TEMA 8º: SOLUCIONES DE E.D.L. DE ORDEN 2 EN FORMA DE SERIES DE POTENCIAS.

1. INTRODUCCION: PROPIEDADES DE LAS SERIES DE POTENCIAS.

(A) Queremos estudiar la E.D.L.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x).$$

En el caso de que p, q y f sean analíticas probaremos que se pueden encontrar soluciones analíticas de la E.D. anterior. De momento, sabemos que por cada punto pasa una única solución que es de clase infinito, por serlo p, q y f.

(B) Nos interesa ahora solo el estudio de series de potencias reales, aunque se pierden al considerar $\mathbb{R}$ y no $\mathbb{C}$ muchos resultados.

Veamos una serie de propiedades de las series de potencias reales:

B.1.) Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, existe $R \in [0, +\infty]$ de forma que la serie es absolutamente convergente en los puntos x tales que $|x| < R$ y divergente si $|x| > R$. En los puntos x en que $|x| = R$ hay que estudiar la serie en cada caso. A R se le llama radio de convergencia de la serie. La serie es uniformemente convergente en cualquier intervalo compacto contenido en $]-R, R[$

Ejemplo: $\text{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \dots$ tiene de radio de convergencia $R = 1$. Para $x = 1$, la serie es convergente, pero no absolutamente convergente. Para $x = -1$, tenemos la serie $-(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots)$ que es divergente.

B.2) Consideremos la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ de radio de convergencia R.

La función $f : x \in]-R, R[\longrightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \in \mathbb{R}$ es de clase infinito y se verifica que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, c_n x^{n-k}, \quad \text{para } x \in]-R, R[.$$

Hay funciones de clase infinito en un intervalo que no se pueden expresar como una serie de potencias en dicho intervalo, como la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$ que es indefinidamente derivable en 0 y no es analítica en 0.

B.3.) Si R es el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ y $a, b \in]-R, R[$, entonces la función f definida por la serie es integrable entre a y b y se verifica que

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^b x^n\, dx.$$

En particular, $\forall x \in]-R, R[$

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n\right) ds = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

B.4.) PRINCIPIO DE IDENTIDAD PARA SERIES DE POTENCIAS.

Sean las series $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ que son absolutamente convergentes en $]-R,R[$ y $]-R',R'[$, respectivamente. Sea $0<R''\leq \min(R,R')$. Si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$, $\forall x\in]-R'',R''[$ entonces $c_n=d_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

En particular, si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$ para $|x|<R$ entonces $c_n=0$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

B.5.) Consideremos la serie $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$. Entonces $c_k=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, $\forall k\in\mathbb{N}_0$.

DEFINICION: (funciones analíticas).

Se dice que una función f es analítica en x_0 de su dominio de definición si existe una serie de potencias de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ convergente en un cierto intervalo $]x_0-R,x_0+R[$ tal que $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ si $|x-x_0|<R$.

Ⓒ CRITERIOS PARA DETERMINAR EL RADIO DE CONVERGENCIA DE UNA SERIE.

1) CRITERIO DE LA RAIZ: Sea la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Si $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\rho$, entonces el radio de convergencia de la serie es

$R=\frac{1}{\rho}$ si $\rho\neq 0,+\infty$, $R=+\infty$ si $\rho=0$ y $R=0$ si $\rho=+\infty$.

2) CRITERIO DEL COCIENTE: Si $c_n\neq 0, \forall n$ y $\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}=\rho$ entonces

$R=\frac{1}{\rho}$ si $\rho\neq 0,+\infty$, $R=+\infty$ si $\rho=0$ y $R=0$ si $\rho=+\infty$.

3) CRITERIO DE COMPARACION: Sea la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Si $|c_n|\leq C_n, \forall n\in\mathbb{N}$ y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ es convergente para $|x|<R$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ es convergente al menos para $|x|<R$.

Ⓓ SUMA Y PRODUCTO DE SERIES: Consideremos las series $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ con radios de convergencia R y R', respectivamente. Sean f y g las funciones definidas en $]-R,R[$ y $]-R',R'[$ definidas a partir de dichas series. Sea $R''=\min(R,R')$. Entonces

$\forall x\in]-R'',R''[$, $f(x)+g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(c_n+d_n)x^n$ y $f(x)\cdot g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$

donde $p_n=c_0d_n+c_1d_{n-1}+\dots+c_{n-1}d_1+c_nd_0$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Nota: Si las series son absolutamente convergentes, su producto es absolutamente convergente. Sin embargo, el producto de dos series convergentes puede no ser convergente.

Ⓔ 1.1. PROPOSICION: Sean las series $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$, con radios de convergencia R y R'. Sea $R''=\min(R,R')$. Si existen $p,q\in\mathbb{N}$, $p\neq q$, tales que $c_p\neq 0$, $d_p=0$ y $d_q\neq 0$, entonces las funciones $f:x\in]-R'',R''[\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ y $g:x\in]-R'',R''[\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ son linealmente independientes.

Demostr.: Supongamos $p<q$. Se trata de probar que si A y B son tales que $Af(x)+Bg(x)=0$, $\forall x\in]-R'',R''[$ entonces $A=B=0$.

en virtud del principio de identidad se tiene que, siendo $\sum_{n=0}^{\infty}(Ac_n+Bd_n)x^n=0$, $Ac_p=0$. Siendo $c_p\neq 0$ debe ser $A=0$.

Luego $\sum_{n=0}^{\infty} Bd_n x^n=0$ y por tanto $Bd_q=0$, y siendo $d_q\neq 0$, será $B=0$. c.s.q.d.

2. SOLUCIONES ANALITICAS DE UNA E.D.L. DE ORDEN 2 CON COEFICIENTES ANALITICOS.

2.1. TEOREMA: Sea la E.D.L. $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$, donde p, q y f son funciones analíticas en un punto x_0. Entonces existe una única solución ϕ de la E.D. que verifica las condiciones iniciales $\phi(x_0)=a$, $\phi'(x_0)=b$. Además ϕ es analítica en el punto x_0.

OBSERVACIONES: ① Haremos la demostración en el caso $f(x)=0$.

② Utilizaremos el siguiente

2.2. LEMA: (Metodo de las mayorantes)

Dada la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ con radio de convergencia R, entonces para cualquier $r\in\mathbb{R}$ tal que $0<r<R$ existe $M>0$ tal que $|a_k|r^k<M$, $k=0,1,2,\ldots$

Demostr. Lema: Como $\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$ es absolutamente convergente, $\lim_{k\to\infty}|a_k|r^k=0$ y, por tanto, $\exists M>0 / |a_k|r^k<M$, $\forall k\in\mathbb{N}$. c.s.q.d.

Demostración del teorema: Supongamos que $p(x)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k(x-x_0)^k$ y $q(x)=\sum_{k=0}^{\infty} q_k(x-x_0)^k$ y que son absolutamente convergentes para $|x-x_0|<A$. Si tuviesen distintos radios de convergencia tomaríamos el mínimo de ambos.

Queremos encontrar $\phi(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$ absolutamente convergente para $|x-x_0|$ menor que un cierto B, y que sea solución de la E.D.L. verificando $\phi(x_0)=a$, $\phi'(x_0)=b$.

Vamos a ver cómo deben de ser los c_k para que ϕ verifique lo anterior.

$\phi'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} kc_k(x-x_0)^{k-1}$, $\phi''(x)=\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k(x-x_0)^{k-2}$, y estas series son convergentes para $|x-x_0|<B$, donde B es un número a determinar.

Si ϕ ha de ser solución de la E.D. $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ se verificará

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k(x-x_0)^{k-2}+\left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k(x-x_0)^k\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} kc_k(x-x_0)^{k-1}\right)+\left(\sum_{k=0}^{\infty} q_k(x-x_0)^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k\right)=0$$

y esto para $|x-x_0|<C=\min(A,B)$.

También se puede escribir en la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}(x-x_0)^k+\left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k(x-x_0)^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}(x-x_0)^k\right)+\left(\sum_{k=0}^{\infty} q_k(x-x_0)^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k\right)=0$$

O bien, haciendo las operaciones, se tiene que

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)c_{k+2}(x-x_0)^k+\sum_{m=0}^{k}\left(p_{k-m}c_{m+1}\cdot(m+1)+q_{k-m}c_m\right)\right](x-x_0)^k=0$$

Se tendrá, entonces, por el principio de identidad que

$$(k+2)(k+1)c_{k+2}+\sum_{m=0}^{k}\left(p_{k-m}(m+1)c_{m+1}+q_{k-m}c_m\right)=0,\ \forall k\in\mathbb{N}_0. \quad (\mathrm{I})$$

Luego si existe una solución analítica ϕ de la E.D. sus coeficientes c_k deben verificar (I). Veamos como deben ser los coeficientes c_k si además de verificar (I), ϕ debe satisfacer las condiciones iniciales $\phi(x_0)=a$ y $\phi'(x_0)=b$.

Si en (I) hacemos $k=0$, obtenemos c_2 en función de c_0 y c_1. Haciendo $k=1$ obtenemos c_3 en función de c_2, c_1 y c_0, y por tanto de c_0 y c_1. Por inducción podemos obtener c_k en función de c_0 y c_1, $\forall k\in\mathbb{N}_0$.

Sea para cada $k\in\mathbb{N}_0$ $c_k=e_kc_0+d_kc_1$, donde e_k y d_k son coeficientes que se calculan a partir de (I) y dependen de $p_0,\dots,p_k,q_0,\dots,q_k$.

Luego la solución ϕ de la E.D.L. que verifica las condiciones iniciales dadas será de la forma

$$\phi(x)=c_0+c_1(x-x_0)+\sum_{k=2}^{\infty}(e_kc_0+d_kc_1)(x-x_0)^k=c_0\left[1+\sum_{k=2}^{\infty}e_k(x-x_0)^k\right]+c_1\left[(x-x_0)+\sum_{k=2}^{\infty}d_k(x-x_0)^k\right] \quad (\mathrm{II})$$

donde c_0 y c_1 se obtienen de (II) al resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned}\phi(x_0)&=a\\ \phi'(x_0)&=b\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{III})$$

Si hacemos $\phi_0(x)=1+\sum_{k=2}^{\infty}e_k(x-x_0)^k$ y $\phi_1(x)=(x-x_0)+\sum_{k=2}^{\infty}d_k(x-x_0)^k$ obtenemos dos soluciones de la E.D.L. (se obtienen para $c_0=1, c_1=0$, y $c_0=0, c_1=1$, respectivamente) que son linealmente independientes, pues ϕ_0 tiene un término de grado cero y $\phi_1(x)$ no lo tiene. El sistema (III) queda entonces en la forma

$$\left.\begin{aligned}c_0\phi_0(x_0)+c_1\phi_1(x_0)&=\phi(x_0)=a\\ c_0\phi_0'(x_0)+c_1\phi_1'(x_0)&=\phi'(x_0)=b\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{III}')$$

sistema que tiene solución única pues $\begin{vmatrix}\phi_0(x_0) & \phi_1(x_0)\\ \phi_0'(x_0) & \phi_1'(x_0)\end{vmatrix}\neq 0$, por ser ϕ_0 y ϕ_1 linealmente independientes. Conocidos c_0 y c_1 queda determinado c_k, $\forall k\in\mathbb{N}_0$, según se indicó anteriormente.

Lo que hemos hecho hasta ahora es encontrar una serie $\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$ que al imponerle la condición de que sea solución de la E.D. que verifique las condiciones iniciales (a,b), queda unívocamente determinada, supuesto que sea convergente en un cierto entorno de x_0.

Falta, pues, probar que la serie $\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$ determinada anteriormente tiene radio de convergencia estrictamente positivo. Utilizaremos para ello el método de las mayorantes.

Vamos a probar que $\phi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-x_0)^k$ converge para $|x-x_0|<A$, donde

$]x_0-A, x_0+A[$ es un intervalo de convergencia de p y q, como se indicó al principio.

De (I) se deduce que

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} = -\sum_{m=0}^{k}[(m+1)p_{k-m}c_{m+1}+q_{k-m}c_m], \quad \forall k\in\mathbb{N}_0. \quad \text{(IV)}$$

Puesto que $\sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$ y $\sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k$ son absolutamente convergentes en $]x_0-A, x_0+A[$ se verifica que para cualquier $r\in]0,A[$ existe $M>0$ tal que

$$|p_j|r^j \le M \quad \text{y} \quad |q_j|r^j\le M, \quad j=0,1,2,\dots$$

y por tanto $|p_j| \le M r^{-j}$ y $|q_j|\le M r^{-j}$. (V)

De (IV) se deduce que

$$(k+2)(k+1)|c_{k+2}| \le \sum_{m=0}^{k}[(m+1)|c_{m+1}|\cdot|p_{k-m}|+|c_m|\cdot|q_{k-m}|]$$

y por (V), para $j=k-m$ se tiene que

$$(k+2)(k+1)|c_{k+2}| \le \sum_{m=0}^{k}[(m+1)|c_{m+1}|Mr^{m-k}+|c_m|Mr^{m-k}] =$$

$$= \frac{1}{r^k}\sum_{m=0}^{k}[(m+1)|c_{m+1}|Mr^m+|c_m|Mr^m] \le \frac{1}{r^k}\sum_{m=0}^{k}\left([(m+1)|c_{m+1}|+|c_m|]Mr^m\right)+M|c_{k+1}|r$$

pues $M|c_{k+1}|r\ge 0$.

Definimos $C_0=|c_0|$ y $C_1=|c_1|$. Los restantes C_k vienen definidos por la siguiente relación de recurrencia

$$(k+1)(k+2)C_{k+2} = \frac{M}{r^k}\sum_{m=0}^{k}\left([(m+1)C_{m+1}+C_m]r^m\right)+MC_{k+1}r. \quad \text{(VI)}$$

Se prueba que $0\le |c_k|\le C_k$, $\forall k\in\mathbb{N}_0$. Consideremos la serie majorante

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k(x-x_0)^k.$$

Veamos que su radio de convergencia es A, por el criterio del cociente.

La expresión (VI) para $k-1$ se transforma en

$$k(k+1)C_{k+1} = \frac{M}{r^{k-1}}\sum_{m=0}^{k-1}\left([(m+1)C_{m+1}+C_m]r^m\right)+MC_k r$$

Además de (VI) se deduce que

$$(k+1)(k+2)C_{k+2} = \frac{1}{r}\frac{M}{r^{k-1}}\sum_{m=0}^{k-1}\left([(m+1)C_{m+1}+C_m]r^m\right)+\frac{M}{r^k}(k+1)C_{k+1}r^k+\frac{M}{r^k}C_k r^k+MC_{k+1}r$$

$$=\frac{1}{r}\frac{M}{r^{k-1}}\sum_{m=0}^{k-1}\left([(m+1)C_{m+1}+C_m]r^m\right)+M(k+1)C_{k+1}+MC_k+MC_{k+1}r =$$

$$=\frac{1}{r}\left(k(k+1)C_{k+1}-MC_k r\right)+M(k+1)C_{k+1}+MC_k+MC_{k+1}r =$$

$$=\frac{k(k+1)C_{k+1}}{r}+M(k+1)C_{k+1}+MC_{k+1}r = \left(\frac{k(k+1)}{r}+M(k+1)+Mr\right)C_{k+1}$$

Luego

$$\frac{C_{k+2}}{C_{k+1}} = \frac{\frac{1}{r}k(k+1)+MC_{k+1}+Mr}{(k+1)\cdot(k+2)}$$

Por tanto, $\lim_{k\to\infty}\frac{C_{k+2}}{C_{k+1}} = \frac{1}{r}$

Es decir, $\sum_{k=0}^{\infty} C_k(x-x_0)^r$ es absolutamente convergente para $|x-x_0|<r$ y, sien

do esto cierto para cualquier $r \in]0, A[$ se verificará que $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^k$ es absolutamente convergente para $|x-x_0| < A$.

Entonces, por el criterio de comparación $\phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^k$ es absolutamente convergente, al menos, para $|x-x_0| < A$. c.s.q.d.

NOTAS: (I) Con las notaciones del teorema, B puede tomarse igual a A.

(II) Una demostración más rigurosa (y, quizás, menos clara) de este teorema se podría haber hecho considerando desde un principio la serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^k$ donde los c_k verifican las relaciones (I) y c_0 y c_1 satisfacen (III') y probar que tiene radio de convergencia A estrictamente positivo. Se comprobaría después que $\phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^k$ es solución de la E.D. (lo cual se verificará por (I)) que satisface las condiciones $\phi(x_0) = a$, $\phi'(x_0) = b$ (lo cual se verificará por (III')).

(III) No solo hemos obtenido la solución que verifica $\phi(x_0) = a$ y $\phi'(x_0) = b$, sino que hemos obtenido también la solución general que es

$$c_0 \phi_0(x) + c_1 \phi_1(x) \quad , \quad c_0, c_1 \in \mathbb{R}.$$

EJEMPLO: Vamos a determinar cual es la solución general ϕ de la E.D. $y'' - xy = 0$.

Buscaremos una solución analítica $\phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ que sabemos que existe y tiene radio de convergencia $+\infty$ pues $-x$ es analítica y tiene radio de convergencia $+\infty$.

Si $\phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, entonces $\phi'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}$ y $\phi''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2}$.

Sustituyendo en la E.D. y puesto que podemos escribir $\phi(x) = \sum_{k=3}^{\infty} c_{k-3} x^{k-3}$, tenemos que

$$\phi''(x) - x\phi(x) = 0 \iff \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} - x \sum_{k=3}^{\infty} c_{k-3} x^{k-3} = 0 \iff$$

$$\iff 2 \cdot 1\, c_2 + \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} - \sum_{k=3}^{\infty} c_{k-3} x^{k-2} = 0 \iff 2c_2 + \sum_{k=3}^{\infty} [k(k-1)c_k - c_{k-3}] x^{k-2} = 0$$

Se deduce de aquí las siguientes relaciones

$$\begin{cases} c_2 = 0 \\ k(k-1) c_k = c_{k-3}, \; k \geq 3 \end{cases}$$

Partiendo de estas relaciones y tomando c_0 y c_1 arbitrarios podemos determinar c_k, $\forall k \in \mathbb{N}$:

- $c_2 = 0$, $c_5 = \frac{c_{5-3}}{5(4-1)} = 0$, ..., $c_{3m+2} = 0$, $\forall m \in \mathbb{N}_0$.

- $c_3 = \frac{c_{3-3}}{3 \cdot 2} = \frac{c_0}{3 \cdot 2}$, $c_6 = \frac{c_{6-3}}{6 \cdot 5} = \frac{c_0}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}$, $c_9 = \frac{c_6}{9 \cdot 8} = \frac{c_0}{9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}$, ...

$$c_{3m} = \frac{c_0}{(3m)(3m-1)[3(m-1)] \cdot [3(m-1)-1] \cdots [3(2-1)][3(2-1)-1]} = \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots (3m-2)\, c_0}{(3m)!}$$

• Análogamente $c_{3m+1} = \dfrac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3m-1)c_1}{(3m+1)!}$

Estas expresiones se prueban por inducción.

Entonces la solución general de la E.D. es

$$\phi(x) = c_0\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c_{3m}}{c_0}x^{3m}\right)+c_1\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{c_{3m+1}}{c_1}x^{3m+1}\right)$$

Veamos cual es la solución que verifica las condiciones iniciales

$$\phi(0)=a \quad , \quad \phi'(0)=b.$$

$\phi(0)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k 0^k = c_0$. Luego $c_0=a$.

$\phi'(0)=\sum_{k=1}^{\infty}k c_k 0^{k-1} = c_1$. Luego $c_1=b$.

3. Estudio de la E.D. de Legendre. Puntos singulares regulares para una E.D.L. de orden 2.

A) Se trata de encontrar la solución general de la E.D. de Legendre en un entorno del punto $x=0$. Esta E.D. es

$$(1-x^2)y''-2xy'+p(p+1)y=0$$

donde p es constante.

En un entorno de 0 podemos poner

$$y''-\frac{2x}{1-x^2}y'+\frac{p(p+1)}{1-x^2}y=0$$

Las funciones $-\dfrac{2x}{1-x^2}$ y $\dfrac{p(p+1)}{1-x^2}$ son analíticas en el punto $x=0$ y las series correspondientes tienen de radio de convergencia 1(*). Existen entonces soluciones analíticas definidas en un entorno de cero y las series que las definen tendrán radio de convergencia 1.

Se trata pues de encontrar una solución de la forma $\phi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k$.

Se verifica que $\phi'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}kc_k x^{k-1}$ y $\phi''(x)=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_k x^{k-2}$.

Sustituyendo en la E.D. tenemos

$$(1-x^2)\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_k x^{k-2}-2x\sum_{k=1}^{\infty}kc_k x^{k-1}+p(p+1)\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k=0$$ y por tanto

$$2\cdot 1\cdot c_2+p(p+1)c_0+\sum_{k=3}^{\infty}k(k-1)c_k x^{k-2}-\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_k x^k-\sum_{k=1}^{\infty}2kc_k x^k+\sum_{k=1}^{\infty}p(p+1)c_k x^k=0$$

Luego $2c_2+p(p+1)c_0+\sum_{k=3}^{\infty}k(k-1)c_k x^{k-2}-\sum_{k=3}^{\infty}(k-1)(k-2)c_{k-1}x^{k-1}-\sum_{k=3}^{\infty}2(k-2)c_{k-2}x^{k-2}+$

$+\sum_{k=3}^{\infty}p(p+1)c_{k-2}x^{k-2}=0$

Por tanto

$$2c_2+p(p+1)c_0+(3\cdot 2c_3-2\cdot 1c_1+p(p+1)c_1)x+\sum_{k=4}^{\infty}\left[k(k-1)c_k-(k-2)(k-3)c_{k-2}-2(k-2)c_{k-2}+p(p+1)c_{k-2}\right]x^{k-2}$$

(*) Se verifica que $\frac{1}{1-x^2}=1+x+x^2+x^3+\ldots$, $\forall x\in\,]-1,1[$

Obtenemos de aquí las siguientes relaciones de recurrencia

$$\begin{cases} 2\cdot 1\, c_2 + p(p+1)c_0 = 0 \\ 3\cdot 2\cdot c_3 - 2\cdot 1 c_1 + p(p+1)c_1 = 0 \\ k(k-1)c_k - (k-2)(k-3)c_{k-2} - 2(k-2)c_{k-2} + p(p+1)c_{k-2} = 0 \quad \text{si } k \geq 4 \end{cases}$$

Se tiene entonces

$$c_2 = -\frac{p(p+1)}{2\cdot 1}c_0 \;,\; c_3 = -\frac{-2+p(p-1)}{3\cdot 2}c_1 = -\frac{(p-1)(p+2)}{3\cdot 2}c_1$$

y si $k \geq 4$, entonces

$$c_k = -\frac{p(p+1)-(k-2)(k-1)}{k(k-1)}c_{k-2} = -\frac{(p-k+2)(p+k-1)}{k(k-1)}c_{k-2} \,. \qquad (1)$$

La expresión (1) también es cierta para $k=2$ y $k=3$.

Las relaciones anteriores nos permitirán expresar los términos pares en función de c_0 y los impares en función de c_1:

- $c_2 = -\frac{p(p+1)}{2\cdot 1}c_0$, $c_4 = -\frac{(p-4+2)(p+4-1)}{4\cdot 3}c_2 = \frac{(p-2)p(p+1)(p+3)}{4!}c_0$, $c_6 = -\frac{(p-4)(p-2)p(p+1)(p+3)(p+5)}{6!}c_0$

y en general $$c_{2n} = (-1)^n\frac{[p-2(n-1)][p-2(n-2)]\cdots(p-2)p(p+1)(p+3)\cdots[p+2n-1]}{(2n)!}c_0$$

- Análogamente $$c_{2n+1} = (-1)^n\frac{(p-2n+1)(p-2n-1)\cdots(p-1)(p+2)\cdots(p+2n)}{(2n+1)!}$$

Luego la solución general es

$$\phi(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x)$$

donde $\phi_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{2n}}{c_0}x^{2n}$ y $\phi_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{2n+1}}{c_1}x^{2n+1}$.

B) Podríamos preguntarnos ahora por las soluciones, si existen, definidas en un entorno del punto $x=1$. Podremos hallar soluciones analíticas de la E.D. definidas en un entorno reducido de $x=1$.

Vamos a hacerlo en general. Consideremos la E.D

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \qquad (\mathrm{I})$$

siendo a_i funciones reales definidas en un intervalo de I. Supongamos que en el punto $x_0 \in \mathring{I}$ se verifican las condiciones:

i) $a_0(x_0) = 0$; $a_1(x_0) \neq 0$ ó $a_2(x_0) \neq 0$.

ii) Las funciones $(x-x_0)\frac{a_1(x)}{a_0(x)}$ y $(x-x_0)^2\frac{a_2(x)}{a_0(x)}$ son analíticas en el punto x_0.

Se dice por esto que x_0 es un PUNTO SINGULAR REGULAR para la E.D.

En el caso de la E.D. de Legendre $a_0(x) = 1-x^2$, $a_1(x) = -2x$, $a_2(x) = p(p+1)$ que son analíticas en el punto $x=1$. Además $a_0(1) = 0$ y $a_1(1) = -2 \neq 0$ y las funciones $\alpha(x) = (x-1)\frac{-2x}{1-x^2} = \frac{2x}{1+x}$ y $\beta(x) = (x-1)^2\frac{p(p+1)}{1-x^2} = \frac{p(p+1)(1-x)}{1+x}$ son analíticas en el punto $x=1$. Luego 1 es punto singular regular para la E.D. de Legendre.

Si x_0 es un punto singular no regular se llamará irregular. Existen métodos para encontrar soluciones analíticas en entornos reducidos de puntos singulares irregulares, pero son muy complicados.

Una E.D. del tipo (I), donde x_0 es un punto singular regular (P.S.R.), se puede expresar en la forma

$$(x-x_0)^2 y'' + (x-x_0)\alpha(x) y' + \beta(x) y = 0$$

siendo α y β analíticas en el punto x_0.

Esta ecuación mediante el cambio $t = x - x_0$ se transforma en una del tipo

$$t^2 y''_t + t\hat{\alpha}(t) y'_t + \hat{\beta}(t) y = 0$$

donde $y''_t = \dfrac{d^2y}{dt^2}$, $y'_t = \dfrac{dy}{dt}$ y $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son funciones analíticas en $t=0$.

Queda reducido pues el problema de hallar soluciones de la E.D. (I) en un entorno de un P.S.R. al de hallar soluciones en un entorno reducido de cero de E.D. del tipo

$$x^2 y'' + x\alpha(x) y + \beta(x) y = 0$$

siendo $x=0$ P.S.R. de la E.D. y α y β analíticas en $x=0$.

3.1. TEOREMA: Sea la E.D. $x^2y'' + x\alpha(x)y' + \beta(x)y = 0$ donde $\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$ y $\beta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x^k$, $|x|<r$.

Sea $f(z) = 0$ la ecuación indicial, es decir $f(z) = z(z-1) + \alpha_0 z + \beta_0 = 0$.

Se verifica entonces lo siguiente:

1) Si z_1 y z_2 son raíces de $f(z) = 0$ y sus partes reales verifican que $\mathrm{Re}\, z_1 \geq \mathrm{Re}\, z_2$ entonces existe una única solución de la E.D. por cada punto del conjunto $\{x / 0<|x|<r\} \times \mathbb{R}^2$ de la forma

$$\phi(x) = |x|^{z_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad \text{para } x \text{ tal que } 0<|x|<r,$$

donde los c_k vienen determinados de forma recurrente mediante el sistema de ecuaciones

$$f(z_1+k)c_k = -\sum_{j=0}^{k-1} [(j+z_1)\alpha_{k-j} + \beta_{k-j}] c_j, \quad k=1,2,3,\dots$$

2) Si $z_1 - z_2$ no es un entero positivo, y $z_1 \neq z_2$, entonces existe una segunda solución linealmente independiente con la anterior de la forma

$$\phi_2(x) = |x|^{z_2} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{c}_k x^k, \quad \text{para } 0<|x|<r$$

donde los $\hat{c}_k$ se obtienen por recurrencia mediante el sistema de ecuaciones

$$f(z_2+k)\hat{c}_k = -\sum_{j=0}^{k-1} [(j+z_2)\alpha_{k-j} + \beta_{k-j}] \hat{c}_j, \quad k=1,2,3,\dots$$

Demostr.: 1) Supongamos que existe una solución de la forma

$$\phi(x)=|x|^z\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k \quad \text{para } x \text{ tal que } 0<|x|<A. \qquad (I)$$

Veremos que A es estrictamente positivo y probaremos que los coeficientes c_k se obtienen a partir de las relaciones de recurrencia dadas en el enunciado. Haremos los cálculos para $x>0$. Para $x\in\,]-A,0[$ se hace de forma análoga.

Para $x>0$, $\phi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+z}$, $\phi'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+z)c_kx^{k+z-1}$ y $\phi''(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+z)(k+z-1)c_kx^{k+z-2}$.

Sustituyendo en la E.D. $x^2y''+x\alpha(x)y'+\beta(x)y=0$ se obtiene

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+z)(k+z-1)x^{k+z}+\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+z)c_kx^{k+z}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_kx^k\right)+\left(\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+z}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\beta_kx^k\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}(k+z)(k+z-1)c_kx^{k+z}+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}(j+z)\alpha_{k-j}c_j\right)x^{k+z}+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}\beta_{k-j}c_j\right)x^{k+z}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [z(z-1)c_0+z\alpha_0c_0+\beta_0c_0]x^z+\sum_{k=1}^{\infty}\left[(k+z)(k+z-1)c_k+\sum_{j=0}^{k}\left((j+z)\alpha_{k-j}c_j+\beta_{k-j}c_j\right)\right]x^{k+z}=0$$

Siendo $f(z)=z(z-1)+z\alpha_0+\beta_0$ se deduce que

$$f(z)c_0x^z+\sum_{k=1}^{\infty}\left[(k+z)(k+z-1)c_k+(k+z)\alpha_0c_k+\beta_0c_k+\sum_{j=0}^{k-1}\left((j+z)\alpha_{k-j}c_j+\beta_{k-j}c_j\right)\right]x^{k+z}=0$$

y por el principio de identidad de series

$$\begin{cases} f(z)c_0=0 & (1)\\ f(k+z)c_k=-\sum_{j=0}^{k-1}\left((j+z)\alpha_{k-j}+\beta_{k-j}\right)c_j & (2)\end{cases}$$

pues $(k+z)(k+z-1)c_k+(k+z)\alpha_0c_k+\beta_0c_k=f(k+z)$.

Como vemos (2) son las relaciones de recurrencia del enunciado. De (1) supuesto $c_0\neq0$ obtenemos $f(z)=0$, ecuación que tiene dos raíces en $\mathbb{C}$. Sean z_1 y z_2 dichas raíces y supongamos que $\operatorname{Re} z_1\geq \operatorname{Re} z_2$.

Entonces $f(z)=(z-z_1)(z-z_2)$ y $f(k+z_1)$ no se anula para $k\in\mathbb{N}-\{0\}$, pues $f(k+z_1)=(z_1+k-z_1)(z_1+k-z_2)=k[k+(z_1-z_2)]$, $k\neq0$ y $\operatorname{Re} z_1\geq\operatorname{Re} z_2$.

Sustituyendo en (2) z por z_1 quedan determinados los c_k, partiendo de $c_0\neq0$. Existe, pues, una solución ϕ de la forma de (I) si es que la serie correspondiente tiene radio de convergencia estrictamente positivo, lo cual se probará más adelante.

2) Sustituyendo en (1) y (2) z por z_2 obtenemos $f(z_2)c_0=0$

Veamos que $f(k+z_2)\neq0$, $\forall k\in\mathbb{N}-\{0\}$.

Como $f(k+z_2)=(k+z_2-z_1)(k+z_2-z_2)=k(k-(z_1-z_2))$

se verificará que $f(\hat{k}+z_2)=0$ si, y solo si, $\hat{k}=z_1-z_2$, lo cual no podrá ser cierto si z_1-z_2 no es entero positivo, como estamos suponiendo.

Partiendo de $\hat{c}_0 \neq 0$, a partir de (2) podremos encontrar los coeficientes $\hat{c}_k$ tales que

$$\phi_2(x) = |x|^{z_2} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{c}_k x^k, \quad 0<|x|<A$$

sea solución de la E.D.

Las soluciones ϕ y ϕ_2 son linealmente independientes.

Falta probar que el radio de convergencia de las series que definen ϕ y ϕ_2 es estrictamente positivo. Aun más, probaremos que estas series convergen al menos para los x tales que $0<|x|<r$. Lo probaremos para ϕ; para ϕ_2 es análogo.

$f(z_1+k) = k(k+(z_1-z_2))$ y por tanto $|f(z_1+k)| \geq k|k-|z_1-z_2||$

En virtud de (2) y de la desigualdad triangular

$$k|k-|z_1-z_2||\cdot|c_k| \leq |f(z_1+k)|\cdot|z_k| \leq \sum_{j=0}^{k-1} [(j+|z_1|)|\alpha_{k-j}|+|\beta_{k-j}|]\cdot|c_j|$$

Por las desigualdades de Cauchy para serie (Lema 2.2.) y puesto que $\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j x^j$ y $\sum_{j=0}^{\infty}\beta_j x^j$ convergen para $|x|<r$ se tiene que para cualquier $\rho\in]0,r[$ existe $M>0$ tal que $|\alpha_j|\rho^j \leq M$ y $|\beta_j|\rho^j\leq M$, $\forall j$. Luego $|\alpha_j|\leq M\rho^{-j}$

Entonces

$$\sum_{j=0}^{k-1}[(j+|z_1|)|\alpha_{k-j}|+|\beta_{k-j}|]|c_j| \leq M\sum_{j=0}^{k-1}[j+|z_1|+1]\rho^{j-k}|c_j|$$

Sea $N>0$ tal que $N-1\leq|z_1-z_2|\leq N$.

Definimos $|c_0|=C_0$, $|c_1|=C_1, \dots, |c_{N-1}|=C_{N-1}$, y para $k\geq N$ se definen los C_k por la siguiente ley de recurrencia

$$k|k-|z_1-z_2||C_k = M\sum_{j=0}^{k-1}(j+|z_1|+1)\rho^{j-k}C_j \quad (\mathrm{II})$$

Se prueba por inducción que $|c_k|\leq C_k$, $\forall k\in\mathbb{N}_0$.

La expresión (II) para $k-1$ queda así

$$(k-1)|(k-1)-|z_1-z_2||C_{k-1} = M\sum_{j=0}^{k-2}(j+|z_1|+1)\rho^{j-k+1}C_j. \quad (\mathrm{III})$$

Consideremos la suma

$$M\sum_{j=0}^{k-1}(j+|z_1|+1)\rho^{j-k}C_j = M\sum_{j=0}^{k-2}(j+|z_1|+1)\rho^{j-k}C_j + (k+|z_1|)MC_{k-1} =$$

$$= M\rho^{-1}\sum_{j=0}^{k-2}(j+|z_1|+1)\rho^{j-k+1}C_j + M(k+|z_1|)C_{k-1}.$$

Por (II) y (III) se deduce que

$$k|k-|z_1-z_2||C_k = \rho^{-1}(k-1)|k-1-|z_1-z_2||C_{k+1} + M(k+|z_1|)C_{k-1}$$

y por tanto

$$\frac{C_k}{C_{k-1}} = \frac{\rho^{-1}(k-1)|k-1-|z_1-z_2||+M(k+|z_1|)}{k|k-|z_1-z_2||}$$

Luego $\lim_{k\to\infty} \frac{c_k}{c_{k-1}} = \rho^{-1}$.

Por tanto, la serie $|x|^{z_1}\sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k$ converge para $0<|x|<\rho$, por el criterio del cociente.

Entonces, por el criterio de comparación, la serie $|x|^{z_1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ converge para $0<|x|<\rho$. Siendo esto cierto para todo $\rho\in]0,r[$ se tiene que $|x|^{z_1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ converge para $0<|x|<r$. csqd.

EJEMPLO: Sea la E.D. $x^2y''+\frac{1}{2}xy'+\frac{1}{2}x^2y=0$. Vamos a calcular una solución en un entorno reducido del punto $x=0$. Veremos si es posible hallar dos soluciones linealmente independientes en dicho entorno.
$x=0$ es punto singular regular para esta E.D.
Queremos hallar una solución de la forma

$$\phi(x) = |x|^z \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad \text{con } 0<|x|<r, \text{ para un cierto } r.$$

Hacemos los cálculos para $x>0$. Se tiene entonces que

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+z}, \quad \phi'(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+z)c_k x^{k+z-1} \quad y \quad \phi''(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+z)(k+z-1)c_k x^{k+z-2}.$$

Sustituyendo en la E.D. tenemos

$$x^2\sum_{k=0}^{\infty}(k+z)(k+z-1)c_k x^{k+z-2}+\frac{1}{2}x\sum_{k=0}^{\infty}(k+z)c_k x^{k+z-1}+\frac{1}{2}x^2\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^{k+z} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}(k+z)(k+z-1)c_k x^{k+z}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(k+z)c_k x^{k+z}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^{k+z+2} = 0$$

Como $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+z+2} = \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2} x^{k+z}$ se tiene que

$$[z(z-1)c_0+\frac{1}{2}zc_0]x^z+[(z+1)zc_1+\frac{1}{2}(z+1)c_1]x^{z+1}+\sum_{k=2}^{\infty}[(k+z)(k+z-1)c_k+\frac{1}{2}(k+z)c_k+\frac{1}{2}c_{k-2}]x^{k+z}=$$

o bien

$$x^z\left[z(z-\tfrac{1}{2})c_0+x(z+1)(z+\tfrac{1}{2})c_1+\sum_{k=2}^{\infty}\{(k+z)(k+z-\tfrac{1}{2})c_k+\tfrac{1}{2}c_{k-2}\}x^k\right]=0 \quad (I)$$

$f(z)=z(z-\frac{1}{2})$ es la ecuación indicial(*). Luego de (I) se deduce

$$x^z\left[f(z)c_0+xf(z+1)c_1+\sum_{k=2}^{\infty}\{f(z+k)c_k+\tfrac{1}{2}c_{k-2}\}x^k\right]=0 \qquad (II)$$

Las soluciones de $f(z)=0$ son $z_1=\frac{1}{2}$, $z_2=0$.
Vamos a calcular la solución correspondiente a $z_1=\frac{1}{2}$.
$f(z_1+k)=(z_1+k)(z_1+k-\frac{1}{2})=k(k+\frac{1}{2})\neq 0$, $\forall k\in\mathbb{N}$.
Aplicando en (II) el principio de identidad
$f(z_1)c_0=0$; como $f(z_1)=0$ tomamos c_0 arbitrario.

$f(z_1+1)c_1=0$, es decir, $f(\frac{1}{2}+1)c_1=0$. Como $f(\frac{1}{2}+1)\neq 0$ debe ser $c_1=0$.

Para los siguientes se verifica

$$f\left(\frac{1}{2}+k\right)c_k = -\frac{1}{2}c_{k-2}, \quad k\geq 2$$

o bien $\displaystyle c_k = \frac{-\frac{1}{2}c_{k-2}}{f(\frac{1}{2}+k)} = \frac{-\frac{1}{2}c_{k-2}}{k(k+\frac{1}{2})}$

En consecuencia todos los términos impares son cero. Veamos como son los términos pares

$$c_2 = \frac{-\frac{1}{2}c_0}{2(2+\frac{1}{2})} = \frac{-c_0}{5\cdot 2}, \quad c_4 = \frac{-\frac{1}{2}c_2}{4(4+\frac{1}{2})} = \frac{-c_2}{4\cdot 9} = \frac{c_0}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 9}$$

En general se prueba por inducción que

$$c_{2m} = (-1)^m \frac{c_0}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2m)\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4m+1)}$$

Por tanto, una solución de la E.D. es

(III) $$\phi_1(x) = |x|^{1/2}c_0\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2m)\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4m+1)}x^{2m}\right], \quad 0<|x|<+\infty$$

El radio de convergencia es $+\infty$ pues $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{c_k}{c_{k-2}}=0$.

Para $z_2=0$ se tiene que $f(z_2+k)=k(k-\frac{1}{2})\neq 0$, $\forall k\in\mathbb{N}$.
De (II) y del principio de identidad se deduce que
$f(z_2)c_0=0$ y como $f(z_2)=0$, tomamos c_0 arbitrario.
$f(z_2+1)c_1=0$; siendo $f(z_2+1)\neq 0$, debe ser $c_1=0$.
Para los restantes

$$k\left(k-\frac{1}{2}\right)c_k = -\frac{1}{2}c_{k-2}, \quad k\geq 2.$$

o bien $\displaystyle c_k = \frac{-\frac{1}{2}c_{k-2}}{k\cdot(k-\frac{1}{2})}$

Luego los impares valen cero.
Los pares valen

$$c_{2m} = (-1)^m\frac{c_0}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2m)\cdot 3\cdot 7\cdot\ldots\cdot(4m-1)}$$

Luego otra solución de la E.D. es

(IV) $$\phi_2(x) = c_0\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2m)\cdot 3\cdot 7\cdot\ldots\cdot(4m-1)}x^{2m}\right), \quad 0<|x|<+\infty.$$

Si en (III) y (IV) hacemos $c_0=1$ obtenemos dos soluciones linealmente independientes de la E.D. La solución general es

$$\phi(x) = K_1\phi_1(x)+K_2\phi_2(x), \quad 0<|x|<+\infty.$$

El siguiente teorema recoge los casos que no se consideran en el teorema anterior.

3.2. TEOREMA: Sea la E.D. $x^2y''+x\alpha(x)y'+\beta(x)y=0$ donde α y β son analíticas en $x=0$, definidas para $0\leq|x|<r$; suponemos α_0 ó β_0 ó β_1 no nulos. Sean z_1, z_2 ($Re\, z_1 \geq Re\, z_2$) las raíces de la ecuación indicial $f(z)=z(z-1)+\alpha_0 z+\beta_0=0$.

a) Si $z_1=z_2$ hay dos soluciones linealmente independientes de la forma

$$\phi_1(x)=|x|^{z_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k,\quad c_0=1$$

$$\phi_2(x)=|x|^{z_1+1}\sum_{k=0}^{\infty}b_k x^k+\phi_1(x)\log|x|$$

válidas para $0<|x|<r$, cuyos coeficientes c_k y b_k pueden ser determinados por sustitución en la E.D.

b) Si $z_1-z_2\in\mathbb{N}$ hay dos soluciones linealmente independientes de la E.D. de la forma

$$\phi_1(x)=|x|^{z_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k,\quad c_0=1$$

$$\phi_2(x)=|x|^{z_2}\sum_{k=0}^{\infty}b_k x^k+a\,\phi_1(x)\log|x|$$

válidas para $0<|x|<r$, cuyos coeficientes pueden ser determinados por sustitución en la E.D.

4. Singularidades en el infinito

Consideremos la E.D.

$$y''_t+p(t)\,y'_t+q(t)\,y=0 \qquad (1)$$

donde $p(t)$ y $q(t)$ son funciones analíticas para $|t|$ mayor que un cierto R. Nos interesa el comportamiento de las soluciones cuando $t\to\infty$.

Para ello hacemos el cambio $x=\frac{1}{t}$ Se tiene entonces

$$y'_t=y'_x\cdot x'_t=-y'_x\cdot x^2$$

e $y''_t=\frac{d}{dx}(-y'_x x^2)\left(-\frac{1}{t^2}\right)=(-y''_x x^2-2xy'_x)(-x^2)=x^4y''_x+2x^3y'_x$.

Sustituyendo en la E.D. tenemos

$$x^4y''_x+\left[2x^3-x^2p\left(\tfrac{1}{x}\right)\right]y'_x+q\left(\tfrac{1}{x}\right)y=0 \qquad (2)$$

DEFINICION: El punto del infinito es un punto "ordinario", punto singular regular o punto singular irregular para la E.D. (1) si $x=0$ es un punto ordinario, P.S.R. o punto singular irregular para la E.D. (2), respectivamente.