TEMA 2º: TEOREMAS DE EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES DE UNA E.D. DE 1er ORDEN.

1. TEOREMA DE ASCOLI

Denotaremos por $C(I)$ el conjunto de las funciones continuas definidas en un intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}$ y valoradas en $\mathbb{R}$.
$C(I)$ tiene estructura de espacio vectorial real respecto de las operaciones: $+ : (f,g) \in C(I)^2 \longmapsto f+g \in C(I)$ donde $f+g : x \in I \longmapsto f(x)+g(x) \in \mathbb{R}$.
y $\cdot : (\lambda, f) \in \mathbb{R} \times C(I) \longmapsto \lambda \cdot f \in C(I)$ donde $\lambda \cdot f : x \in I \longmapsto \lambda \cdot f(x) \in \mathbb{R}$.
Dotamos a este espacio vectorial de la norma infinito

$$\forall f \in C(I), \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

Se prueba que $(C(I), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio normado completo (o de Banach).

DEFINICION: (familia equicontinua)
Decimos que una familia $\mathcal{F}$ de funciones de $C(I)$ es equicontinua si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \;/\; \underset{x,y \in I}{|x-y| < \delta} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \; \forall f \in \mathcal{F}.$$

1.1. PROPOSICION: a) Toda familia finita de funciones continuas en I es equicontinua.
b) La unión finita de familias equicontinuas en $C(I)$ es una familia equicontinua.

La demostración es trivial si tenemos en cuenta que toda función continua en un compacto es uniformemente continua.
La unión infinita de familias equicontinuas no es, en general, una familia equicontinua.
Contraejemplo: Sea $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ donde $f_n : x \in [0,1] \longmapsto f_n(x) = nx$.
Veamos que

$$\exists \varepsilon > 0 \;/\; \forall \delta > 0, \exists x, y \in [0,1] \;/\; \underset{x,y \in [0,1]}{|x-y| < \delta} \text{ y } \exists n \in \mathbb{N} \;/\; |nx - ny| \geq \varepsilon$$

Sea $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Dado $\delta \in]0,1]$ siempre existen $x, y \in [0,1]$ tales que $\frac{\delta}{2} < |x-y| < \delta$
Tomando $n > \frac{1}{\delta}$ se tiene que $n|x-y| > \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2}$.

Si $\delta > 1$, podemos encontrar $x, y \in [0,1]$ tales que $\frac{1}{\delta} < |x-y| < \delta$.
Tomando $n > \frac{\delta}{2}$ tenemos que $n|x-y| > \frac{\delta}{2} \cdot \frac{1}{\delta} = \frac{1}{2}$.

1.2. PROPOSICION: Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones de $C(I)$. Si $\{f_n\}_n$ es de Cauchy entonces $\{f_n\}_n$ es equicontinua.

Demostr.: Queremos probar que

$$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 \;/\; \underset{x,y\in I}{|x-y|<\delta} \Rightarrow |f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon, \forall n\in\mathbb{N}.$$

Siendo $\{f_n\}_n$ de Cauchy se verifica que

$$\exists \nu\in\mathbb{N} \;/\; n\geq\nu \Rightarrow |f_n(x)-f_\nu(x)|<\frac{\varepsilon}{3}, \forall x\in I.$$

Como $\{f_1,\dots,f_\nu\}$ es una familia equicontinua, por ser finita, se tiene que $\exists \delta>0 \;/\; \underset{x,y\in I}{|x-y|<\delta} \Rightarrow |f_i(x)-f_i(y)|<\frac{\varepsilon}{3}$, $i=1,\dots,\nu$.

Veamos que este δ es el que buscamos.

Sean $x,y\in I$ tales que $|x-y|<\delta$ y sea $n>\nu$. Entonces

$$|f_n(x)-f_n(y)|\leq|f_n(x)-f_\nu(x)|+|f_\nu(x)-f_\nu(y)|+|f_\nu(y)-f_n(y)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Luego $\{f_n\}_n$ es equicontinua. csqd.

DEFINICION: Decimos que una familia $\mathcal{F}$ de elementos de $C(I)$ es puntualmente acotada si existe $\varphi: I\to\mathbb{R}$ tal que

$$|f(x)|\leq\varphi(x), \forall f\in\mathcal{F}, \forall x\in I.$$

Observacion: φ no tiene que ser necesariamente continua.

DEFINICION: Decimos que una familia $\mathcal{F}\subset C(I)$ es uniformemente acotada si

$$\exists M>0 \;/\; \forall f\in\mathcal{F}, \forall x\in I, |f(x)|\leq M$$

que equivale a que $\|f\|_\infty\leq M, \forall f\in\mathcal{F}$.

1.3. TEOREMA: (de Ascoli)

Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones de $C(I)$ puntualmente acotada y equicontinua. Entonces $\{f_n\}_n$ es uniformemente acotada y existe una subsucesión de $\{f_n\}_n$ convergente en $C_\infty(I)$.

Demostr.: 1) $\{f_n\}_n$ es uniformemente acotada:

Consideremos la aplicación $\psi: x\in I\longmapsto\psi(x)=\sup_n|f_n(x)|\in\mathbb{R}$

Esta aplicación está bien definida, pues, por hipótesis, existe $\varphi: I\to\mathbb{R}$ tal que $|f_n(x)|\leq\varphi(x), \forall x\in I$.

Veamos que ψ es uniformemente continua, es decir, que

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 \;/\; \underset{x,y\in I}{|x-y|<\delta} \Rightarrow |\psi(x)-\psi(y)|<\varepsilon.$$

Siendo $\{f_n\}_n$ equicontinua

$$\exists\delta>0 \;/\; \underset{x,y\in I}{|x-y|<\delta} \Rightarrow |f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon, \forall n\in\mathbb{N}.$$

Luego $|f_n(x)|\leq|f_n(x)-f_n(y)|+|f_n(y)|\leq\varepsilon+|f_n(y)|\leq$

$\leq\varepsilon+\sup_n|f_n(y)|=\varepsilon+\psi(y).$

Luego $\Psi(x) = \sup_n |f_n(x)| \leq \varepsilon + \Psi(y) \Rightarrow \Psi(x) - \Psi(y) \leq \varepsilon$

Análogamente $\Psi(y) - \Psi(x) \leq \varepsilon$.

Luego $|\Psi(x) - \Psi(y)| \leq \varepsilon$ si $|x-y| < \delta$, $x, y \in I$.

Por tanto, siendo Ψ uniformemente continua en el compacto I se tiene que

$$\exists M > 0 / |\Psi(x)| \leq M, \forall x \in I$$

y en consecuencia $|f_n(x)| \leq M, \forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}$.

2) Veamos que $\{f_n\}_n$ admite una subsucesión convergente en $C_\infty(I)$.

Sea $E = \{x_1, x_2, \dots\}$ el conjunto de los puntos racionales del intervalo I ordenados en sucesión.

Siendo $\{f_n\}_n$ uniformemente acotada, la sucesión de números reales $\{f_n(x_1)\}_n$ está acotada. Por tanto, $\{f_n(x_1)\}_n$ admite una subsucesión convergente que denotaremos por $\{f_{1n}(x_1)\}_n$.

Como $\{f_{1n}\}_n$ es uniformemente acotada, la sucesión de números reales $\{f_{1n}(x_2)\}_n$ admite una subsucesión convergente que denotaremos por $\{f_{2n}(x_2)\}_n$. Por este procedimiento tenemos que $\forall i \in \mathbb{N}$, $\{f_{in}\}_n$ es una subsucesión de $\{f_{(i-1)n}\}_n$ tal que $\{f_{in}(x_i)\}_n$ es convergente. Es decir, tenemos la sucesiones

$$\begin{array}{l}
f_{11}, f_{12}, f_{13}, \dots, f_{1n}, \dots \\
f_{21}, f_{22}, f_{23}, \dots, f_{2n}, \dots \\
f_{31}, f_{32}, f_{33}, \dots, f_{3n}, \dots \\
\dots \\
f_{n1}, f_{n2}, f_{n3}, \dots, f_{nn}, \dots \\
\dots
\end{array}$$

cada una de las cuales es una subsucesión de la anterior.

Consideremos la sucesión diagonal $\{f_{kk}\}_{k \in \mathbb{N}}$, que es subsucesión de $\{f_n\}_n$. Veamos que es convergente en C_∞. Basta para ello que sea de Cauchy, pues $C_\infty(I)$ es completo. Se trata de probar que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} / m, n > \nu \Rightarrow |f_{mm}(x) - f_{nn}(x)| < \varepsilon, \forall x \in I.$$

La sucesión diagonal $\{f_{kk}\}_{k \in \mathbb{N}}$ está contenida en la sucesión $\{f_{in}\}_n$, $\forall i \in \mathbb{N}$, salvo quizás los $i-1$ primeros términos.

Como $\{f_n\}_n$ es equicontinua, $\{f_{kk}\}_k$ también lo es, y por tanto dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 / \underset{x,y \in I}{|x-y| < \delta} \Rightarrow |f_{nn}(x) - f_{nn}(y)| < \varepsilon/3$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (I)

La familia de bolas abiertas $\{B(x_n,\delta)/x_n\in E\}$ es un recubrimiento abierto de I, pues E es denso en I.
Como I es compacto, existe un subrecubrimiento finito de I

$$\{B(x_i,\delta)/i=1,\dots,p\}.$$

$\forall i\in\{1,\dots,p\}$, la sucesión $\{f_{nn}(x_i)\}_n$ está contenida en $\{f_{in}(x_i)\}$, salvo quizás los $i-1$ primeros términos. Como $\{f_{in}(x_i)\}_n$ es convergente, $\{f_{nn}(x_i)\}_n$ es convergente y, por tanto, de Cauchy en $\mathbb{R}$.

Luego dado $\varepsilon>0$, $\forall i\in\{1,\dots,p\}$, $\exists \nu_i\in\mathbb{N}/m,n>\nu_i \Rightarrow |f_{mm}(x_i)-f_{nn}(x_i)|<\varepsilon/3$ (II)
Sea $\nu=\max\limits_{1\le i\le p}\nu_i$.

Entonces, dado $\varepsilon>0$, existe $\nu\in\mathbb{N}$ tal que si $m,n>\nu$ entonces, si $x\in B(x_i,\delta)$,
$|f_{mm}(x)-f_{nn}(x)|\le|f_{mm}(x)-f_{mm}(x_i)|+|f_{mm}(x_i)-f_{nn}(x_i)|+|f_{nn}(x_i)-f_{nn}(x)|$
Como $x\in B(x_i,\delta)$, $|x-x_i|<\delta$ y, por tanto, $|f_{mm}(x)-f_{mm}(x_i)|<\varepsilon/3$ y $|f_{nn}(x)-f_{nn}(x_i)|<\varepsilon/3$ por (I).
Además $|f_{mm}(x_i)-f_{nn}(x_i)|<\varepsilon/3$, pues $m,n>\nu\ge\nu_i$, por (II).

Luego $|f_{mm}(x)-f_{nn}(x)|<\varepsilon$, $\forall x\in I$.
Por tanto, $\{f_{nn}\}_n$ es de Cauchy en $C_\infty(I)$ y, por tanto, convergente en $C_\infty(I)$. csqd.

2. TEOREMAS DE EXISTENCIA DE SOLUCIONES DE UNA E.D. DE 1er ORDEN.

Empezaremos recordando algunas definiciones ya conocidas y definiendo una serie de conceptos nuevos.

DEFINICION: (ECUACION DIFERENCIAL DE 1er ORDEN).
Sea una funcion $\phi:(x,y,z)\in C\subset\mathbb{R}^3\longmapsto\phi(x,y,z)\in\mathbb{R}$.
A la expresión $\phi(x,y,y')=0$ se le llama una E.D. ordinaria de 1er orden en forma implícita.
En el caso en que $\phi(x,y,z)=z-F(x,y)$ la E.D. tiene la forma $y'=F(x,y)$, que se llama E.D. ordinaria de 1er orden en forma explícita o normal.

DEFINICION: Sea $C_0=\{(x,y,z)\in C/\phi(x,y,z)=0\}$. A C_0 se le llama campo de los elementos integrales, y cada punto de C_0 se llama un elemento integral.

DEFINICION: Dado un elemento integral (x_0, y_0, z_0) se llama soporte del mismo al par (x_0, y_0). A z_0 se le llama pendiente asociada a (x_0, y_0) por la E.D.

El conjunto $S = \{(x_0, y_0) / \exists z_0 \in \mathbb{R} / (x_0, y_0, z_0) \in C_0\}$ se le llama conjunto soporte de la E.D.

DEFINICION: (Solución de una E.D.)

Sea una E.D. $\phi(x, y, y') = 0$. Decimos que $f: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una solución de esta E.D. si se verifican las condiciones:

1) f es derivable en I, entendiendo que si x está en la frontera de I, $f'(x)$ es la derivada lateral correspondiente.

2) $\phi(x, f(x), f'(x)) = 0, \forall x \in I$. Por supuesto, $(x, f(x), f'(x)) \in C, \forall x \in I$.

Equivalente a 2) es la condición:

2') $\forall x \in I$, $(x, f(x), f'(x)) \in C_0$.

Dada una función $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable tal que $(x, f(x), f'(x)) \in C, \forall x \in I$ a los elementos $(x, f(x), f'(x))$, $x \in I$, se les llama elementos tangenciales de f. Luego f es solución de la E.D. si todos sus elementos tangenciales son elementos integrales.

Si la E.D. está dada en su forma normal $y' = F(x, y)$, donde F es una función real definida en un dominio D de $\mathbb{R}^2$, decimos que $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ es solución de la E.D. si

1) $\exists f'(x), \forall x \in I$.

2) $\forall x \in I$, $(x, f(x)) \in D$ y $f'(x) = F(x, f(x))$.

DEFINICION: (Solución ε-aproximada).

Sea $F: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Consideremos la E.D. $y' = F(x, y)$. Se dice que una función continua $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una solución ε-aproximada $(\varepsilon \geq 0)$ de la E.D. si se verifican las condiciones:

i) f es derivable salvo, a lo sumo, en un número finito de puntos de I.

ii) Si $x \in I$ es un punto en el cual f es derivable, entonces

$$|F(x, f(x)) - f'(x)| < \varepsilon. \quad (*)$$

Vamos a plantear ahora el problema de Cauchy o del valor inicial para la E.D. $y' = F(x, y)$: Dado un punto $(x_0, y_0) \in D$ se trata de estudiar la existencia, y en dicho caso el número, de soluciones que "pasan" por (x_0, y_0).

Si f es una solución de la E.D. tal que $f(x_0)=y_0$ diremos que f satisface el problema de Cauchy para la condiciones iniciales (x_0, y_0).

En relación con el problema de Cauchy daremos dos teoremas: el teorema de Cauchy-Peano sobre la existencia de soluciones y el teorema de Picard-Lipschitz, con hipótesis más fuertes que el anterior, sobre la existencia y unicidad de soluciones que satisfacen el problema del valor inicial.

Antes de enunciarlos y demostrarlos veamos el siguiente

2.1. LEMA: Sea la E.D. $y'=F(x,y)$, donde $F: D\subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función continua en el dominio D. Entonces $f: I\subset \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es solución de la E.D. que pasa por $(x_0,y_0)\in D$ si, y solo si, f es continua en I y
$$f(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t,f(t))\,dt \quad , \forall x\in I.$$

Demostr.: $\Rightarrow$] Si f es solución de la E.D. y $f(x_0)=y_0$ se tiene que f es derivable en I, y por tanto continua, y además
$$f'(x) = F(x,f(x)) \quad , \forall x \in I.$$

Luego $\forall x\in I$, $f(x)=\int_a^x f'(t)\,dt$, donde a es un punto de I (en principio cualquier punto de I)

Luego $f(x)=\int_a^x F(t,f(t))\,dt$.

Como $f(x_0)=y_0$, y por otra parte $f(x_0)=\int_a^{x_0} F(t,f(t))\,dt$

se tiene que $f(x)-y_0 = f(x)-f(x_0) = \int_a^x F(t,f(t))\,dt - \int_a^{x_0} F(t,f(t))\,dt =$
$$= \int_{x_0}^{x} F(t,f(t))\,dt$$

Luego $f(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t,f(t))\,dt$.

$\Leftarrow$] Como f y F son continuas, $t\in I \mapsto F(t,f(t))\in\mathbb{R}$ es continua. Luego su integral es derivable y su derivada es
$$f'(x) = F(x,f(x)) \quad , \forall x\in I. \quad \text{c.s.q.d.}$$

NOTA: Una generalización del teorema fundamental del cálculo integral sobre la derivación de primitivas viene expresada por la fórmula:
$$\frac{d}{dx}\left[\int_{p(x)}^{q(x)} F(t,x)\,dt\right] = \int_{p(x)}^{q(x)} \frac{\partial}{\partial x}F(t,x)\,dt + q'(x)F(q(x),x) - p'(x)F(p(x),x)$$

2.2. TEOREMA: (de Cauchy-Peano).

Sea la E.D. $y'=F(x,y)$ donde $F: D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es continua en D y acotada. Dado $(x_0,y_0)\in D$ existe al menos una solución de la E.D. que "pasa" por (x_0,y_0).

Este es un teorema de carácter local: solo nos preocupa encontrar un entorno de x_0 en el cual está definida una solución que verifique el problema de Cauchy en las condiciones iniciales (x_0,y_0), y no nos interesa, de momento, si se puede definir dicha solución en un intervalo más grande. La hipótesis de acotación de F no es fundamental, pues dado $(x_0,y_0)\in D$ existe una bola cerrada $\overline{B}((x_0,y_0),r)\subset D$, por ser D abierto, y siendo f continua en D, es continua en el compacto $\overline{B}((x_0,y_0),r)$, y, por tanto, acotada en él.

El esquema de la demostración es el siguiente:

1) Encontraremos $\delta>0$ tal que dado $\varepsilon>0$ podamos encontrar una función poligonal Π continua en $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ tal que $\Pi(x_0)=y_0$ y Π es solución ε-aproximada de la E.D.

2) Tomaremos una sucesión de números reales positivos $(\varepsilon_n)_n$ monótona decreciente y convergente a cero (p.ej. $\varepsilon_n=\frac{1}{n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$) y para cada ε_n consideraremos una poligonal $\Pi_n\in\mathcal{C}[x_0-\delta,x_0+\delta]$ con $\Pi_n(x_0)=y_0$ y que sea solución ε_n-aproximada.

3) Probaremos que la familia $\{\Pi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente acotada y equicontinua en $\mathcal{C}_\infty[x_0-\delta,x_0+\delta]$ y, por tanto, por el teorema de Ascoli, admitirá una subsucesión $\{\Pi_\nu\}_\nu$ que convergerá uniformemente (en $\mathcal{C}_\infty[x_0-\delta,x_0+\delta]$) a una función f.

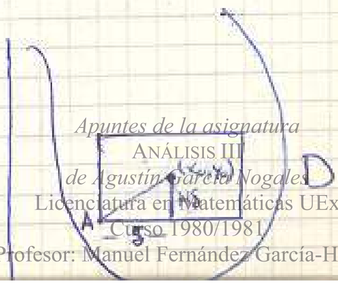
4) Probaremos que f es una solución de la E.D. que verifica el problema de Cauchy en las condiciones iniciales (x_0,y_0).

Demostr.: 1) Como F es acotada en D, sea $H=\sup_{(x,y)\in D}|F(x,y)|$.

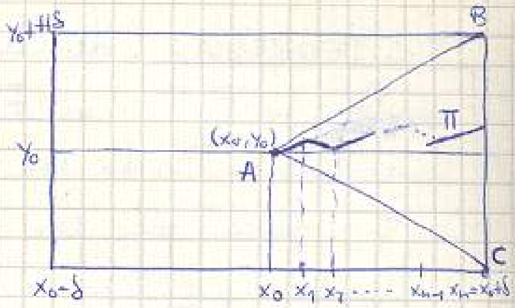
Siendo D abierto y $(x_0,y_0)\in D$, podemos encontrar un rectángulo compacto R de centro (x_0,y_0) contenido en D. Es más, existe $\delta>0$ tal que

$$(x_0,y_0)\in R=[x_0-\delta,x_0+\delta]\times[y_0-H\delta,y_0+H\delta]\subset D$$

Para ello debe verificarse que la distancia de (x_0,y_0) a la frontera de D sea mayor que la distancia de (x_0,y_0) a un vértice cualquiera del rectángulo, es decir: $d((x_0,y_0),\mathcal{F}(D))>\delta\sqrt{1+H^2}$, es decir



Basta tomar $\delta < \dfrac{d((x_0,y_0), \mathrm{Fr}(D))}{\sqrt{1+H^2}}$



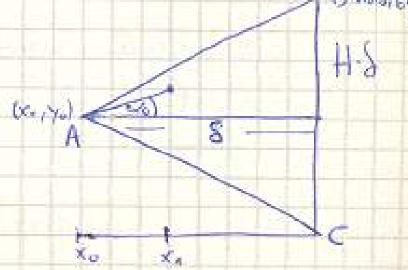
Sea $\varepsilon>0$ arbitrario. Vamos a construir una poligonal Π que sea una solución ε-aproximada de la E.D. verificando $\Pi(x_0)=y_0$.
Vamos a construir esta poligonal sobre el intervalo $[x_0, x_0+\delta]$. Análogamente se procedería en el intervalo $[x_0-\delta, x_0]$.

Como F es continua en el rectángulo compacto $\mathcal{R}$, es uniformemente continua en él. Luego, para el $\varepsilon>0$ que hemos fijado tenemos que

$$\exists \eta>0 \;/\; \underset{(x,y),(x^*,y^*)\in\mathcal{R}}{d((x,y),(x^*,y^*))<\eta} \Rightarrow |F(x,y)-F(x^*,y^*)|<\varepsilon. \qquad (\mathrm{I})$$

Sea P una partición de $[x_0, x_0+\delta]$, $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$, de modo que si $h_i=x_i-x_{i-1}$, $i=1,\dots,n$, se tenga que $h_i<\dfrac{\eta}{\sqrt{1+H^2}}$, $\forall i\in\{1,\dots,n\}$.

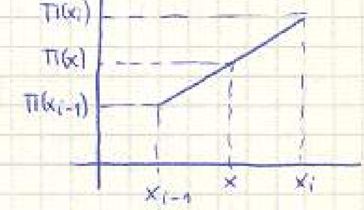
Lo que vamos a hacer a continuación es definir los vértices de la poligonal de modo que la gráfica de la misma esté en el triángulo $\widehat{ABC}$.
El primer vértice es (x_0,y_0).
El segundo será (x_1,y_1) donde $y_1=y_0+F(x_0,y_0)h_1$.
En general, el vértice i-ésimo es $y_i=y_{i-1}+F(x_{i-1},y_{i-1})\,h_i$, $1\le i\le n$. $\quad(\mathrm{II})$
Definidos los vértices queda determinada completamente la poligonal Π.
Veamos que la gráfica de Π está en el triángulo $\widehat{ABC}$.
Tenemos que $|F(x_0,y_0)|\le H$.
Pero $F(x_0,y_0)=\dfrac{y_1-y_0}{h_1}$ que es la pendiente de la recta que une los puntos (x_0,y_0) y (x_1,y_1), y H es la pendiente de la recta AB. Luego, $-H\le tg\,\alpha_0\le H$, y por tanto, "el primer tramo" de la poligonal Π está en $\widehat{ABC}$ (*)



De la misma forma $F(x_{i-1},y_{i-1})$ es la pendiente del tramo i-ésimo de la poligonal y, como $|F(x_{i-1},y_{i-1})|\le H$ se verifica que dicho tramo también está contenido en el triángulo $\widehat{ABC}$.

De forma análoga se construye Π en $[x_0-\delta, x_0]$.
Tenemos, por tanto, una poligonal Π continua en $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ y que pasa por (x_0,y_0). Es trivial que Π es derivable en $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ salvo, quizás, en los vértices. Seguiremos haciendo "las cuentas" para la parte de la poligonal Π definida en $[x_0, x_0+\delta]$.

Veamos que Π es solución ε-aproximada, es decir, que
$\forall i \in \{1,\dots,n\}\ \forall x \neq x_i$, $|\Pi'(x) - F(x,\Pi(x))| < \varepsilon$
Si $x \in [x_0, x_0+\delta] - \{x_i\}_{i=0}^{n}$, entonces, $\exists i \in \{1,\dots,n\} / x \in]x_{i-1}, x_i[$.
Entonces, $\Pi'(x) = F(x_{i-1}, y_{i-1})$, pues $F(x_{i-1},y_{i-1})$ es la pendiente del tramo de poligonal definido en $]x_{i-1},x_i[$.



Pero $d((x_{i-1},y_{i-1}),(x,\Pi(x))) <$

$< d((x_{i-1},y_{i-1}),(x_i,y_i)) = \sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2} =$

$= \sqrt{h_i^2 + [F(x_{i-1},y_{i-1})h_i]^2} = h_i\sqrt{1+F(x_{i-1},y_{i-1})^2} \leq$

$\leq h_i\sqrt{1+H^2} < \dfrac{\eta}{\sqrt{1+H^2}}\cdot\sqrt{1+H^2} = \eta$

Luego, por (I), $|F(x_{i-1},y_{i-1}) - F(x,\Pi(x))| < \varepsilon$
o también $|\Pi'(x) - F(x,\Pi(x))| < \varepsilon$.
Luego Π es una solución ε-aproximada que pasa por (x_0,y_0).

2) Dada la sucesión $(\varepsilon_n)_n$ monótona decreciente en $\mathbb{R}^+$ convergente a cero podemos construir, como en 1), una sucesión $\{\Pi_n\}_n$ de poligonales continuas en $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ tales que
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\Pi_n(x_0) = y_0$ y Π_n es solución ε_n-aproximada de la E.D.

3) Vamos a probar que $\{\Pi_n\}_n$ es uniformemente acotada.
Tal y como se ha construido Π_n se tiene que
$\forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta], \forall n \in \mathbb{N}, |\Pi_n(x) - y_0| \leq H\cdot\delta$.

Luego $|\Pi_n(x)| \leq |y_0| + H\delta$, $\forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta], \forall n \in \mathbb{N}$,
que prueba que $\{\Pi_n\}_n$ es uniformemente acotada.
Veamos ahora que $\{\Pi_n\}_n$ es equicontinua, es decir, que
$\forall \varepsilon^* > 0, \exists \zeta > 0 / \underset{x,x^* \in [x_0-\delta,x_0+\delta]}{|x-x^*| < \zeta} \Rightarrow |\Pi_n(x) - \Pi_n(x^*)| < \varepsilon^*, \forall n \in \mathbb{N}$.

Tal y como se ha construido Π_n, dados $x, x^* \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$, la pendiente de la recta que une los puntos $(x,\Pi_n(x))$ y $(x^*,\Pi_n(x^*))$ es $\dfrac{\Pi_n(x) - \Pi_n(x^*)}{x-x^*}$ y verifica que

$$-H \leq \frac{\Pi_n(x)-\Pi_n(x^*)}{x-x^*} \leq H, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y por tanto, $\dfrac{|\Pi_n(x) - \Pi_n(x^*)|}{|x-x^*|} < H$. Luego $|\Pi_n(x) - \Pi_n(x^*)| < H|x-x^*|$.

Luego dado $\varepsilon^* > 0$ basta tomar $\zeta = \dfrac{\varepsilon^*}{H}$ y se verifica que si $|x-x^*| < \zeta$ entonces $|\Pi_n(x) - \Pi_n(x^*)| < \varepsilon^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Por tanto, $\{\Pi_n\}_n$ es uniformemente acotada y equicontinua.
El teorema de Ascoli garantiza en estas condiciones la existencia de

una subsucesión $\{\Pi_\nu\}_\nu$ de $\{\Pi_n\}_n$ que converge a una función f en $\mathcal{C}_\infty[x_0-\delta, x_0+\delta]$, es decir, tal que el límite uniforme de $\{\Pi_\nu\}_\nu$ es $f \in \mathcal{C}[x_0-\delta, x_0+\delta]$.

4) Para probar que f es una solución de la E.D. que pasa por (x_0, y_0) basta probar que f es continua y que

$$f(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, f(t))\,dt, \quad \forall x \in I \qquad \text{(Lema 2.1).}$$

Ya sabemos que f es continua en $[x_0-\delta, x_0+\delta]$, por ser límite uniforme de una sucesión de funciones continuas.

Trataremos de expresar a continuación Π_ν en forma integral.

Sean $\{(x_i^\nu, \Pi_\nu(x_i^\nu))\}_{i=0}^{n_\nu}$ los vértices de la poligonal Π_ν.

Definimos la aplicación

$$\Delta_\nu : x \in [x_0, x_0+\delta] \longmapsto \Delta_\nu(x) = \begin{cases} = \Pi_\nu'(x) - F(x, \Pi_\nu(x)) & \text{si } x \in]x_{i-1}^\nu, x_i^\nu[, \text{ para algún } i. \\ = 0 & \text{si } \exists i \in \{1, \dots, n_\nu\} \,/\, x = x_{i-1}^\nu . \end{cases}$$

Entonces

$F(x, \Pi_\nu(x)) + \Delta_\nu(x) = \Pi_\nu'(x)$ si $x \in]x_{i-1}^\nu, x_i^\nu[$ y

$F(x, \Pi_\nu(x)) + \Delta_\nu(x) = F(x, \Pi_\nu(x))$ si $x = x_{i-1}^\nu$.

Vamos a probar que

$$\Pi_\nu(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \{\Delta_\nu(t) + F(t, \Pi_\nu(t))\}\,dt, \quad \forall x \in [x_0, x_0+\delta].$$

Consideremos para cada $i \in \{1, \dots, n_\nu\}$ el intervalo $[x_{i-1}^\nu, x_i^\nu[$.

Si $x \in]x_{i-1}^\nu, x_i^\nu[$ tenemos $\Delta_\nu(x) + F(x, \Pi_\nu(x)) = \Pi_\nu'(x) = F(x_{i-1}^\nu, y_{i-1}^\nu)$, por (II).

Si $x = x_{i-1}^\nu$, $\Delta_\nu(x) + F(x, \Pi_\nu(x)) = F(x, \Pi_\nu(x)) = F(x_{i-1}^\nu, \Pi_\nu(x_{i-1}^\nu)) = F(x_{i-1}^\nu, y_{i-1}^\nu)$.

Luego $\Delta_\nu(x) + F(x, \Pi_\nu(x))$ es constante en cada subintervalo $[x_{i-1}^\nu, x_i^\nu[$.

Entonces, $\forall x \in [x_0, x_0+\delta[$, $\exists i \in \{1, \dots, n_\nu\} \,/\, x \in [x_i^\nu, x_{i+1}^\nu[$. Por tanto,

$$y_0 + \int_{x_0^\nu}^{x} \{\Delta_\nu(t) + F(t, \Pi_\nu(t))\}\,dt = y_0 + \int_{x_0^\nu = x_0}^{x_1^\nu} \{\Delta_\nu(t) + F(t, \Pi_\nu(t))\}\,dt +$$

$$+ \int_{x_1^\nu}^{x_2^\nu} \{\Delta_\nu(t) + F(t, \Pi_\nu(t))\}\,dt + \dots + \int_{x_{i-1}^\nu}^{x_i^\nu} \{\Delta_\nu(t) + F(t, \Pi_\nu(t))\}\,dt + \int_{x_i^\nu}^{x} \{\Delta_\nu(t) + F(t, \Pi_\nu(t))\}\,dt =$$

$$= y_0 + F(x_0, y_0)(x_1^\nu - x_0) + F(x_1^\nu, y_1^\nu)(x_2^\nu - x_1^\nu) + \dots + F(x_{i-1}^\nu, y_{i-1}^\nu)(x_i^\nu - x_{i-1}^\nu) + F(x_i^\nu, y_i^\nu)(x - x_i^\nu) =$$

$$\overset{\text{(II)}}{=} y_0 + \frac{\Pi_\nu(x_1^\nu) - \Pi_\nu(x_0)}{x_1^\nu - x_0}(x_1^\nu - x_0) + \frac{\Pi_\nu(x_2^\nu) - \Pi_\nu(x_1^\nu)}{x_2^\nu - x_1^\nu}(x_2^\nu - x_1^\nu) + \dots + \frac{\Pi_\nu(x_i^\nu) - \Pi_\nu(x_{i-1}^\nu)}{x_i^\nu - x_{i-1}^\nu}(x_i^\nu - x_{i-1}^\nu) +$$

$$+ \frac{\Pi_\nu(x) - \Pi_\nu(x_i^\nu)}{x - x_i^\nu}(x - x_i^\nu) = \Pi_\nu(x)$$

pues $F(x_k^\nu, y_k^\nu) = \dfrac{\Pi_\nu(x_{k+1}^\nu) - \Pi_\nu(x_k^\nu)}{x_{k+1}^\nu - x_k^\nu}$, $\Pi_\nu(x_0) = y_0$ y $F(x_i^\nu, y_i^\nu) = \dfrac{\Pi_\nu(x_{i+1}^\nu) - \Pi_\nu(x_i^\nu)}{x_{i+1}^\nu - x_i^\nu}$

Siendo π_ν solución ε_ν-aproximada tenemos que $|\Delta_\nu(x)|\leq \varepsilon_\nu$, $\forall x\in[x_0-\delta, x_0+\delta]$ y, como $\lim_{\nu\to\infty}\varepsilon_\nu=0$ se tiene que $(\Delta_\nu)_\nu$ converge uniformemente (en $C_\infty[x_0-\delta, x_0+\delta]$) a la función nula sobre $[x_0-\delta, x_0+\delta]$.

Sea $F_0 : x\in[x_0-\delta, x_0+\delta] \longmapsto F(x, f(x))\in\mathbb{R}$
y $F_\nu : x\in[x_0-\delta, x_0+\delta] \longmapsto F(x, \pi_\nu(x))\in\mathbb{R}$.

Como F es continua y $\{\pi_\nu\}_\nu$ converge uniformemente a f se tiene que $\{F_\nu\}_\nu$ converge uniformemente a F_0.

Entonces, para cualquier $x\in[x_0-\delta, x_0+\delta]$

$$f(x)=\lim_{\nu\to\infty}\pi_\nu(x)=\lim_{\nu\to\infty}\left(y_0+\int_{x_0}^{x}\{F(t,\pi_\nu(t))+\Delta_\nu(t)\}dt\right)\overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=} y_0+\int_{x_0}^{x}\lim_{\nu\to\infty}\{F(t,\pi_\nu(t))+\Delta_\nu(t)\}dt = y_0+\int_{x_0}^{x}F_0(t)dt =$$

$$= y_0+\int_{x_0}^{x}F(t,f(t))\,dt.$$

Como f es continua y verifica esta ecuación integral, se deduce que f es una solución de la E.D. que pasa por (x_0, y_0). C.S.Q.D.

3. Caso de funciones lipschitzianas: Existencia y unicidad de la solucion de una E.D.

A) DEFINICIONES: a) Decimos que una función $F: A\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ es lipschitziana respecto de la variable y si existe $K>0$ tal que

$$|F(x,y_1)-F(x,y_2)|\leq K|y_1-y_2| \text{ siempre que } (x,y_1),(x,y_2)\in A.$$

b) Decimos que $F: A\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ es lipschitziana respecto de la variable $y=(y_1,\dots,y_n)$ que recorre $\mathbb{R}^n$ si existe $K>0$ tal que

$$\|F(x,y_1)-F(x,y_2)\|\leq K\|y_1-y_2\| \text{ siempre que } (x,y_1),(x,y_2)\in A.$$

DEFINICION: Una función $F: A\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ se dice localmente lipschitziana respecto de y si para cualquier punto $(x,y)\in A$ existe una bola $B_A((x,y), r)$ en el subespacio métrico A en el cual F es lipschitziana respecto de y.

Analogamente se define el caracter lipschitziano local para funciones $F: A\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$.

Trivialmente, si F es lipschitziana respecto de y, F es localmente lipschitziana respecto de y.

3.1. PROPOSICION: Sea $F: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función lipschitziana respecto de y. Entonces F es uniformemente continua respecto de y, es decir, que fijado x, la función real de variable real $F(x,\cdot)$ es uniformemente continua.

Demostr.: Por hipótesis $\exists \lambda>0 \,/\, |F(x,y_1)-F(x,y_2)| \le \lambda |y_1-y_2|$ siempre que $(x,y_1),(x,y_2)\in A$.
Se trata de probar que

$$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 \,/\, \underset{(x,y_1),(x,y_2)\in A}{|y_1-y_2|<\delta} \Rightarrow |F(x,y_1)-F(x,y_2)|<\varepsilon$$

Basta tomar δ tal que $0<\delta<\frac{\varepsilon}{\lambda}$. Como vemos δ no depende de x. c.s.q.d.

Damos a continuación una condición suficiente para que F sea lipschitziana respecto de y.

3.2. PROPOSICION: Sea G un conjunto convexo de $\mathbb{R}^2$ y sea $F: G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función tal que existe $D_2F(x,y)$ en todo punto $(x,y)\in G$ y tal que existe $K>0$ verificando que $|D_2F(x,y)|\le K$, $\forall (x,y)\in G$. Entonces F es lipschitziana en G respecto de y.

Demostr.: Aplicando el teorema del valor medio a la función $F(x,\cdot)$ tenemos que $\forall (x,y_1),(x,y_2)\in G$, $|F(x,y_1)-F(x,y_2)| \le |D_2F(x,\bar{y})|\cdot|y_1-y_2| \le K|y_1-y_2|$ donde $\bar{y}\in]y_1,y_2[$. c.s.q.d.

Si G es abierto y convexo y D_2F es continua en G, entonces F es localmente lipschitziana respecto de y. Basta ver que D_2F es continua en un entorno compacto de cada punto de G y, por tanto, acotada en dicho entorno.
Estas proposiciones se generalizan para funciones $F: G\subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
Las hipótesis serían que existan las derivadas parciales $D_{y_i}F_j(x,y_1,\dots,y_n)$ en cada punto $(x,y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ y que el conjunto $\{|D_{y_i}F_j(y_1,\dots,y_n)|\}_{i,j\in\{1,\dots,n\}}^{(x,y_1,\dots,y_n)\in G}$ esté acotado por $K\in\mathbb{R}^+$, y la tesis, que F es lipschitziana en G respecto de $(y_1,\dots,y_n)$.
Si estas derivadas parciales son continuas y G es abierto y convexo, entonces F es localmente lipschitziana en G respecto de $y=(y_1,\dots,y_n)$.

B) Recordemos el teorema del punto fijo:

3.3. TEOREMA: Toda aplicación contractiva en un espacio métrico completo posee uno y sólo un punto fijo.

C) Sea $I=[x_0-\delta, x_0+\delta]$ un intervalo compacto de la recta. Consideremos el espacio normado $\mathcal{C}_\infty(I)$, espacio vectorial de las funciones continuas

en I valoradas en $\mathbb{R}$ dotado con la norma infinito: $\|f\|_\infty = \sup_{x\in I}|f(x)|$, $\forall f \in \mathcal{C}(I)$.
Dados $y_0 \in \mathbb{R}$ y $\beta > 0$ definimos

$$\mathcal{C}^*(I) = \{ f \in \mathcal{C}_\infty(I) / |f(x) - y_0| \leq \beta, \forall x \in I \}.$$

Es decir, $\mathcal{C}^*(I)$ es el subconjunto de $\mathcal{C}(I)$ formado por las funciones cuya gráfica están contenidas en el rectángulo $[x_0-\delta, x_0+\delta] \times [y_0-\beta, y_0+\beta]$.
Veamos que $\mathcal{C}^*_\infty(I)$ es un subespacio métrico completo de $\mathcal{C}_\infty(I)$.
Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{C}^*_\infty(I)$. Entonces

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} / m, n \geq \nu \Rightarrow \|f_m - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$$

Trivialmente $\{f_n\}_n$ es de Cauchy en $\mathcal{C}_\infty(I)$ y, siendo $\mathcal{C}_\infty(I)$ completo, existe $f \in \mathcal{C}_\infty(I)$ tal que $\lim_n f_n = f$ (límite uniforme).
Veamos que $f \in \mathcal{C}^*(I)$ con lo cual habremos terminado.
$\forall x \in I$, $|f_n(x) - y_0| \leq \beta$, pues $f_n \in \mathcal{C}^*(I)$
Luego $\lim_n |f_n(x) - y_0| \leq \beta$, es decir, $|f(x) - y_0| \leq \beta$, $\forall x \in I$, que prueba que $f \in \mathcal{C}^*(I)$.

D) 3.4. LEMA: (Desigualdad de HUREWICZ)

Sea $y' = F(x,y)$ una E.D. donde $F: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua y acotada en D ($F \in \mathcal{C}(D)$), y F es lipschitziana en D respecto de y de constante λ ($F \in L_\lambda(D,y)$). Sean π_1 y π_2 soluciones ε_1 y ε_2-aproximadas, respectivamente, definidas en un intervalo I. Sea $x_0 \in I$ y sean $\pi_1(x_0) = y_1$, $\pi_2(x_0) = y_2$.
Entonces se verifica que

$$\forall x \in I, \quad |\pi_1(x) - \pi_2(x)| \leq e^{\lambda|x-x_0|}|\pi_1(x_0) - \pi_2(x_0)| + \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\lambda}\left(e^{\lambda|x-x_0|} - 1\right)$$

Demostr.: Llamaremos $p(x)$ a $\pi_1(x) - \pi_2(x)$ y $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.
Siendo π_1 solución ε_1-aproximada se verifica que
$|\pi_1'(x) - F(x, \pi_1(x))| \leq \varepsilon_1$ para cualquier x en el que π_1 es derivable.
Análogamente, $|\pi_2'(x) - F(x, \pi_2(x))| \leq \varepsilon_2$.

Entonces $|\pi_1'(x) - \pi_2'(x)| \leq |\pi_1'(x) - F(x,\pi_1(x))| + |\pi_2'(x) - F(x,\pi_2(x))| + |F(x,\pi_1(x)) - F(x,\pi_2(x))| \leq$
$\leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \lambda|\pi_1(x) - \pi_2(x)|$
Es decir

$$|p'(x)| \leq \varepsilon + \lambda |p(x)|$$

Vamos a resolver esta inecuación diferencial. Consideremos los casos siguientes:
1 Supongamos que el intervalo I es de la forma $[x_0, b]$ y que $p(x) \neq 0$, $\forall x \in [x_0, b[$. Como p es continua podemos suponer que $p(x) > 0$, $\forall x \in [x_0, b[$. Si fuese $p(x) < 0$, $\forall x$, el razonamiento sería totalmente análogo al que vamos a hacer, pero con la función $-p$.

Se trata de resolver, entonces, la inecuación
$$p'(x) \leq \varepsilon + \lambda p(x).$$
Como $e^{-\lambda x} > 0$, $\forall x \in I$, se tiene que
$$p'(x) e^{-\lambda x} \leq \varepsilon e^{-\lambda x} + \lambda p(x) e^{-\lambda x}$$
y, por tanto, $e^{-\lambda x}(p'(x) - \lambda p(x)) \leq \varepsilon e^{-\lambda x}$

o también $(p(x) e^{-\lambda x})' \leq \varepsilon e^{-\lambda x}$

De donde se deduce que $\int_{x_0}^{x} (p(t) e^{-\lambda t})' dt \leq \int_{x_0}^{x} \varepsilon e^{-\lambda t} dt$

es decir $p(x) e^{-\lambda x} - p(x_0) e^{-\lambda x_0} \leq \frac{\varepsilon}{-\lambda} e^{-\lambda t}\Big]_{x_0}^{x}$, $\forall x \in I$

Luego $p(x) e^{-\lambda x} - p(x_0) e^{-\lambda x_0} \leq \frac{\varepsilon}{-\lambda} (e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x_0})$, $\forall x \in I$.

Si multiplicamos por $e^{\lambda x}$ tenemos que
$$p(x) - p(x_0) e^{-\lambda(x_0 - x)} \leq \frac{\varepsilon}{-\lambda} (1 - e^{\lambda(x - x_0)}), \quad \forall x \in [x_0, b]$$
y por tanto, $p(x) \leq e^{\lambda(x - x_0)} p(x_0) + \frac{\varepsilon}{\lambda} (e^{\lambda(x - x_0)} - 1)$, $\forall x \in [x_0, b]$

y como $p(x) > 0$, $p(x_0) > 0$ y $x \geq x_0$ se tiene que
$$|p(x)| \leq e^{\lambda |x - x_0|} |p(x_0)| + \frac{\varepsilon}{\lambda} (e^{\lambda |x - x_0|} - 1) \quad \forall x \in [x_0, b].$$
Si el intervalo I es de la forma $[a, x_0]$, por un razonamiento análogo obtenemos la misma expresión.

② Supongamos que $p(x_0) = 0$ y $p(x) \neq 0$, $\forall x \in]x_0, b[$

Entonces cualquiera que sea $z \in]x_0, b[$, aplicando ① a $[z, b[$ tenemos que
$$|p(x)| \leq e^{\lambda |x - z|} |p(z)| + \frac{\varepsilon}{\lambda} (e^{\lambda |x - z|} - 1), \quad \forall x \in [z, b[.$$
Fijo x, el segundo término es función de z y continua. Si tomamos límite cuando z tiende a x_0 tendremos que
$$|p(x)| \leq e^{\lambda |x - x_0|} |p(x_0)| + \frac{\varepsilon}{\lambda} (e^{\lambda |x - x_0|} - 1) \qquad (1)$$
y esto cualquiera que sea $x \in]x_0, b[$, pues si $x \in]x_0, b[$, existe $z \in]x_0, b[$ tal que $x \in [z, b[$

Como $|p(x_0)| = 0$, (1) también es cierta para $x = x_0$. Luego en este caso también se verifica (1) $\forall x \in [x_0, b[$

③ Veamos el caso general. Sea $A = \{x \in I \,/\, p(x) \neq 0\}$. A es la imagen inversa de un abierto ($\mathbb{R} - \{0\}$) de $\mathbb{R}$, y siendo p continua, A es abierto en $[x_0, b]$.

Una base de la topología inducida por $\mathbb{R}$ en $[x_0, b]$ está formada por intervalos de la forma $[x_0, c[$, $]c, d[$ ó $]d, b]$. Por tanto, A es unión de interva-

los de estas formas. Entonces podemos escribir A como unión de intervalos de las formas $[x_0,c[$, $]c,d[$ y/o $]d,b]$ de manera que p tenga signo constante en cada uno de ellos y tal que $p(c)=p(d)=0$.
Para los puntos $x\in I-A$, $p(x)=0$ y la desigualdad de Hurewicz es trivialmente cierta.
Sea $x\in A$ y supongamos, por ejemplo, que $x\in]c,d[$ donde $p(c)=p(d)=0$ y $p(x)\neq 0, \forall x\in]c,d[$. Entonces

$$|p(x)|\leq e^{\lambda|x-c|}|p(c)|+\frac{\varepsilon}{\lambda}(e^{\lambda|x-c|}-1)=\frac{\varepsilon}{\lambda}(e^{\lambda|x-c|}-1), \text{ pues } p(c)=0.$$

Como $e^{\lambda|x-x_0|}|p(x_0)|\geq 0$ y $e^{\lambda|x-c|}\leq e^{\lambda|x-x_0|}$, pues $|x-c|\leq|x-x_0|$ se tiene que

$$|p(x)|\leq e^{\lambda|x-x_0|}|p(x_0)|+\frac{\varepsilon}{\lambda}(e^{\lambda|x-x_0|}-1). \quad \text{csqd.}$$

E) Definiremos a continuación lo que entenderemos por "solución única" de una E.D. pasando por un punto (x_0,y_0).

DEFINICION: Sea $F: D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función continua en el dominio D. Consideremos la E.D. $y'=F(x,y)$. Dado $(x_0,y_0)\in D$ decimos que la solución $f:[x_0-\delta,x_0+\delta]\to\mathbb{R}$ que "pasa" por (x_0,y_0) es única (localmente) si cualquier otra solución $f_1:[x_0-\delta_1,x_0+\delta_1]\to\mathbb{R}$ que pase por (x_0,y_0) verifica que $f_1(x)=f(x)$, $\forall x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$, donde $\delta=\min(\delta_0,\delta_1)$.

Pedimos que F sea continua para que exista al menos una solución. Vamos a dar dos demostraciones del teorema de unicidad local de soluciones que pasan por un punto dado.

3.5. TEOREMA: Sea $F: D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ continua y localmente lipschitziana en D respecto de y. Entonces, por cada punto $(x_0,y_0)\in D$ pasa una "única" solución de la E.D. $y'=F(x,y)$.

Demostr.: Siendo D abierto y F localmente lipschitziana en D respecto de y existe una bola cerrada $\overline{B}=\overline{B}((x_0,y_0),r)\subset D$ tal que F es lipschitziana en $\overline{B}$ respecto de y. Sea λ una constante de Lipschitz para F en $\overline{B}$.
Siendo $\overline{B}$ compacto y F continua en $\overline{B}$, es acotada en $\overline{B}$.
El teorema de Cauchy-Peano garantiza en estas condiciones la existencia de $f_1:[x_0-\delta,x_0+\delta]\to\mathbb{R}$ solución de la E.D. tal que $f_1(x_0)=y_0$.
Supongamos que $f_2:[x_0-\alpha,x_0+\alpha]\to\mathbb{R}$ es otra solución de la E.D. tal que $f_2(x_0)=y_0$.
Como f_1 y f_2 son soluciones 0-aproximadas de la E.D., la desigualdad

de Hurewicz asegura que

$$|f_1(x)-f_2(x)| \leq e^{\lambda|x-x_0|}|f_1(x_0)-f_2(x_0)| + \frac{\varepsilon}{\lambda}\left(e^{\lambda|x-x_0|}-1\right), \forall x\in[x_0-\beta, x_0+\beta], \beta=\min\ldots$$

Pero $\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2=0$ y $f_1(x_0)=f_2(x_0)=y_0$

Luego $f_1(x)=f_2(x)$, $\forall x\in[x_0-\beta, x_0+\beta]$. c.s.q.d.

3.5. TEOREMA: (Picard-Lipschitz).

Sea la E.D. $y'=F(x,y)$, donde $F: D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es continua y acotada en D ($F\in\mathcal{C}(D)$) y Lipschitziana en D respecto de y ($F\in L_\lambda(D,y)$). Entonces, para cada punto $(x_0,y_0)\in D$ existe una única solución de la E.D. que pasa por (x_0,y_0).

Observación: Podemos poner las hipótesis más débiles de que F sea continua y localmente lipschitziana respecto de y en D. Entonces en lugar de referirnos al dominio D, nos restringiríamos a una bola cerrada de centro (x_0,y_0) contenida en D en la cual F es continua (y, por tanto, acotada) y lipschitziana respecto de y.

Demostr.: 1) Sea $H=\sup\limits_{(x,y)\in D}|F(x,y)|$, y λ una constante de Lipschitz para F en D. Tomemos $\delta>0$ tal que $\delta<\frac{d((x_0,y_0),\mathcal{F}(D))}{\sqrt{1+H^2}}$ y $\delta<\frac{1}{\lambda}$.

Por verificar la primera desigualdad, el rectángulo $[x_0-\delta, x_0+\delta]\times[y_0-H\delta, y_0+H\delta]$ está contenido en D (igual que se hizo en la demostración del teorema de Cauchy-Peano).

Sea $I=[x_0-\delta, x_0+\delta]$. Entonces

$$\mathcal{C}^*(I)=\{f\in\mathcal{C}_\infty(I) / |f(x)-y_0|\leq H\delta, \forall x\in I\}$$

es un subespacio métrico completo de $\mathcal{C}_\infty(I)$, por C).

2) Definimos la aplicación

$$T: f\in\mathcal{C}^*(I)\longmapsto Tf\in\mathcal{C}^*(I)$$

donde $Tf: x\in I\longmapsto Tf(x)=y_0+\int_{x_0}^x F(t,f(t))\,dt$

Tf es trivialmente continua (aún más, derivable, pues $t\mapsto F(t,f(t))$ es continua).
Además $|Tf(x)-y_0|\leq H\delta$, $\forall x\in I$, pues

$$|Tf(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^x F(t,f(t))\,dt\right|\leq\int_{x_0}^x|F(t,f(t))|\,dt\leq\int_{x_0}^x H\,dt\leq H\delta \quad \text{pues}$$

$x\in[x_0-\delta, x_0+\delta]$.

Luego T está bien definida.

Probemos que T es contractiva, es decir, que existe $\alpha \in [0,1[$ tal que

$$\forall f,g \in \mathcal{C}^*(I), \ \|Tf - Tg\|_\infty \leq \alpha \|f-g\|_\infty .$$

$$\forall x \in I, \ |Tf(x) - Tg(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} \{F(t,f(t)) - F(t,g(t))\} dt \right| \leq$$

$$\leq \int_{x_0}^{x} |F(t,f(t)) - F(t,g(t))| dt \leq \int_{x_0}^{x} \lambda \, |f(t) - g(t)| dt \ , \text{ pues } F \in L_\lambda(D,y).$$

Como $|f(t) - g(t)| \leq \|f-g\|_\infty$ se tiene que

$$\forall x \in I, \ |Tf(x) - Tg(x)| \leq \lambda \|f-g\|_\infty |x-x_0| \leq \lambda \cdot \delta \, \|f-g\|_\infty$$

Si hacemos $\alpha = \lambda \cdot \delta$ tenemos que $\alpha < 1$, pues $\delta < \frac{1}{\lambda}$.

Luego $\|Tf - Tg\|_\infty = \sup_{x \in I} |Tf(x) - Tg(x)| \leq \alpha \|f-g\|_\infty$.

3) El teorema del punto fijo asegura que existe una "única" $f^* \in \mathcal{C}^*(I)$ tal que $Tf^* = f^*$.

Es decir, $\forall x \in I$, $f^*(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, f^*(t)) \, dt$.

Como f^* es continua y satisface la ecuación integral anterior se tiene (lema 2.1) que f^* es solución de la E.D. y $f^*(x_0) = y_0$. c.s.q.d.

OBSERVACIONES: a) La unicidad que asegura el teorema del punto fijo significa que si tomamos δ' tal que $0 < \delta' < \min\left(\frac{d((x_0,y_0), \overline{F}(D))}{\sqrt{1+H^2}}, \frac{1}{\lambda}\right)$ y, siguiendo los mismos pasos de la demostración, obtenemos $g^* : [x_0 - \delta', x_0 + \delta'] \to \mathbb{R}$ que es solución de la E.D. que pasa por (x_0, y_0), entonces f^* y g^* coinciden en $[x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0]$ donde $\delta_0 = \min(\delta, \delta')$.

b) Este teorema da un procedimiento para calcular soluciones. Tomamos $\varphi_0 \in \mathcal{C}^*(I)$, en principio arbitraria; hacemos $\varphi_n = T\varphi_{n-1}$, $n \geq 1$. Entonces la solución es el límite en $\mathcal{C}^*_\infty(I)$ de $\{\varphi_n\}_n$. A las φ_n se les llama funciones iterantes de Picard.

4. TEOREMAS DE COMPARACIÓN:

Muchas veces las soluciones de una E.D. no se pueden expresar en término de funciones elementales. Interesa en estos casos "comparar" las soluciones de esta E.D. con otras soluciones de otras ecuaciones diferenciales "similares" que sí son conocidas.

4.1. TEOREMA: Sea $F:[a,\infty[\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función lipschitziana respecto de y. Sea $f:[a,\infty[\to\mathbb{R}$ una solución de la inecuación diferencial $y'\leq F(x,y)$, es decir, $f'(x)\leq F(x,f(x))$, $\forall x\geq a$. Sea g una solución de la E.D. $y'=F(x,y)$, es decir, $g'(x)=F(x,g(x))$, $\forall x\geq a$. Si $f(a)=g(a)$, entonces $f(x)\leq g(x)$, $\forall x\geq a$.

Demostr.: Supongamos que existe $x_1>a$ tal que $f(x_1)>g(x_1)$ y llegaremos a un absurdo.

Sea $x_0=\sup\{x\in[a,x_1[\ / f(x)\leq g(x)\}$.

Veamos que $f(x_0)=g(x_0)$. Si fuese $f(x_0)<g(x_0)$, siendo f y g continuas, existiría un entorno $]x_0-\delta,x_0+\delta[$ tal que $f(x)<g(x)$, $\forall x\in]x_0-\delta,x_0+\delta[$.

En particular, $f(x_0+\frac{\delta}{2})<g(x_0+\frac{\delta}{2})$, en contra de la definición de x_0.

Sea $p(x)=f(x)-g(x)$. Entonces $p(x)\geq 0$, $\forall x\in[x_0,x_1]$.

Además, $p'(x)=f'(x)-g'(x)\leq F(x,f(x))-F(x,g(x))\quad\forall x\in[x_0,x_1]$ pues $f'(x)\leq F(x,f(x))$ y $g'(x)=F(x,g(x))$.

Siendo F lipschitziana respecto de y se tiene que $F(x,f(x))-F(x,g(x))\leq\lambda(f(x)-g(x))$, $\forall x\in[x_0,x_1]$ donde λ es una constante de Lipschitz para F. Observar que $|f(x)-g(x)|=(f(x)-g(x))$ en $[x_0,x_1]$.

Por tanto $p'(x)\leq\lambda p(x)$, $\forall x\in[x_0,x_1]$.

Vamos a resolver esta inecuación diferencial.

$$(p'(x)-\lambda p(x))\leq 0\Rightarrow e^{-\lambda x}(p'(x)-\lambda p(x))\leq 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dx}(p(x)e^{-\lambda x})\leq 0$$

Integrando entre x_0 y $x^{\in[x_0,x_1]}$ se tiene que

$$p(x)e^{-\lambda x}-p(x_0)e^{-\lambda x_0}\leq 0$$

Como $p(x_0)=0$ se tiene que $p(x)e^{-\lambda x}\leq 0$, $\forall x\in[x_0,x_1]$ y siendo $e^{-\lambda x}>0,\forall x$, debe ser $p(x)\leq 0$, $\forall x\in[x_0,x_1]$.

En particular tendríamos $f(x_1)\leq g(x_1)$, contra lo supuesto.

Debe ser entonces $f(x)\leq g(x)$, $\forall x\geq a$. c.s.q.d.

4.2. TEOREMA: Supongamos que F ó G son lipschitzianas respecto de y en $[a,b]\times\mathbb{R}$. Sea f solución de la E.D. $y'=F(x,y)$, y supongamos que f está definida en $[a,b]$. Sea $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ solución de $y'=G(x,y)$. Supongamos además que $F(x,y)\leq G(x,y)$, $\forall(x,y)\in[a,b]\times\mathbb{R}$. Entonces si $f(a)=g(a)$, se verifica que $f(x)\leq g(x)$, $\forall x\in[a,b]$.

Demostr.: * Supongamos que G es lipschitziana respecto de y.
Tenemos que $g'(x) = G(x, g(x))$, $\forall x \in [a,b]$.
Además $f'(x) = F(x, f(x)) \leq G(x, f(x))$, $\forall x \in [a,b]$.
Además $f(a) = g(a)$.
Entonces, por el teorema anterior, $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$.
* Supongamos que F es lipschitziana respecto de y.
Consideremos las funciones
$u(x) = -f(x)$ y $v(x) = -g(x)$, $U(x,y) = -F(x,-y)$ y $V(x,y) = -G(x,-y)$.
Entonces $u'(x) = U(x, u(x))$, $\forall x \in [a,b]$ y $v'(x) = V(x, v(x))$, $\forall x \in [a,b]$.
Además U es lipschitziana respecto de y.
Por otra parte $V(x,y) \leq U(x,y)$, $\forall (x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R}$.
Además $u(a) = v(a)$.
Entonces por el teorema anterior $v(x) \leq u(x)$, $\forall x \in [a,b]$, o lo que es lo mismo, $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$. csqd.

OBSERVACION: Este teorema se puede mejorar en el sentido de que si $f(a) < g(a)$, y dejando iguales las restantes hipótesis, entonces $f(x) < g(x)$, $\forall x \in [a,b]$.
Vamos a probar esto: Supongamos que existe $x_1 \in]a,b]$ tal que $f(x_1) \geq g(x_1)$.
Sea $x_0 = \inf\{x \in]a,b] / f(x) \geq g(x)\}$.
Consideremos las funciones
$u(x) = f(-x)$, $v(x) = g(-x)$, $U(x,y) = -F(-x,y)$, $V(x,y) = -G(-x,y)$, $\forall x \in [-b,-a]$
Entonces $V(x,y) \leq U(x,y)$, $\forall x \in [-b,-a] \times \mathbb{R}$.
Igual que en el teorema 4.1 se prueba que $u(-x_0) = v(-x_0)$.
Aplicando el teorema anterior a estas funciones en el intervalo $[-x_0, -a]$, suponiendo que U es lipschitziana, tendríamos que $v(x) \leq u(x)$, $\forall x \in [-x_0, -a]$
En particular, $v(-a) \leq u(-a)$, es decir, $g(a) \leq f(a)$; en contra de que $f(a) < g(a)$.
Si G fuese lipschitziana, V sería lipschitziana, y análogamente se probaría que $g(a) \leq f(a)$. (Definiríamos en este caso, $u(x) = -f(-x)$, $v(x) = -g(-x)$, $U(x,y) = F(-x,-y)$, $V(x,y) = G(-x,-y)$)
Debe ser entonces $f(x) < g(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

5. ESTUDIO DE LA E.D. DE 1er ORDEN EN FORMA IMPLICITA.

Recordemos que una E.D. de 1er orden en forma implícita es una expresión de la forma $\phi(x, y, y') = 0$ donde ϕ es una función real definida en un conjunto $C \subset \mathbb{R}^3$.
Al conjunto $C_0 = \{(x,y,p) \in \mathbb{R}^3 / \phi(x,y,p) = 0\}$ le llamamos campo de elemen-

tos integrales, y cada elemento de C_0 es un elemento integral.

Al conjunto $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \exists p\in\mathbb{R} / \phi(x,y,p)=0,\ (x,y,p)\in C\}$ se le llama soporte de la E.D.

Veamos ahora una serie de definiciones nuevas:

<u>DEFINICION</u>: (Elemento integral regular)

Dada la E.D. $\phi(x,y,y')=0$ decimos que $(x_0,y_0,p_0)\in C_0$ es un elemento integral regular para la E.D. si existe una función $F: B_2(\alpha)\to B_1(\beta)$ donde $B_2(\alpha)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \|(x,y)-(x_0,y_0)\|\leq\alpha\}$, $B_1(\beta)=\{p\in\mathbb{R} / |p-p_0|\leq\beta\}$, que verifica las condiciones siguientes:

i) F es continua en $B_2(\alpha)$

ii) $\forall(x,y)\in B_2(\alpha)$, $\phi(x,y,F(x,y))=0$

iii) $\forall(x_1,y_1)\in B_2(\alpha)$, $\forall p_1\in B_1(\alpha)$, se verifica que si $\phi(x_1,y_1,p_1)=0$ entonces $p_1=F(x_1,y_1)$.

Los elementos integrales no regulares se llaman singulares.

<u>DEFINICION</u> (Punto soporte regular)

Decimos que un punto $(x_0,y_0)\in S$ es punto soporte regular para la E.D. $\phi(x,y,y')=0$ si cualquiera que sea el elemento integral soportado es un elemento integral regular, es decir, si

$\forall p_0\in\mathbb{R} / (x_0,y_0,p_0)\in C_0$ entonces (x_0,y_0,p_0) es un elemento integral regular.

Los puntos soportes no regulares se llaman singulares.

5.1. <u>TEOREMA</u>: (Condición suficiente para que un elemento integral sea regular).

Sea (x_0,y_0,p_0) un elemento integral para la E.D. $\phi(x,y,y')=0$

Supongamos que se verifican las hipótesis siguientes:

1) ϕ es continua en $B_2(\alpha)\times B_1(\beta)$, $\alpha,\beta>0$, $B_2(\alpha)=\overline{B}((x_0,y_0),\alpha)$, $B_1(\beta)=\overline{B}(p_0,\beta)$.

2) Existe $D_3\phi$ y es continua en $\mathring{B}_2(\alpha)\times\mathring{B}_1(\beta)$.

3) $D_3\phi(x_0,y_0,p_0)\neq 0$.

En estas condiciones, (x_0,y_0,p_0) es un elemento integral regular para la E.D

Demostr.: Se verifican las hipótesis del teorema de la función implícita para la función $\phi: C\subset\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Dicho teorema garantiza la existencia de entornos $B_2(\alpha)$, entorno de (x_0,y_0), $B_1(\beta)$, entorno de p_0, y de una función $F: B_2(\alpha)\to B_1(\beta)$ continua tal que

$\forall(x,y)\in B_2(\alpha)$, $\phi(x,y,F(x,y))=0$

Además, esta función F es única en el sentido de que si $G: B_2(\alpha)\to B_1(\beta)$ es tal que $\phi(x,y,G(x,y))=0$, $\forall(x,y)\in B_2(\alpha)$, entonces $F=G$. Por tanto, si dados $(x_1,y_1)\in B_2(\varepsilon)$ y $p_1\in B_1(\varepsilon)$ se verifica que $\phi(x_1,y_1,p_1)=0$ necesariamente debe ser $p_1=F(x_1,y_1)$. Luego (x_0,y_0,p_0) es un elemento integral regular. csqd.

OBSERVACION: En las hipótesis del teorema de la función implícita se exige que ϕ sea de clase C^1. Sin embargo, a ϕ le hemos pedido únicamente que sea continua, y es suficiente para lo que queremos probar, como se deduce de la demostración del teorema de la función implícita hecha en Análisis II (1ª parte, pg. 59).

El teorema anterior sigue siendo cierto si en lugar de tener definida ϕ en un producto de intervalos la tenemos definida en un dominio D de $\mathbb{R}^3$.

5.2. TEOREMA: Si ϕ y $D_3\phi$ son continuas en un dominio D de $\mathbb{R}^3$, entonces dado $(x_0,y_0,p_0)\in D$ tal que $\phi(x_0,y_0,p_0)=0$ y $D_3\phi(x_0,y_0,p_0)\neq 0$, se verifica que (x_0,y_0,p_0) es un elemento integral regular para la E.D $\phi(x,y,y')=0$.

OBSERVACION: Las condiciones que estos teoremas dan para que un elemento integral sea regular son suficientes, pero no necesarias, como prueba el siguiente:

Contraejemplo: Consideremos la E.D. $\phi(x,y,y')=(y'-F(x,y))^2=0$, donde $F:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es continua.

Trivialmente se comprueba que todo elemento de la forma $(x,y,F(x,y))$ con $(x,y)\in D$ es elemento integral regular para la E.D.

Sin embargo, como $D_3\phi(x,y,p)=2(p-F(x,y))$ se tiene que $D_3\phi(x,y,F(x,y))=0$, $\forall(x,y)\in D$.

DEFINICION: (Dominio de regularidad para una E.D. en forma implícita).

Sea D un dominio de $\mathbb{R}^2$ contenido en S, soporte de la E.D $\phi(x,y,y')=0$. Se dice que D es un dominio de regularidad para esta E.D. si cualquiera que sea $(x_0,y_0)\in D$ todos los elementos integrales soportados por (x_0,y_0) son elementos integrales regulares.

Entonces, si $D\subset S$ es un dominio de regularidad para la E.D. $\phi(x,y,y')=0$ se verifica que $\forall(x_0,y_0)\in D$ existe una E.D. $y'=F(x,y)$, donde F es continua en $D_0\subset D$, tal que toda solución de $y'=F(x,y)$ es solución de $\phi(x,y,y')=0$. No es cierto, en general, que cualquier solución de $\phi(x,y,y')=0$ sea solución de $y'=F(x,y)$.

DEFINICION: Consideremos la E.D. $\phi(x,y,y')=0$ y sea (x_0,y_0,p_0) un elemento integral para ella. Decimos que la E.D. tiene la propiedad de unicidad local en (x_0,y_0,p_0) si cualesquiera que sean las soluciones $f_1:[x_0-\delta_1,x_0+\delta_1]\to\mathbb{R}$, $f_2:[x_0-\delta_2,x_0+\delta_2]\to\mathbb{R}$, de la E.D. verificando $f_1(x_0)=y_0$, $f_2(x_0)=y_0$, $f_1'(x_0)=p_0$ y $f_2'(x_0)=p_0$ se cumple que

$$f_1(x)=f_2(x),\ \forall x\in[x_0-\delta,x_0+\delta],\ \delta=\min(\delta_1,\delta_2).$$

5.3. TEOREMA: (Existencia y unicidad de soluciones para E.D. en forma implícita)

Sea $\phi(x,y,y')=0$ una E.D. y (x_0,y_0,p_0) un punto tal que

i) $\phi\in\mathcal{C}^1(\mathring{B}_2(\alpha)\times\mathring{B}_1(\beta))$.

ii) $\phi(x_0,y_0,p_0)=0$.

iii) $D_3\phi(x_0,y_0,p_0)\neq 0$.

Entonces existe una solución $f:[x_0-\delta,x_0+\delta]\to\mathbb{R}$ tal que $f(x_0)=y_0$ y $f'(x_0)=p_0$; además la E.D. tiene la propiedad de unicidad local en el punto (x_0,y_0,p_0).

Demostr.: En las hipótesis precedentes podemos reducir la E.D. en forma implícita a una E.D. en forma normal en los alrededores de (x_0,y_0,p_0). Basta entonces aplicar el teorema de Picard-Lipschitz. ∎

DEFINICIONES: a) Se llama variedad discriminante de la E.D. $\phi(x,y,y')=0$ al conjunto de puntos singulares.

b) Decimos que una solución f de la E.D. es regular cuando $\forall x\in I$, $(x,f(x),f'(x))$ es un elemento regular.

c) Una solución f de la E.D será singular cuando todos los elementos tangenciales, $(x,f(x),f'(x))$, son singulares.

EJEMPLO: Consideremos la E.D. $y'^2+xy'-y=0$. Sea $\phi(x,y,p)=p^2+xp-y$. Vamos a determinar C_0, S, los elementos integrales singulares y las soluciones singulares, si existen.

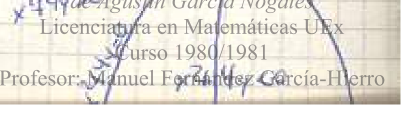
$$C_0=\{(x,y,p)\in\mathbb{R}^3 / p^2+xp-y=0\}.$$

Si "despejamos" p en $p^2+xp-y=0$ queda $p=\dfrac{-x\pm\sqrt{x^2+4y}}{2}$

podemos escribir $C_0=\left\{\left(x,y,\dfrac{-x\pm\sqrt{x^2+4y}}{2}\right)\in\mathbb{R}^3 / x^2+4y\geq 0\right\}$.

Por tanto, a los puntos (x,y) tales que $x^2+4y>0$, la E.D le asocia dos pendientes.

A los puntos (x,y) tales que $x^2+4y=0$, la



E.D. le asocia una única pendiente: $-\frac{x}{2}$.
A los puntos (x,y) tales que $x^2+4y<0$, la E.D. no le asocia ninguna pendiente.
Por tanto, $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \ x^2+4y\geq 0\}$.
Los puntos (x,y,p) tales que $\phi(x,y,p)=0$, $D_3\phi(x,y,p)=0$ son posibles elementos integrales singulares.
$D_3\phi(x,y,p)=0 \iff 2p+x=0 \iff p=\frac{-x}{2}$.

$\phi(x,y,p)=0 \iff p^2+xp-y=0$.
Si (x,y,p) satisface ambas condiciones tendremos que

$$\left(\frac{-x}{2}\right)^2+x\left(\frac{-x}{2}\right)-y=0 \iff x^2+4y=0 \Rightarrow y=\frac{-x^2}{4}$$

Por tanto, los posibles puntos singulares son de la forma

$$\left(x, \frac{-x^2}{4}, -\frac{x}{2}\right)$$

Veamos que todo punto de esta forma es un punto singular.
Si fuese un punto regular podríamos definir una función F en un entorno de $\left(x, \frac{-x^2}{4}\right)$ y valorada en un entorno de $-\frac{x}{2}$.
Necesariamente debería estar definida de una de las dos formas siguientes:

$$F(x,y)=\frac{-x+\sqrt{x^2+4y}}{2} \quad \text{ó} \quad F(x,y)=\frac{-x-\sqrt{x^2+4y}}{2}$$

pero ni una ni otra pueden definirse en un entorno de un punto $\left(x_0, \frac{-x_0^2}{4}\right)$ que esté en la gráfica de la parábola, pues siempre hay puntos (x,y) en este entorno en los cuales $x^2+4y<0$.

Luego la variedad discriminante es $\left\{\left(x, -\frac{x^2}{4}, -\frac{x}{2}\right) / x\in\mathbb{R}\right\}$.
De existir alguna solución singular, deberá estar contenida en la variedad discriminante. Veamos si la parábola $x^2+4y=0$ es una solución singular de la E.D. Para ello hay que probar si la pendiente que asocia la E.D. a los puntos de dicha gráfica coincide con la pendiente de la parábola en dichos puntos.
La pendiente que asocia la E.D. a la parábola en el punto $\left(x_0, -\frac{x_0^2}{4}\right)$ es $-\frac{x_0}{2}$.
La pendiente de la parábola $y=-\frac{1}{4}x^2$ en x_0 es $-2\frac{x_0}{4}=-\frac{x_0}{2}$.
Por tanto, la variedad discriminante es una solución singular.