)$ a $-\int q(x) e^{P(x)} dx$.

La solución que pasa por (x_0, y_0) se obtiene de (II) del siguiente modo:

$$y_0 = K(x_0) e^{-P(x_0)} + C e^{-P(x_0)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C = \left(y_0 - K(x_0) e^{-P(x_0)}\right) e^{P(x_0)} = y_0 e^{P(x_0)} - K(x_0)$$

Sustituyendo en (II) este valor de C obtenemos la única solución del problema de Cauchy para E.D. lineales no homogéneas. c.q.d.

OBSERVACION: La solución también está definida en I; basta tener en cuenta que la primitiva de una función integrable definida en un intervalo está definida, al menos, en ese intervalo.

Estudiaremos a continuación, más a fondo, las E.D. casi lineales.

1er tipo: E.D. casi lineales: $M(x,y) + N(x,y)\, y' = 0$.

DEFINICION: Dada una función u definida en un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ y valorada en $\mathbb{R}$, definimos una "CURVA DE NIVEL" como el conjunto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, u(x,y) = C \text{ (cte)}\}$$

Veamos ahora una versión para dos variables del teorema de la función implícita.

2.3. TEOREMA: (de la función implícita)

Sea $u: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $n \geq 1$ en el dominio D. Sea $(x_0, y_0) \in D$ tal que $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Entonces, para cualquier constante C verificando $u(x_0,y_0) - \varepsilon < C < u(x_0,y_0) + \varepsilon$ para un cierto $\varepsilon > 0$, existe una única función $f(x, C) \in \mathcal{C}^n]a,b[$, con $x_0 \in]a,b[$ y se verifica que $[y_0 = f(x_0, C),\ u(x,y) = C]$ o lo que es equivalente $y = f(x,C), \forall x \in]a,b[$

2.4. TEOREMA: Sea $u: D \subset \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$ una función de clase 1 en el dominio D. Sea $(x_0, y_0) \in D$ tal que $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$. Existe entonces una única solución f de la ecuación diferencial $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} y' = 0$ que pasa por el punto (x_0, y_0). Además el grafo de f está contenido en el conjunto $\{(x,y) \,/\, u(x,y) = u(x_0,y_0)\}$

Demostr.: En virtud del teorema 2.3, existe una única $f:]a,b[\subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $y_0 = f(x_0)$ y $u(x, f(x)) = u(x_0, y_0)$, $\forall x \in]a,b[$. La función f es de clase 1.

Como u es de clase 1, y por la regla de la cadena se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0$$

que significa que f es solución de la E.D. Además $u(x, f(x)) = u(x_0, y_0)$ que prueba que el grafo de f está contenido en la curva de nivel

$\{(x,y) \,/\, u(x,y) = u(x_0,y_0)\}$. csqd

OBSERVACION: Siempre que tengamos una E.D. casi lineal de la forma $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} y' = 0$, los grafos de las soluciones están contenidos en los grafos de las curvas de nivel, pero no necesariamente la curvas de nivel son soluciones de la E.D.

DEFINICION: Dada la E.D. $M(x,y) + N(x,y)\, y' = 0$ decimos que una función $u(x,y)$ es una integral de la E.D. si se verifica que para cualquier solución f se tiene que $u(x, f(x)) = C$ (cte).

Ejemplos: ① Dada la E.D. $x + y y' = 0$ (o lo que es equivalente $2x + 2yy' = 0$) una integral es $u(x,y) = x^2 + y^2$.

② Sea la E.D. $y y' = x$. Integrando tenemos $\frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2} x^2 = C$ o bien $y^2 - x^2 = C$. Luego $u(x,y) = y^2 - x^2$ es una integral de la E.D. Fuera de las "curvas integrales" no hay soluciones.

DEFINICION: (Punto crítico)

Sea $u: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase 1 en el dominio D. Decimos que $(x_0, y_0) \in D$ es un punto crítico si $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$

Es evidente que en los puntos críticos no se puede aplicar el teorema de la función implícita.

DEFINICION: Decimos que la ecuación diferencial $M(x,y) + N(x,y)\, y' = 0$ tiene un punto crítico en (x_0,y_0) si $M(x_0,y_0) = N(x_0,y_0) = 0$.

• ECUACION DIFERENCIAL CON VARIABLES SEPARADAS: Son E.D. casi lineales de la forma $y' = g(x)\cdot h(y)$. Vamos a tratar de encontrar una integral para esta E.D. Supongamos que g y h tienen las propiedades necesarias para poder efectuar las operaciones siguientes:

$$y' = g(x)\cdot h(y) \Rightarrow -g(x) + \frac{1}{h(y)}\cdot y' = 0 \Rightarrow -g(x)\,dx + \frac{dy}{h(y)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\int g(x)\,dx + \int \frac{dy}{h(y)} = C$$

Luego $u(x,y) = -\int g(x)dx + \int \frac{dy}{h(y)}$ es una integral para la E.D. propuesta. Basta para probar esto demostrar que si f es solución entonces $u(x, f(x)) = C$ (cte).

Conocida la curva integral se pueden hallar las soluciones.

EJEMPLO: Una aplicación de las E.D. con variables separadas es el cálculo de la trayectoria ortogonal a una familia de curvas: Decimos que una curva es trayectoria ortogonal a una familia de curvas dada si cada curva de la familia "corta a la trayectoria ortogonal según un ángulo recto".

Consideremos por ejemplo la familia de elipses $x^2 + m y^2 = C$. Esta ecuación es una integral de la ecuación diferencial $x + m y y' = 0$. La pendiente de la familia de elipses es, por tanto, $y' = -\frac{x}{my}$. La trayectoria ortogonal será entonces tal que su pendiente sea $y' = \frac{my}{x}$. Luego la trayectoria ortogonal debe satisfacer esta E.D.:

$$y' = \frac{my}{x} \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{m}{x} \Rightarrow \operatorname{Ln}|y| = \operatorname{Ln}|x|^m + \operatorname{Ln} K \Rightarrow y = \pm K|x|^m$$

Se demuestra que la trayectoria ortogonal coincide con la línea de máxima variación de la pendiente. Se prueba además el siguiente teorema: " Sea $u: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u \in C^1(D)$ y sea $(x_0,y_0) \in D$ tal que $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$. Sabemos que existe una única función f de clase 1 en $]a,b[$ para $x_0 \in]a,b[$, tal que $u(x, f(x)) = $ cte $\forall x \in]a,b[$ e $y_0 = f(x_0)$, por teorema de la función implícita. Sea $B = \{(x, f(x)) / x \in]a,b[\}$ el grafo de f. Entonces: ① El vector gradiente de u, $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ es perpendicular a f en cada punto de B. ② La derivada direccional de u es máxima en la dirección del vector gradiente."

* ECUACION DIFERENCIAL DE BERNOUILLI:

Es una ecuación diferencial del tipo $y' + p(x)\,y = q(x)\,y^n$, $n \neq 1, 0$.
Esta E.D. se transforma en una E.D. lineal mediante un cambio de variables. Supongamos que p y q son continuas en un intervalo $[a,b]$. Hagamos el cambio $u = y^{1-n}$. Entonces $y = u\,y^n$.
Además $u' = (1-n)\,y^{-n}\,y'$, y por tanto, $y' = \frac{u'\,y^n}{1-n}$.

Luego $\frac{u' y^n}{1-n} + p(x)\,u\,y^n = q(x)\,y^n$

Si consideramos las regiones del plano en que $y^n \neq 0$ tenemos

$$\frac{1}{1-n}\,u' + p(x)\,u = q(x)$$

que es una E.D. lineal.

Otra forma de resolver esta E.D. consiste en tratar de encontrar una solución de la forma $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ donde u y v son funciones a determinar.

Tenemos que $y' = uv' + u'v$

Luego $u'v + uv' + puv = q\,u^n v^n \Rightarrow$

$\Rightarrow u'v + u\,(v' + pv) = q\,u^n v^n$

Calcularemos v haciendo $v' + pv = 0$

Entonces $u'v = q\,u^n v^n \Rightarrow \frac{u'}{u^n} = q\,v^{n-1}$ y basta integrar para calcular u. Ejercicio: Resolver $y' + \frac{1}{x}\,y = y^2\,\frac{\ln x}{x}$

* ECUACION DIFERENCIAL DE RICATTI:

Es una E.D. de la forma $y' = p(x) + q(x)\,y + r(x)\,y^2$.
Esta E.D. no se puede resolver por ninguno de los métodos utilizados anteriormente (se dice que no se puede resolver por cuadratura).
Sí se puede resolver si conocemos alguna solución. Supongamos que $y_1(x)$ es una solución de la E.D.

Hagamos entonces el cambio $y = y_1 + \frac{1}{u}$. Se tendrá que $y' = y_1' - \frac{u'}{u^2}$.

Entonces $y_1' - \frac{u'}{u^2} = p(x) + q(x)\left(y_1 + \frac{1}{u}\right) + r(x)\left(y_1^2 + 2\,\frac{y_1}{u} + \frac{1}{u^2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{u'}{u^2} = \left(p(x) + q(x)\,y_1 + r(x)\,y_1^2 - y_1'\right) + q(x)\,\frac{1}{u} + 2r(x)\,\frac{y_1}{u} + r(x)\,\frac{1}{u^2} \Rightarrow$

... y_1 es solución de la E.D.

Entonces $-u' = q(x)u + 2r(x)y_1 u + r(x)$
o también $u' = [-q(x) - 2r(x)y_1]u - r(x)$
que es una E.D. lineal.

Si conocemos dos soluciones y_1 e y_2 de la E.D. de Ricatti podemos hacer el cambio $u = \dfrac{y-y_1}{y-y_2}$ y transformamos la E.D. de Ricatti en una ecuación diferencial homogénea.

Si conocemos tres soluciones y_1, y_2 e y_3 una integral de la E.D. de Ricatti es $u = \dfrac{y-y_2}{y-y_1} \cdot \dfrac{y_3-y_1}{y_3-y_2}$

* ECUACIONES DIFERENCIALES DEL TIPO $y' = \dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$, $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$, $i=1,2$.

Si (x_0, y_0) es el punto de corte de las rectas $a_1x+b_1y+c_1=0$ y $a_2x+b_2y+c_2=0$, hacemos el cambio

$$\left.\begin{aligned} X &= x - x_0 \\ Y &= y - y_0 \end{aligned}\right\}$$

Entonces $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dY}{dX}$. La E.D. se transforma en

$$Y' = \frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}$$

que es una E.D. homogénea y basta hacer el cambio $u = \dfrac{Y}{X}$. (*)

3. INTEGRALES DE LINEA.

Antes de hablar de diferenciales exactas y factores integrantes definiremos lo que es una integral de línea.

DEFINICION: (Curva rectificable)

Sea $\alpha: [c,d] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una curva o camino en $\mathbb{R}^n$ y $C = \{\alpha(t) \in \mathbb{R}^n / t \in [c,d]\}$ la gráfica de α. Dada una partición $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ de $[c,d]$ consideremos $\sum_{k=1}^{n} \|\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})\|$. Diremos que α es una curva rectificable si $\sup_{\{t_0,\dots,t_n\} \in P[c,d]} \sum_{k=1}^{n} \|\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})\| < +\infty$. A este número real se le llama ~~es~~ la longitud de la curva.

Si α es continua en $[c,d]$ se dice que α es un camino continuo.
Si α es diferenciable en $[c,d]$ la curva se llama regular.
Si existe una partición $\{t_0, t_1, \dots, t_n\} \in P[c,d]$ tal que α es continua en $[c,d]$ y derivable en cada subintervalo $]t_{k-1}, t_k[$, decimos que

(*) Una E.D $y' = F(x,y)$ se dice homogénea de grado n si se cumple que $F(tx, ty) = t^n F(x,y)$, $\forall (x,y)$. Una E.D. de este tipo se reduce a una E.D. con variables separadas haciendo el cambio $y = ux$.

α es una curva regular a trozos.

DEFINICION: (Integral de línea)

Sea $f: S\subset\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función definida en un abierto S de $\mathbb{R}^n$, y sea $\alpha: [c,d]\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ una curva rectificable tal que $\alpha([c,d]) \subset S$. Para cada partición $P=\{t_0,\dots,t_n\}$ de $[c,d]$ definimos

$$S(P,f,\alpha) = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha(t))\cdot(\alpha(t_k)-\alpha(t_{k-1}))$$

Decimos que f es integrable a lo largo de la curva α si existe un número real A tal que

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists P_\varepsilon \in \mathcal{P}([c,d]) / P \succ P_\varepsilon \Rightarrow |S(P,f,\alpha)-A|<\varepsilon$$

Se demuestra que si A existe es único. A este número A se le denota por

$$A=\int_C f\cdot d\alpha = \int_a^b f\cdot d\alpha \quad ,\ a=\alpha(c),\ b=\alpha(d)$$

donde C es la gráfica de α.

NOTAS: - En la notación $\int_a^b f\cdot d\alpha$ debe tenerse en cuenta que la integral depende de la gráfica C que une a y b.

- Si el camino es cerrado, es decir, $\alpha(c)=\alpha(d)$ se escribe a veces

$$A=\oint f\cdot d\alpha.$$

Damos sin demostración el siguiente teorema:

3.1. TEOREMA: Sea $f: S$ abto $\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ y $\alpha: [c,d]\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ una curva regular tal que $\alpha([c,d])\subset S$. Si f es acotada y continua en $\alpha([c,d])$ existe la integral de línea $\int_C f\cdot d\alpha$ y coincide con $\int_c^d f(\alpha(t))\cdot\alpha'(t)\,dt$ (*)

Notación: Si $f: S\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ y $\alpha:[c,d]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ verifican las hipótesis del teorema anterior y hacemos $f=(f_1,\dots,f_n)$ y $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ podemos utilizar la notación

$$\int_C f\cdot d\alpha = \sum_{k=1}^{n}\int_C f_k(\alpha(t))\alpha_k'(t)\,dt = \int (f_1 d\alpha_1 + \dots + f_n d\alpha_n).$$

En el caso $n=2$ utilizaremos también la notación siguiente: si $f=(M(x,y),N(x,y))$ y $\alpha(t)=(x(t),y(t))$ entonces

$$\int_C f\, d\alpha = \int (M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy)$$

* PROPIEDADES:

① Si $\alpha:[c,d]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ es regular a trozos y $f_1, f_2: S\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ verifican

(*) Obsérvese que $f(\alpha(t))\cdot\alpha'(t)$ es un producto escalar.

las hipótesis del teorema 3.1. entonces

$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\int_C (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)\, d\alpha = \lambda_1 \int_C f_1\, d\alpha + \lambda_2 \int_C f_2\, d\alpha$.

② Sea $\alpha : [c,d] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ un camino regular a trozos y C la gráfica de α. Sea $a \in]c,d[$; consideremos las funciones

$$\alpha_1 : [c,a] \to \mathbb{R}^n \qquad \alpha_2 : [a,d] \to \mathbb{R}^n$$
$$t \mapsto \alpha_1(t) = \alpha(t) \qquad t \mapsto \alpha_2(t) = \alpha(t)$$

y sean C_1 y C_2 las gráficas de α_1 y α_2. Entonces dada una función $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $\alpha([c,d]) \subset S$ y f es acotada en $\alpha([c,d])$ se verifica que

$$\int_C f \cdot d\alpha = \int_{C_1} f\, d\alpha_1 + \int_{C_2} f \cdot d\alpha_2$$

③ Sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ un camino regular a trozos y $u : [c,d] \to [a,b]$ una aplicación supraγectiva, derivable en $]c,d[$ y con derivada no nula en ningún punto. Entonces el camino $\beta : [c,d] \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \beta(t) = \alpha(u(t))$ es equivalente a α (tienen la misma gráfica C en $\mathbb{R}^n$), y se verifica que, dada $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$\int_C f \cdot d\alpha = \pm \int_C f \cdot d\beta$$

Se tendrá el signo + si u tiene derivada positiva, y el signo − si u tiene derivada negativa.

Demostr.: $\int_C f\, d\beta = \int_c^d f[\beta(t)] \cdot \beta'(t)\, dt = \int_c^d f[\alpha(u(t))] \cdot \alpha'(u(t)) \cdot u'(t)\, dt$

Haciendo $v = u(t)$, $dv = u'(t) \cdot dt$ y se tiene que

$$\int_C f\, d\beta = \int_{u(c)}^{u(d)} f[\alpha(v)] \cdot \alpha'(v)\, dv = \pm \int_C f \cdot d\alpha$$

***FUNCIONES CONTINUAS PARA LAS CUALES SU INTEGRAL DE LINEA NO DEPENDE DEL CAMINO.**

Veremos en este apartado cuales son las funciones continuas para las que la integral de línea es independiente del camino que une dos puntos a y b.

3.2. TEOREMA Sea S un dominio de $\mathbb{R}^n$ y $\varphi : S \to \mathbb{R}$ una función de clase 1 en S. Sea $\alpha : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ un camino regular a trozos y $\alpha(c) = a$, $\alpha(d) = b$. Entonces se verifica que

$$\int_a^b \nabla \varphi \cdot d\alpha = \varphi(b) - \varphi(a) \qquad (*)$$

(*) Con $\nabla \varphi$ denotamos el gradiante de φ que es "la matriz de las derivadas parciales de φ" (Ver ANALISIS II, pg 42). Como vamos la integral de línea no depende del

Demostr.: Por teorema 3.1, $\int_a^b \nabla\varphi \cdot d\alpha = \int_c^d \nabla\varphi(\alpha(t))\cdot\alpha'(t)\,dt$

Consideremos la función $g: t\in[c,d]\subset\mathbb{R} \longmapsto g(t)=\varphi(\alpha(t))\in\mathbb{R}$

Entonces $g'(t)=\nabla\varphi(\alpha(t))\cdot\alpha'(t)$.

g' es continua, pues $\nabla\varphi$, α y α' lo son. Luego, siendo g una funcion real de variable real, $\int_a^b \nabla\varphi\cdot d\alpha = \int_c^d g'(t)dt = g(d)-g(c) = \varphi(\alpha(d))-\varphi(\alpha(c)) = \varphi(b)-\varphi(a)$ ∎

OBSERVACIONES: ① Para las funciones que son el gradiente de una determinada función φ de clase 1, la integral de línea no depende del camino.

② Si la curva es cerrada $(\alpha(d)=\alpha(c))$ se tiene que $\oint \nabla\varphi\cdot d\alpha = 0$.

3.3. TEOREMA: Sea S un dominio de $\mathbb{R}^n$ y $f: S\longrightarrow\mathbb{R}^n$ una función continua en S. Supongamos que la integral de línea de f es independiente del camino en S. Sea α un camino cualquiera. Consideremos la función

$$\varphi: x\in S \longmapsto \int_a^x f\cdot d\alpha$$

Entonces $\forall x\in S$, $\nabla\varphi(x)=f(x)$.

Demostr.: Se trata de probar que las componentes de $\nabla\varphi$ coinciden con las de f, es decir, que $D_k\varphi(x)=f_k(x)$, $\forall x\in S$, $k=1,\dots,n$.

Dado $x\in S$ (abto), $\exists B(x,r)\subset S$. Entonces cualquiera que sea $y\in S$ con $\|y\|=1$ se verifica que $x+ty\in B(x,r)\subset S$, si $0<|t|<r$.

Consideremos la expresión

$$\frac{\varphi(x+ty)-\varphi(x)}{t} = \frac{\int_a^{x+ty} f\,d\alpha - \int_a^x f\,d\alpha}{t} = \frac{\int_x^{x+ty} f\cdot d\alpha}{t}$$

Sea α el segmento que une x con $x+ty$:

$$\alpha: h\in[0,1]\longmapsto \alpha(h)=x+hty$$

Su derivada es: $\alpha'(h)=ty$, y se verifica que $\alpha(0)=x$, $\alpha(1)=x+ty$

Entonces $\dfrac{\varphi(x+ty)-\varphi(x)}{t} = \dfrac{1}{t}\int_0^1 f(\alpha(h))\cdot\alpha'(h)\,dh =$

$$=\frac{1}{t}\int_0^1 f(x+hty)\,ty\,dh = \int_0^1 f(x+hty)y\,dh$$

Luego dado $k\in\{1,\dots,n\}$, si hacemos $e_k=(0,\dots,\overset{k}{0},1,0,\dots,0)$, se tiene que

$$\frac{\varphi(x+te_k)-\varphi(x)}{t} = \int_0^1 f(x+hte_k)\cdot e_k\,dh = \int_0^1 f_k(x+hte_k)\,dh$$

Sea $u=h\cdot t$; entonces $du=t\,dh$. Luego:

$$\frac{\qquad}{t} = \frac{1}{t}\int_0 f_k(x+ue_k)\,du$$

Si definimos $g(u) = \int_0^t f_k(x+ue_k)\,du$, $u\in(-r,r)$, tenemos que g es derivable (pues f_k es continua y $u\mapsto x+ue_k$ también.

Luego $\dfrac{\varphi(x+te_k)-\varphi(x)}{t} = \dfrac{1}{t}\left(g(t)-g(0)\right)$

Entonces $D_k\varphi(x) = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\varphi(x+te_k)-\varphi(x)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{g(t)-g(0)}{t} = g'(0) = f_k(x).$

3.4. TEOREMA: Sea S un dominio de $\mathbb{R}^n$ y $f: S\to\mathbb{R}^n$ una función continua en S. Son equivalentes las proposiciones siguientes:

i) f es independiente del camino en S, en el sentido de que la integral de línea no varía con el camino tomado.

ii) f es el gradiente de una cierta función $\varphi: S\to\mathbb{R}$

iii) La integral de línea de f a lo largo de un camino cerrado en S es nula.

Demostr.: Ya están probadas las implicaciones i) $\Rightarrow$ ii) y ii) $\Rightarrow$ iii).

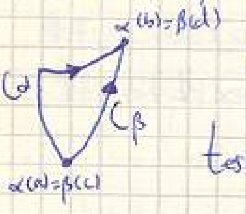
iii) $\Rightarrow$ i) | Sean $\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ y $\beta:[c,d]\to\mathbb{R}^n$ caminos regulares a trozos tales que $\alpha(a)=\beta(c)$ y $\alpha(b)=\beta(d)$, es decir, tales que las gráficas C_α y C_β tengan los mismos extremos.

Se trata de probar que $\int_{C_\alpha} f\cdot d\alpha = \int_{C_\beta} f\cdot d\beta$.

Consideremos la curva

$$\gamma(t) = \begin{cases} =\alpha(t), & a\le t\le b \\ =\beta(b+d-t), & b\le t\le d-c+b \end{cases}$$

Es trivial que γ es regular a trozos, pues α y β lo son y, además, $\alpha(b)=\beta(b+d-b)=\beta(d)$. Además γ es cerrado, pues $\gamma(a)=\gamma(d-c+b)$.



Además $\int_C f\cdot d\gamma = \int_{C_\alpha} f\cdot d\alpha - \int_{C_\beta} f\cdot d\beta$ (*) y, como $\int_C f\cdot d\gamma = 0$, por hipótesis, debe ser $\int_{C_\alpha} f\cdot d\alpha = +\int_{C_\beta} f\,d\beta$. c.s.q.d.

3.5. TEOREMA: Sea S un dominio de $\mathbb{R}^n$ y $f: S\to\mathbb{R}^n$ de clase 1 en S, $f=(f_1,\dots,f_n)$. Entonces, si f es un gradiente en S de una función $\varphi: S\to\mathbb{R}$ se verifica que $D_i f_j(x) = D_j f_i(x)$, $\forall i,j\in\{1,\dots,n\}$, $\forall x\in S$.

(*) El signo menos en $-\int_{C_\beta} f\cdot d\beta$, es porque γ recorre C_α en el mismo sentido que α y recorre C_β en distinto sentido que β.

Demostr.: Si $f=\nabla\varphi$ entonces $f_j=D_j\varphi$ y $f_i=D_i\varphi$, para cualesquiera $i,j\in\{1,\dots,n\}$. Siendo f_i y f_j de clase 1 se tiene que

$$D_i f_j = D_i(D_j\varphi) \quad \text{y} \quad D_j f_i = D_j(D_i\varphi).$$

Como $D_i f_j$ y $D_j f_i$ son continuas, φ es de clase 2 en S.

Entonces $D_i(D_j\varphi)=D_j(D_i\varphi)$ (ver ANALISIS II, TEMA 6º, aptdo 4.) ■

OBSERVACION: El teorema anterior da una condición necesaria para que f sea un gradiente; sin embargo, la condición no es suficiente: Ejemplo: Sea $f(x,y)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$, $(x,y)\in S=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.
Se verifica trivialmente que $D_1f_2(x,y)=D_2f_1(x,y)$. Sin embargo, f no es gradiente de ninguna función $\varphi: S\to\mathbb{R}$, pues la integral a lo largo de la circunferencia unidad no es cero:

$\alpha(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t)$, $t\in[0,2\pi]$ es la circunferencia unidad C.

$$\int_C f\,d\alpha=\int_0^{2\pi}f(\alpha(t))\cdot\alpha'(t)\,dt=\int_0^{2\pi}(-\operatorname{sen} t,\cos t)\cdot(-\operatorname{sen} t,\cos t)\,dt=$$
$$=\int_0^{2\pi}(\operatorname{sen}^2 t+\cos^2 t)\,dt=2\pi\neq 0.$$

Definicion: Sea $S\subset\mathbb{R}^2$ abierto y conexo (dominio). Se dice que S es simplemente conexo si para cualquier curva de Jordan (una función $\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ inyectiva y cerrada se llama una curva de Jordan) regular a trozos en S el interior de la curva está contenido en S.

3.5. Teorema: "Sea $f: S\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, S simplemente conexo, y f de clase 1 en S.
Entonces una condicion necesaria y suficiente para que f sea gradiente de una cierta función $\varphi: S\to\mathbb{R}$ es que $\frac{\partial f_1}{\partial x_2}=\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$".

Por tanto en el ejemplo anterior f no es un gradiente porque $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ no es simplemente conexo.

4. ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS Y FACTORES INTEGRANTES.

Consideremos la E.D. casi lineal $M(x,y)+N(x,y)y'=0$ donde M y N son funciones reales definidas en un dominio D de $\mathbb{R}^2$. Esta E.D. define la función $f=(M,N): D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$.

DEFINICION: (E.D. EXACTA).

Decimos que la E.D. $M(x,y)+N(x,y)y'=0$ es exacta si $f=(M,N)$ es gradiente de una cierta función $u: D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

Si $M(x,y)+N(x,y)y'=0$ es exacta, entonces
$$(M,N)=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Luego la E.D. se convierte en $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}y'=0$.

Luego $u: D \to \mathbb{R}^2$ es una integral para la E.D. y, para cada punto $(x_0, y_0) \in D$ existe una única solución f contenida en la curva de nivel $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / u(x,y) = u(x_0, y_0)\}$.

En virtud de los teoremas probados en el apartado 3 se tiene:

4.1. TEOREMA: La E.D. anterior es exacta en D si, y solo si, la integral de línea de la función $f = (M,N)$ es independiente del camino en D, o lo que es equivalente, si la integral de línea de f a lo largo de cualquier camino cerrado es cero.

4.2. TEOREMA: a) Una condición necesaria para que la E.D sea exacta en D es que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ (suponemos M y N de clase 1 en D).

b) Si D es simplemente conexo la condición anterior es necesaria y suficiente.

* FACTORES INTEGRANTES:

No todas las E.D. casi lineales son exactas. Dentro de este tipo de E.D. hay algunas que son "casi exactas" en el sentido de que podemos encontrar una función $\mu: D \to \mathbb{R}$ continua con $\mu(x,y) \neq 0$, $\forall (x,y) \in D$, y tal que la ecuación diferencial

$$(\mu M) + (\mu N) y' = 0 \quad \text{es exacta.}$$

Si existe una función μ verificando lo anterior se dice que es un factor integrante.

4.3. PROPOSICION: Si u es una integral de la E.D $\mu M + \mu N y' = 0$ entonces u es una integral de la E.D. $M + Ny' = 0$.

Demostr.: Toda solución f de la E.D. $M+Ny'=0$ es solución de la E.D. $\mu(M+Ny')=0$. Entonces, como u es una integral de $\mu M + \mu N y' = 0$ se tiene que $u(x, f(x)) = cte$, para cualquier solución f de $\mu M + \mu N y' = 0$. En particular, cualquiera que sea f solución de $M+Ny'=0$ se tiene $u(x,f(x)) = cte$, que prueba que u es una integral de $M+Ny'=0$. c.s.q.d.

En lo que sigue suponemos que las funciones μ, M y N están definidas en $\mathbb{R}^2$ o en un dominio simplemente conexo de $\mathbb{R}^2$. Suponemos que M y N son continuas y que μ es un factor integrante de la E.D. $M + N \cdot y' = 0$. Entonces la E.D $\mu M + \mu N y' = 0$ es exacta, lo

que equivale a decir que $\frac{\partial}{\partial y}(\mu M)=\frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$ (Teorema 4.2).
Si denotamos por $\mu_y=\frac{\partial}{\partial y}\mu$, $M_y=\frac{\partial}{\partial y}M, \dots$ se tiene

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M)=\mu_y M+\mu M_y \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)=\mu_x N+\mu N_x$$

Entonces $\mu_y M+\mu M_y=\mu_x N+\mu N_x$, que es la E.D en derivadas parciales, que no sabemos aun resolver.

Podemos, sin embargo, calcular algunos factores integrantes de la E.D. que dependan solo de x, o solo de y, ó de x^2+y^2.

Si μ es un factor integrante que depende solo de x se tiene que $\mu_y=0$ y $\mu_x=\mu'$. Luego:

$$\mu M_y=\mu' N+\mu N_x \implies \frac{\mu'}{\mu}=\frac{M_y-N_x}{N}.$$

Como $\frac{\mu'}{\mu}$ depende solo de x, $\frac{M_y-N_x}{N}$ debe depender solo de x, es decir, existe un factor integrante dependiente de x si y solo si $\frac{M_y-N_x}{N}$ es una función de x.

De la misma forma se calculan factores integrantes que dependan solo de y. Tambien se pueden buscar factores integrantes dependientes de x^2+y^2.

El interés de buscar más factores integrantes queda justificado en el teorema 4.4.

DEFINICION: Decimos que dos factores integrantes μ, ν de la E.D $M+Ny'=0$, $\mu,\nu\in C^1(\mathbb{R}^2)$, son esencialmente distintos si

$$\begin{vmatrix} \mu_x & \mu_y \\ \nu_x & \nu_y \end{vmatrix} \neq 0 \text{, en cada punto de } \mathbb{R}^2.$$

4.4 TEOREMA: Si $\mu,\nu\in C^1(\mathbb{R})$ son factores integrantes esencialmente distintos de la E.D. $M+Ny'=0$, $M,N\in C^1$ entonces $\frac{\mu}{\nu}(x,y)$ es una integral de dicha E.D.

Demostr.: Sea $h=\frac{\mu}{\nu}$. Se trata de probar que cualquiera que sea la solución $y=f(x)$ de la E.D. se verifica que $h(x,f(x))=C$, es decir, que $\frac{\mu(x,f(x))}{\nu(x,f(x))}=C$, o tambien que $\frac{\partial}{\partial x}(h(x,f(x)))=0$, o lo que es lo mismo, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)y'=0 \iff$

$$\iff \frac{\mu_x\nu-\mu\nu_x}{\nu^2}+\frac{\mu_y\nu-\mu\nu_y}{\nu^2}y'=0.$$

Siendo μ y ν factores integrantes se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N) \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial y}(\nu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\nu N) \qquad (I)$$

Bastaría probar que existe una función F no nula en ningun punto tal que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu}{\nu}\right) = \frac{\mu_x \nu - \mu \nu_x}{\nu^2} = F \cdot M \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\nu}\right) = \frac{\mu_y \nu - \mu \nu_y}{\nu^2} = F \cdot N.$$

De (I) se deduce

$$\begin{cases} \mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x & (II) \\ \nu_y M + \nu \cdot M_y = \nu_x N + \nu N_x & (III) \end{cases}$$

Multiplicando (II) por ν y (III) por $-\mu$ y sumando se tiene

$$(\mu_y \nu - \mu \nu_y) M = (\nu \mu_x - \mu \nu_x) N \qquad (IV)$$

Supuesto que $\mu_y \nu - \mu \nu_y \neq 0$ y $\mu_x \nu - \mu \nu_x \neq 0$ (*) tenemos que

$$\frac{M}{N} = \frac{\nu \mu_x - \mu \nu_x}{\mu_y \nu - \mu \nu_y}$$

y, por tanto, $M = K(\nu \mu_x - \mu \nu_x)$ y $N = K(\mu_y \nu - \mu \nu_y)$

Luego $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu}{\nu}\right) = \frac{K}{\nu^2} M$ y $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\nu}\right) = \frac{K}{\nu^2} N$

Por tanto, $\frac{K}{\nu^2}(M + N y') = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu}{\nu}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\nu}\right) y' = 0.$

Luego $\frac{\mu}{\nu}$ es una integral de la E.D. csqd.

5. OTROS TIPOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES.

I. E.D. del tipo $y = \varphi(y')$:

Para resolver este tipo de E.D. introducimos un parámetro p de modo que $\frac{dy}{dx} = p$. Las soluciones vendran dadas en forma paramétrica $\begin{cases} x = x(p) \\ y = y(p) \end{cases}$

Como $y = \varphi(y')$ se tiene que $y = \varphi(p)$.

En virtud de la regla de la cadena

$$\frac{dy(p)}{dp} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx(p)}{dp}. \quad \text{Por tanto } \varphi'(p) = p \cdot \frac{dx(p)}{dp}$$

(*) Si $\mu_y \nu - \mu \nu_y = 0$, debe ser $\mu_x \nu - \mu \nu_x = 0$ (pues $M, N \neq 0$). Entonces $\nu \mu_x = \mu \nu_x$, $\nu \mu_y = \mu \nu_y$

Luego $\frac{dx(p)}{dp} = \frac{\varphi'(p)}{p}$ y por tanto $x(p) = \int \frac{\varphi'(p)}{p} dp + C$.

Luego las soluciones de esta E.D son de la forma

$$\begin{cases} x(p) = \int \frac{\varphi'(p)}{p} dp + C \\ y(p) = \varphi(p). \end{cases}$$

Ejemplo: $y = ay'^2 + by'^3$.

Haciendo $\frac{dy}{dx} = p$ se tiene que $y = ap^2 + bp^3$.

Entonces $\frac{dy}{dp} = 2ap + 3bp^2$

Por la regla de la cadena, $\frac{dy}{dp} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dp} = p \frac{dx}{dp}$

Luego $\frac{dx}{dp} = \frac{1}{p}(2ap + 3bp^2) = 2a + 3bp$.

Por tanto, la solución es

$$\begin{cases} x(p) = 2ap + 3/2\, bp^2 + C \\ y(p) = ap^2 + bp^3. \end{cases}$$

II. E.D implícitas de la forma $f(y, y') = 0$

Si conseguimos encontrar un parámetro t de manera que

$$y = \varphi(t) \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \psi(t)$$

entonces tendremos $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$

y por tanto $\varphi'(t) = \psi(t) \frac{dx}{dt}$

y las soluciones dadas en forma paramétrica serán

$$\begin{cases} x(t) = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} + C \\ y(t) = \varphi(t). \end{cases}$$

Ejemplo: $y^{2/3} + y'^{2/3} = 1$.

Hacemos $y = \operatorname{sen}^3 t$, y $\frac{dy}{dx} = \cos^3 t$.

Entonces $x(t) = \int \frac{3\operatorname{sen}^2 t \cos t}{\cos^3 t} dt = 3\int tg^2 t + C = 3\int (1 + tg^2 t)dt - 3\int dt + C =$

$= 3(tg\, t - t) + C$

Luego $\begin{cases} x(t) = 3(tg\, t - t) + C \\ y(t) = \operatorname{sen}^3 t. \end{cases}$

III. E.D. del tipo $x = \varphi(y')$.

Si hacemos $y' = \frac{dy}{dx} = p$ tenemos $x = \varphi(p)$.

Entonces, como $\frac{dy}{dp} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dp}$ se tiene

$\frac{dy}{dp} = p \cdot \varphi'(p)$ y por tanto, $y(p) = \int p\, \varphi'(p)\, dp + C$.

Las soluciones son
$$\begin{cases} x(p) = \varphi(p) \\ y(p) = \int p\, \varphi'(p)\, dp + C. \end{cases}$$

Puede ocurrir que encontremos un parámetro t tal que
$$x = \varphi(t) \quad e \quad y' = \psi(t)$$

Entonces $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \psi(t) \cdot \varphi'(t)$

y las soluciones serían
$$\begin{cases} x(t) = \varphi(t) \\ y(t) = \int \psi(t) \cdot \varphi'(t)\, dt + C \end{cases}$$

IV. E.D. de Lagrange:

Es una E.D del tipo
$$y = x\,\varphi(y') + \psi(y')$$

Hacemos $y' = \frac{dy}{dx} = p$. Luego $y = x\,\varphi(p) + \psi(p)$.

Entonces $\frac{dy}{dp} = x\,\varphi'(p) + \frac{dx}{dp} \cdot \varphi(p) + \psi'(p)$

Por otra parte $\frac{dy}{dp} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dp} = p \cdot \frac{dx}{dp}$

Luego $p\,\frac{dx}{dp} = x\,\varphi'(p) + \frac{dx}{dp}\,\varphi(p) + \psi'(p)$

y por tanto, $(p - \varphi(p))\,\frac{dx}{dp} = x\,\varphi'(p) + \psi'(p)$ (suponemos $p \neq \varphi(p)$).

y esta es una E.D. lineal que ya sabemos resolver y nos da x en función del parámetro p.

Si $p = \varphi(p)$ la E.D. queda en la forma
$$y = x y' + \psi(y')$$
que es una E.D. del tipo de Clairaut

V. E.D. de Clairaut:

Es una E.D. del tipo $y = xy' + \psi(y')$.

Es claro que si hacemos $y' = C$ son soluciones las rectas $y = Cx + D$ donde $D = \psi(C)$.

Veamos si hay alguna solución más.

Con las notaciones de IV, si $p = \varphi(p)$ se tiene que
$$0 = x\varphi'(p) + \psi'(p)$$
Luego $x(p) = -\dfrac{\psi'(p)}{\varphi'(p)}$. Como $y(p) = x\varphi(p) + \psi(p)$

se tiene que $y(p) = xp + \psi(p)$, pues $p = \varphi(p)$, y $\varphi'(p) = 1$.
Por tanto
$$\begin{cases} x(p) = -\psi'(p) \\ y(p) = xp + \psi(p) \end{cases}$$
es tambien solución de la E.D. de Clairaut llamada "solución singular", y es la envolvente de la familia de rectas anterior.

Ejemplo: $y = xy' + \dfrac{a}{2y'}$

Las rectas que son soluciones tienen una ecuación del tipo $y = Cx + \dfrac{a}{2C}$.
Con la notación anterior $\psi'(p) = \dfrac{-a}{2p^2}$. Luego la solución singular es
$$\begin{cases} y = xp + \dfrac{a}{2p} \\ x = \dfrac{a}{2p^2} \end{cases}$$
$x = \dfrac{a}{2p^2} \Rightarrow p^2 = \dfrac{a}{2x}$. Luego $y = x\sqrt{\dfrac{a}{2x}} + \dfrac{a}{2\sqrt{\frac{a}{2x}}} \Rightarrow$

$\Rightarrow y\sqrt{\dfrac{a}{2x}} = x\dfrac{a}{2x} + \dfrac{a}{2} \Rightarrow y = a\sqrt{\dfrac{2x}{a}} \Rightarrow y^2 = 2ax$

que es la ecuación de una parábola.

6. Notas sobre la "diferencial"

Frecuentemente utilizamos notaciones del tipo $dy = f'(x)dx$. Vamos a recordar en este apartado que debemos entender cuando encontremos expresiones de este tipo.

* Sea $y = f(x)$ una función real de variable real y $f'(x)$ su derivada.
Consideremos la aplicación
$$dy(x,\cdot) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$h \longmapsto dy(x,h) = f'(x)\cdot h.$$
En el caso particular en que f es la aplicación i identidad en $\mathbb{R}$ se tiene
$$di(x,\cdot) : h \in \mathbb{R} \longmapsto 1\cdot h \in \mathbb{R}$$
Entonces $dy(x,h) = f'(x)\cdot di(x,h)$, $\forall h \in \mathbb{R}$,
o tambien $dy(x,\cdot) = f'(x)\cdot di(x,\cdot)$.
Abreviadamente representaremos esta igualdad por
$$dy = f'(x)\,dx.$$
A la aplicación $dy(x,\cdot)$ se le llama en Análisis Clásico diferencial de $y = f(x)$ en x. Se prueba que esta aplicación es lineal

* Sea $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función derivable. Consideremos la aplicación $p: x \in \mathbb{R} \longmapsto p(x) = (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$ donde f es una función real de variable real derivable. Consideremos la composición

$$x \in \mathbb{R} \xmapsto{p} (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \xmapsto{u} u(x, f(x)) \in \mathbb{R}.$$

La función $u \circ p$ es una función real de variable real derivable, y su derivada, según la regla de la cadena, es:

$$(u \circ p)'(x) = Du(p(x)) \cdot p'(x) =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, f(x)), \frac{\partial u}{\partial y}(x, f(x)) \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, f(x)) \cdot f'(x).$$

Entonces $d(u \circ p)(x) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, f(x)) \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y}(x, f(x)) \cdot f'(x)\, dx =$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x, f(x)) \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y}(x, f(x)) \cdot dy.$$

A $d(u \circ p)$ se le denota, cuando no hay confusión posible, por du.

Luego $du = \frac{\partial u}{\partial x}(x, f(x))\, dx + \frac{\partial u}{\partial y}(x, f(x)) \cdot dy$

A du se le llama diferencial total de la función u.