TEMA 7º: SISTEMAS DIFERENCIALES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES.

1. INTRODUCCION. CALCULO DE UNA MATRIZ FUNDAMENTAL PARA S.D.L. CON COEFICIENTES CONSTANTES.

Los S.D.L. con coeficientes constantes son S.D. de la forma $y' = Ay + b(x)$ donde $A \in M_n(\mathbb{R})$. Si $b: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es continua, $D = I \times \mathbb{R}^n$ es dominio de existencia y unicidad de soluciones de dicho S.D. Trataremos de encontrar una matriz fundamental para este tipo de S.D. Antes hemos de definir algunos conceptos, como es la exponencial de una matriz.

A) EXPONENCIAL DE UNA MATRIZ.

Consideremos en $M_n(\mathbb{R})$ la norma $\|\cdot\|$: $A \in M_n \mapsto \|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \in \mathbb{R}$. Entonces

1.1. PROPOSICION: $(M_n, \|\cdot\|)$ es un espacio normado completo (de Banach).

Demostr.: Por ser M_n de dimensión finita, todas las normas son equivalentes. Utilizaremos la norma $\|A\| = \sum_{i,j} |a_{ij}|$.

Sea $\{A_m\}_m$ una sucesión de Cauchy en M_n. Hay que ver que existe $A \in M_n$ tal que $\{A_m\}_m \to A$.

Si $\{A_m\}_m$ es de Cauchy, $\forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} / p, q > \nu \Rightarrow \|A_p - A_q\| < \varepsilon$.

Sea $A_m = (a_{ij}^m)$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

Dados $p, q > \nu$, $\|A_p - A_q\| < \varepsilon \Rightarrow \sum_{i,j} |a_{ij}^p - a_{ij}^q| < \varepsilon \Rightarrow |a_{ij}^p - a_{ij}^q| < \varepsilon, \forall i,j$.

Luego $\{a_{ij}^m\}_m$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$, y por tanto
$\forall i,j \in \{1,\dots,n\}, \exists a_{ij} \in \mathbb{R} / \lim_m a_{ij}^m = a_{ij}$.

Sea $A = (a_{ij})$. Se verifica que dado $\varepsilon > 0$
$\forall i,j \in \{1,\dots,n\}, \exists n_{ij} \in \mathbb{N} / m \geq n_{ij} \Rightarrow |a_{ij}^m - a_{ij}| < \varepsilon / n^2$.

Sea $n_0 = \max_{i,j} n_{ij}$.

Entonces, si $m > n_0$, $\sum_{i,j} |a_{ij}^m - a_{ij}| < n^2 \frac{\varepsilon}{n^2} = \varepsilon$, es decir $\|A_m - A\| < \varepsilon$

que prueba que $\{A_m\}_m \to A$. c.s.q.d.

Sabemos que si a es un número real entonces

$$e^a = 1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^n}{n!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$$

Sea A una matriz de orden n.

Consideremos las sumas siguientes

$$S_1 = I$$
$$S_2 = I + \frac{A}{1!}$$
$$S_3 = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!}$$
$$\text{- - - - - - - -}$$
$$S_m = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^{m-1}}{(m-1)!}$$

Veamos que la sucesión matricial $\{S_m\}_m$ es de Cauchy.

Supuesto $p>q$

$$\|S_p - S_q\| = \left\| \frac{A^q}{q!} + \frac{A^{q+1}}{(q+1)!} + \cdots + \frac{A^{p-1}}{(p-1)!} \right\| \leq \sum_{j=q}^{p-1} \frac{1}{j!}\|A\|^j.$$

La serie $e^{\|A\|} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\|A\|^j$ es convergente.

Luego $\forall \varepsilon>0, \exists \nu>0 \,/\, \underset{p>q}{p,q>\nu} \Rightarrow \sum_{j=q}^{p-1}\frac{1}{j!}\|A\|^j < \varepsilon$

Luego si $p>q\geq\nu$, $\|S_p - S_q\| < \varepsilon$, que prueba que $\{S_m\}_m$ es de Cauchy en M_n. Como M_n es completo, existe $S \in M_n$ tal que $\{S_m\}_m \to S$.

A la matriz S la denotaremos por e^A y la llamaremos exponencial de la matriz A.

Se tiene entonces que

$$e^A = \lim_m S_m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}.$$

La exponencial de matrices no verifica todas las propiedades que verifica la función exponencial de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

En general no es cierto que $e^A e^B = e^B e^A$:

$$e^A = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots \qquad e^B = I + \frac{B}{1!} + \frac{B^2}{2!} + \cdots$$

$$e^A e^B = I + \frac{A}{1!} + \frac{B}{1!} + \frac{AB}{1!} + \cdots \qquad e^B e^A = I + \frac{B}{1!} + \frac{A}{1!} + \frac{BA}{1!} + \cdots$$

y en general no se verifica que $AB = BA$. Si A y B conmutan se verifica que $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$.

Como $A\cdot(-A) = (-A)\cdot A$, se verifica que $e^0 = e^{A-A} = e^A e^{-A} = I + \frac{0}{1!} + \frac{0^2}{2!} + \cdots = I$.

Luego $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

B) Vamos a encontrar una matriz fundamental para el S.D.L. con coeficientes constantes $y' = Ay + b(x)$.

<u>1.1. PROPOSICION</u>: e^{xA} es una matriz fundamental del S.D.L. $y' = Ay + b(x)$.

Demostr.: Se trata de probar que e^{xA} es solución de la E.D.M., es decir que $\frac{d}{dx} e^{xA} = A\cdot e^{xA}$ y que $\det e^{xA} \neq 0$.

$$\frac{d}{dx}e^{xA}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{(x+\Delta x)A}-e^{xA}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(e^{\Delta x A}-I)e^{xA}}{\Delta x}$$

pues xA e $\Delta x\cdot A$ conmutan.

Luego $\frac{d}{dx}e^{xA}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(I+\frac{\Delta x\cdot A}{1!}+\frac{(\Delta x\cdot A)^2}{2!}+\dots-I\right)e^{xA}=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}A\left(\frac{1}{1!}I+\frac{\Delta x A}{2!}+\frac{(\Delta x A)^2}{3!}+\dots\right)e^{xA}=A\left(\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\Delta x\cdot A)^k}{(k+1)!}\right)e^{xA}.$$

Basta probar entonces que $\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\Delta x\cdot A)^k}{(k+1)!}=I$.

o bien que $\left\|\frac{\Delta x A}{2!}+\frac{(\Delta x A)^2}{3!}+\dots\right\|<\varepsilon$ para Δx suficientemente pequeño.

Pero $\left\|\frac{\Delta x A}{2!}+\frac{(\Delta x A)^2}{3!}+\dots\right\|\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\Delta x|^k\|A\|^k}{(k+1)!}$

Como $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots$ se tiene que $\frac{e^x-1}{x}=1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\dots$

y por tanto $\frac{e^x-1}{x}-1=\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\dots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{(k+1)!}$

Luego $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\Delta x|^k\|A\|^k}{(k+1)!}=\frac{e^{|\Delta x|\cdot\|A\|}-1}{|\Delta x|\cdot\|A\|}-1$, si $|\Delta x|\neq 0$.

Aplicando la regla de L'Hôpital se prueba que $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}-1=0$.

Luego $\lim_{\Delta x\to 0}\left\|\frac{\Delta x A}{2!}+\frac{(\Delta x\cdot A)^2}{3!}+\dots\right\|=0$.

Luego e^{xA} es solución de la E.D.M.

Para ver que $\det e^{xA}\neq 0$, $\forall x\in I$, basta ver que es distinto de cero en un punto; por ejemplo en $x=0$.

Pero $e^{0A}=e^0=I$. Luego $\det e^{0A}\neq 0$ y por tanto $\det e^{xA}\neq 0, \forall x$. c.s.q.d.

Por tanto, la solución del S.D.L.H. que pasa por un punto (x_0,y_0) es

$$f(x)=e^{xA}e^{-x_0A}y_0=e^{(x-x_0)A}y_0$$

pues xA y $-x_0A$ conmutan.

La solución del S.D.L. completo que pasa por (x_0,y_0) sera

$$f(x)=e^{(x-x_0)A}y_0+\int_{x_0}^{x}e^{(x-t)A}b(t)\,dt.$$

C) FORMA CANONICA DE JORDAN: EXPONENCIAL DE LAS MATRICES DE JORDAN.

El cálculo de la matriz e^{xA} no es sencillo en general. Lo que haremos es expresar e^{xA} en función de e^{xJ} siendo J "~~la~~" forma canónica de Jordan asociada a la matriz A. Aprenderemos también a calcular e^{xJ}.

Veamos el siguiente teorema, que dice que toda matriz ~~es~~ semejante a una forma canónica de Jordan.

1.2. TEOREMA: (de Jordan)

Toda matriz $A \in \mathcal{M}_n$ es semejante a una matriz J diagonal por bloques

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_k \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n$$

cuyos bloques, llamados tambien matrices cajas, son de la forma
$$J_\ell = \lambda_\ell I + L_\ell$$
~~y~~ están construidos a partir de los autovalores λ_ℓ de A de tal forma que si bien un autovalor puede aparecer en más de un bloque el número de veces que aparece repetido en la diagonal de J es igual a su orden de multiplicidad como raiz del polinomio característico. L_ℓ es una matriz (l_{ij}) del mismo orden que J_ℓ de forma que $l_{i,i+1} = 1$, $\forall i$ y $l_{ij} = 0$ si $j \neq i+1$.

Además la matriz J esta unívocamente determinada por A salvo, quizas, el orden en que se colocan las matrices cajas.

Recordemos que dos matrices A, B de orden n se dicen semejantes si existe una matriz P regular de orden n tal que $A = PBP^{-1}$.

1.3. PROPOSICION: Sea A una matriz de orden n, J su forma canónica de Jordan, λ un autovalor cualquiera de A y m un numero natural. Entonces las matrices $(A-\lambda I)^m$ y $(J-\lambda I)^m$ tienen el mismo rango.

La siguiente proposición nos da e^A en función de e^J.

1.4. PROPOSICION: Sea $A \in \mathcal{M}_n$ y J su forma canónica de Jordan. Sea P la matriz de paso, es decir, P es tal que $A = PJP^{-1}$ y $\det P \neq 0$. Entonces $e^A = P e^J P^{-1}$.

Demostr.: Sea $S_m(A) = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^m}{m!}$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

Basta probar entonces que $\lim_{m\to\infty} \|S_m(A) - Pe^J P^{-1}\| = 0$.

$$S_m(A) = PIP^{-1} + \frac{PJP^{-1}}{1!} + \frac{(PJP^{-1})^2}{2!} + \cdots + \frac{(PJP^{-1})^m}{m!} = PIP^{-1} + \frac{PJP^{-1}}{1!} + \frac{PJ^2P^{-1}}{2!} + \cdots + \frac{PJ^mP^{-1}}{m!}$$

pues $(PJP^{-1})^k = PJP^{-1} \cdot PJP^{-1} \overset{k}{\cdots} PJP^{-1} = PJ^kP^{-1}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Luego $S_m(A) = P\left(I + \frac{J}{1!} + \frac{J^2}{2!} + \cdots + \frac{J^m}{m!}\right)P^{-1} = P S_m(J) P^{-1}$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

Por tanto, $\|S_m(A) - Pe^J P^{-1}\| = \|PS_m(J)P^{-1} - Pe^J P^{-1}\| \le \|P\| \cdot \|S_m(J) - e^J\| \cdot \|P^{-1}\|$

Como $\|S_m(J) - e^J\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ se deduce que $\|S_m(A) - Pe^J P^{-1}\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ c.q.d.

OBSERVACION: Se deduce de la proposición anterior que $e^{xA} = Pe^{xJ}P^{-1}, \forall x$ pues si A y J son semejantes, xA y xJ también lo son.

Vamos a calcular e^J.

1.5. PROPOSICION: Si $J = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_2 & \\ 0 & & J_k \end{bmatrix}$ es una matriz diagonal por bloques

$$\boxed{\text{entonces } e^J = \begin{bmatrix} e^{J_1} & & 0 \\ & e^{J_2} & \\ 0 & & e^{J_k} \end{bmatrix}}$$

Demostrac. $e^J = I + \frac{J}{1!} + \frac{J^2}{2!} + \cdots$

Se verifica trivialmente que $J^m = \begin{bmatrix} J_1^m & & 0 \\ & J_2^m & \\ 0 & & J_k^m \end{bmatrix}, \forall m \in \mathbb{N}$

Sea I_l, $l = 1, \ldots, k$, la matriz unidad del mismo orden de J_l. Entonces

$$e^J = \begin{bmatrix} I_1 & & 0 \\ & I_2 & \\ 0 & & I_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{J_1}{1!} & & 0 \\ & \frac{J_2}{1!} & \\ 0 & & \frac{J_k}{1!} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{J_1^2}{2!} & & 0 \\ & \frac{J_2^2}{2!} & \\ 0 & & \frac{J_k^2}{2!} \end{bmatrix} + \cdots = \begin{bmatrix} I_1 + \frac{J_1}{1!} + \frac{J_1^2}{2!} + \cdots & & \\ & I_2 + \frac{J_2}{1!} + \frac{J_2^2}{2!} + \cdots & \\ & & I_k + \frac{J_k}{1!} + \frac{J_k^2}{2!} + \cdots \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{J_1} & & 0 \\ & e^{J_2} & \\ 0 & & e^{J_k} \end{bmatrix} \text{. csqd.}$$

Hemos reducido el problema de calcular e^A al de calcular las exponenciales de los bloques J_m. Veamos como se calcula e^{J_m}.

$J_m = \lambda_m I + L_m$ donde λ_m es autovalor de A y

$$L_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & 0 \\ & & & & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces $e^{J_m} = e^{\lambda_m I + L_m} = e^{\lambda_m I} \cdot e^{L_m}$, pues $\lambda_m I$ y L_m conmutan.

Pero $e^{\lambda_m I} = I + \frac{\lambda_m I}{1!} + \frac{\lambda_m^2 I}{2!} + \cdots = I\left(1 + \frac{\lambda_m}{1!} + \frac{\lambda_m^2}{2!} + \cdots\right) = e^{\lambda_m} \cdot I$.

Luego $e^{J_m} = e^{\lambda_m} \cdot I \cdot e^{L_m} = e^{\lambda_m} \cdot e^{L_m}$.

L_m es una matriz nilpotente, pues su potencia m-sima es 0 ($L_m \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$).

$$L_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}, \quad L_m^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad L_m^{m-1} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & & & 0 \\ & & & \vdots \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}, \quad L_m^m = 0.$$

Luego $e^{L_m} = I + \frac{1}{1!} L_m + \frac{1}{2!} L_m^2 + \cdots + \frac{1}{(m-1)!} L_m^{m-1}$

Entonces $e^{xJ_m} = e^{\lambda_m x} \cdot e^{xL_m} = e^{\lambda_m x}\left(I + \frac{1}{1!}\begin{bmatrix} 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & 0 \\ & & & & x \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} 0 & 0 & x^2 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & x^2 \\ & & & & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} + \cdots\right) =$

$$= e^{\lambda_m x} \begin{bmatrix} 1 & \frac{x}{1!} & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} \\ & 1 & \frac{x}{1!} & \cdots & \frac{x^{m-2}}{(m-2)!} \\ & & 1 & \cdots & \frac{x^{m-3}}{(m-3)!} \\ & & & 1 & \frac{x}{1!} \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Si la matriz A tiene autovalores complejos, es semejante a una

matriz diagonal por bloques $\mathrm{diag}(J_1, J_2, \dots, J_k, B_1, B_2, \dots, B_l)$
donde J_i son los bloques correspondientes a los autovalores reales y B_j los correspondientes a cada autovalor complejo y su conjugado.
Los bloques B_j son de la forma

$$B_j = \begin{bmatrix} D_j & I_2 & 0 & \cdots & 0 \\ & D_j & I_2 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & I_2 \\ 0 & & & & D_j \end{bmatrix} \quad \text{donde } D_j = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, \; I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se verifica que

$$e^A = P\, e^{\mathrm{diag}(J_1, \dots, J_k, B_1, \dots, B_l)} P^{-1} \quad \text{y}$$

$$e^{\mathrm{diag}(J_1, \dots, J_k, B_1, \dots, B_l)} = \begin{bmatrix} e^{J_1} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & e^{J_k} & & \\ & & & e^{B_1} & \\ 0 & & & & \ddots \; e^{B_l} \end{bmatrix}$$

Vamos a calcular e^{B_j}.

- Si $B_j = D_j = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ entonces

$$e^{B_j} = e^{\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}} = e^{\alpha I + \begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix}} = e^{\alpha I} e^{\begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix}} = e^{\alpha} e^{\begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix}}.$$

Calculemos las potencias de $\begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -\beta^2 & 0 \\ 0 & -\beta^2 \end{bmatrix} = -\beta^2 I \; ; \; \begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix}^3 = -\beta^2 I \begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta^3 \\ -\beta^3 & 0 \end{bmatrix}, \; \begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} \beta^4 & 0 \\ 0 & \beta^4 \end{bmatrix}, \dots$$

Luego $e^{\begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix}} = I + \frac{1}{1!}\begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} -\beta^2 & 0 \\ 0 & -\beta^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{bmatrix} 0 & \beta^3 \\ -\beta^3 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4!}\begin{bmatrix} \beta^4 & 0 \\ 0 & \beta^4 \end{bmatrix} + \cdots =$

$$= \begin{bmatrix} 1 - \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^4}{4!} - \frac{\beta^6}{6!} + \cdots & -\frac{\beta}{1!} + \frac{\beta^3}{3!} - \frac{\beta^5}{5!} + \cdots \\ \frac{\beta}{1!} - \frac{\beta^3}{3!} + \frac{\beta^5}{5!} - \cdots & 1 - \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^4}{4!} - \frac{\beta^6}{6!} + \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

Luego $e^{B_j} = e^{\alpha}\begin{bmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$.

- Si $B_j = \begin{bmatrix} D_j & I_2 \\ 0 & D_j \end{bmatrix}$ entonces

$$e^{B_j} = e^{\begin{bmatrix} D_j & 0 \\ 0 & D_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} = e^{\begin{bmatrix} D_j & 0 \\ 0 & D_j \end{bmatrix}} e^{\begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} e^{D_j} & 0 \\ 0 & e^{D_j} \end{bmatrix} e^{\begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

e^{D_j} lo hemos calculado antes.

$$e^{\begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} = I_4 + \frac{1}{1!}\begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 + \cdots = I_4 + \frac{1}{1!}\begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ pues } \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^n = 0 \text{ si } n > 1.$$

Luego $e^{B_j} = \begin{bmatrix} e^{D_j} & 0 \\ 0 & e^{D_j} \end{bmatrix}\left(I_4 + \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$.

De forma análoga se procedería para calcular e^{B_j} si

$$B_j = \begin{bmatrix} D_j & I_2 & 0 & \cdots & 0 \\ & D_j & & \cdots & 0 \\ 0 & & & \ddots & D_j \end{bmatrix}$$

2. SISTEMAS DIFERENCIALES LINEALES PERIODICOS

A) Empezaremos introduciendo el concepto de logaritmo de una matriz. Sea B una matriz con determinante no nulo. Se trata de calcular una matriz A^* tal que $e^{A^*} = B$. A A^*, si existe, le llamaremos logaritmo de la matriz B.

Sea J una forma canónica de Jordan asociada a B. Supongamos que existe $A \in \mathcal{M}_n$ tal que $e^A = J$. Entonces $B = Pe^A P^{-1} = e^{PAP^{-1}}$.

Haciendo $A^* = PAP^{-1}$ quedaría resuelto el problema.

Basta con calcular el logaritmo de las matrices de Jordan.

Para calcular el logaritmo de $J = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k \end{bmatrix}$ basta conocer el logaritmo de las matrices cajas, pues si A_ν es tal que $e^{A_\nu} = J_\nu$, $\nu = 1, \dots, k$, entonces haciendo $A = \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{bmatrix}$ tenemos

$$e^A = \begin{bmatrix} e^{A_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{A_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k \end{bmatrix} = J.$$

Pero $J_\nu = \lambda_\nu I + L_\nu$, con las notaciones del apartado anterior.

Como $\det B \neq 0$, $\lambda_\nu \neq 0$, $\forall \nu$. Luego

$$J_\nu = \lambda_\nu \left(I + \frac{1}{\lambda_\nu} L_\nu \right)$$

DEFINICION: Definimos $\log\left(I + \frac{1}{\lambda_\nu} L_\nu\right) = \frac{1}{\lambda_\nu} L_\nu - \frac{1}{2\lambda_\nu^2} L_\nu^2 + \frac{1}{3\lambda_\nu^3} L_\nu^3 - \dots$

Esta suma tiene un número finito de sumandos pues L_ν es nihilpotente.

Se ha definido así por analogía con

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \qquad -1 < x \leq 1.$$

Se prueba que $e^{\log\left(I + \frac{1}{\lambda_\nu} L_\nu\right)} = I + \frac{1}{\lambda_\nu} L_\nu$, como era de esperar.

2.1. PROPOSICION: $\log J_\nu = (\log \lambda_\nu) \cdot I + \log\left(I + \frac{1}{\lambda_\nu} L_\nu\right)$

donde $\log \lambda_\nu$ es el logaritmo del número complejo λ_ν: $\log \lambda_\nu = \log|\lambda_\nu| + i \arg \lambda_\nu$.

Demostr.:

$$e^{(\log \lambda_\nu) I + \log\left(I + \frac{1}{\lambda_\nu} L_\nu\right)} = e^{(\log \lambda_\nu) \cdot I} e^{\log\left(I + \frac{1}{\lambda_\nu} L_\nu\right)} =$$

$$= e^{\log \lambda_\nu} I \left(I + \frac{1}{\lambda_\nu} L_\nu \right) = \lambda_\nu \left(I + \frac{1}{\lambda_\nu} L_\nu \right) = J_\nu. \quad \text{csqd.}$$

El logaritmo de J_ν no es único, pues no lo es el logaritmo de un número complejo: $\log \lambda_\nu = \log \lambda_\nu + i(\arg \lambda_\nu + 2n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Se obtiene el llamado valor principal de este logaritmo para $n \in \mathbb{Z}$ tal que $-\pi \leq \arg \lambda_\nu + 2n\pi \leq \pi$.

B) S.D.L. PERIODICOS.

Son S.D. de la forma $y' = A(x)y + b(x)$ donde la función $A: x\in\mathbb{R} \longmapsto A(x) \in \mathcal{M}_n$ es periódica, es decir, existe $\omega\neq 0$ tal que

$$A(x+\omega) = A(x), \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Consideraremos que A y b son continuas en $\mathbb{R}$.

2.2. PROPOSICION: Si $\phi(x)$ es una matriz fundamental para este S.D.L. entonces $\Psi(x) = \phi(x+\omega)$ es una matriz fundamental del mismo.

Demostr.: Veamos que Ψ es solución de la E.D.M.

$$\Psi'(x) = \phi'(x+\omega) = A(x+\omega)\,\phi(x+\omega) = A(x)\,\Psi(x)$$

Además $\det\Psi(x) = \det\phi(x+\omega) \neq 0, \forall x\in\mathbb{R}$. csqd.

2.3. PROPOSICION: Toda matriz fundamental del S.D.L periódico puede expresarse de la forma $\phi(x) = P(x)e^{xR}$ donde $P(x)$ es una función matricial periódica y R es una matriz numérica.

Demostr.: Como $\phi(x)$ y $\phi(x+\omega)$ son matrices fundamentales existe una matriz numérica C (P.4., pag. 44) tal que $\phi(x+\omega) = \phi(x)\cdot C$ y $\det C\neq 0$.

Como $\omega\neq 0$, sea $R = \frac{1}{\omega}\log C$. Entonces $C = e^{\omega R}$ y

$$\phi(x+\omega) = \phi(x)\,e^{\omega R}.$$

Sea $P(x) = \phi(x)e^{-xR} \in \mathcal{M}_n, \forall x\in\mathbb{R}$. Si probamos que $P(x)$ es periódica quedará probada esta proposición, pues $\phi(x) = \phi(x)e^{-xR}e^{xR} = P(x)e^{xR}$.

$$P(x+\omega) = \phi(x+\omega)e^{-(x+\omega)R} = \phi(x)e^{\omega R}e^{-\omega R}e^{-xR} = \phi(x)e^{-xR} = P(x). \text{ csqd.}$$

3. CASO DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES.

A) Vamos a estudiar otra forma de resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

Consideramos la E.D.L.

$$u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + a_2 u^{(n-2)} + \dots + a_n u = r(x)$$

donde $u^{(k)} = \frac{d^k u(x)}{dx^k}$ y $r: I\subset\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) es continua y $a_i\in\mathbb{K}, i=1,\dots,n$.

Se llama lineal por ser lineal el operador

$$L: u\in\mathcal{C}^n(I,\mathbb{K}) \longmapsto L[u] = u^{(n)} + a_1u^{(n-1)} + \dots + a_n u \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K}).$$

Vamos a resolver en primer lugar la E.D.L.H, es decir, para $r(x) = 0$.

Buscaremos soluciones de la forma $u(x) = \lambda e^{\lambda x}$ donde $\lambda = $ cte.

Si $u(x) = \lambda e^{\lambda x}$ se tiene que

$$u'(x) = \lambda^2 e^{\lambda x},\ u''(x) = \lambda^3 e^{\lambda x}, \dots, u^{(n)}(x) = \lambda^{n+1}e^{\lambda x}$$

Entonces $L[u] = 0 \iff (\lambda^{n+1} + a_1\lambda^n + a_2\lambda^{n-1} + \dots + a_n\lambda)e^{\lambda x} = 0 \iff$

$\iff \lambda^{n+1} + a_1\lambda^n + a_2\lambda^{n-1} + \dots + a_n\lambda = 0 \iff \lambda = 0$ ó $p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$.

A $p(\lambda)$ se le llama polinomio característico de la E.D.L., pues coincide con el polinomio característico de la matriz asociada al S.D.L equivalente. Por tanto, las soluciones no triviales de la E.D.L.H. de la forma $\lambda e^{\lambda x}$ se obtienen a partir de las raíces del polinomio característico.

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ son las raíces del polinomio característico en $\mathbb{C}$ de multiplicidades respectivas $k_1, \dots, k_m$, con $\lambda_i \neq \lambda_j$, si $i \neq j$, podemos escribir

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{k_m}.$$

Se ha de verificar que $k_1 + \dots + k_m = n$.

3.1. PROPOSICION: Si λ es una raiz del polinomio característico de multiplicidad R entonces las funciones $x^r e^{\lambda x}$, $r = 0, 1, \dots, R-1$, son soluciones de la E.D.L.H.

Demostr.: Llamaremos $p(D)$ al operador $D^{(n)} + a_1 D^{(n-1)} + \dots + a_n$ que actua en la forma $p(D)[u] = L[u]$, $\forall u \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$.

Podemos escribir tambien

$$p(D) = \prod_{j=1}^{m} (D - \lambda_j)^{k_j}.$$

Entonces $p(D) = (D-\lambda)^R q(D)$, pues $(D-\lambda)^R$ y $q(D)$ conmutan.

Si probamos que $(D-\lambda)^R [x^r e^{\lambda x}] = 0$, para $r = 0, 1, \dots, R-1$ tendremos que $L[x^r e^{\lambda x}] = p(D)[x^r e^{\lambda x}] = q(D)(D-\lambda)^R [x^r e^{\lambda x}] = 0$ si $r < R$, es decir, $x^r e^{\lambda x}$ será solución de la E.D.L.H.

Sea $r < R$. Entonces

$$(D-\lambda)[x^r e^{\lambda x}] = D(x^r e^{\lambda x}) - \lambda x^r e^{\lambda x} = (r x^{r-1} + \lambda x^r) e^{\lambda x} - \lambda x^r e^{\lambda x} = r x^{r-1} e^{\lambda x}.$$

$$(D-\lambda)^2 [x^r e^{\lambda x}] = (D-\lambda)[r x^{r-1} e^{\lambda x}] = (r(r-1)x^{r-2} + r\lambda x^{r-1}) e^{\lambda x} - \lambda r x^{r-1} e^{\lambda x} =$$
$$= r(r-1) x^{r-2} e^{\lambda x}.$$

- -

$$(D-\lambda)^r [x^r e^{\lambda x}] = r!\, e^{\lambda x}.$$

$$(D-\lambda)^{r+1} [x^r e^{\lambda x}] = (D-\lambda)[r!\, e^{\lambda x}] = r!\,\lambda e^{\lambda x} - \lambda r!\, e^{\lambda x} = 0.$$

- -

$$(D-\lambda)^R [x^r e^{\lambda x}] = 0. \quad \text{csqd.}$$

Tenemos entonces las siguientes soluciones no triviales de la E.D.L.H $L[u] = 0$:

$k_1)$ $\quad e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, \dots\dots, x^{k_1 - 1} e^{\lambda_1 x}$

$k_2)$ $\quad e^{\lambda_2 x}, x e^{\lambda_2 x}, \dots\dots, x^{k_2 - 1} e^{\lambda_2 x}$

- -

$k_m)$ $\quad e^{\lambda_m x}, x e^{\lambda_m x}, \dots\dots, x^{k_m - 1} e^{\lambda_m x}$.

En total n soluciones complejas definidas en el intervalo I

Si $\lambda_j = \mu_j + i\nu_j$ entonces $e^{\lambda_j x} = e^{\mu_j x} \cos \nu_j x + i e^{\mu_j x} \operatorname{sen} \nu_j x$, $\forall x \in I$.

En el caso en que los coeficientes $a_1, \dots, a_n$ son reales podemos decir algo más: probaremos después que podemos encontrar n soluciones reales definidas en I. Veamos antes la siguiente

3.2 PROPOSICION: Si $\omega(x) = u(x) + i v(x)$ es solución de la E.D.L.H con coeficientes reales $L[u]=0$, entonces $u(x)$ y $v(x)$ son también soluciones de $L[u]=0$.

Demostr.: $L[\omega]=0 \Rightarrow [u^{(n)}(x)+iv^{(n)}(x)] + a_1[u^{(n-1)}(x)+iv^{(n-1)}(x)] + \dots + a_n[u(x)+iv(x)] = 0$

o bien $(u^{(n)}(x) + a_1 u^{(n-1)}(x) + \dots + a_n u(x)) + i(v^{(n)}(x) + a_1 v^{(n-1)}(x) + \dots + a_n v(x)) = 0, \ \forall x \in I.$

Luego $\begin{cases} u^{(n)}(x) + a_1 u^{(n-1)}(x) + \dots + a_n u(x) = 0 \\ v^{(n)}(x) + a_1 v^{(n-1)}(x) + \dots + a_n v(x) = 0 \end{cases}, \ \forall x \in I.$ csqd.

Podemos seleccionar entonces n soluciones reales de la E.D.L.H con coeficientes constantes reales de la siguiente forma:

- Si $\lambda_j = \mu_j + i\nu_j$ es una raiz compleja del polinomio característico de multiplicidad k_j, entonces, su conjugada $\lambda_j^* = \mu_j - i\nu_j$ es también raiz del polinomio característico de multiplicidad k_j. Si $r \in \{0,1,\dots,k_j-1\}$, entonces $x^r e^{\lambda_j x} = x^r e^{\mu_j x}(\cos\nu_j x + i \operatorname{sen} \nu_j x)$ es solución compleja de la E.D.L.H y, por tanto, $x^r e^{\mu_j x}\cos\nu_j x$ y $x^r e^{\mu_j x} \operatorname{sen}\nu_j x$, $r=0,1,\dots,k_j-1$ son soluciones reales de la E.D.L.H. Obtenemos así, para la raiz λ_j, $2k_j$ soluciones reales de la E.D.L.H. Análogamente, para λ_j^* obtenemos $2k_j$ soluciones reales de la E.D.L.H, pero que son linealmente dependientes de las anteriores.
  Por tanto, para cada raiz compleja y su conjugada de multiplicidades k_j obtenemos $2k_j$ soluciones reales de la E.D.L.H. linealmente independientes.
- Si λ_j es una raiz real del polinomio característico de multiplicidad k_j obtenemos k_j soluciones reales linealmente independientes de la E.D.L.H y son de la forma $x^r e^{\lambda_j x}$, $r=0,1,\dots,k_j-1$.

Tenemos así n soluciones reales linealmente independientes (en el sentido que definimos a continuación) de la E.D.L.H $L[u]=0$. (PROPOSICION 3.3).

DEFINICION: Decimos que una colección finita de funciones complejas $f_1,\dots,f_n$ definidas en un intervalo I son linealmente independientes sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) si $\forall c_1,\dots,c_n \in \mathbb{K}$, $c_1 f_1 + \dots + c_n f_n = 0 \Rightarrow c_1 = \dots = c_n = 0$.

Se prueba que si $f_1,\dots,f_n$ son funciones reales, entonces son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$ si, y solo si, lo son sobre $\mathbb{C}$.

3.3. PROPOSICION: El conjunto de funciones $f_{r_j j}(x) = x^{r_j} e^{\lambda_j x}$, donde $r_j = 0,1,\dots,k_j-1$ y $j=1,\dots,m$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$.

Demostr.: Se trata de probar que si $\sum_{r_j, j} c_{r_j j} f_{r_j j}(x) = 0$, $\forall x \in I$ entonces $c_{r_j j} = 0$, $\forall j, \forall r_j$.

Supongamos que existe $j \in \{0,1,\dots,m\}$ y $r_j \in \{0,1,\dots,k_j-1\}$ tal que $c_{r_j j} \neq 0$.

Sea R_j el mayor r_j tal que $c_{r_j j} \neq 0$.

Consideremos el operador

$$q(D) = (D-\lambda_j)^{R_j} \prod_{i \neq j} (D-\lambda_i)^{k_i}$$

Se prueba de forma análoga que en Proposición 3.1 que $q(D)[f_{r_j j}] = 0$ si $r_j < R_j$ y $q(D)[f_{r_i i}] = 0$, si $i \neq j$.

Entonces

$$q(D)\left[\sum_{r_i i} c_{r_i i} f_{r_i i}(x)\right] = q(D)[0] = 0. \quad (1)$$

y por otra parte $q(D)\left[\sum_{r_i i} c_{r_i i} f_{r_i i}(x)\right] = \sum_{r_i i} c_{r_i i}\, q(D)[f_{r_i i}(x)] =$

$= c_{R_j j} R_j!\, e^{\lambda_j x} \neq 0$, lo cual contradice (1). c.q.d.

Por tanto, $\{x^{r_j} e^{\lambda_j x}\}_{j=1,\dots,m}^{r_j=0,1,\dots,k_j-1}$ es un sistema libre sobre $\mathbb{C}$ de n soluciones de la E.D.L.H, y puesto que el conjunto de soluciones de la E.D.L.H. de orden n es un espacio vectorial de dimensión n, se tiene que $\{x^{r_j} e^{\lambda_j x}\}_{j=1,\dots,m}^{r_j=0,\dots,k_j-1}$ es una base de dicho espacio vectorial. Este es el caso complejo.

En el caso real tenemos n soluciones reales de los tipos

$$x^{r_j} e^{\lambda_j x}, \quad x^{r_j} e^{\lambda_j x} \cos \nu_j x, \quad x^{r_j} e^{\lambda_j x} \operatorname{sen} \nu_j x$$

que son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$, pues lo son sobre $\mathbb{C}$ y se trata de funciones reales.

Tenemos tanto en el caso complejo como en el real una base del espacio vectorial de soluciones de la E.D.L.H. Quedan así caracterizadas dichas soluciones.

B) Vamos a estudiar ahora la E.D.L. de orden n

$$u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \dots + a_n u = r(x).$$

Sabemos que conocida una solución particular de esta E.D.L. cualquier otra solución de la E.D.L. se puede expresar como suma de dicha solución particular y una solución de la E.D.L.H, y que toda función que sea suma de una solución particular y una solución de la E.D.L.H es solución de la E.D.L.

Nuestro problema se reduce al cálculo de una solución particular de la E.D.L, lo cual se puede hacer por el METODO DE VARIACION DE LAS CONSTANTES que se explica a continuación: Sea $\{f_1, \dots, f_n\}$ una base de soluciones de la E.D.L.H. Cualquier solución f de la E.D.L.H es de la forma

$$f = c_1 f_1 + \dots + c_n f_n$$

Se puede encontrar una solución particular de la E.D.L. de la forma

$$c_1(x) f_1(x) + \dots + c_n(x) f_n(x)$$

calculando las funciones $c_1(x), \dots, c_n(x)$. Este método resulta, en general, muy complicado. Se detallará más adelante (E)).

Veamos algunos casos particulares importantes, según la forma de $r(x)$:

1) Si $r(x)$ es un polinomio $P_m(x)$ de grado m y 0 no es raíz del polinomio característico de la E.D.L, existe una solución particular de la forma $\tilde{P}_m(x)$ (polinomio de grado m), que intentaremos calcular.
Si 0 es raíz del polinomio característico de multiplicidad s, se intentará calcular una solución particular de la forma $x^s \tilde{P}_m(x)$.

2) Si $r(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$, $(\alpha \in \mathbb{R})$, y α no es raíz del polinomio característico se buscará una solución particular de la forma $\tilde{P}_m(x)e^{\alpha x}$.
Si α es raíz del polinomio característico de multiplicidad s, buscamos una solución particular de la forma $x^s \tilde{P}_m(x)e^{\alpha x}$.

3) Si $r(x) = P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\operatorname{sen}\beta x$ y $\pm i\beta$ no son raíces de la ecuación característica se buscará una solución particular de la forma $\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\operatorname{sen}\beta x$ donde $k = \max(m,n)$. Si $\pm i\beta$ son raíces de la ecuación característica de multiplicidad s se buscará una solución particular de la forma
$$x^s(\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\operatorname{sen}\beta x)$$

4) Si $r(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\operatorname{sen}\beta x]$ y $\alpha \pm \beta i$ no es raíz de la ecuación característica se busca una solución particular de la forma $e^{\alpha x}[\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\operatorname{sen}\beta x]$.
Y si $\alpha \pm \beta i$ es raíz de la ecuación característica de multiplicidad s podemos buscar una solución particular de la forma $x^s e^{\alpha x}[\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\operatorname{sen}\beta x]$.

c) El caso de la E.D.L de orden 2 con coeficientes constantes es interesante pues se presenta en muchos problemas físicos. Vamos a profundizar un poco más en su estudio. Una E.D.L.H. de orden 2 con coeficientes constantes es de la forma $u'' + pu' + qu = 0$, donde $p, q \in \mathbb{K}$.
El polinomio característico es $\lambda^2 + p\lambda + q$, y sus raíces son
$$\lambda_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2-4q}}{2} \quad y \quad \lambda_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2-4q}}{2}.$$

En el caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ tenemos que si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ una base de soluciones de la E.D.L.H es $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$, y si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, una base es $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}\}$.
En el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ podemos distinguir los siguientes casos:

- $p^2 > 4q$: una base de soluciones de la E.D.L.H. es $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$.
- $p^2 = 4q$: existe una raíz doble λ y una base es $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}\}$.
- $p^2 < 4q$: existe una raíz compleja y su conjugada $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta i$.
  Una base de soluciones es en este caso $\{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x\}$.

El wronskiano de una E.D.L. de orden 2 es de la forma
$$W(f_1, f_2)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix}, \quad \forall x \in I$$
donde $(f_1, f_1'), (f_2, f_2')$ son soluciones del S.D.L.H asociado a la E.D.L.

Se verifican las implicaciones siguientes

$\exists x_0 \,/\, W(f_1,f_2)(x_0) > 0 \;\Rightarrow\; W(f_1,f_2)(x) > 0, \forall x.$

$\exists x_0 \,/\, W(f_1,f_2)(x_0) < 0 \;\Rightarrow\; W(f_1,f_2)(x) < 0, \forall x.$

$\exists x_0 \,/\, W(f_1,f_2)(x_0) = 0 \;\Rightarrow\; W(f_1,f_2)(x) = 0, \forall x.$

3.4. TEOREMA: (de separación de Sturm) (*)

> Si f y g son dos soluciones linealmente independientes de la E.D. $u''+p(x)u'+q(x)u=0$ entonces f se anula una vez entre dos ceros consecutivos de g. O dicho de otra forma, los ceros de f y g ocurren alternativamente.

Demostr.: Sea x_i tal que $g(x_i)=0$. Entonces $W(f,g)(x_i) = \begin{vmatrix} f(x_i) & g(x_i) \\ f'(x_i) & g'(x_i) \end{vmatrix} =$
$= f(x_i)g'(x_i)$.

Como f y g son linealmente independientes $W(f,g)(x) \neq 0, \forall x$.

Luego $f(x_i) \neq 0$ y $g'(x_i) \neq 0$.

Sean entonces x_1 y x_2 dos ceros consecutivos de g. Se trata de probar que $\exists! x_3 \in]x_1,x_2[\,/\, f(x_3)=0$.

Se verifica, por lo dicho anteriormente que
$f(x_1) \neq 0$, $g'(x_1) \neq 0$, $f(x_2) \neq 0$ y $g'(x_2) \neq 0$.

Se tiene además que $g'(x_1)g'(x_2) < 0$, pues g se anula en x_1 y en x_2, y no se anula en ningun punto intermedio y, por tanto, g es creciente (decreciente) en x_1 y decreciente (creciente) en x_2.

Puesto que $W(f,g)(x) \neq 0, \forall x$ y no cambia de signo se tiene que si $W(f,g)(x_1) > 0$, entonces $W(f,g)(x_2) > 0$, y por tanto, $f(x_1)g'(x_1)$ y $f(x_2)g'(x_2)$ tienen el mismo signo y dado que $g'(x_1)$ y $g'(x_2)$ tienen distinto signo deberá ser $f(x_1)f(x_2) < 0$.

Analogamente, si $W(f,g)(x_1) < 0$, entonces $W(f,g)(x_2) < 0$ y $f(x_1)$ y $f(x_2)$ tendrán distinto signo.

Por tanto, como f es continua existirá $x_3 \in]x_1,x_2[\,/\, f(x_3)=0$.

Además x_3 es único, pues de existir $x_4 \neq x_3$ tal que $x_4 \in]x_1,x_2[$ y $f(x_4)=0$, entonces, entre x_3 y x_4 existiría un cero de g, en contra de que x_1 y x_2 son consecutivos. csqd.

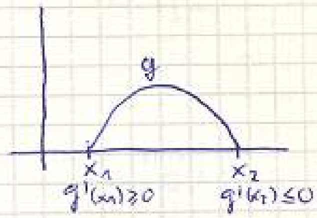
3.5. TEOREMA: (de comparación de Sturm).

> Si f y g son dos soluciones no triviales de las E.D.L. de orden 2 $u''+p(x)u=0$ y $v''+q(x)v=0$, respectivamente, y $p(x) \geq q(x), \forall x$, entonces f se anula al menos una vez entre dos ceros de g, a menos que $p \equiv q$ y $f = Kg$ (K=cte).

Demostr.: Supongamos que existen x_1, x_2 ceros consecutivos de g tales que $f(x) \neq 0, \forall x \in]x_1,x_2[$. Podemos suponer que $f(x) > 0, \forall x \in]x_1,x_2[$. De la misma forma, podemos suponer $g(x)>0$, $\forall x\in]x_1,x_2[$.

Consideremos el determinante

$$\begin{vmatrix} f(x_1) & g(x_1) \\ f'(x_1) & g'(x_1) \end{vmatrix} = f(x_1)g'(x_1)\geq 0$$



y

$$\begin{vmatrix} f(x_2) & g(x_2) \\ f'(x_2) & g'(x_2) \end{vmatrix} = f(x_2)g'(x_2)\leq 0$$

Observar que estos determinantes no son el wronskiano, pues f y g son soluciones de E.D.L. distintas. Consideremos la función

$$F(f,g,x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$$

Entonces $F(f,g,x_1)\geq 0$ y $F(f,g,x_2)\leq 0$.

$$\frac{d}{dx}F(f,g,x)=f'(x)g'(x)+f(x)g''(x)-f'(x)g'(x)-f''(x)g(x)=f(x)g''(x)-f''(x)g(x).$$

Siendo f y g soluciones de $u''+p(x)u=0$ y $v''+q(x)v=0$ se tiene que $f''(x)+p(x)f(x)=0$ y $g''(x)+q(x)g(x)=0$.

Luego $\frac{d}{dx}F(f,g,x)=-f(x)q(x)g(x)+f(x)p(x)g(x)=$

$=(p(x)-q(x))f(x)g(x)\geq 0$, $\forall x$, pues $p(x)\geq q(x)$ y $f(x),g(x)\geq 0$.

Entonces $F(f,g,x)$ sería creciente en $[x_1,x_2]$, por tener derivada positiva, y en consecuencia no podrá ser $F(f,g,x_1)\geq 0$ y $F(f,g,x_2)\leq 0$ a menos que $p=q$, en cuyo caso $F(f,g,x)=K$ (cte).

Aun más sería $K=0$, pues $F(f,g,x_1)\geq 0$ y $F(f,g,x_2)\leq 0$

En este caso sería $f(x)g'(x)=f'(x)g(x)$, o bien $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{g'(x)}{g(x)}$ e integrando resultará $f(x)=Cg(x)$. csqd.

<u>3.6. COROLARIO</u>: Si $q(x)\leq 0$, entonces cualquier solución no trivial de la E.D. $u''+q(x)u=0$ tiene a lo sumo un cero.

Demostr.: Consideremos la E.D. $v''=0$. Una solución de ella es $f(x)=1$. Si g es solución de $u''+q(x)u=0$ y tiene dos ceros distintos, por el teorema anterior f tendría un cero entre ellos, lo cual es absurdo, pues f no se anula. Luego, g tendrá a lo sumo un cero. csqd.

D) REDUCCION DEL ORDEN DE UNA E.D.L. CUANDO SE CONOCE UNA SOLUCION PARTICULAR.

Consideremos la E.D.L.H (con coeficientes variables)

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\dots+a_n(x)y=0 \qquad (I)$$

donde $a_i(x)$ son funciones continuas.

Sea $y_1(x)$ una solución particular de ella.

Hagamos el cambio $y(x)=u(x)y_1(x)$.

Entonces: $y'(x)=u'(x)y_1(x)+u(x)y_1'(x)$, y en general

$$y^{(p)}(x)=\sum^{p}_{k}\binom{p}{k}u^{(p-k)}(x)y_1^{k}(x).$$

Sustituyendo en (I) tenemos

$$\left[\binom{n}{0}u^{(n)}y_1+\binom{n}{1}u^{(n-1)}y_1'+\dots+\binom{n}{n}u\,y_1^{(n)}\right]+$$

$$+a_1(x)\left[\binom{n-1}{0}u^{(n-1)}y_1+\binom{n-1}{1}u^{(n-2)}y_1'+\dots+\binom{n-1}{n-1}u\,y_1^{(n-1)}\right]+$$

$$+\dots\dots\dots\dots+$$

$$+\ a_n(x)\cdot u(x)\,y_1(x)=0$$

Sacando factor común $u(x)$ obtenemos

$$u(x)\left[y_1^{(n)}(x)+a_1(x)y_1^{(n-1)}(x)+\dots+a_n(x)y_1(x)\right]+b_0(x)u^{(n)}(x)+\dots+b_n(x)u'(x)=0$$

o bien

$$b_0(x)u^{(n)}(x)+\dots+b_n(x)u'(x)=0 \qquad \text{(II)}$$

pues y_1 es solución de la E.D.L.H. Las funciones $b_i(x)$ dependen de $y_1(x)$ y sus derivadas y de los $a_i(x)$.

Si hacemos $\frac{du}{dx}=v(x)$, la expresión (II) queda en la forma

$$b_0(x)v^{(n-1)}(x)+b_1(x)v^{(n-2)}(x)+\dots+b_n(x)v(x)=0 \qquad \text{(III)}$$

que es una E.D.L.H. de orden **n-1**.

El problema se reduce entonces a resolver la E.D.L. (III) y $\frac{du}{dx}=v(x)$.

E) METODO DE VARIACION DE LAS CONSTANTES: Se puede utilizar este método para encontrar una solución particular de la E.D.L. no homogénea

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\dots+a_n(x)y=f(x). \qquad (1)$$

Supongamos que la solución general de la E.D.L.H es

$$y(x)=C_1y_1(x)+\dots+C_ny_n(x).$$

Tratamos de encontrar una solución particular de la E.D.L. de la forma $\sum_{i=1}^{n}c_i(x)\cdot y_i(x)=y(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} y'(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i'(x)y_i(x)+\sum_{i=1}^{n}c_i(x)y_i'(x) \\ \text{Imponiendo que } \sum_{i=1}^{n}c_i'(x)y_i(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y'(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i(x)y_i'(x).$$

$$\left.\begin{array}{l} y''(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i'(x)y_i'(x)+\sum_{i=1}^{n}c_i(x)y_i''(x) \\ \text{Imponiendo que } \sum_{i=1}^{n}c_i'(x)y_i'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y''(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i(x)y_i''(x).$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\left.\begin{array}{l} y^{(n-1)}(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i'(x)y_i^{(n-2)}(x)+\sum_{i=1}^{n}c_i(x)y_i^{(n-1)}(x)=0 \\ \text{Imponiendo que } \sum_{i=1}^{n}c_i'y_i^{(n-2)}(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y^{(n-1)}(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i(x)y_i^{(n-1)}(x)$$

$$y^{(n)}(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i'(x)y_i^{(n-1)}(x)+\sum_{i=1}^{n}c_i(x)y_i^{(n)}(x)$$

Sustituyendo en (1) obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, y_i^{(n-1)}(x) + \left(\sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y_i^{(n)}(x) + a_1(x) \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y_i^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x) \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y_i(x) \right) = f(x)$$

y por tanto $\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, y_i^{(n-1)}(x) = f(x)$

pues la expresión encerrada entre paréntesis es

$L\left[\sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i(x)\right] = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, L[y_i(x)] = 0$, pues $y_i(x)$ son soluciones de la

E.D.L.H. Se trata de encontrar, entonces, $c_1(x), \dots, c_n(x)$ que satisfagan el sistema

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, y_i(x) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, y_i'(x) = 0 \\ \text{— — — — —} \\ \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) \cdot y_i^{(n-2)}(x) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) \cdot y_i^{(n-1)}(x) = f(x) \end{cases}$$

Calculadas las $c_i'(x)$ se pueden calcular por integración las $c_i(x)$. El sistema anterior admite solución pues las columnas de la matriz del sistema, $(y_i^{(j)})_{i,j}$, son linealmente independientes.