# TEMA 3º: SISTEMAS DIFERENCIALES. ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN n.

## 1. SISTEMAS DIFERENCIALES.

Consideremos una función $F: D \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y supongamos que $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$.

Un sistema diferencial en forma normal es una expresión de la forma

$$y' = F(x,y) \quad , \quad (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

donde $y = (y_1, \ldots, y_n)$ e $y' = (y'_1, \ldots, y'_n)$, o lo que es equivalente

$$\begin{cases} y'_1 = F_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ y'_2 = F_2(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y'_n = F_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases}$$

DEFINICION: (Solución de un sistema diferencial)

Decimos que $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es solución del sistema diferencial $y' = F(x,y)$ si

1) $\forall x \in I$, $\exists f'(x) = (f'_1(x), \ldots, f'_n(x))$, donde $f = (f_1, \ldots, f_n)$.

2) $\forall x \in I$, $(x, f_1(x), \ldots, f_n(x)) \in D$ y $f'(x) = F(x, f(x))$

o tambien $\begin{cases} f'_1(x) = F_1(x, f_1(x), \ldots, f_n(x)) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f'_n(x) = F_n(x, f_1(x), \ldots, f_n(x)) \end{cases}$

Si además $f(x_0) = y_0 = (y_{01}, \ldots, y_{0n})$ se dice que $f$ es solución del sistema diferencial relativa a las condiciones iniciales $(x_0, y_0)$

Todos los conceptos que hemos definido para E.D. ordinarias de 1er orden y todos los teoremas que hemos probado para ellas se generalizan fácilmente para sistemas diferenciales. Enunciaremos dichos teoremas y probaremos, por ejemplo, el teorema de Picard-Lipschitz, para observar la analogía.

1.1. LEMA: Sea el sistema diferencial $y' = F(x,y)$ donde $F: D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es continua en el dominio $D$. Entonces $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es una solución del sistema diferencial relativo a las condiciones iniciales $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ si y solo si

$$\forall x \in I, \quad f(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, f(t))\, dt$$

Nota: Dada una función $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$, definimos $\int g = (\int g_1, \ldots, \int g_n)$ si es que existen estas integrales.

**1.2. TEOREMA:** (de Cauchy-Peano para sistemas diferenciales)

Sea el sistema diferencial $y' = F(x,y)$ donde $F: D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es continua y acotada en el dominio $D$. Entonces, dado $(x_0, y_0) \in D$ existe al menos una solución del sistema diferencial que satisface el problema del valor inicial para $(x_0, y_0)$.

**1.3. LEMA:** (Desigualdad de Hurewicz).

Consideremos el sistema diferencial $y' = F(x,y)$ donde $F: D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es continua y acotada en $D$. Supongamos además que $F$ es lipschitziana en $D$ respecto de la variable vectorial $y$. Sean $\pi_1$ y $\pi_2$ soluciones $\varepsilon_1$ y $\varepsilon_2$-aproximadas definidas en un intervalo $I$ de $\mathbb{R}$. Sea $x_0 \in I$. Entonces

$$\forall x \in I, \ \|\pi_1(x) - \pi_2(x)\| \leq e^{\lambda|x-x_0|} \|\pi_1(x_0) - \pi_2(x_0)\| + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\lambda}\left(e^{\lambda|x-x_0|} - 1\right).$$

**1.4. TEOREMA:** (de Picard-Lipschitz)

Sea el sistema diferencial $y' = F(x,y)$ donde $F: D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es continua y acotada en $D$ y lipschitziana en $D$ respecto de la variable vectorial $y$. Entonces para cada punto $(x_0, y_0) \in D$ existe "una única" solución del sistema diferencial que pasa por $(x_0, y_0)$.

Demostr.: Sea $H = \|F\|_\infty = \sup_{(x,y) \in D} \|F(x,y)\|$, donde $\|\cdot\|$ es una norma en $\mathbb{R}^n$.

Sea $\delta > 0$ tal que $\delta < \min\left(\frac{d((x_0,y_0), Fr(D))}{\sqrt{1+nH^2}}, \frac{1}{n\lambda}\right)$

Sea $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ y $C^*(I, \mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{C}_\infty(I, \mathbb{R}^n) / \forall x \in I, \|f(x) - y_0\| \leq H\delta\}$.

Se prueba que $C^*(I, \mathbb{R}^n)$ es un subespacio métrico completo de $\mathcal{C}_\infty(I, \mathbb{R}^n)$.

Definimos la transformación

$$T: C^*(I, \mathbb{R}^n) \longmapsto C^*(I, \mathbb{R}^n)$$
$$f \longmapsto Tf$$

donde $Tf: x \in I \longmapsto Tf(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} [F_1(t, f_1(t), \dots, f_n(t)), \dots, F_n(t, f_1(t), \dots, f_n(t))]\, dt$

Se demuestra que $T$ está bien definida y es contractiva.

Entonces existe una única función $f^* \in C^*(I, \mathbb{R}^n)$ tal que $Tf^* = f^*$.

Por tanto

$$\forall x \in I, \ f^*(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, f^*(t))\, dt.$$

Por tanto, según lema 1.1, $f^*$ es una solución del sistema diferencial que satisface las condiciones iniciales $(x_0, y_0)$. c.s.q.d.

**OBSERVACION:** Las hipótesis más débiles bajo las cuales se sigue verificando el teorema son la continuidad y el caracter lipschitziano de de la función $F$.

## 2. ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN $n$ EN FORMA NORMAL.

* Vamos a reducir el estudio de una E. D. de orden $n$ al estudio de un sistema diferencial equivalente a ella en un sentido que ya precisaremos.

Sea $F_n: D \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un dominio $D$ de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Llamamos E.D. de orden $n$ en forma normal a una expresión de la forma

$$y^{(n)} = F_n(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

donde $y^{(k)} = \dfrac{d^k y}{dx^k}$.

DEFINICION: Se dice que la función $f: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es solución de la E.D. si

1) $\forall x \in I$, existe $f^{(n)}(x)$.

2) $\forall x \in I$, $(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)) \in D$ y $f^{(n)}(x) = F_n(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x))$.

Si además $f(x_0) = y_0$, $f'(x_0) = y'_0, \ldots, f^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ se dice que $f$ es una solución relativa a las condiciones iniciales $(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)})$.

EJEMPLO: Una E.D. de orden 2 en forma implícita es una expresión de la forma $\phi(x, y, y', y'') = 0$ donde $\phi: C \subset \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Las E.D. de orden 2 de la forma $\phi(x, y', y'') = 0$ pueden reducirse a la resolución de dos E.D. de 1er orden.

Hacemos el cambio $y' = p$. Entonces $y'' = \dfrac{dp}{dx}$. Por tanto, la E.D. es $\phi(x, p, \dfrac{dp}{dx}) = 0$ que es una E.D. de 1er orden.

Si resolvemos esta ecuación diferencial, despues tendremos que resolver la E.D. $\dfrac{dy}{dx} = p$, que tambien es de 1er orden.

Vamos a resolver por ejemplo la E.D. $xy'' - y' = 3x^2$.

Haciendo $y' = p$ queda $x\dfrac{dp}{dx} - p = 3x^2$ que es una E.D. lineal.

Resolviendola tenemos $p = 3x^2 + C_1 x$

Resolviendo ahora $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 + C_1 x$ tenemos $y = x^3 + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2$

Como vemos la solución de una ED de orden 2 depende de dos parámetros. En general, las soluciones de una E.D. de orden $n$ dependerán de $n$ parámetros.

**2.1. TEOREMA**: (Existencia y unicidad de soluciones de E.D. de orden $n$).

Dada la E.D. de orden $n$ $y^{(n)} = F_n(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, donde $F_n$ es una función real continua definida en un dominio $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Supongamos además que $F_n$ es localmente lipschitziana en $D$ respecto de las variables $y, y', \dots, y^{(n-1)}$. Entonces dado $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in D$ existe una única solución de la E.D. relativa al correspondiente problema de Cauchy.

Demostr.: Hagamos $y = y_1, y' = y_2, \dots, y^{(n-1)} = y_n$. Consideremos el siguiente Sistema diferencial:

$$(I) \begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_3 \\ y'_3 = y_4 \\ \dots\dots \\ y'_{n-1} = y_n \\ y'_n = F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

La función $F$ que define este sistema diferencial son:

$F_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = y_2$, $F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = y_3, \dots, F_{n-1}(x, y_1, \dots, y_n) = y_n$ y $F_n(x, y_1, \dots, y_n)$

La función $F$ es continua en $D$, y localmente lipschitziana respecto de $y_1, y_2, \dots, y_n$. Entonces, dada la condición inicial $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ existe una función $f: [x_0-\delta, x_0+\delta] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ que es solución del sistema diferencial y verifica que, supuesto $f = (f_1, \dots, f_n)$,

$f_1(x_0) = y_0$, $f_2(x_0) = y'_0, \dots, f_n(x_0) = y_0^{(n-1)}$

Sea $I = [x_0-\delta, x_0+\delta]$. Por ser $f$ solución de este sistema diferencial se verifica que, $\forall x \in I$,

$f'_1(x) = f_2(x)$, $f''_1(x) = f'_2(x) = f_3(x), \dots, f_1^{(n-1)}(x) = f_n(x)$.

Luego $f = (f_1, f'_1, f''_1, \dots, f_1^{(n-1)})$ y $f_1^{(n)}(x) = F_n(x, f_1(x), f'_1(x), \dots, f_1^{(n-1)}(x)), \forall x \in I$.

Además, $f_1^{(i)}(x) = y_0^{(i)}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Por tanto, la función $f_1: I \to \mathbb{R}$ es solución de la E.D de orden $n$ verificando el correspondiente problema de Cauchy.

Veamos que $f_1$ es única (en sentido local).

Supongamos que $g_1: [x_0-\delta_1, x_0+\delta_1] \to \mathbb{R}$ es otra solución de la E.D. de orden $n$ que verifica las condiciones iniciales dadas.

Sea $\delta_0 = \min(\delta, \delta_1)$. Veamos que $f_1(x) = g_1(x)$, $\forall x \in [x_0-\delta_0, x_0+\delta_0]$

Trivialmente $(g_1, g'_1, \dots, g_1^{(n-1)})$ es solución del S.D. (I) (sistema dife-

rencial) relativa a las condiciones iniciales $(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)})$.
Puesto que la solución $f=(f_1, f_1', \ldots, f_1^{(n-1)})$ tiene la propiedad de unicidad local se verifica que
$\forall x\in[x_0-\delta_0, x_0+\delta_0]$, $(f_1(x), f_1'(x), \ldots, f_1^{(n-1)}(x)) = (g_1(x), g_1'(x), \ldots, g_1^{(n-1)}(x))$
y por tanto, $\forall x\in[x_0-\delta_0, x_0+\delta_0]$, $f_1(x)=g_1(x)$. csqd.

* Veamos ahora unos teoremas relativos a la regularidad de las soluciones de sistemas diferenciales y ecuaciones diferenciales de orden $n$.

2.2. TEOREMA: Sea el sistema diferencial $y'=F(x,y)$, donde $F$ es una función definida en un dominio $D$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ y valorada en $\mathbb{R}^n$. Sea $f: I\to\mathbb{R}^n$ una solución de dicho sistema diferencial. Entonces, si $F$ es de clase $K$ en $D$ se verifica que $f$ es de clase $K+1$ en $I$.

Demostr.: Siendo $f$ solución del S.D. se verifica que
$\forall x\in I$, $f'(x)=F(x,f(x))$.
Probemos el teorema por inducción sobre la clase de $F$.
- Si $K=0$, $F$ es continua en $D$. Por tanto, la función $f'$ es continua en $I$, ya que $F$ es continua, por hipótesis, y $f$ es continua (aún más, derivable) por ser solución del S.D. Luego $f$ es de clase 1 en $I$.
- Supongamos que es cierta la implicación:

$$F\in\mathcal{C}^n(D) \Rightarrow f\in\mathcal{C}^{n+1}(I)$$

Probemos que si $F\in\mathcal{C}^{n+1}(D)$ entonces $f\in\mathcal{C}^{n+2}(I)$.
Si $F\in\mathcal{C}^{n+1}(D)$, entonces $F\in\mathcal{C}^n(D)$ y por tanto $f\in\mathcal{C}^{n+1}(I)$.
Luego siendo $F$ y $f$ de clase $n+1$ se verifica que $f'$ es de clase $n+1$ en $I$, pues $f'(x)=F(x,f(x))$, $\forall x\in I$. Luego $f$ es de clase $n+2$ en $I$. csqd.

2.3. COROLARIO: **Sea** la E.D. de orden $n$, $y^{(n)}=F_n(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})$, donde $F_n$ es una función real definida en un dominio $D\subset\mathbb{R}^{n+1}$. Sea $f: I\to\mathbb{R}$ una solución de la E.D. Entonces se verifica la siguiente implicación

$$F_n\in\mathcal{C}^K(D) \Rightarrow f\in\mathcal{C}^{K+n}(I).$$

Demostr.: Si $f$ es solución de la E.D $y^{(n)}=F_n(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})$, entonces $(f,f',\ldots,f^{(n-1)})$ es solución del S.D. $y'=F(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)$, donde $F=(F_1,F_2,\ldots,F_n)$ y
$F_1(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)=y_2$, $F_2(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)=y_3$, $\ldots$, $F_{n-1}(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)=y_n$. (*)
La función $F$ es de clase $K$, pues $F_n$ es de clase $K$ y $F_i$ es de clase infinito para $i\in\{1,\ldots,n-1\}$. Luego $(f,f',\ldots,f^{(n-1)})$ es de clase $K+1$. Por tanto $f^{(n-1)}$

de clase $k+1$ en $I$, que prueba que $f$ es de clase $(n-1)+(k+1) = k+n$ en $I$, csqd.