TEMA 5º: CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD DE LA SOLUCION GENERAL DE UN S.D.

Las soluciones de un S.D. $y' = F(x,y)$ del tipo $f: x \in I \subset \mathbb{R} \longrightarrow f(x) \in \mathbb{R}^n$ son funciones de x. Dependen además de las condiciones iniciales (x_0, y_0), de forma que cada condición inicial determina una única solución del S.D., si F verifica ciertas hipótesis.

Vamos a estudiar la continuidad y derivabilidad de las soluciones respecto de las condiciones iniciales.

1. SOLUCION GENERAL DE UN S.D.

Sea F una función definida en un dominio D de $\mathbb{R}^{n+1}$ y valorada en $\mathbb{R}^n$. Supongamos que F es continua en D y localmente lipschitziana en D respecto de y.

Entonces, para cada punto $(x_0, y_0) \in D$ existe una única solución maximal que pasa por (x_0, y_0). Denotaremos esta solución maximal por $f(\cdot, x_0, y_0)$ o bien por $f_{(x_0,y_0)}(\cdot)$.

Consideremos el conjunto $\Theta \subset \mathbb{R}^{n+2}$ definido por

$$(x, x_0, y_0) \in \Theta \Leftrightarrow (x_0, y_0) \in D \wedge x \in J(x_0, y_0)$$

donde $J(x_0, y_0)$ es el intervalo (abierto) donde está definida la solución maximal que pasa por (x_0, y_0). Entonces:

DEFINICION: (Solución general de un S.D).

Se llama solución general de un S.D. $y' = F(x,y)$ o solución dependiente de las condiciones iniciales a la aplicación

$$(x, x_0, y_0) \in \Theta \longmapsto f(x, x_0, y_0) = f_{(x_0,y_0)}(x) \in \mathbb{R}^n$$

Es decir, la solución general asocia a cada punto $(x, x_0, y_0) \in \Theta$ el valor en x de la solución maximal que pasa por (x_0, y_0).

Si fijamos $(x_0, y_0) \in D$, la aplicación $x \in J(x_0, y_0) \longmapsto f(x, x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n$ es la solución maximal del S.D que pasa por (x_0, y_0) y sabemos que si F es de clase $\mathcal{C}^n$ en D, esta aplicación $f(\cdot, x_0, y_0)$ es de clase $\mathcal{C}^{n+1}$ en $J(x_0, y_0)$.

Estudiaremos entonces la continuidad y la derivabilidad de la solución general respecto de x_0 e y_0.

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS III
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1980/1981
Profesor: Manuel Fernández García-Hierro

2. CONTINUIDAD DE LA SOLUCION GENERAL.

A) Antes de estudiar la continuidad de la solución general respecto de x_0 e y_0 veamos unas definiciones y un resultado que utilizaremos para dicho estudio.

Sean X, Y y Z espacios métricos y f una aplicación de $X \times Y$ en Z. Fijado $x \in X$, consideremos la aplicación

$$f_x : y \in Y \longmapsto f_x(y) = f(x,y) \in Z.$$

Entonces, para todo $x \in X$, f_x es continua en Y si se verifica que

$$\forall x \in X, \forall y \in Y, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon, x, y) > 0 \,/\, \underset{y' \in Y}{d(y,y') < \eta} \Rightarrow d(f(x,y), f(x,y')) < \varepsilon.$$

Decimos que f es continua en Y uniformemente respecto a x si

$$\forall y \in Y, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon, y) > 0 \,/\, \underset{y' \in Y}{d(y,y') < \eta} \Rightarrow d(f(x,y), f(x,y')) < \varepsilon, \ \forall x \in X.$$

Analogamente, f es continua en X uniformemente respecto a y si

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon, x) > 0 \,/\, \underset{x' \in X}{d(x,x') < \eta} \Rightarrow d(f(x,y), f(x',y)) < \varepsilon, \ \forall y \in Y.$$

Entonces

2.1. PROPOSICION: Sea $f : X \times Y \to Z$ una aplicación que verifica lo siguiente:
i) $\forall x \in X$, f_x es continua en Y.
ii) f es continua en X uniformemente respecto de y.
En estas condiciones f es continua en $X \times Y$. (*)

Demostr.: Consideremos que en el espacio métrico producto $X \times Y$ tenemos definida la distancia del máximo, es decir

$$\forall (x,y), (x',y') \in X \times Y, \quad d_{max}((x,y),(x',y')) = \max\{d_X(x,x'), d_Y(y,y')\}.$$

Se trata de probar que

$$\forall (x_0,y_0) \in X \times Y, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon, (x_0,y_0)) > 0 \,/\, \underset{(x,y) \in X \times Y}{d_{max}((x,y),(x_0,y_0)) < \eta} \Rightarrow d(f(x,y), f(x_0,y_0)) < \varepsilon.$$

Como f_{x_0} es continua en Y se tiene que dado $y_0 \in Y$, y para el ε tomado

$$\exists \eta_1(\varepsilon, x_0, y_0) > 0 \,/\, \underset{y \in Y}{d(y,y_0) < \eta_1} \Rightarrow d(f(x_0,y), f(x_0,y_0)) < \varepsilon/2$$

Además f es continua en X uniformemente respecto de Y; entonces dado $x_0 \in X$

$$\exists \eta_2(\varepsilon, x_0) > 0 \,/\, \underset{x \in X}{d(x,x_0) < \eta_2} \Rightarrow d(f(x,y), f(x_0,y)) < \varepsilon/2, \ \forall y \in Y$$

Sea $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. Entonces si $(x,y) \in X \times Y$ es tal que

$$d_{max}((x,y),(x_0,y_0)) < \eta$$

se tiene que $d(x,x_0) < \eta_2$, y por tanto $d(f(x,y), f(x_0,y)) < \varepsilon/2$, $\forall y \in Y$,
y además $d(y,y_0) < \eta_1$, y por tanto $d(f(x_0,y), f(x_0,y_0)) < \varepsilon/2$

(*) La tesis sigue siendo cierta si exigimos las condiciones: i') $\forall y \in Y$, f_y es continua en X; ii') f es continua en Y uniformemente respecto de x. La demostración se basa en que $d(f(x,y), f(x_0,y_0)) \leq d(f(x,y), f(x,y_0)) + d(f(x,y_0), f(x_0,y_0))$

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS III
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1980/1981
Profesor: Manuel Fernández García-Hierro

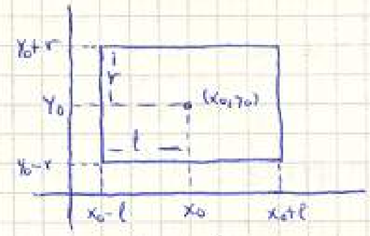
Luego

$$d(f(x,y),f(x_0,y_0)) \leq d(f(x,y),f(x_0,y)) + d(f(x_0,y),f(x_0,y_0)) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \text{. csqd.}$$

DEFINICION: (Tonel en $\mathbb{R}^{n+1}$)

Sea $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. Sean $l>0$ y $r>0$. Se llama tonel de centro (x_0,y_0), longitud $2l$ y radio r al conjunto

$$I\times B = \{x\in\mathbb{R} / |x-x_0| \leq l\} \times \{y \in \mathbb{R}^n / \|y-y_0\| \leq r\}$$



Tonel en $\mathbb{R}^2$

Tonel en $\mathbb{R}^3$

B) 2.2. TEOREMA: (Teorema local de continuidad de la solución general)

Sea el S.D. $y'=F(x,y)$ tal que $F\in \mathcal{C}(D,\mathbb{R}^n)$ y $F\in L_{loc}(D,y)$.
Entonces dado el punto $(\bar{x}_0,\bar{y}_0)\in D$ existen dos toneles $S=I\times B$ y $S'=I\times B'$ de centro $(\bar{x}_0,\bar{y}_0)$ tales que la solución general esta definida y es continua en $I\times I\times B'$ y toma sus valores en B.

Demostr.: Los toneles de centro $(\bar{x}_0,\bar{y}_0)$ constituyen un sistema fundamental de entornos de dicho punto.

Siendo F localmente lipschitziana en D respecto de y existen $l_1>0$ y $r>0$ tales que el tonel

$$S_1 = \{x / |x-\bar{x}_0| \leq l_1\} \times \{y / \|y-\bar{y}_0\| \leq r\} = I_1 \times B$$

esta contenido en D y de forma que en S_1 F es lipschitziana respecto de y.

Sea $M = \sup_{(x,y)\in S_1} \|F(x,y)\|$; $M\in\mathbb{R}$ pues F es continua en S_1 y S_1 es compacto.

Sea λ una constante de Lipschitz para F en S_1.

Tomemos un número positivo l menor que $\min\left(l_1, \frac{r}{4M}, \frac{1}{2\lambda}\right)$.

Consideremos los toneles

$$S = I\times B = \{x / |x-\bar{x}_0| \leq l\} \times \{y / \|y-\bar{y}_0\| \leq r\}$$

$$S' = I'\times B' = \{x / |x-\bar{x}_0| \leq l\} \times \{y / \|y-\bar{y}_0\| \leq \frac{r}{2}\}.$$

Denotaremos por $\mathcal{C}(I,B)$ el conjunto de funciones continuas definidas en I y valoradas en B dotado con la norma del supremo.

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS III
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1980/1981
Profesor: Manuel Fernández García-Hierro

$\mathcal{C}(I,B)$ es un subespacio métrico completo de $\mathcal{C}_\infty(I,\mathbb{R}^n)$.
Consideremos la aplicación

$$T: \mathcal{C}(I,B)\times I\times B' \longrightarrow \mathcal{C}(I,B)$$
$$(f, x_0, y_0) \longmapsto T(f, x_0, y_0)$$

donde $T(f,x_0,y_0)$ esta definida por

$$x\in I \longmapsto T(f(x),x_0,y_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t,f(t))\,dt \in B \qquad (I)$$

Veamos que T está bien definida:

- $\forall x\in I$, $T(f(x),x_0,y_0)\in B$ pues

$$\|T(f(x),x_0,y_0)-\bar{y}_0\| = \|y_0+\int_{x_0}^{x}F(t,f(t))\,dt-\bar{y}_0\| \leq$$
$$\leq \|y_0-\bar{y}_0\| + \|\int_{x_0}^{x}F(t,f(t))\,dt\| \overset{(1)}{\leq} \frac{r}{2} + \int_{x_0}^{x}\|F(t,f(t))\|\,dt \overset{(2)}{\leq}$$
$$\leq \frac{r}{2} + M|x-x_0| \leq \frac{r}{2}+M2l < \frac{r}{2}+M2\frac{r}{4M} = r.$$ Luego $T(f(x),x_0,y_0)\in B$, $\forall x$.

(1) es cierta pues $y_0\in B'$. (2) es cierta, pues $\forall t\in I$, $(t,f(t))\in I\times B\subset S_1$.

- $T(f,x_0,y_0)$ es continua (aun más, derivable), pues $t\in I\mapsto F(t,f(t))$ es continua.

Luego T está bien definida.

Probemos ahora que para todo $(x_0,y_0)\in I\times B'$ la aplicación

$$T(\cdot,x_0,y_0): f\in\mathcal{C}(I,B)\longmapsto T(f,x_0,y_0)\in\mathcal{C}(I,B)$$

es contractiva.

$\forall x\in I, \forall f,g\in\mathcal{C}(I,B)$, $\|T(f(x),x_0,y_0)-T(g(x),x_0,y_0)\| = \|y_0+\int_{x_0}^{x}F(t,f(t))\,dt - y_0 - \int_{x_0}^{x}F(t,g(t))\,dt\| =$
$$= \|\int_{x_0}^{x}[F(t,f(t))-F(t,g(t))]\,dt\| \leq \int_{x_0}^{x}\|F(t,f(t))-F(t,g(t))\|\,dt \leq \lambda\int_{x_0}^{x}\|f(t)-g(t)\|\,dt \leq$$
$$\leq \lambda\int_{x_0}^{x}\|f-g\|_\infty = \lambda|x-x_0|\,\|f-g\| \leq 2l\lambda\,\|f-g\|$$

Luego $\|T(f,x_0,y_0)-T(g,x_0,y_0)\| = \sup_{x\in I}\|T(f(x),x_0,y_0)-T(g(x),x_0,y_0)\| \leq 2l\lambda\,\|f-g\|$

que prueba que $T(\cdot,x_0,y_0)$ es contractiva, pues $l<\frac{1}{2\lambda}$.

Por tanto, para cada $(x_0,y_0)\in I\times B'$, $T(\cdot,x_0,y_0)$ tiene un único punto fijo que denotaremos por $f_{(x_0,y_0)}$, y coincide con la solución del S.D. que pasa por (x_0,y_0) definida en I, pues

$$\forall x\in I,\quad f_{(x_0,y_0)}(x) = T(f_{(x_0,y_0)}(x),x_0,y_0) = y_0+\int_{x_0}^{x}F(t,f_{(x_0,y_0)}(t))\,dt$$

Vamos a probar entonces que la solución general está definida y es continua en $I\times I\times B'$ y toma sus valores en B.

Dado $(x,x_0,y_0)\in I\times I\times B'$, existe la solución maximal del S.D. que pasa por (x_0,y_0)

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS III
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1980/1981
Profesor: Manuel Fernández García-Hierro

y esta solución es única, pues F es continua y lipschitziana en $I \times B'$, y el valor de la solución general es el valor en x de dicha solución maximal, y este valor pertenece a B, pues $f_{(x_0,y_0)}(x) = T(f_{(x_0,y_0)}(x), x_0, y_0)$ y $T(f_{(x_0,y_0)}(x), x_0, y_0) \in B$, por (I).

Veamos que ~~la~~ solución general es continua. Según PROPOSICION 2.1 basta probar que $\forall (x_0,y_0) \in I \times B'$, $f_{(x_0,y_0)}$ es continua en I, lo cual es trivial pues $f_{(x_0,y_0)}$ es solución del S.D, y que la aplicación

$$(x_0,y_0) \in I \times B' \longmapsto f_{(x_0,y_0)}(x) \in B$$

es continua en $I \times B'$ uniformemente respecto de x. Veamos esto.

Se trata de probar que

$$\forall (x_0,y_0) \in I \times B', \forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon,(x_0,y_0)) > 0 \,/\, \underset{(x_1,y_1)\in I\times B'}{d((x_0,y_0),(x_1,y_1)) < \eta} \Rightarrow d'(f_{(x_0,y_0)}(x), f_{(x_1,y_1)}(x)) < \varepsilon, \ \forall x \in I.$$

donde d y d' son la distancia del máximo y la inducida por la norma de $\mathbb{R}^n$ en $I \times B'$ y B, respectivamente.

$$\| f_{(x_0,y_0)}(x) - f_{(x_1,y_1)}(x) \| = \| T(f_{(x_0,y_0)}(x), x_0, y_0) - T(f_{(x_1,y_1)}(x), x_1, y_1) \| =$$

$$= \| y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, f_{(x_0,y_0)}(t))\,dt - y_1 - \int_{x_1}^{x} F(t, f_{(x_1,y_1)}(t))\,dt \| \overset{(*)}{\leq}$$

$$\leq \| y_0 - y_1 \| + \left| \int_{x_0}^{x_1} \| F(t, f_{(x_0,y_0)}(t)) - F(t, f_{(x_1,y_1)}(t)) \|\,dt \right| \leq$$

$$\leq \| y_0 - y_1 \| + 2M|x_1 - x_0|, \quad \text{pues } F \text{ está acotada por } M \text{ en } I \times B$$

Luego, tomando $\eta < \dfrac{\varepsilon}{1+2M}$ se verifica que

si $d((x_0,y_0),(x_1,y_1)) = \max\{\|y_0 - y_1\|, |x_0 - x_1|\} < \eta$ entonces

$$\| f_{(x_0,y_0)}(x) - f_{(x_1,y_1)}(x) \| \leq \|y_0 - y_1\| + 2M|x_1 - x_0| \leq \eta + 2M\eta = \eta(1+2M) < \varepsilon.$$

Por tanto, la solución general es continua en $I \times I \times B'$. c.s.q.d.

OBSERVACION: Este teorema garantiza la existencia de un tonel ($I \times I \times B'$) en $\mathbb{R}^{n+2}$ en el cual la solución general es continua. Vamos a dar a continuación una serie de definiciones y resultados que preparan el teorema global de continuidad de la solución general.

C) DEFINICION: (Tubo de trayectorias de soluciones de un S.D.)

Sea el S.D. $y' = F(x,y)$ donde F es continua en D y localmente lipschitziana en D respecto de la variable vectorial y. Sean G un abierto de $\mathbb{R}^n$ contenido en D, I un intervalo y $x_0 \in I$ tal que $f(x, x_0, y_0)$ está definida para cualquier $x \in I$. Se llama tubo de trayectorias en G respecto

(*) Esta desigualdad no es cierta. La demostración puede terminarse considerando que $\|f_{(x_0,y_0)}(x) - f_{(x_1,y_1)}(x)\| \leq \|y_0 - y_1\| + \int_{x_0}^{x_1} \|F(t, f_{(x_0,y_0)}(t))\|\,dt + \int_{x_1}^{x} \|F(t, f_{(x_0,y_0)}(t)) - F(t, f_{(x_1,y_1)}(t))\|\,dt \leq \|y_0 - y_1\| + M|x_1 - x_0| + 2L \int \|f_{(x_0,y_0)} - f_{(x_1,y_1)}\|$ ... [illegible]

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS III
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1980/1981
Profesor: Manuel Fernández García-Hierro

de $x_0 \in I$ al conjunto

$$\{(x, f(x, x_0, y_0)) / x \in I,\ y_0 \in G\}$$

Las expresiones $I, B', l, r, M, \bar{x}_0, \bar{y}_0$ representan en lo que sigue lo mismo que en la demostración del teorema local de continuidad de la solución general. Consideremos la bola abierta

$$\mathring{B}'' = \{y \in \mathbb{R}^n / \|y - \bar{y}_0\| < \frac{r}{4}\}.$$

Entonces, si $y_0 \in \mathring{B}''$, la solución general está definida en $(x, \bar{x}_0, y_0)$, $\forall x \in I$. pues, la solución general está definida en $I \times I \times B'$ y $\mathring{B}'' \subset B'$.

Consideremos el tubo de trayectorias

$$T = \{(x, f(x, \bar{x}_0, y_0)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n / x \in I,\ y_0 \in \mathring{B}''\}$$

Entonces

<u>2.3. PROPOSICION</u>: T es un conjunto abierto en $I \times B'$.

Demostración: Probemos primero que $T \subset I \times B'$. Se trata de probar que $\|f(x, \bar{x}_0, y_0) - \bar{y}_0\| < r/2$, $\forall x \in I$, $\forall y_0 \in \mathring{B}''$.

$$\|f(x, \bar{x}_0, y_0) - \bar{y}_0\| \leq \|f(x, \bar{x}_0, y_0) - y_0\| + \|y_0 - \bar{y}_0\| < \|y_0 + \int_{\bar{x}_0}^{x} F(t, f(t))\, dt - y_0\| + \frac{r}{4} \leq$$

$$\leq \int_{\bar{x}_0}^{x} \|F(t, f(t))\|\, dt + \frac{r}{4} \leq M|x - \bar{x}_0| + \frac{r}{4} \leq Ml + \frac{r}{4}$$

Habíamos tomado $l < \frac{r}{4M}$. Luego $\|f(x, \bar{x}_0, y_0) - \bar{y}_0\| < M\frac{r}{4M} + \frac{r}{4} = \frac{r}{2}$.

Luego $T \subset I \times B'$.

Para probar que T es abierto, demostraremos que T es la contraimagen de $\mathring{B}''$ por una aplicación continua que ahora definiremos. Sea la aplicación

$$\varphi : (x_0, y_0) \in I \times B' \longmapsto \varphi(x_0, y_0) = f(\bar{x}_0, x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n$$

es decir, φ asocia a cada punto $(x_0, y_0) \in I \times B'$ el valor en $\bar{x}_0$ de la solución del S.D. definida en I que pasa por (x_0, y_0)

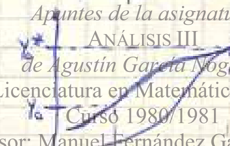
φ es continua, por ser la solución general continua en $I \times I \times B'$. Veamos que $T = \varphi^{-1}(\mathring{B}'')$.

Sea $(x, f(x, \bar{x}_0, y_0)) \in I \times B'$, $y_0 \in \mathring{B}''$, $x \in I$ un punto del tubo de trayectorias T.

Veamos que $\varphi(x, f(x, \bar{x}_0, y_0)) \in \mathring{B}''$.

$\varphi(x, f(x, \bar{x}_0, y_0)) = f(\bar{x}_0, x, f(x, \bar{x}_0, y_0))$. Sea $y_0^* = f(x, \bar{x}_0, y_0)$, que es el valor en x de la solución del S.D. que pasa por $(\bar{x}_0, y_0)$. Entonces $\varphi(x, f(x, \bar{x}_0, y_0)) = f(\bar{x}_0, x, y_0^*)$

Luego la solución del S.D. definida en I que pasa por $(\bar{x}_0, y_0)$ pasa también por (x, y_0^*) y por tanto $f(\bar{x}_0, x, y_0^*) = y_0$, pues de lo contrario (ver la figura) habría dos soluciones del



Apuntes de la asignatura ANÁLISIS III de Agustín García Nogales Licenciatura en Matemáticas UEx Curso 1980/1981 Profesor: Manuel Fernández García-Hierro

S.D. definidas en I que pasan por (x, y_0^*), y por tanto la solución no sería única. Es decir, el valor en $\bar{x}_0$ de la solución que pasa por (x, y_0^*), que es la misma que pasa por $(\bar{x}_0, y_0)$ es y_0.

Luego $\varphi(x, f(x,\bar{x}_0,y_0)) = y_0$, que por hipótesis pertenece a $\mathring{B}''$

Luego $T \subset \varphi^{-1}(\mathring{B}'')$. Veamos que $\varphi^{-1}(\mathring{B}'') \subset T$.

Si $(x_0, y_0) = \varphi^{-1}(y_0^*)$, donde $y_0^* \in \mathring{B}''$ entonces $\varphi(x_0,y_0) = y_0^*$, y por tanto $f(\bar{x}_0, x_0, y_0) = y_0^*$, es decir y_0^* es el valor en $\bar{x}_0$ de la solución que pasa por (x_0, y_0), y por la unicidad de soluciones, la solución que pasa por (x_0,y_0) es la misma que la que pasa por $(\bar{x}_0, y_0^*)$, que prueba que $y_0 = f(x_0, \bar{x}_0, y_0^*)$. Luego $(x_0,y_0) = (x_0, f(x_0,\bar{x}_0,y_0^*))$, que pertenece a T pues $x_0 \in I$ e $y_0^* \in \mathring{B}''$. c.s.q.d.

Probemos ahora que cualquier sección del tubo de trayectorias T es homeomorfa a la bola abierta $\mathring{B}''$.

$\boxed{\text{2.4. PROPOSICION: Fijado } x \in I \text{, el conjunto } T_x = \{f(x,\bar{x}_0,y_0) \,/\, y_0 \in \mathring{B}''\} \text{ es homeomorfo a } \mathring{B}''.}$

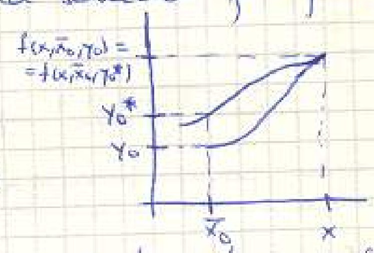
Demostr.: Consideremos la aplicación

$f(x,\bar{x}_0,\cdot) : y_0 \in \mathring{B}'' \longmapsto f(x,\bar{x}_0,y_0) \in T_x$.

Veamos que es biyectiva y bicontinua.

1) Es sobreyectiva por la definición de T_x.

2) Es inyectiva: Supongamos que $f(x,\bar{x}_0,y_0) = f(x,\bar{x}_0,y_0^*)$. $f(x,\bar{x}_0,y_0)$ es el valor en x de la solución que pasa por $(\bar{x}_0,y_0)$ y coincide, por hipótesis, con $f(x,\bar{x}_0,y_0^*)$, valor en x de la solución que pasa por $(\bar{x}_0, y_0^*)$, y si fuese $y_0 \neq y_0^*$, por el punto $(x, f(x,\bar{x}_0,y_0))$ pasarían dos soluciones del S.D. definidas en I, en contra de la unicidad de soluciones. Luego $y_0 = y_0^*$.



3) Esta aplicación es trivialmente continua, por serlo la solución general.

4) La aplicación inversa de esta es

$f(\bar{x}_0,x,\cdot) : y_0^* \in T_x \longmapsto f(\bar{x}_0, x, y_0^*) \in \mathring{B}''$;

basta probar para probar esto que $\forall y_0 \in \mathring{B}''$, $f(\bar{x}_0, x, f(x,\bar{x}_0,y_0)) = y_0$ pues se tendría entonces que $[f(\bar{x}_0,x,\cdot) \circ f(x,\bar{x}_0,\cdot)](y_0) = y_0$, $\forall y_0 \in \mathring{B}''$.

Sea $y_0^* = f(x,\bar{x}_0,y_0)$. Entonces $f(\bar{x}_0, x, f(x,\bar{x}_0,y_0)) = f(\bar{x}_0, x, y_0^*)$ es el valor en $\bar{x}_0$ de la solución que pasa por (x, y_0^*), que será igual a y_0, pues y_0^* es el valor en x de la solución que pasa por $(\bar{x}_0, y_0)$. Lo

→ y por tanto, $\|f(x_0,y_0) - f(x_1,y_1)\| - 2\ell\lambda \|f(x_0,y_0) - f(x_1,y_1)\| \leq \|y_0 - y_1\| + M|x_1 - x_0|$, es decir $\|f(x_0,y_0) - f(x_1,y_1)\| \leq \frac{1}{1-2\ell\lambda}(\|y_0-y_1\| + M|x_1-x_0|)$

Basta entonces tomar $\eta < \frac{\varepsilon(1-2\ell\lambda)}{M+1}$ para que $\|f(x_0,y_0) - f(x_1,y_1)\| < \varepsilon$ si $\max\{|x_1-x_0|, \|y_0-y_1\|\} < \eta$.

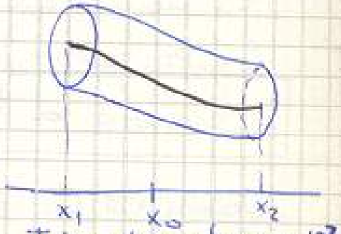
Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS III
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1980/81.
Profesor: Manuel Fernández García-Hierro

aplicación $f(\bar{x}_0, x, \cdot)$ es continua en I_x por serlo la solución general. Luego I_x y $\overset{\circ}{B}''$ son homeomorfos, $\forall x \in I$. c.s.q.d.

La siguiente proposición resume los resultados anteriores.

2.5. PROPOSICION: Todo punto $(x_0, y_0) \in D$ es el centro de un tonel $S = I \times B$ con la propiedad siguiente:

Existe una bola $B' \subset B$ tal que el conjunto de trayectorias de soluciones que pasan por B' en x_0 constituye un tubo de trayectorias de soluciones definidas en todo I. Este tubo es un conjunto abierto en S. Además si suponemos $I = [x_1, x_2]$ las imágenes de B' mediante las aplicaciones $f(x_1, x_0, \cdot)$, $f(x_2, x_0, \cdot)$ son homeomorfas a B'; a estas imágenes las llamaremos respectivamente borde izquierdo y borde derecho del tubo de trayectorias.


Tubo de trayectorias en $\mathbb{R}^3$.

OBSERVACION: Notar que en esta proposición hemos cambiado las notaciones que veníamos utilizando. B y B' representan aquí lo que B' y $\overset{\circ}{B}''$ representaban anteriormente. También se ha hecho $(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = (x_0, y_0)$.

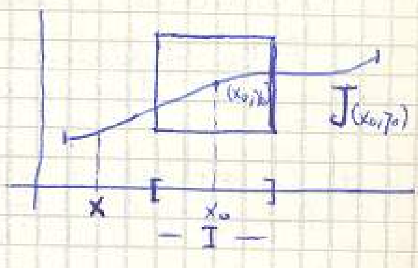
D) Veamos entonces el teorema global de continuidad.

2.6. TEOREMA: (global de continuidad de la solución general)

Sea $F: D \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua y localmente lipschitziana en el dominio D. Entonces la solución general del S.D. $y' = F(x, y)$

$$(x, x_0, y_0) \in \Theta \longmapsto f(x, x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n$$

es continua, siendo $\Theta = \{(x, x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+2} / (x_0, y_0) \in D,\ x \in J(x_0, y_0)\}$ donde $J(x_0, y_0)$ es el intervalo donde está definida la solución maximal que pasa por (x_0, y_0).



OBSERVACION: Dado $(x_0, y_0) \in D$, el teorema local de continuidad asegura la existencia de dos toneles $I \times B$ e $I \times B'$ tal que la solución general definida en $I \times I \times B'$ y valorada en B es continua. La dificultad del teorema global está en que el punto $x \in J(x_0, y_0)$, puede no estar en el intervalo I, y queremos probar la continuidad de la solución general en el punto (x, x_0, y_0), $(x_0, y_0) \in D$ y $x \in J(x_0, y_0)$. Vamos a probar entonces el teorema.

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS III
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1980/1981
Profesor: Manuel Fernández García-Hierro

Demostr.: Supongamos que $\mathcal{T}$ es una trayectoria de extremos (x_0,y_0) y (x^*,y^*). Para cada punto $(x,y)\in\mathcal{T}$ existe, por la proposición anterior, un tonel $S_{(x,y)}=I_{(x,y)}\times B_{(x,y)}$, y una bola $B'_{(x,y)}\subset B_{(x,y)}$ tal que el conjunto de trayectorias que pasan por $B'_{(x,y)}$ en x constituye un tubo de trayectorias de soluciones que están definidas en $I_{(x,y)}$.

$\mathcal{T}$ es compacto (contiene a sus extremos) y $\{\mathring{S}_{(x,y)}\}_{(x,y)\in\mathcal{T}}$ es un recubrimiento abierto de $\mathcal{T}$.

Por tanto, existen toneles $S_0,S_1,\dots,S_n$ compactos tales que
$$\mathcal{T}\subset\bigcup_{i=0}^{n}S_i \qquad (1)$$

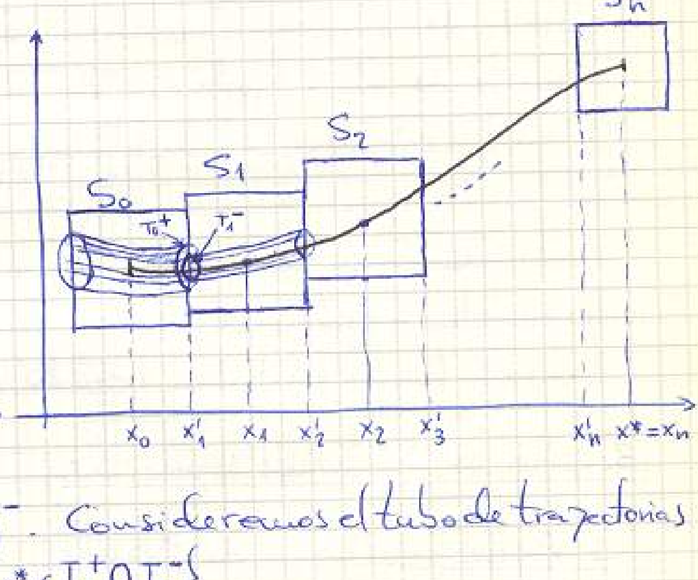
No se pierde generalidad si suponemos que $\mathring{S}_i\cap\mathring{S}_j=\emptyset$ si $i\neq j$.

Sea (x_i,y_i), $i=1,2,\dots,n$, el centro del tonel S_i, que está sobre $\mathcal{T}$.

No hay problemas en que (x_0,y_0) sea el centro de S_0 y $(x_n,y_n)=(x^*,y^*)$, pues si no lo fuesen, una vez construidos los S_i tales que verifiquen (1) podríamos sustituir S_0 por un tonel S'_0 que contenga los puntos de la trayectoria que contiene S_0 y que sea disjunto su interior con S_i, $i=1,\dots,n$.

Análogamente, podemos considerar que (x^*,y^*) es el centro del tonel S_n.

Para cada tonel S_i existe una bola $B'_i\subset B_i$ tal que el conjunto
$$\{(x,f(x,x_i,y_i))\ /\ x\in I_i,\ y_i\in B'_i\}$$
es un tubo de trayectorias de soluciones definidas en todo I_i. Además este tubo es abierto en S_i y los bordes izquierdo y derecho de este tubo son homeomorfos a B'_i. (*)



Sea x'_i, $i=1,\dots,n$, la abscisa (1ª componente) de los puntos del borde derecho de S_{i-1} y de los puntos del borde izquierdo de S_i.

Sea T_0^+ el borde derecho del tubo de trayectorias en B'_0 respecto de x_0, y T_1^- el borde izquierdo del tubo de trayectorias en B'_1 respecto de x_1 (que están definidas en $[x'_1,x'_2]$).

T_0^+ y T_1^- son abiertos, y su intersección es no vacía, pues $f(x'_1,x_0,y_0)\in T_0^+\cap T_1^-$. Consideremos el tubo de trayectorias
$$\mathcal{T}_1=\{(x,f(x,x_0,y_0^*))\ /x\in I_0\cup I_1,\ y_0^*\in T_0^+\cap T_1^-\}$$
Geométricamente, lo que hemos hecho es "intersecar" los tubos de trayectorias de S_0 y S_1. Sea $\mathcal{T}_1^+$ el borde derecho de $\mathcal{T}_1$ y T_2^- el borde izquierdo del tubo de trayectorias en B'_2 respecto de x_2. Estos conjuntos son abiertos, y su in-

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS III
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1980/1981
Profesor: Manuel Fernández García-Hierro

... B'_1, I_1 es abierto; para la bola

tersección es no vacía, pues $f(x_2', x_0, y_0) \in \mathcal{T}_1^+ \cap T_2^-$. Consideraríamos entonces el tubo de trayectorias $\mathcal{T}_2 = \{(x, f(x, x_0, y_0^*)) / x \in I_0 \cup I_1 \cup I_2,\ y_0^* \in \mathcal{T}_1^+ \cap T_2^-\}$.
Procediendo de este modo obtenemos un tubo T de trayectorias de soluciones definidas en $I_0 \cup I_1 \cup \ldots \cup I_n$.
Veamos entonces que la solución general es continua en el punto (x, x_0, y_0), con $(x_0, y_0) \in D$, $x \in J(x_0, y_0)$.
Supongamos, en el "peor" de los casos, que $x \in I_n$.
Sea $y_1' = f(x_1', x_0, y_0)$, es decir, y_1' es el valor en x_1' de la solución que pasa por (x_0, y_0).
Por tanto, la solución maximal que pasa por (x_0, y_0) coincide con la solución maximal que pasa por (x_1', y_1'). Tenemos entonces

$$f(x, x_0, y_0) = f(x, x_1', y_1')$$

Analogamente, $f(x, x_1', y_1') = f(x, x_2', y_2')$ donde $y_2' = f(x_2', x_1', y_1')$
Procediendo de esta forma lo que obtenemos es lo siguiente:

$$\begin{aligned}
&f(x, x_0, y_0) = f(x, x_1', y_1') && \text{donde } y_1' = f(x_1', x_0, y_0) \\
&f(x, x_1', y_1') = f(x, x_2', y_2') && \text{donde } y_2' = f(x_2', x_1', y_1') \\
&f(x, x_2', y_2') = f(x, x_3', y_3') && \text{donde } y_3' = f(x_3', x_2', y_2') \qquad \text{(I)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&f(x, x_{n-1}', y_{n-1}') = f(x, x_n', y_n') && \text{donde } y_n' = f(x_n', x_{n-1}', y_{n-1}')
\end{aligned}$$

Por el teorema local de continuidad tenemos lo siguiente:
- Fijado x_n', $f(x, x_n', y_n')$ es continua respecto de x e y_n'; fijados x_n' y x_{n-1}', $y_n' = f(x_n', x_{n-1}', y_{n-1}')$ es continua respecto de y_{n-1}' en T_n^-; fijados x_{n-1}' y x_{n-2}', $y_{n-1}' = f(x_{n-1}', x_{n-2}', y_{n-2}')$ es continua respecto de y_{n-2}' en T_{n-1}^-; así sucesivamente, fijados x_2' y x_1', $y_2' = f(x_2', x_1', y_1')$ es continua respecto de y_1' y fijado x_1', $y_1' = f(x_1', x_0, y_0)$ es continua respecto de $(x_0, y_0) \in S_0 \cap T$.

Si en las relaciones (I) sustituimos $y_n', y_{n-1}', \ldots, y_2', y_1'$ por sus expresiones, obtenemos $f(x, x_0, y_0)$ como composición de unas funciones, que como hemos probado son continuas. Luego la solución general es continua en (x, x_0, y_0), $\forall (x^{*}, x_0, y_0) \in \Theta$.
Por ejemplo, si $x \in]x_2', x_3'[$, tenemos $f(x, x_0, y_0) = f(x, x_1', f(x_1', x_0, y_0)) = f(x, x_2', f(x_2', x_1', f(x_1', x_0, y_0)))$ función que es continua respecto de x, x_0 e y_0. c.s.q.d.

3. LEMA DE GRONWALL: APLICACIONES.

3.1. PROPOSICION: (Lema de Gronwall).

Sean $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ tales que $x_0 < x_1$, y f y u funciones reales definidas en $[x_0, x_1]$ que verifican lo siguiente $f(x) \geq 0$, $u(x) > 0$, $\forall x \in [x_0, x_1]$ y tal que

$$f(x) < a + b \int_{x_0}^{x} f(t) u(t)\, dt, \quad \forall x \in [x_0, x_1], \text{ siendo } a, b > 0.$$

Entonces $f(x) < a\, e^{b \int_{x_0}^{x} u(t)\, dt}$, $\forall x \in [x_0, x_1]$.

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS III
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1980/1981
Profesor: Manuel Fernández García-Hierro

(*) Si $x \in I_0$, la continuidad de la solución general queda garantizada por el teorema local de continuidad

Demostr.: Sea $v(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)u(t)\,dt$. Entonces $v'(x)=f(x)u(x)$.

Por hipótesis $f(x)<a+bv(x)$.

Multiplicando por $u(x)>0$, tenemos

$$f(x)u(x)<au(x)+bu(x)v(x)$$

es decir, $v'(x)<au(x)+bu(x)v(x)$

Luego $\dfrac{v'(x)}{a+bv(x)}<u(x)$

Integrando tenemos que $\dfrac{1}{b}\ln\dfrac{a+bv(x)}{a}<\int_{x_0}^{x}u(t)\,dt$.

Luego $\ln\dfrac{a+bv(x)}{a}<b\int_{x_0}^{x}u(t)\,dt$ y por tanto $\dfrac{a+bv(x)}{a}<e^{b\int_{x_0}^{x}u(t)dt}$

que implica que $1+\dfrac{b}{a}v(x)<e^{b\int_{x_0}^{x}u(t)dt}$

Por hipótesis $f(x)<a+b\int_{x_0}^{x}f(t)u(t)\,dt=a+bv(x)$.

Luego $\dfrac{f(x)}{a}<1+\dfrac{b}{a}v(x)$.

Por tanto, $\dfrac{f(x)}{a}<e^{b\int_{x_0}^{x}u(t)dt}$. c.s.q.d.

3.2. PROPOSICION: Sea D un dominio de $\mathbb{R}^{n+1}$ y F y G funciones definidas en D y valoradas en $\mathbb{R}^n$. Supongamos que $F\in L_\lambda(D,y)$. Supongamos además que existe $\varepsilon>0$, tal que $\|F(x,y)-G(x,y)\|<\varepsilon$, $\forall(x,y)\in D$. Consideremos los S.D. $y'=F(x,y)$ e $y'=G(x,y)$. Sea f una solución de $y'=F(x,y)$ definida en $[x_0,x_1]$ tal que $f(x_0)=y_0$. Sea g una solución de $y'=G(x,y)$ definida en $[x_0,x_1]$ tal que $g(x_0)=y_0$. Entonces

$$\forall x\in[x_0,x_1],\quad \|f(x)-g(x)\|\le(x_1-x_0)\,\varepsilon\, e^{\lambda(x-x_0)}.$$

Demostr.: Siendo f y g soluciones de $y'=F(x,y)$ e $y'=G(x,y)$ pasando por (x_0,y_0) se verifica que

$$f(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}F(t,f(t))\,dt \quad\text{y}\quad g(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}G(t,g(t))\,dt$$

Luego $\|f(x)-g(x)\|=\left\|\int_{x_0}^{x}\{F(t,f(t))-G(t,g(t))\}dt\right\|\le$

$$\le\left\|\int_{x_0}^{x}\{F(t,f(t))-F(t,g(t))\}dt\right\|+\left\|\int_{x_0}^{x}\{F(t,g(t))-G(t,g(t))\}\right\|\le$$

$$\le\int_{x_0}^{x}\lambda\|f(t)-g(t)\|dt+\int_{x_0}^{x}\|F(t,g(t))-G(t,g(t))\|dt<$$

$$<\int_{x_0}^{x}\lambda\|f(t)-g(t)\|dt+\varepsilon(x_1-x_0)$$

Se verifican las hipótesis del lema de Gronwall para $a=\varepsilon(x_1-x_0)$, $b=1$, $u(t)=\lambda$.

Además $\|f(x)-g(x)\|$ es continua y positiva o cero en todo punto $x\in[x_0,x_1]$.

Entonces $\|f(x)-g(x)\|\le\varepsilon(x_1-x_0)e^{\int_{x_0}^{x}\lambda dt}\le\varepsilon(x_1-x_0)e^{\lambda(x-x_0)}$. c.s.q.d. (*)

(*) Observar que podemos acotar $\|f(x)-g(x)\|$ por $\varepsilon(x_1-x_0)e^{\lambda(x_1-x_0)}$.

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS III
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1980/1981
Profesor: Manuel Fernández García-Hierro

3.3. PROPOSICION: Sea $F: D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ tal que $F \in L_\lambda(D, y)$. Sean $f_1, f_2: I \to \mathbb{R}^n$ dos soluciones del S.D. $y' = F(x,y)$, donde $I = [x_0, x_1]$, y tales que $f_1(x_0) = y_{10}$ y $f_2(x_0) = y_{20}$. Entonces

$$\|f_1(x) - f_2(x)\| \leq \|y_{10} - y_{20}\| e^{\lambda(x-x_0)}, \ \forall x \in I.$$

Demostr.: Se verifica que

$$\forall x \in I, \ f_1(x) = y_{10} + \int_{x_0}^x F(t, f_1(t))dt \ , \ f_2(x) = y_{20} + \int_{x_0}^x F(t, f_2(t))dt.$$

Entonces $\|f_1(x) - f_2(x)\| \leq \|y_{10} - y_{20}\| + \left\|\int_{x_0}^x \{F(t,f_1(t)) - F(t,f_2(t))\} dt\right\| \leq$

$\leq \|y_{10} - y_{20}\| + \int_{x_0}^x \|F(t,f_1(t)) - F(t,f_2(t))\| dt \leq \|y_{10} - y_{20}\| + \int_{x_0}^x \lambda \|f_1(t) - f_2(t)\| dt.$

Aplicando el lema de Gronwall tenemos que

$$\|f_1(x) - f_2(x)\| \leq \|y_{10} - y_{20}\| e^{\lambda(x-x_0)}, \ \forall x \in I. \quad \text{csqd.}$$

4. Continuidad respecto a un parámetro.

Sea D' un dominio de $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^k$ y $F: D' \to \mathbb{R}^n$ una función definida de la forma $(x, y, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \longrightarrow F(x,y,\lambda) \in \mathbb{R}^n$.

Consideremos el S.D. $y' = F(x,y,\lambda)$ que se dice que depende del parámetro λ.

Definimos la solución general de este S.D. como

$$(x, x_0, y_0, \lambda) \in \Theta' \longmapsto f(x, x_0, y_0, \lambda)$$

donde $\Theta' = \{(x, x_0, y_0, \lambda) \ / \ (x_0, y_0, \lambda) \in D', \ x \in J(x_0, y_0, \lambda)\}$

siendo $J(x_0, y_0, \lambda)$ el intervalo donde está definida la solución maximal del S.D. que pasa por (x_0, y_0) para el valor λ.

$f(\cdot, x_0, y_0, \lambda)$ es la solución maximal del S.D. que pasa por (x_0, y_0) para el valor λ.

4.1. TEOREMA: Si F es continua en D' y localmente lipschitziana respecto de (y_0, λ) entonces la solución general es continua en Θ'.

Demostr.: Consideremos el S.D

$$\begin{cases} y' = F(x,y,\lambda) \\ \lambda' = 0 \end{cases}$$

Como la función $(F, 0)$ es continua en D' ~~(respecto de (y_0, λ))~~ y localmente lipschitziana respecto de (y_0, λ), se verifican las hipótesis del teorema global de continuidad de la solución general. Por tanto, la solución general $f(x, x_0, y_0, \lambda)$ es continua. csqd.

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS III
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1980/1981
Profesor: Manuel Fernández García-Hierro

5. Sistemas diferenciales complejos.

Sea D un dominio de $\mathbb{R}\times\mathbb{C}^n$ y $F: D \longrightarrow \mathbb{C}^n$ una aplicación.
Consideremos el S.D. complejo $z' = F(x,z)$.
Decimos que $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ es solución de dicho S.D. cuando existe $f'(x), \forall x \in I$ y se verifica que

$\forall x \in I$, $(x, f(x)) \in D$ y $f'(x) = F(x, f(x))$.

Diremos que dicha solución pasa por (x_0, z_0) cuando $f(x_0) = z_0$.

Los teoremas de existencia, unicidad y continuidad que hemos probado para S.D. reales, y los teoremas de derivabilidad de la solución general que probaremos siguen siendo ciertos para S.D. complejos.

6. DERIVABILIDAD DE LA SOLUCION GENERAL.

6.1. TEOREMA: (de diferenciabilidad de la solución general).

Sea $F: D \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 en D. Entonces la solución general $f(x, x_0, y_0)$ verifica lo siguiente:

1) $f(x, x_0, y_0)$ es de clase 2 respecto de x y la derivada parcial segunda de f respecto de x es continua respecto de x, x_0 e y_0, es decir existe $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, x_0, y_0)$ y esta función es continua respecto de x, x_0 e y_0.

2) Existe la derivada parcial de f respecto de y_0, y es continua respecto de las tres variables, o bien, existen las derivadas parciales de f respecto de cada una de las componentes y_{0i} de y_0, $\frac{\partial f}{\partial y_{0i}}(x, x_0, y_0)$, y son continuas respecto de x, x_0 e y_0.

3) Existe la derivada parcial de f respecto de x_0 y es continua respecto de las tres variables.

Demostr.: 1) $f(\cdot, x_0, y_0)$ es la solución del S.D. que pasa por (x_0, y_0). Siendo F de clase C^1 se verifica que $f(\cdot, x_0, y_0)$ es de clase C^2. Por tanto, existe la derivada parcial segunda respecto de x de la solución general $f(x, x_0, y_0)$ y es continua respecto de x.

Veamos que también es continua respecto de x_0 e y_0.

Tenemos que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, x_0, y_0) = F(x, f(x, x_0, y_0))$.

Como F y $f(\cdot, x_0, y_0)$ son de clase C^1 respecto de x tenemos que la derivada parcial segunda respecto de x es, por la regla de la cadena

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x, x_0, y_0)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x, x_0, y_0)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, x_0, y_0). \quad (\mathrm{I})$$

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS III
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1980/1981
Profesor: Manuel Fernández García-Hierro

Se tiene lo siguiente

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,x_0,y_0) = F(x, f(x,x_0,y_0))$ que es continua respecto a las tres variables, pues F es continua y la solución general $f(x,x_0,y_0)$ también lo es.
- $\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x,x_0,y_0))$ es continua respecto a las tres variables, por ser F de clase C^1 y la solución general continua.
- Análogamente $\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x,x_0,y_0))$ es continua respecto a las tres variables.

Luego, por (I), $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,x_0,y_0)$ es continua respecto a las tres variables.

2) Veamos que existen las derivadas parciales de f respecto a cada una de las componentes y_{0i} de y_0 y son continuas respecto a las tres variables.
Por definición, existe $\frac{\partial f}{\partial y_{0i}}(x,x_0,y_0)$ si existe

$$\lim_{\Delta y_{0i}\to 0} \frac{f(x,x_0,y_0+\Delta y_0) - f(x,x_0,y_0)}{\Delta y_{0i}} \quad \text{donde } \Delta y_0 = (0,\dots,0,\Delta y_{0i},0,\dots,0).$$

y en caso de que este límite exista coincide con $\frac{\partial f}{\partial y_{0i}}(x,x_0,y_0)$.
Sea $(x,x_0,y_0)\in\Theta$, es decir, $(x_0,y_0)\in D$, $x\in J(x_0,y_0)$.
Consideremos un tubo de trayectorias de soluciones definidas en un intervalo $[x_1,x_2]$ al que pertenecen x_0 y x.
Sea $\Delta f(x,x_0,y_0,\Delta y_0) = f(x,x_0,y_0+\Delta y_0) - f(x,x_0,y_0)$.
Se verifica que

$$f(x,x_0,y_0+\Delta y_0) = y_0+\Delta y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, f(t,x_0,y_0+\Delta y_0))\,dt, \quad \forall x\in[x_1,x_2]$$

y $$f(x,x_0,y_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, f(t,x_0,y_0))\,dt, \quad \forall x\in[x_1,x_2].$$

por ser $f(\cdot, x_0, y_0+\Delta y_0)$ y $f(\cdot,x_0,y_0)$ soluciones del S.D.
Entonces

$$\Delta f(x,x_0,y_0,\Delta y_0) = \Delta y_0 + \int_{x_0}^{x} \{F(t, f+\Delta f) - F(t,f)\}\,dt$$

donde con $f+\Delta f$ representamos $f(t,x_0,y_0+\Delta y_0)$ y con f representamos $f(t,x_0,y_0)$.
Siendo F derivable existe y vale cero el límite

$$\lim_{\Delta f\to 0} \frac{F(t,f+\Delta f) - F(t,f) - \frac{\partial F}{\partial y}(t,f)\cdot\Delta f}{\|\Delta f\|}$$

Sea $$h(\Delta f) = \frac{F(t,f+\Delta f) - F(t,f) - \frac{\partial F}{\partial y}(t,f)\,\Delta f}{\|\Delta f\|}$$

Entonces $\lim_{\Delta f\to 0} h(\Delta f) = 0$. Definiendo $h(0)=0$, la función h es continua.

Se verifica entonces que $$\Delta f(x,x_0,y_0,\Delta y_0) = \Delta y_0 + \int_{x_0}^{x}\left\{\frac{\partial F}{\partial y}(t,f)\,\Delta f + h(\Delta f)\|\Delta f\|\right\}dt$$

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS II
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1980/1981
Profesor: Manuel Fernández García-Hierro

Luego $\dfrac{\Delta f}{\Delta y_{0i}} = \dfrac{\Delta y_0}{\Delta y_{0i}} + \int_{x_0}^{x} \left\{ \dfrac{\partial F}{\partial y}(t,f) \dfrac{\Delta f}{\Delta y_{0i}} + \dfrac{h(\Delta f)}{\Delta y_{0i}} \|\Delta f\| \right\} dt =$

$$= e_i + \int_{x_0}^{x} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y}(t,f) \frac{\Delta f}{\Delta y_{0i}} + \frac{h(\Delta f)}{\Delta y_{0i}} \|\Delta f\| \right\} dt . \qquad (1)$$

donde $e_i = (0,\overset{i}{\ldots},1,0,\ldots,0)$.

Consideremos el S.D. siguiente:

$$z'(x) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x,x_0,\eta_0)) \cdot z(x) \qquad (*)$$

La solución $z^*(x)$ de este S.D. que pasa por (x_0,e_i), y que está definida, al menos en $[x_1,x_2]$, verificará que

$$z^*(x) = e_i + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial F}{\partial y}(t, f(t,x_0,\eta_0))\, z^*(t)\, dt, \quad \forall x \in [x_1,x_2] \ (2) \ (\ast\ast)$$

Sea $u(x) = z^*(x) - \dfrac{\Delta f}{\Delta y_{0i}}$. Entonces, en virtud de (1) y (2)

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y}(t, f(t,x_0,\eta_0)) \left[z^*(t) - \frac{\Delta f}{\Delta y_{0i}} \right] - \frac{h(\Delta f)}{\Delta y_{0i}} \|\Delta f\| \right\} dt =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y}(t, f(t,x_0,\eta_0)) \cdot u(t) - h(\Delta f) \frac{\|\Delta f\|}{\Delta y_{0i}} \right\} dt$$

Luego $\|u(x)\| \le \displaystyle\int_{x_0}^{x} \left\{ \left\| \frac{\partial F}{\partial y}(t, f(t,x_0,\eta_0)) \right\| \|u(t)\| + \|h(\Delta f)\| \cdot \left\| \frac{\Delta f}{\Delta y_{0i}} \right\| \right\} dt =$

$$= \int_{x_0}^{x} \left\{ \left\| \frac{\partial F}{\partial y}(t, f(t,x_0,\eta_0)) \right\| \cdot \|u(t)\| + \|h(\Delta f)\| \cdot \|u(t) - z^*(t)\| \right\} dt \le$$

$$\le \int_{x_0}^{x} \left\{ \left[\left\| \frac{\partial F}{\partial y}(t, f(t,x_0,\eta_0)) \right\| + \|h(\Delta f)\| \right] \cdot \|u(t)\| \right\} dt + \int_{x_0}^{x} \|h(\Delta f)\| \cdot \|z^*(t)\|\, dt. \quad (3)$$

Se verifica que $\lim\limits_{\Delta y_{0i} \to 0} \Delta f(x,x_0,\eta_0,\Delta y_0) = 0$, y este límite es uniforme respecto a x.

Por otra parte $\lim\limits_{\Delta f \to 0} h(\Delta f(x,x_0,\eta_0,\Delta y_0)) = 0$.

Luego considerando h como función de $(x,x_0,\eta_0,\Delta y_0)$ se verifica que

$\lim\limits_{\Delta y_{0i} \to 0} h(x,x_0,\eta_0,\Delta y_0) = 0$ y este límite es uniforme respecto a x.

Por tanto, $\lim\limits_{\Delta y_{0i} \to 0} \sup\limits_{x \in [x_1,x_2]} \|h(x,x_0,\eta_0,\Delta y_0)\| = 0$

Sea $\|h(x_0,\eta_0,\Delta y_0)\| = \sup\limits_{x \in [x_1,x_2]} \|h(x,x_0,\eta_0,\Delta y_0)\|$, que no depende de x.

Como $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ es continua y la solución general $f(t,x_0,\eta_0)$ también lo es, se verifica que $\dfrac{\partial F}{\partial y}(t, f(t,x_0,\eta_0))$ está acotada en $[x_1,x_2]$.

Además, $h(x_0,\eta_0,\Delta y_0)$, como función de Δy_0, está acotada en un entorno V de Δy_{0i} pues $\lim\limits_{\Delta y_{0i} \to 0} \|h(x_0,\eta_0,\Delta y_0)\| = 0$.

$z^*(t)$, como solución del S.D. variacional, es continua y, por tanto, acotada

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS III
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1980/1981
Profesor: Manuel Fernández García-Hierro

$(*)$ A este S.D. se le llama S.D. variacional asociado al S.D. $y' = F(x,y)$.

$(\ast\ast)$ $z^*(x)$ está definida $\forall x \in [x_1,x_2]$ pues la solución general está definida $\forall x \in [x_1,x_2]$ y $\frac{\partial F}{\partial y}$ está definida en D. (F es de clase 1).

en el compacto $[x_1,x_2]$. Sea entonces $a(x_0,\eta_0,\Delta y_0)$ una función tal que $\|h(x_0,\eta_0,\Delta y_0)\|\cdot\|z^*(t)\| < a(x_0,\eta_0,\Delta y_0)$, de forma que $\lim\limits_{\Delta y_{0i}\to 0} a(x_0,\eta_0,\Delta y_0)=0$.

Sea b una cota de $\|\frac{\partial F}{\partial y}(t,f)\| + \|h(\Delta f)\|$.

De (3) se deduce que

$$\forall x\in[x_1,x_2],\ \|u(x)\| < \int_{x_0}^{x} b\,\|u(t)\|\,dt + a|x-x_0| \le \int_{x_0}^{x} b\|u(t)\|\,dt + a(x_2-x_1).$$

Aplicando el lema de Gronwall se verifica que

$$\|u(x)\| < a(x_2-x_1)\,e^{b(x_2-x_1)},\quad \forall x\in[x_1,x_2].$$

Ahora bien, como $\lim\limits_{\Delta y_{0i}\to 0} a=0$ y este límite es uniforme se tiene que $\forall x\in[x_1,x_2]$, $\lim\limits_{\Delta y_{0i}\to 0}\|u(x)\|=0$.

y esta convergencia es uniforme respecto de x, pues la constante $a(x_2-x_1)e^{b(x_2-x_1)}$ que acota a $\|u(x)\|$ no depende de x.

Por tanto, $\lim\limits_{\Delta y_{0i}\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta y_{0i}} = z^*(x)$

Luego existe $\lim\limits_{\Delta y_{0i}\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta y_{0i}}$, es decir, existe $\frac{\partial f}{\partial y_{0i}}(x,x_0,\eta_0)$ y coincide con $z^*(x)$.

Además, el S.D. variacional es $z'(x)=G(x,\zeta)\,z(x)$ donde $\zeta=f(x,x_0,\eta_0)$ y $G(x,\zeta)=\frac{\partial F}{\partial y}(x,\zeta)$.

La solución general de este S.D. es $z(x,x_0,\zeta)=z(x,x_0,f(x,x_0,\eta_0))$, y es continua respecto de x, x_0 e η_0. Como $\frac{\partial f}{\partial y_{0i}}(x,x_0,\eta_0)=z^*(x)$ y $z^*(x)$ es solución del S.D. variacional, se tiene que $\frac{\partial f}{\partial y_{0i}}(x,x_0,\eta_0)$ es continua respecto de x, x_0 e η_0.

3) Daremos unas indicaciones de la demostración de la existencia de $\frac{\partial f}{\partial x_0}(x,x_0,\eta_0)$, $\forall (x,x_0,\eta_0)\in\Theta$.

Por definición
$$\frac{\partial f}{\partial x_0}(x,x_0,\eta_0)=\lim_{\Delta x_0\to 0}\frac{f(x,x_0+\Delta x_0,y_0)-f(x,x_0,\eta_0)}{\Delta x_0}.$$

Supongamos que tenemos construido un tubo de trayectorias de soluciones definidas en el intervalo $[x_1,x_2]$ al que pertenecen x_0 y x.

Se verifica que

$$f(x,x_0+\Delta x_0,\eta_0)=y_0+\int_{x_0+\Delta x_0}^{x} F(t,f(t,x_0+\Delta x_0,\eta_0))\,dt,\quad \forall x\in[x_1,x_2]$$

y $f(x,x_0,\eta_0)=y_0+\int_{x_0}^{x} F(t,f(t,x_0,\eta_0))\,dt$, $\forall x\in[x_1,x_2]$.

Sea $\Delta f(x,x_0,\eta_0,\Delta x_0)=f(x,x_0+\Delta x_0,\eta_0)-f(x,x_0,\eta_0)$.

Entonces
$$\Delta f=\int_{x_0+\Delta x_0}^{x} F(t,f+\Delta f)\,dt-\int_{x_0}^{x}F(t,f)\,dt=\int_{x_0+\Delta x_0}^{x}\{F(t,f+\Delta f)-F(t,f)\}\,dt-\int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0}F(t,f)\,dt=$$

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS III
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1980/1981
Profesor: Manuel Fernández García-Hierro

$$= \int_{x_0+\Delta x_0} \left\{ F(t,f) + \frac{\partial F}{\partial y}(t,f)\,\Delta f + h\,\|\Delta f\| - F(t,f) \right\} dt - \int_{x_0} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x_0,y_0)\,dt$$

pues $F(t, f(t,x_0,y_0)) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,x_0,y_0)$, y donde h es una función tal que $\lim_{\Delta f \to 0} h = 0$.

Entonces

$$\Delta f = \int_{x_0+\Delta x_0}^{x} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y}(t,f)\,\Delta f + h\,\|\Delta f\| \right\} dt - \left[f(x_0+\Delta x_0, x_0, y_0) - f(x_0,x_0,y_0) \right]$$

Como $f(x_0,x_0,y_0) = y_0$ y $f(x_0+\Delta x_0, x_0, y_0) = f(x_0,x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,x_0,y_0)\,\Delta x_0 + h'\Delta x_0 =$
$= y_0 + F(x_0,y_0)\,\Delta x_0 + h'\Delta x_0$, siendo h' una función tal que $\lim_{\Delta x_0 \to 0} h' = 0$, se tiene que

$$\Delta f = \int_{x_0+\Delta x_0}^{x} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y}(t,f)\,\Delta f + h\,\|\Delta f\| \right\} dt - F(x_0,y_0)\,\Delta x_0 - h'\Delta x_0 .$$

Luego
$$\frac{\Delta f}{\Delta x_0} = \int_{x_0+\Delta x_0}^{x} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y}(t,f)\,\frac{\Delta f}{\Delta x_0} + \frac{h}{\Delta x_0}\|\Delta f\| \right\} dt - F(x_0,y_0) - h'. \qquad (4)$$

Consideraríamos ahora el S.D. variacional

$$\frac{d}{dx} z(x,x_0,y_0) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x,x_0,y_0))\, z(x,x_0,y_0)$$

y la solución del mismo

$$z^*(x) = -F(x_0,y_0) - \int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} \frac{\partial F}{\partial y}(t, f(t,x_0,y_0))\, z^*(t)\,dt + \int_{x_0+\Delta x_0}^{x} \frac{\partial F}{\partial y}(t, f(t,x_0,y_0))\, z^*(t)\,dt \quad (5)$$

Sea $u(x) = \frac{\Delta f}{\Delta x_0} - z^*(x)$. Teniendo en cuenta (4) y (5) acotaríamos $\|u(x)\|$. Aplicando luego el lema de Gronwall probamos que

$$\lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x_0} = \frac{\partial f}{\partial x_0} = z^*$$

con lo cual existe $\frac{\partial f}{\partial x_0}(x,x_0,y_0)$ y es continua respecto de x, x_0 e y_0. c.s.q.d.

6.2. TEOREMA: Sea el S.D. $y' = F(x,y)$ donde F es una función definida en un dominio $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, y valorada en $\mathbb{R}^n$. Si F es de clase C^m en D entonces la solución general es de clase C^{m+1} respecto de x y de clase C^m respecto de x_0 e y_0.

Demostr.: Lo probaremos para $m=2$.

Tenemos que $\frac{\partial}{\partial x} f(x,x_0,y_0) = F(x, f(x,x_0,y_0))$ y por tanto

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x,x_0,y_0)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x,x_0,y_0)) \cdot F(x, f(x,x_0,y_0))$$

Derivando nuevamente respecto de x tenemos que

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,x_0,y_0) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, f(x,x_0,y_0)) + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, f(x,x_0,y_0)) \cdot F(x, f(x,x_0,y_0)) +$$
$$+ \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x,x_0,y_0)) \right) \cdot F(x, f(x,x_0,y_0)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x,x_0,y_0)) \frac{d}{dx}\left(F(x, f(x,x_0,y_0)) \right)$$

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS III
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1980/1981
Profesor: Manuel Fernández García-Hierro

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, f(x,x_0,y_0)) + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, f(x,x_0,y_0))\, F(x, f(x,x_0,y_0)) + \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, f(x,x_0,y_0)) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, f(x,x_0,y_0))\, F(x, f(x,x_0,y_0))\right] F(x, f(x,x_0,y_0)) +$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x,x_0,y_0)) \left[\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x,x_0,y_0)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x,x_0,y_0))\, F(x,x_0,y_0)\right]$$

Luego existe $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,x_0,y_0)$ y es continua respecto de las variable x, x_0 e y_0, pues existen las derivadas parciales de la expresión anterior y son continuas respecto a las tres variables.

Por otra parte, el S.D. variacional asociado a $y' = F(x,y)$ es

$$Z'(x,x_0,y_0) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x,x_0,y_0))\, Z(x,x_0,y_0)$$

Como F es de clase 2, $\frac{\partial F}{\partial y}$ es de clase C^1.

Entonces la solución general $Z(x,x_0,y_0)$ es de clase C^1 respecto de x_0 e y_0.

Son soluciones del S.D. variacional las siguientes

$$Z^*(x,x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y_{0i}}(x,x_0,y_0), \; i=1,\dots,n$$

$$\text{y } \; Z^*(x,x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x_0}(x,x_0,y_0)$$

y son de clase C^1 respecto de x_0, y_0, por serlo la solución general del S.D. variacional.

Por tanto, la solución $f(x,x_0,y_0)$ es de clase C^2 respecto de x_0 e y_0. csqd.

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS III
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1980/1981
Profesor: Manuel Fernández García-Hierro