TEMA 4º: SOLUCIONES MAXIMALES. PROLONGACION DE SOLUCIONES.

En los dos últimos temas hemos dado unas hipótesis bajo las cuales, dadas unas condiciones iniciales, se garantizaba la existencia de un intervalo cerrado y la existencia y unicidad de una solución de un sistema diferencial definida en dicho intervalo que satisface dichas condiciones iniciales, sin determinar si aquel es el mayor intervalo en el cual podemos definir dicha solución. De esta cuestión trata este tema.

Estudiaremos las soluciones maximales de sistemas diferenciales; el estudio "teórico" de las soluciones de E.D. de cualquier orden se puede reducir, como ya sabemos, al estudio de un S.D. particular.

1. Introducción: prolongación de soluciones

Consideremos el S.D. $y'=F(x,y)$ donde F es una función definida en un dominio $D\subset\mathbb{R}^{n+1}$ y valorada en $\mathbb{R}^n$. Supongamos que F es continua en D, es decir, $F\in\mathcal{C}(D,\mathbb{R}^n)$, y que F es localmente lipschitziana en D respecto de la variable vectorial y, es decir, $F\in L_{loc}(D,y)$. Entonces dado un punto $(x_0,y_0)\in D$ existe un intervalo $I_0=[x_0-\delta_0,x_0+\delta_0]$ y existe una función $f_0: I_0\to\mathbb{R}^n$ que es solución del S.D y verifica que $f_0(x_0)=y_0$. Además, esta función f_0 es única en el sentido que ya definimos en el tema anterior.

Sea $x_1=x_0+\delta_0$ e $y_1=f_0(x_0+\delta_0)$. Entonces $(x_1,y_1)\in D$ y por tanto existe un intervalo $I_1=[x_1-\delta_1,x_1+\delta_1]$ y existe una función $f_1: I_1\to\mathbb{R}^n$ que es solución del S.D, satisface las condiciones iniciales (x_1,y_1) y tiene la propiedad de unicidad local.

Definimos la función

$$f: x\in I_0\cup I_1 \longmapsto f(x)=\begin{cases} =f_0(x) \text{ si } x\in I_0 \\ =f_1(x) \text{ si } x\in I_1\end{cases}$$

Veamos que f está bien definida; se pueden presentar problemas si en un punto $x\in I_0\cap I_1$ f tomase dos valores; probemos que esto no es posible, es decir, que $f_0(x)=f_1(x)$, $\forall x\in I_0\cap I_1$.

Supongamos que $\exists x'\in I_0\cap I_1$ / $f_0(x')\neq f_1(x')$. Consideremos la función

$$g_1: x\in I_1 \mapsto g_1(x)=\begin{cases} =f_1(x) \text{ si } x\neq x' \\ =f_0(x) \text{ si } x=x'\end{cases}$$

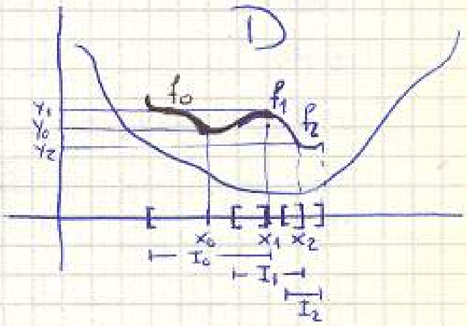
Puesto que f_0 y f_1 son soluciones del S.D. se tiene que g_1 es solución del S.D. Además g_1 pasa por (x_1,y_1) (pues $x_1\neq x'$, ya que $f_0(x_1)=f_1(x_1)=y_1$). Puesto que f_1 y g_1 no coinciden en I_1, llegamos a una contradicción con la propiedad de unicidad local de f_1. Por tanto, debe ser $f_0(x)=f_1(x)$, $\forall x\in I_0\cap I_1$

Luego f está bien definida. Además f es solución del S.D., pues $\forall x \in I_0 \cup I_1$, $x \in I_0$ ó $x \in I_1$ y por tanto

$$f'(x) = f_0'(x) = F(x, f_0(x)) = F(x, f(x)) \text{ ó}$$
$$f'(x) = f_1'(x) = F(x, f_1(x)) = F(x, f(x)).$$

Además f satisface el problema del valor inicial correspondiente a las condiciones iniciales (x_0, y_0).

Análogamente, haciendo $x_2 = x_1 + \delta_1$ e $y_2 = f_1(x_1 + \delta_1)$ tenemos que $(x_2, y_2) \in D$ y por tanto podríamos seguir prolongando la solución f. La pregunta es hasta cuando podemos prolongar la solución.



A la "mayor prolongación posible" la llamaremos solución maximal del S.D verificando unas condiciones iniciales dadas, y parece intuitivamente evidente que, siendo D abierto, la solución maximal no podrá estar definida en un cerrado.

2. Soluciones maximales: Existencia y unicidad.

Definición: Sea el S.D. $y' = F(x,y)$ donde $F \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n)$. Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de las soluciones del S.D. definidas sobre intervalos de la recta. Sean $f: I \to \mathbb{R}^n$ y $\tilde{f}: J \mapsto \mathbb{R}^n$ elementos de $\mathcal{S}$. Diremos que $\tilde{f}$ prolonga a f, y escribiremos $\tilde{f} \geq f$, si se verifican las dos condiciones siguientes:

1) $I \subset J$.
2) $\tilde{f}(x) = f(x)$, $\forall x \in I$.

Se prueba fácilmente que $(\mathcal{S}, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Definición: Diremos que f es una solución maximal del S.D. $y' = F(x,y)$ si f es un elemento maximal en $(\mathcal{S}, \leq)$, es decir, si $\tilde{f} \in \mathcal{S}$ es tal que $\tilde{f} \geq f$ necesariamente debe ser $\tilde{f} = f$.

Daremos ahora dos demostraciones del teorema de existencia de soluciones maximales: una basada en el Lema de Zorn y otra en la que construiremos dicha solución maximal.

2.1. Teorema: (de existencia de soluciones maximales).

Sea $y' = F(x,y)$ un S.D de forma que $F \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n)$ (*).
Entonces en $(\mathcal{S}, \leq)$ existe, al menos, un elemento maximal.

Demostr.: Probaremos que en $(S, \leq)$ toda cadena (parte totalmente ordenada) admite una cota superior y el lema de Zorn garantiza la existencia de un elemento maximal.

Sea $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una cadena en $(S, \leq)$. Supongamos que f_α está definida en un intervalo I_α y valorada en $\mathbb{R}^n$, para cada $\alpha\in\Lambda$. Siendo $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una cadena se deduce que $I = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha$ es un intervalo.

Definimos $f: I \to \mathbb{R}^n$ de la siguiente forma:

$$f(x) = f_\alpha(x) \text{ si } x\in I_\alpha.$$

Veamos que f está bien definida: Sea $x \in I_{\alpha_1} \cap I_{\alpha_2}$. Dados $\alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda$ se tiene que $f_{\alpha_1} \leq f_{\alpha_2}$ ó $f_{\alpha_1} \geq f_{\alpha_2}$. Si $f_{\alpha_1} \leq f_{\alpha_2}$ entonces $I_{\alpha_1} \subset I_{\alpha_2}$ y $f_{\alpha_1}(x) = f_{\alpha_2}(x)$, $\forall x \in I_{\alpha_1}$. Si $f_{\alpha_1} \geq f_{\alpha_2}$, se prueba análogamente.

Veamos que $f\in S$: $\forall x\in I, \exists \alpha\in\Lambda / x\in I_\alpha$. Entonces $f'(x) = f'_\alpha(x) = F(x, f_\alpha(x)) = F(x, f(x))$

Trivialmente f es una cota superior de $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$.

Por tanto, existe al menos un elemento maximal en $(S, \leq)$. c.s.q.d.

<u>DEFINICION</u>: (Prolongaciones a la derecha y a la izquierda de una solución).

Sea un S.D. $y' = F(x,y)$ y $f:]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}^n$ una solución del mismo. Se dice que $\tilde{f}:]\alpha, \tilde{\beta}[\to \mathbb{R}^n$ es una prolongación a la derecha de f si $\beta \leq \tilde{\beta}$ y $f(x) = \tilde{f}(x)$, $\forall x\in]\alpha, \beta[$. Si $\beta < \tilde{\beta}$ se dice que $\tilde{f}$ prolonga estrictamente a f por la derecha. La definición de prolongación a la izquierda de una solución es análoga.

<u>DEFINICION</u>: (Trayectoria de una solución)

Sea $y' = F(x,y)$ un S.D. y $f: I \to \mathbb{R}^n$ una solución definida en el intervalo I. Se define la trayectoria de f relativa a I como el conjunto

$$\overline{G} = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} / x\in I\}$$

<u>OBSERVACION</u>: La definición de prolongación lateral es análoga si el intervalo en que está definida f es cerrado o semiabierto, pero el caso interesante es aquel en el que el intervalo es abierto, pues las soluciones maximales están definidas en intervalos abiertos. Denotaremos que $\tilde{f}$ prolonga a f a la derecha por $f \leq_d \tilde{f}$.

Probemos entonces el siguiente

<u>2.2. TEOREMA</u>: Sea el S.D. $y' = F(x,y)$ donde F es continua. Entonces la trayectoria de cualquier solución está contenida en la trayectoria de una solución maximal.

Demostr.: Sea $f_0 :]\alpha_0, \beta_0[\to \mathbb{R}^n$ una solución del S.D.
Vamos a construir por recurrencia una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ de soluciones del S.D. tales que $f_0 \leq_d f_1 \leq_d f_2 \leq \dots \leq_d f_K \leq \dots$ Supuesto construida $f_K :]\alpha_0, \beta_K[\to \mathbb{R}^n$ para $K \geq 0$, vamos a construir f_{K+1}.

Consideremos el conjunto

$$B_K = \{\beta \,/\, \text{existe una prolongación a la derecha de } f_K \text{ definida en }]\alpha_0, \beta[\}.$$

Pueden darse los siguientes casos:

① B_K no está acotado superiormente. Entonces existe una prolongación f a la derecha de f_K definida en $]\alpha_0, +\infty[$. Esta solución no se puede prolongar más a la derecha. Tomaríamos entonces $f_p = f$, $\forall p > K$.

② B_K está acotado superiormente. Siendo $B_K \neq \emptyset$, pues $\beta_K \in B_K$, existe

$$b_K = \sup B_K.$$

2.1) Si $b_K = \beta_K$, entonces no existe prolongación estricta a la derecha de f_K. Tomaríamos en este caso $f_p = f_K$, $\forall p \geq K$.

2.2.) Puede ocurrir que $\beta_K < b_K$. Entonces, por definición de b_K, dado $\frac{1}{k} > 0$, existe $\beta_{K+1} \in B_K$ tal que $b_K - \frac{1}{K} < \beta_{K+1} \leq b_K$. (I)

Tenemos entonces que $b_K - \frac{1}{k} < \beta_{K+1} \leq b_K$ y existe una prolongación f_{K+1} a la derecha de f_K definida en $]\alpha_0, \beta_{K+1}[$. Por supuesto, $\beta_{K+1} \geq \beta_K$

En los casos ① y 2.1), cualquier f_p, $p > K$, es una "solución maximal por la derecha" que contiene la trayectoria de f_0.

En el caso 2.2.) definimos

$$f : \bigcup_{K=0}^{\infty}]\alpha_0, \beta_K[\longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$x \longmapsto f(x) = f_K(x) \text{ si } x \in]\alpha_0, \beta_K[$$

Se demuestra trivialmente que f está bien definida y que f es una solución del S.D. que prolonga a las f_K por la derecha.

$\bigcup_{K=0}]\alpha_0, \beta_K[$ es un intervalo abierto de la forma $]\alpha_0, \beta^*[$.

Como $f :]\alpha_0, \beta^*[\to \mathbb{R}^n$ prolonga a la derecha a cualquier f_K, se tiene que $\beta^* \in B_K$, $\forall K$. Como estamos suponiendo que B_K está acotado superiormente, se deduce que β^* es finito

Se **verifica** que $\forall K \in \mathbb{N}_0$, $b_K - \frac{1}{k} < \beta_{K+1} \leq \beta^* \leq b_K$, y esto se deduce de (I), de la definición de β^* y de que $\beta^* \in B_K$, y por tanto, $\beta^* \leq b_K$. Luego $\lim_k b_K = \beta^*$.

Probamos entonces que f no admite prolongación estricta por la derecha, es decir, que si $\tilde{f} :]\alpha_0, \tilde{\beta}[\to \mathbb{R}^n$ es solución del S.D. tal

que $\tilde\beta \geq \beta^*$ y $\tilde f(x) = f(x)$, $\forall x \in]x_0, \beta^*[$, entonces $\tilde\beta = \beta^*$.
Como $\tilde f$ prolonga a f por la derecha, se tiene que $\tilde f$ prolonga a f_K por la derecha, para cualquier $K \in \mathbb{N}_0$. Por tanto, $\tilde\beta \in B_K$, $\forall K \in \mathbb{N}_0$, que prueba que $\tilde\beta \leq b_K$, $\forall K \in \mathbb{N}_0$. Debe ser entonces $\tilde\beta \leq \lim_k b_K = \beta^*$.
Luego $\tilde\beta = \beta^*$, como queríamos probar.
Hemos construido así una "prolongación maximal a la derecha de f_0".
Análogamente se obtendría una "prolongación maximal a la izquierda de f_0". Si $\bar f :]\bar\beta^*, \beta_0[\to \mathbb{R}^n$ es dicha prolongación maximal a la izquierda de f_0, entonces la función

$$g :]\bar\beta^*, \beta^*[\longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$x \longmapsto g(x) = \begin{cases} = f(x) \text{ si } x \in]x_0, \beta^*[\\ = \bar f(x) \text{ si } x \in]\bar\beta^*, \beta_0[\end{cases}$$

es una solución maximal del S.D cuya trayectoria contiene a la de f_0. csqd.

2.3. TEOREMA: (Unicidad de soluciones maximales).

Sea $F : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ una función continua y localmente lipschitziana respecto de y en el dominio D. Entonces, dado $(x_0, y_0) \in D$, existe una única solución maximal del S.D. que pasa por (x_0, y_0).

Demostr.: EXISTENCIA: Siendo F continua, en virtud del teorema de Cauchy-Peano existe un $\delta > 0$ y una función $f : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbb{R}^n$ que es solución del S.D. y pasa por (x_0, y_0). Entonces, por el teorema anterior, existe una solución maximal cuya trayectoria contiene a la de f y, por tanto, existe una solución maximal que pasa por (x_0, y_0).
UNICIDAD: Supongamos que $f_1 : I \to \mathbb{R}^n$ y $f_2 : J \to \mathbb{R}^n$ son soluciones maximales del S.D. que pasan por (x_0, y_0). Probaremos que f_1 y f_2 coinciden en $I \cap J$ y luego probaremos que $I = J$, con lo cual quedará terminada la demostración.
Los teoremas locales de unicidad de soluciones aseguran la existencia de $\delta' > 0$ tal que $f_1(x) = f_2(x)$, $\forall x \in [x_0 - \delta', x_0 + \delta']$, pues $f_1(x_0) = f_2(x_0) = y_0$.
Veamos que $f_1(x) = f_2(x)$, $\forall x \in I \cap J$.
Consideremos el conjunto

$$A = \{x \in I \cap J \,/\, x > x_0,\ f_1(x) \neq f_2(x)\}$$

Probemos por reducción al absurdo que $A = \emptyset$.
Supongamos que $A \neq \emptyset$. Entonces, como A está acotado inferiormente por x_0, existe $\bar x = \inf A$. Se verifica que $\bar x > x_0$, pues $\bar x \geq x_0 + \delta'$.

Además $f_1(\bar{x}) = f_2(\bar{x})$, pues si $f_1(\bar{x}) \neq f_2(\bar{x})$, al ser f_1 y f_2 continuas, existiría un entorno $V(\bar{x})$ de $\bar{x}$ tal que $f_1(x) \neq f_2(x)$, $\forall x \in V(\bar{x})$, y por tanto, existiría $x \in A$ tal que $x < \bar{x}$, en contra de que $\bar{x} = \inf A$.

Sea entonces $f_1(\bar{x}) = f_2(\bar{x}) = \bar{y}$.

Como f_1 y f_2 son soluciones del S.D. que pasan por $(\bar{x}, \bar{y})$, y F es continua y localmente lipschitziana, el teorema de Picard-Lipschitz asegura la existencia de $\delta > 0$ tal que $f_1(x) = f_2(x)$, $\forall x \in [\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta]$. Por tanto, $\bar{x} + \delta$ sería una cota inferior de A, en contra de que $\bar{x} = \inf A$.

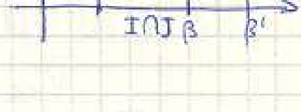
Por tanto, debe ser $A = \emptyset$.

Análogamente se prueba que $\{x \in I \cap J / x < x_0, f_1(x) \neq f_2(x)\} = \emptyset$.

Como consecuencia se tiene que $\forall x \in I \cap J$, $f_1(x) = f_2(x)$.

Veamos ahora que $I = J$. I y J deben ser intervalos abiertos, pues de lo contrario, f_1 y f_2 se podrían prolongar estrictamente, por el teorema de Picard-Lipschitz. Sea $I =]\alpha, \beta[$ y $J =]\alpha', \beta'[$.

Supongamos que $\beta' > \beta$. Entonces f_1 admitiría una prolongación estricta a la derecha, en contra de que f_1 es maximal.



Por tanto, $\beta = \beta'$. Análogamente, $\alpha = \alpha'$.

Luego $f_1 = f_2$. c.s.q.d.

<u>DEFINICION</u>: (prolongación de una solución a través de un punto).

Sea el S.D. $y' = F(x, y)$. Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una solución del S.D. Sea b un punto de la frontera de I ($b \in \operatorname{Fr}(I)$). Se dice que una solución $\tilde{f} : J \to \mathbb{R}^n$ del S.D. es una prolongación de f a través del punto b si se verifica lo siguiente:

i) $b \in J$.

ii) $\tilde{f} \geq f$.

<u>OBSERVACION</u>: El caso más importante se tiene cuando I es abierto, pues si I es cerrado, $(b, f(b)) \in D$ y podríamos prolongar f por los teoremas locales de existencia y unicidad.

<u>DEFINICION</u>: (semitrayectorias a la derecha y a la izquierda de una solución).

Sea $y' = F(x, y)$ un S.D. y $f : I \to \mathbb{R}^n$ una solución del mismo que pasa por (x_0, y_0). La semitrayectoria a la derecha es

$$\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} / x \in I, x \geq x_0\}$$

y la semitrayectoria de f a la izquierda es

$$\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} / x \in I, x \leq x_0\}.$$

DEFINICION: (Terminales derecho e izquierdo de una solución).
Sea $y' = F(x,y)$ un S.D. y $f:]a,b[\to \mathbb{R}^n$ una solución del S.D, donde $a, b \in \mathbb{R}$. Se define el terminal derecho de f como la intersección de la adherencia de la trayectoria de f con el conjunto de los puntos (x,y) tales que $x=b$, es decir

$$T^+ = \overline{G} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} / x = b\}$$

Análogamente, el terminal izquierdo es

$$T^- = \overline{G} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} / x = a\}.$$

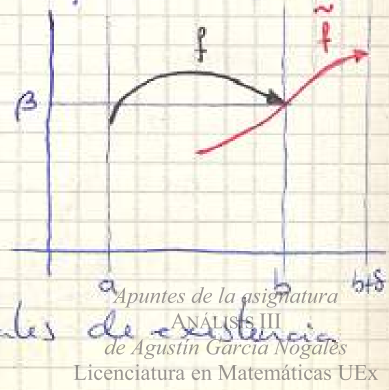
2.4. TEOREMA: Sea el S.D. $y' = F(x,y)$ donde F es continua ~~y~~ localmente lipschitziana en el dominio $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Sea $f:]a,b[\to \mathbb{R}^n$ una solución del S.D.
a) f se puede prolongar a través del punto b si, y solo si, $T^+ \cap D \neq \emptyset$.
b) f se puede prolongar a través del punto a si, y solo si, $T^- \cap D \neq \emptyset$.

Demostr.: Demostraremos solamente el apartado a). La demostración del apartado b) es análoga.

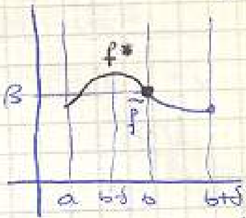
$\Rightarrow$ | Si f se puede prolongar a través del punto b, entonces existe una solución del S.D. $\tilde{f}: J \to \mathbb{R}^n$ tal que $J \supset]a,b]$ y $\tilde{f}(x) = f(x)$, $\forall x \in]a,b[$.
Como $\tilde{f}$ es continua en b, existe $\lim\limits_{x \to b-} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(b) \in \mathbb{R}^n$.
Sea $\beta = \tilde{f}(b)$. Entonces, $(b,\beta) \in D$, pues $\tilde{f}$ está definida, al menos, en $]a,b]$ y es solución del S.D.
Además, $\tilde{f}(x) = f(x)$, $\forall x \in]a,b[$. Luego $\lim\limits_{x\to b-} \tilde{f}(x) = \lim\limits_{x \to b-} f(x)$.
Es decir, $\beta = \lim\limits_{x \to b-} f(x)$.

Por tanto, $(b,\beta) \in \overline{G}$. Luego $(b,\beta) \in T^+$.
En definitiva, $(b,\beta) \in T^+ \cap D$, que prueba que $T^+ \cap D \neq \emptyset$.

$\Leftarrow$ | Supongamos que $T^+ \cap D \neq \emptyset$. Sea $(b,\beta) \in T^+ \cap D$.
Como $(b,\beta) \in D$, $\exists!\, \tilde{f}: [b-\delta, b+\delta] \to \mathbb{R}^n$ solución del S.D. tal que $\tilde{f}(b) = \beta$.
Sin embargo, a partir de esta función $\tilde{f}$ no podemos asegurar que ~~se~~ pueda construir una prolongación de f, pues en principio podría ocurrir (después probaremos que no) que $\forall x \in]a,b[\cap [b-\delta, b+\delta]$, $f(x) \neq \tilde{f}(x)$, como se ve en la figura, sin que esto contradiga los teoremas locales de existencia



y unicidad.



Consideremos la función

$$f^*: x \in]a,b] \longmapsto f^*(x) = \begin{cases} = f(x) & \text{si } x \in]a,b[\\ = \beta & \text{si } x = b. \end{cases}$$

Si probamos que f^* es solución del S.D., entonces necesariamente deberá ser $f^*(x) = \tilde{f}(x)$, $\forall x \in]a,b[\cap]b-\delta, b+\delta[$, pues de lo contrario pasarían dos soluciones por el punto (b,β). Quedaría entonces probado el teorema, pues f se podría prolongar a traves del punto b.

Probemos entonces que f^* es solución del S.D.

① f^* es continua en b (por la izquierda, por supuesto). Basta probar que cualquiera que sea la sucesión $\{x_k^*\}_k$ de puntos de $]a,b[$ tal que $\lim_k x_k^* = b$ se verifica que $\lim_k f^*(x_k^*) = \beta$, o bien, $\lim_k f(x_k^*) = \beta$.

Como $(b,\beta) \in T^+$, existe una sucesión $\{x_k\}_k$ de puntos de $]a,b[$ tal que $\lim_k x_k = b$ y $\lim_k f(x_k) = \beta$.

Además, siendo D un dominio y $(b,\beta) \in D$, existen $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ tales que

$$C_1 = \{x / |x-b| \leq \alpha_1\} \times \{y \in \mathbb{R}^n / \|y-\beta\| \leq \alpha_2\} \subset D. \quad (*)$$

Siendo F continua en D, es continua en C_1, y siendo C_1 compacto se verifica que $H = \sup_{(x,y)\in C_1} \|F(x,y)\| < +\infty$.

Sea $\delta = \min(\alpha_1, \frac{\alpha_2}{H})$. Consideremos el tonel

$$C = \{x \in \mathbb{R} / |x-b| \leq \delta\} \times \{y \in \mathbb{R}^n / \|y-\beta\| \leq H\delta\}.$$

Se verifica trivialmente que $C \subset C_1$.

Puesto que $(b,\beta) \in T^+$ y $T^+ \subset \overline{G}$, existe $(b_1, f(b_1)) \in G$ tal que

$$|b_1 - b| < \delta/3 \quad \text{y} \quad \|f(b_1) - \beta\| < H\delta/3.$$

Se verifica entonces que $b_1 < b$, por pertenecer (b,β) al terminal derecho.

Consideremos el tonel

$$C^* = \{x \in \mathbb{R} / |x - b_1| \leq \tfrac{2\delta}{3}\} \times \{y \in \mathbb{R}^n / \|y - f(b_1)\| \leq 2H\delta/3\}$$

Trivialmente, $C^* \subset C$.

Probaremos al final de esta demostración que

$$\forall x \in [b_1, b[, \ (x, f(x)) \in C^*. \quad (\mathrm{I})$$

Podemos suponer sin perder generalidad que $\{x_k\}_k$ y $\{x_k^*\}_k$ son sucesiones de puntos de $[b_1, b[$. En este intervalo, f es derivable, por ser solución del S.D. en dicho intervalo. Luego, por el teorema del valor medio se tiene que

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \exists \tilde{x}_k \in I(x_k, x_k^*) \ / \ \|f(x_k) - f^*(x_k^*)\| \leq \|f'(\tilde{x}_k)\| \, |x_k - x_k^*|$$

donde $I(x_k, x_k^*)$ es el intervalo abierto determinado por x_k y x_k^*. Como $I(x_k, x_k^*) \subset [b_1, b[$ se tiene por (I) que
$\forall k \in \mathbb{N}, (\tilde{x}_k, f(\tilde{x}_k)) \in C^* \subset C \subset C_1$, y por tanto
$\forall k \in \mathbb{N}, \|f'(\tilde{x}_k)\| = \|F(\tilde{x}_k, f(\tilde{x}_k))\| \leq H$.
Luego $\forall k \in \mathbb{N}, \|f(x_k) - f(x_k^*)\| \leq H |x_k - x_k^*|$
Pero $\lim_k x_k = \lim_k x_k^* = b$. Luego
$\forall \varepsilon > 0, \exists K_0 \in \mathbb{N} / k \geq K_0 \Rightarrow |x_k - x_k^*| < \varepsilon/2H$.
Luego si $k \geq K_0$, $\|f(x_k) - f(x_k^*)\| < \varepsilon/2$
Como $\lim_k f(x_k) = \beta$, existe $K_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq K_1$ entonces $\|f(x_k) - \beta\| < \varepsilon/2$
Por tanto, tomando $K_2 = \max(K_0, K_1)$ se verifica que si $k \geq K_2$ entonces $\|f(x_k^*) - \beta\| \leq \|f(x_k^*) - f(x_k)\| + \|f(x_k) - \beta\| < \varepsilon$
que prueba que $\lim_k f(x_k^*) = \beta$.
Por tanto, según se indicó anteriormente, f^* es continua (por la izquierda) en b.

② Probaremos ahora que $\forall x \in]a, b]$, $f^{*\prime}(x) = F(x, f^*(x))$.
Como $f^*(x) = f(x), \forall x \in]a, b[$, y f es solución del S. D. $y' = F(x, y)$ se verifica que $f^{*\prime}(x) = F(x, f^*(x)), \forall x \in]a, b[$.
Probemos entonces que la derivada por la izquierda de f^* en b coincide con $F(b, f^*(b)) = F(b, \beta)$, es decir, que

$$f^{*\prime}(b-) = F(b, \beta)$$

Según ①, $\lim_{x \to b-} f^*(x) = \beta$. Además $\lim_{x \to b-} x = b$. Luego, siendo F continua se verifica que $\lim_{x \to b-} F(x, f^*(x)) = F(b, \beta)$
Pero, $\forall x \in]a, b[$, $F(x, f^*(x)) = F(x, f(x)) = f'(x) = f^{*\prime}(x)$.
Luego $\lim_{x \to b-} f^{*\prime}(x) = F(b, \beta)$.

Probemos entonces que $\lim_{x \to b-} f^{*\prime}(x) = f^{*\prime}(b-)$.

Por definición $f^{*\prime}(b-) = \lim_{h \to 0-} \dfrac{f^*(b+h) - f^*(b)}{h}$.

Dado $h < 0$, f^* es continua en $[b+h, b]$ y derivable en $]b+h, b[$. Luego por el teorema del valor medio existe $t \in]0, 1[$ tal que

$$\frac{f^*(b+h) - f^*(b)}{h} = f^{*\prime}(b + th)$$

Entonces, $f^{*\prime}(b-) = \lim_{h \to 0-} f^{*\prime}(b+th) = \lim_{x \to b-} f^{*\prime}(x)$

Luego $f^{*\prime}(b-) = F(b, \beta)$, como queríamos probar.
Sólo falta probar (I) para terminar la demostración.
Consideremos el conjunto $A = \{x \in [b_1, b[\,/\, (x, f^*(x)) \notin C^*\}$ y supongamos

que $A \neq \emptyset$. Entonces existe $c = \inf A$, pues A está acotado inferiormente por b_1. Se cumple la equivalencia siguiente

$$[x \in [b_1, b[\wedge (x, f^*(x)) \notin C^*] \iff \|f^*(x) - f(b_1)\| > \frac{2H\delta}{3}$$

pues si $x \in [b_1, b[$, $|x - b_1| \leq |b_1 - b| < \frac{\delta}{3} \leq \frac{2\delta}{3}$ y $C^* = \{x / |x - b_1| \leq \frac{2\delta}{3}\} \times \{y / \|y - f(b_1)\| \leq \frac{2H\delta}{3}\}$

Luego $A = \{x \in [b_1, b[\, / \, \|f^*(x) - f(b_1)\| > \frac{2H\delta}{3}\}$

Por tanto, A es abierto, por ser f^* continua en $[b_1, b[$.

Se tiene que $b_1 \leq c$, pues $c = \inf A$ y b_1 es una cota inferior de A.

Probemos que $b_1 < c$.

Si fuese $b_1 = c$, como f^* es continua se verificaría que dado $2H\delta/3$ existiría $\delta_1 > 0$ tal que si $z \in]c - \delta_1, c + \delta_1[$ entonces $\|f^*(z) - f^*(b_1)\| < \frac{2H\delta}{3}$

Se tendría entonces que $]c, c + \delta_1[\cap A = \emptyset$, en contra de que $c = \inf A$.

Luego $b_1 < c$.

Veamos ahora que $c \notin A$. Si $c \in A$, entonces $\|f(c) - f(b_1)\| > \frac{2H\delta}{3}$.

Por tanto, existiría $\delta' > 0$ tal que si $z \in]c - \delta', c + \delta'[$ entonces $\|f(z) - f(b_1)\| > \frac{2H\delta}{3}$.

Se tendría entonces que $]c - \delta', c[\subset A$, en contra de que $c = \inf A$.

Luego $c \notin A$.

Se tiene entonces que $\|f(c) - f(b_1)\| \leq \frac{2H\delta}{3}$.

Veamos que $\|f(c) - f(b_1)\| < 2H\delta/3$, con lo cual $(c, f^*(c))$ estará en el interior de C^*, pues $c \in]b_1, b[$.

$$\|f(c) - f(b_1)\| = \left\| \int_{b_1}^{c} f'(t)\,dt \right\| = \left\| \int_{b_1}^{c} F(t, f(t))\,dt \right\| \leq \int_{b_1}^{c} \|F(t, f(t))\|\,dt$$

Como $c = \inf A$, $\forall t \in [b_1, c[$, $(t, f(t)) \in C^*$ y por tanto

$$\forall t \in [b_1, c[, \|F(t, f(t))\| \leq \sup_{(x,y) \in C^*} \|F(x, y)\| \leq \sup_{(x,y) \in C_1} \|F(x,y)\| = H.$$

Luego $\|f(c) - f(b_1)\| \leq H|c - b_1|$.

Pero $|c - b_1| < |b - b_1| < \frac{2\delta}{3}$. Luego $\|f(c) - f(b_1)\| < \frac{2H\delta}{3}$

Por tanto, $(c, f(c)) \in \overset{\circ}{C^*}$. Luego

$$\exists \delta_2 > 0 \, / \, z \in]c - \delta_2, c + \delta_2[\Rightarrow (z, f(z)) \in C^*.$$

Por tanto, si $z \in]c - \delta_2, c + \delta_2[$, $z \notin A$ y en consecuencia $]c, c + \delta_2[\cap A = \emptyset$ en contra de que c es el ínfimo de A.

Debe ser entonces $A = \emptyset$, y por tanto, $(x, f^*(x)) \in C^*$, $\forall x \in [b_1, b[$. c.s.q.d.

2.5. COROLARIO: Sea $F : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ una función continua y localmente lipschitziana en el dominio D. Sea $f :]a, b[\to \mathbb{R}^n$ una solución del S.D. $y' = F(x, y)$. Las proposiciones siguientes son equivalentes:

a) f es solución maximal. b) $T^+ \cap D = \emptyset$ y $T^- \cap D = \emptyset$. c) $T^+ \subset F(D)$, $T^- \subset F(D)$.

Demostr.: $a) \Leftrightarrow b)$ | Si f es solución maximal, no se puede prolongar ni a través de a ni a través de b y, según el teorema anterior debe ser $T^+ \cap D = \emptyset$ y $T^- \cap D = \emptyset$. Que $b) \Rightarrow a)$ se deduce del teorema anterior.

$b) \Rightarrow c)$ | Se tiene que

$T^+ = \overline{G} \cap \{(x,y) / x = b\}$ y $T^- = \overline{G} \cap \{(x,y) / x = a\}$.

Luego $T^+ \subset \overline{D}$ y $T^- \subset \overline{D}$.

Como $T^+ \cap D = \emptyset$ y $T^- \cap D = \emptyset$, y $\overline{D} = D \cup \mathrm{Fr}(D)$ se verifica que

$T^+ \subset \mathrm{Fr}(D)$ y $T^- \subset \mathrm{Fr}(D)$.

$c) \Rightarrow b)$ | Si $T^+ \subset \mathrm{Fr}(D)$, como $D \cap \mathrm{Fr}(D) = \emptyset$, se verifica que $T^+ \cap D = \emptyset$.

Análogamente $T^- \cap D = \emptyset$. c.s.q.d.

2.6. TEOREMA: Consideremos el dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} / a < x < b\}$. Supongamos que F es continua en D y lipschitziana en D respecto de y. Entonces toda solución maximal del S.D. $y' = F(x,y)$ está definida en $]a,b[$.

Demostr.: Bajo las hipótesis dadas se verifica que dado $(x_0, y_0) \in D$ existe una única solución maximal f que pasa por (x_0, y_0).

Se trata de probar que son vacíos los conjuntos

$A_1 = \{x \in [x_0, b[\,/\, f$ no está definida en $x\}$

$A_2 = \{x \in]a, x_0] \,/\, f$ no está definida en $x\}$.

Supongamos que $A_1 \neq \emptyset$. Como A_1 está acotado inferiormente, existe $\bar{x} = \inf A_1$.

Se tiene que $\bar{x} \in A_1$, pues si $\bar{x} \notin A_1$, f estaría definida en $\bar{x}$, y como $(\bar{x}, f(\bar{x})) \in D$, f podría prolongarse a través de $\bar{x}$, en contra de que f es solución maximal.

Además $x_0 < \bar{x}$, pues f está definida en x_0 y no está definida en $\bar{x}$.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $x_0 < \bar{x} - \varepsilon$ y sea $J_\varepsilon = [x_0, \bar{x} - \varepsilon]$.

Consideremos la función $\tilde{f} : x \in J_\varepsilon \longmapsto \tilde{f}(x) = y_0$.

Se tiene entonces que

$\forall x \in J_\varepsilon$, $\|\tilde{f}'(x) - F(x, \tilde{f}(x))\| = \|F(x, y_0)\|$.

Como F es continua en D, la función $F(\cdot, y_0) : x \in [x_0, \bar{x}] \longmapsto F(x, y_0)$ está acotada, por ser continua en el compacto $[x_0, \bar{x}]$. Sea $M = \sup_{x \in [x_0, \bar{x}]} \|F(x, y_0)\|$.

Como $J_\varepsilon \subset [x_0, \bar{x}]$, se verifica que

$\forall x \in J_\varepsilon$, $\|\tilde{f}'(x) - F(x, \tilde{f}(x))\| \leq M$

que prueba que $\tilde{f}$ es solución M-aproximada del S.D., y pasa por (x_0, y_0).

Aplicando la desigualdad de Hurewicz, se tiene que

$\forall x \in J_\varepsilon$, $\|f(x) - \tilde{f}(x)\| \leq e^{\lambda |x - x_0|} \|f(x_0) - \tilde{f}(x_0)\| + \frac{0 + M}{\lambda} [e^{\lambda |x - x_0|} - 1]$ (*)

donde λ es una constante de Lipschitz para F en D.
Como $\tilde{f}(x) = y_0$, $\forall x \in J_\varepsilon$ y $f(x_0) = y_0$, se verifica que

$\forall x \in J_\varepsilon$, $\|f(x) - y_0\| \leq \frac{M}{\lambda}[e^{\lambda|x-x_0|} - 1]$.

Luego, $\forall x \in J_\varepsilon$, $\|f(x)\| \leq \|y_0\| + \frac{M}{\lambda}[e^{\lambda|x-x_0|} - 1] \leq \|y_0\| + \frac{M}{\lambda}[e^{\lambda|\bar{x}-x_0|} - 1]$
y esto cualquiera que sea $\varepsilon > 0$ tal que $x_0 < \bar{x} - \varepsilon$.
Por tanto, deberá ser

$$\|f(x)\| \leq \|y_0\| + \frac{M}{\lambda}[e^{\lambda|\bar{x}-x_0|} - 1], \ \forall x \in [x_0, \bar{x}[.$$

Por tanto, $\lim_{x \to \bar{x}-} f(x)$ es finito.

Como $\bar{x} < b$, se verificará que $(\bar{x}, \lim_{x\to\bar{x}-} f(x)) \in T^+ \cap D$.

Por tanto, f puede prolongarse a través de $\bar{x}$ y f no sería maximal contra lo supuesto. Será entonces $A_1 = \emptyset$.
Análogamente $A_2 = \emptyset$. c.s.q.d.

* En el caso particular de que el S.D. sea una E.D. de primer orden los terminales derecho e izquierdo de cualquier solución de dicha E.D. son conjuntos conexos en $\mathbb{R}^2$, como prueba el siguiente

2.7. TEOREMA: Dada la E.D. $y' = F(x,y)$, donde F es continua en un dominio D de $\mathbb{R}^2$, para cualquier solución $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ de la misma se verifica que T^+ y T^- son conjuntos conexos en $\mathbb{R}^2$.

Demostr.: Consideraremos que $a, b \in \mathbb{R}$. Por definición

$$T^+ = \overline{\overline{G}} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = b\}.$$

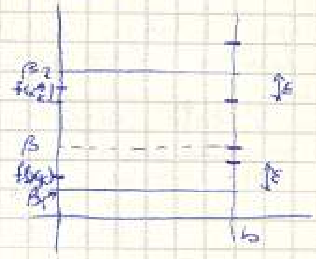
Pueden darse los siguientes casos
1) $T^+ = \emptyset$, como por ejemplo en el caso de que $\lim_{x\to b-} f(x) = \pm\infty$.
El vacío es un conjunto conexo.
2) El terminal derecho se reduce a un punto, es decir, $T^+ = \{(b,\beta)\}$.
Un punto en $\mathbb{R}^2$ es un conjunto conexo. (*)
3) Supongamos que T^+ contiene más de un punto. Probaremos que si $(b,\beta_1), (b,\beta_2) \in T^+$, y $\beta_1 < \beta_2$, entonces para cualquiera que sea (b,β) verificando $\beta_1 < \beta < \beta_2$ se tiene que $(b,\beta) \in T^+$, con lo cual T^+ será "un intervalo sobre la recta $x=b$" que es un conjunto conexo en $\mathbb{R}^2$.
Si $(b,\beta_1) \in T^+$, $\exists \{x_k\}_k \subset]a,b[/ \lim_{k\to\infty} x_k = b \wedge \lim_{k\to\infty} f(x_k) = \beta_1$

Si $(b,\beta_2)\in T^+$, $\exists \{x_k^*\}_k \subset]a,b[\ / \lim_k x_k^* = b \wedge \lim_k f(x_k^*) = \beta_2$.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \min\left(\frac{|\beta-\beta_1|}{2}, \frac{|\beta-\beta_2|}{2}\right)$

Entonces $\exists k_0 \in \mathbb{N} / k \geq k_0 \Rightarrow |f(x_k)-\beta_1| < \varepsilon$ y $|f(x_k^*)-\beta_2| < \varepsilon$.

Entonces si $k \geq k_0$, $f(x_k) < \beta < f(x_k^*)$

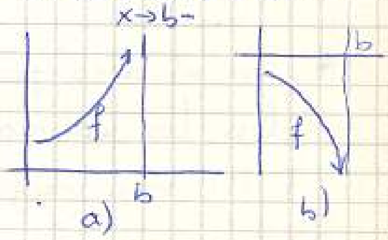


Como f es continua,
$\forall k \geq k_0$, $\exists x_k^{**} \in I(x_k, x_k^*) / f(x_k^{**}) = \beta$
donde $I(x_k, x_k^*)$ es el intervalo abierto determinado por x_k y x_k^*. Tenemos entonces una sucesión $\{x_k^{**}\}_k$ que converge a b tal que $\lim_k f(x_k^{**}) = \beta$, que prueba que $(b,\beta) \in T^+$. c.s.q.d.

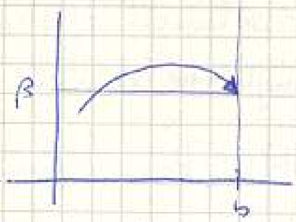
<u>OBSERVACIONES</u>: A) Si $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ es una solución maximal de la E.D $y' = F(x,y)$ pueden darse los siguientes casos:

1) $T^+ = \emptyset$, lo que ocurrirá si a) $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$ o b) $\lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$

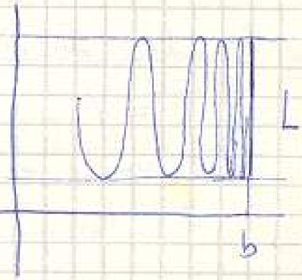
Estos casos no se darán respectivamente si el dominio D verifica: a) $\exists M / y < M, \forall (x,y) \in D$ o b) $\exists M / y > M, \forall (x,y) \in D$.



2) $T^+ = \{(b,\beta)\}$. Esto se verifica si $\lim_{x\to b^-} f(x) = \beta$.

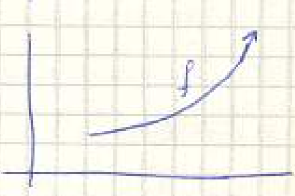


3) El terminal derecho es un segmento L.
Como $T^+ \subset \mathcal{F}(D)$ este caso no se dará si la frontera de D no contiene segmentos



B) Si la solución maximal de la E.D. es de la forma $f:]x_0, +\infty[\to \mathbb{R}$, pueden darse los casos siguientes:

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$: se dice que la solución tiene una rama parabólica.



2) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0 \in \mathbb{R}$: se dice que $y = y_0$ es una asíntota horizontal para la solución.

3) no existe $\lim_{x\to+\infty} f(x)$