TEMA 9º: PROBLEMAS DE CONTORNO PARA UN S.D.L.

1. Introducción. Definición

Hasta ahora hemos estado estudiando problemas del tipo siguiente: dado un S.D. $y' = F(x,y)$, calcular una solución del mismo que verifique que $y(x_0) = \eta_0$. Este es el problema del valor inicial o de Cauchy, problema que, en principio, tiene naturaleza local, pero las soluciones se pueden prolongar hasta encontrar una solución maximal.

Esto nos permite considerar problemas del tipo siguiente: Dada una E.D. $y' = F(x,y)$ se quiere estudiar las soluciones definidas en un intervalo $[x_1, x_2]$ y de ellas las que verifican una cierta condición en los extremos x_1 y x_2. Este es un problema de contorno o problema de valores frontera.

Nos reduciremos al caso de un S.D.L. $y' = A(x)y + b(x)$ y supondremos que $D = I \times \mathbb{R}^n$ es dominio de unicidad, donde I es un intervalo. Supongamos que $[x_1, x_2] \subset I$. Se trata de encontrar las soluciones del S.D.L. sujetas a la condición

$$Bf(x_1) + Cf(x_2) = h \qquad (I)$$

donde $B, C \in \mathcal{M}_n$ y $h \in \mathbb{R}^n$.

El estudio de la existencia y número de soluciones que verifiquen el S.D.L. y la condición de contorno anteriores constituye un problema de contorno.

En el caso particular de que B y C sean de la forma

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kn} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ c_{k+1,1} & \cdots & c_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

el problema de contorno se dice separado o de Sturm, pues las k primeras ecuaciones del sistema (I) solo dependen de x_1 y las $n-k$ restantes solo dependen de x_2.

Ejemplo: Busquemos las soluciones complejas de $y'' + \lambda y = 0$ que verifican las condiciones de contorno $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.
La ecuación característica de $y'' + \lambda y = 0$ es $r^2 + \lambda = 0$, cuyas raíces son $r = \pm\sqrt{\lambda}\, i$.

La solución general es pues
$$y = c_1 e^{\sqrt{\lambda} x i} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda} x i}, \quad (\text{si } \lambda \neq 0).$$
Supongamos que $\sqrt{\lambda} = \alpha + \beta i$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Entonces la solución general es
$$y = c_1 e^{(-\beta + \alpha i)x} + c_2 e^{(\beta - \alpha i)x}$$
De las condiciones de contorno $y(0)=0$, $y(\pi)=0$ obtenemos
$$\left.\begin{array}{l} 0 = y(0) = c_1 + c_2 \Rightarrow c_1 = -c_2 \\ 0 = y(\pi) = c_1 e^{-\beta\pi + \alpha\pi i} + c_2 e^{\beta\pi - \alpha\pi i} \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^{-\beta\pi} e^{\alpha\pi i} = e^{\beta\pi} e^{-\alpha\pi i} \Rightarrow e^{2\beta\pi} = e^{2\alpha\pi i} = \cos 2\alpha\pi + i \operatorname{sen} 2\alpha\pi \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^{2\beta\pi} = \cos 2\alpha\pi \\ 0 = \operatorname{sen} 2\alpha\pi \end{array}\right.$$
Si $\operatorname{sen} 2\alpha\pi = 0$ debe ser $2\alpha\pi = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Por tanto, $e^{2\beta\pi} = (-1)^k$, pues $\cos 2\alpha\pi = \cos k\pi$, y en consecuencia k debe ser par pues $e^{2\beta\pi} > 0$. Sea $k = 2n$, $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ (buscamos soluciones no triviales).
Entonces, $2\alpha\pi = 2n\pi$ y, por tanto, $\alpha = n$.
Además $e^{2\beta\pi} = 1$ y por tanto $\beta = 0$.
Luego $\sqrt{\lambda} = n$ o bien $\lambda = n^2$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$
Luego las soluciones son
$$y = c_1 e^{nix} - c_1 e^{-nix} = 2i c_1 \operatorname{sen} nx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$
pues para $n < 0$ sólo varía el signo de c_1.
Las soluciones son pues de la forma
$$y_n(x) = A_n \operatorname{sen} nx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$
$$y_0(x) = 0.$$

2. Solución de un problema de contorno

Con relación al problema de contorno
$$\boxed{\begin{array}{l} y' = A(x)y + b(x) \\ Bf(x_1) + Cf(x_2) = h \end{array}} \qquad (3)$$
trataremos primeramente problemas más sencillos, como
$$\boxed{\begin{array}{l} y' = A(x)y \\ Bf(x_1) + Cf(x_2) = 0 \end{array}} \quad (1) \qquad \boxed{\begin{array}{l} y' = A(x)y + b(x) \\ Bf(x_1) + Cf(x_2) = 0 \end{array}} \quad (2)$$
Para estudiar el problema (1) definiremos

$X^* = \{ f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n) \,/\, Bf(x_1) + Cf(x_2) = 0 \}$

X^* es un espacio vectorial. Consideremos la aplicación

$$D - A(\cdot) : f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n) \longmapsto Df - A(\cdot)f = f' - A(\cdot)f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$$

donde

$$Df - A(\cdot)f : x \in I \longmapsto f'(x) - A(x)f(x) \in \mathbb{R}^n.$$

$D - A(\cdot)$ es un homomorfismo entre los espacios vectoriales $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$.

Sea $Z = \operatorname{Ker}(D - A(\cdot))$. Z es el conjunto de soluciones del S.D.L.H. $y' = A(x)y$.

El conjunto de soluciones del problema (1) será entonces

$$Z^* = Z \cap X^*.$$

Se verifica que $\dim Z^* \leq n$, pues $\dim Z = n$.

Por supuesto

$$Z^* = \operatorname{Ker}\left(D - A(\cdot)/_{X^*}\right)$$

2.1. PROPOSICION: Sea $\phi(x)$ una matriz fundamental del S.D.L. Entonces $\dim Z^* = 0$ si y solo si $\operatorname{rang}(B\phi(x_1) + C\phi(x_2)) = n$, es decir, el problema (1) tiene únicamente la solución trivial si y solo si $\operatorname{rang}(B\phi(x_1) + C\phi(x_2)) = n$.

Demostr.: Sea f^* solución del problema (1), es decir, f^* es solución del S.D.L.H. verificando $Bf^*(x_1) + Cf^*(x_2) = 0$. Existe entonces $\lambda \in \mathbb{R}^n$ tal que $f^*(x) = \phi(x) \cdot \lambda$, por ser ϕ matriz fundamental.

Por tanto, $[B\phi(x_1) + C\phi(x_2)]\lambda = 0$. (I)

Entonces, decir que $\dim Z^* = 0$ equivale a que el sistema de ecuaciones lineales (I) tenga solución única (λ), lo cual equivale a que $\operatorname{rang}[B\phi(x_1) + C\phi(x_2)] = n$. csqd.

Observacion: Para cada valor de λ que verifique (I) obtenemos un elemento de Z^* y para cada elemento de Z^* existe un λ que verifica (I).

2.2. PROPOSICION: Si el problema (2) tiene solución entonces, el conjunto de estas soluciones es un elemento del espacio cociente X^*/Z^*.

Demostr.: Sea f solución del problema (2), es decir

$f'(x) = A(x)f(x) + b(x)$ y $Bf(x_1) + Cf(x_2) = 0$.

Sea $f^* \in Z^*$. Entonces $f+f^*$ es solución del problema (2) pues
$(f+f^*)'(x) = f'(x) + f^{*\prime}(x) = A(x)[f(x)+f^*(x)] + b(x)$
y además $B(f+f^*)(x_1) + C(f+f^*)(x_2) = Bf(x_1) + Cf(x_2) + Bf^*(x_1) + Cf^*(x_2) = 0$.
Falta ver que si f_1 y f_2 son soluciones del problema (2) entonces $f_1 - f_2 \in Z^*$, pero esto es trivial pues
$(f_1-f_2)'(x) = A(x)(f_1-f_2)(x)$
y $B(f_1-f_2)(x_1) + C(f_1-f_2)(x_2) = 0$.

Luego si f es solución de (2), los elementos de la clase $f+Z^*$ son soluciones de (2). csqd.

2.3. PROPOSICION: a) Si $\dim Z^* = 0$, los problemas (2) y (3) tienen una única solución.
b) Si $\dim Z^* > 0$, los problemas (2) y (3) pueden o no tener solucion, pero si tienen una solución entonces tienen infinitas soluciones.

Demostr.: Sea Φ matriz fundamental para el S.D.L. y f una solución particular del S.D.L. completo. Cualquier otra solución f^* del S.D.L. completo se puede expresar en la forma
$$f^*(x) = \Phi(x)\cdot\lambda + f(x).$$
Para cada λ obtenemos una solución del S.D.L. Para que f^* verifique la condición de contorno se tendrá que verificar que
$$Bf^*(x_1) + Cf^*(x_2) = h$$
o bien $[B\Phi(x_1) + C\Phi(x_2)]\lambda = h - Bf(x_1) - Cf(x_2)$. (II)
Este sistema de ecuaciones lineales nos da las soluciones de los problemas de contorno (2), si $h=0$, y (3).
a) Si $\dim Z^* = 0$, entonces $\operatorname{rang}(B\Phi(x_1) + C\Phi(x_2)) = n$ y el sistema de ecuaciones lineales (II) tiene solución única, es decir, existe un único $\lambda \in \mathbb{R}^n$ que verifica (II) y por tanto existe una única solución para los problemas (2) y (3).
b) Si $\dim Z^* > 0$, entonces $\operatorname{rang}(B\Phi(x_1) + C\Phi(x_2))$ es menor que n, pues si fuese n sería $\dim Z^* = 0$. Habrá soluciones cuando (II) sea compatible, es decir, cuando
$$\operatorname{rang}[B\Phi(x_1) + C\Phi(x_2)] = \operatorname{rang}[B\Phi(x_1) + C\Phi(x_2) \mid h - Bf(x_1) - Cf(x_2)]$$
Si es compatible el sistema (II) tiene infinitas soluciones y por tanto, los problemas (2) y (3) tienen infinitas soluciones. csqd.

En el caso de que $\dim Z^* = 0$ hemos visto que el problema

$$\boxed{\begin{array}{l} y' = A(x)y + b(x) \\ Bf(x_1) + Cf(x_2) = 0 \end{array}} \quad (2)$$

tiene solución única. La aplicación

$$D - A(\cdot) : X^* \longmapsto \mathcal{C}(J, \mathbb{R}^n)$$

es, por tanto, bijectiva (isomorfismo).

Para calcular dicha solución única definiremos lo que es el operador integral de Green.

3. OPERADOR INTEGRAL DE GREEN

Sea $\phi(x)$ una matriz fundamental para el S.D.L. $y' = A(x)y + b(x)$.
Sea $M = B\phi(x_1) + C\phi(x_2)$. Consideremos la aplicación

$$J : \xi \in [x_1, x_2] \longmapsto J(\xi) = -M^{-1} C \phi(x_2) \phi^{-1}(\xi)$$

La siguiente aplicación se llama NUCLEO DE GREEN:

$$G : (x, \xi) \in [x_1, x_2] \times [x_1, x_2] \longmapsto \begin{cases} \phi(x)[\phi^{-1}(\xi) + J(\xi)] & \text{si } x > \xi \\ \phi(x) J(\xi) & \text{si } x \leq \xi \end{cases}$$

3.1. PROPOSICION: La aplicación

$$f : x \in [x_1, x_2] \longmapsto \int_{x_1}^{x_2} G(x, \xi) b(\xi) d\xi$$

es solución del problema (2).

Demostr.: f está bien definida pues $G(x, \xi)$ es continua salvo, quizás, en un conjunto de medida cero (la diagonal de $[x_1, x_2] \times [x_1, x_2]$).

Veamos que $Bf(x_1) + Cf(x_2) = 0$.

$$B \int_{x_1}^{x_2} G(x_1, \xi) b(\xi) d\xi + C \int_{x_1}^{x_2} G(x_2, \xi) b(\xi) d\xi =$$

$$= B \int_{x_1}^{x_2} \phi(x_1) J(\xi) b(\xi) d\xi + C \int_{x_1}^{x_2} \phi(x_2)[\phi^{-1}(\xi) + J(\xi)] b(\xi) d\xi$$

pues $x_1 \leq \xi$ y $x_2 > \xi$.

Entonces

$$Bf(x_1) + Cf(x_2) = [B\phi(x_1) + C\phi(x_2)] \int_{x_1}^{x_2} J(\xi) b(\xi) d\xi + C \int_{x_1}^{x_2} \phi(x_2) \phi^{-1}(\xi) b(\xi) d\xi =$$

$$= -M M^{-1} C \phi(x_2) \int_{x_1}^{x_2} \phi^{-1}(\xi) b(\xi) d\xi + C\phi(x_2) \int_{x_1}^{x_2} \phi^{-1}(\xi) b(\xi) d\xi = 0$$

pues $M = B\phi(x_1) + C\phi(x_2)$ y $J(\xi) = -M^{-1} C \phi(x_2) \phi^{-1}(\xi)$.

Probemos ahora que f satisface el S.D.L, es decir que

$$(D - A(x))\left(\int_{x_1}^{x_2} G(x,\xi)b(\xi)d\xi\right) = b(x)$$

$$(D-A(x))\left(\int_{x_1}^{x_2} G(x,\xi)b(\xi)d\xi\right) = (D-A(x))\left(\int_{x_1}^{x} G(x,\xi)b(\xi)d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_{x}^{x_2} G(x,\xi)b(\xi)d\xi\right) =$$

$$= (D-A(x))\left(\int_{x_1}^{x} \phi(x)[\phi^{-1}(\xi)+J(\xi)]b(\xi)d\xi + \int_{x}^{x_2}\phi(x)J(\xi)b(\xi)d\xi\right)$$

Si tenemos en cuenta que

$$\frac{d}{dx}\int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)dy = f(x,q(x))q'(x) - f(x,p(x))p'(x) + \int_{p(x)}^{q(x)}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\,dy$$

siempre que f sea continua, derivable respecto de x y de forma que $p(x)\le q(x)$ en un intervalo y tengan derivada finita en el mismo.
Entonces

$$(D-A(x))\left(\int_{x_1}^{x_2} G(x,\xi)b(\xi)d\xi\right) = \phi(x)[\phi^{-1}(x)+\cancel{J(x)}]b(x) +$$

$$+\int_{x_1}^{x}\phi'(x)\cancel{\phi^{-1}(\xi)}b(\xi)d\xi + \int_{x_1}^{x}\phi'(x)\cancel{J(\xi)}b(\xi)d\xi - A(x)\int_{x_1}^{x}\cancel{\phi(x)\phi^{-1}(\xi)}b(\xi)d\xi -$$

$$- A(x)\int_{x_1}^{x}\phi(x)\cancel{J(\xi)}b(\xi)d\xi - \phi(x)\cancel{J(x)}b(x)\cdot 1 +$$

$$+\int_{x}^{x_2}\phi'(x)\cancel{J(\xi)}b(\xi)d\xi - A(x)\int_{x}^{x_2}\phi(x)\cancel{J(\xi)}b(\xi)d\xi = b(x)$$

pues $\phi'(x) = A(x)\phi(x)$. c.s.q.d.

DEFINICION: (OPERADOR INTEGRAL DE GREEN)

La transformación

$$b\in\mathcal{C}(I,\mathbb{R}^n) \longmapsto \int_{x_1}^{x_2} G(\cdot,\xi)b(\xi)d\xi$$

se llama operador integral de Green.

Ejemplo: ① Sea el S.D.L. $y' = Ay$ donde $A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$. Consideremos las condiciones de contorno dadas por $x_1 = 0$, $x_2 = 2\pi$,

$$B = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Consideremos el problema de contorno

$$y' = Ay$$
$$Bf(0) + Cf(2\pi) = \begin{bmatrix}h_1\\ h_2\end{bmatrix}$$

Una matriz fundamental para el S.D.L es $e^{xA} = \begin{bmatrix}\cos x & \operatorname{sen} x\\ -\operatorname{sen} x & \cos x\end{bmatrix}$

Las soluciones del S.D.L. son de la forma

$$f^*(x) = \phi(x) \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

¿Para qué valores de $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$ la solución verifica la condición de contorno? Pues para los λ tales que

$$M\lambda = h - Bf(0) - Cf(2\pi) \qquad (I)$$

donde f es una solución particular, que en este caso puede ser $f = 0$. Luego (I) queda en la forma

$$M\lambda = h$$

donde, como sabemos

$$M = B\phi(0) + C\phi(2\pi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego las soluciones del problema de contorno

$$\boxed{\begin{array}{l} y' = Ay \\ Bf(0) + Cf(2\pi) = 0 \end{array}} \qquad (*)$$

son de la forma $\phi(x)\lambda$, donde $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$ verifica

$$M\lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{array}$$

es decir la solución del problema anterior es la trivial y es única, es el caso $\dim Z^* = 0$.

Las soluciones del problema

$$\boxed{\begin{array}{l} y' = Ay \\ Bf(0) + Cf(2\pi) = h \end{array}}$$

son de la forma $\phi(x)\lambda$ donde λ es tal que

$$M\lambda = h \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = h_1 \\ \lambda_2 = h_2 \end{cases}$$

es decir la solución es

$$f^*(x) = \begin{bmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

② Supongamos que $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$.

(*) Cuando $h = 0$, el problema de contorno se dice homogéneo.

Los restantes datos de este ejemplo coinciden con los de 1.
Entonces

$$M = B\phi(0) + C\phi(2\pi) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El problema homogéneo (relativo a las condiciones de contorno)

$$\boxed{\begin{array}{l} y' = Ay \\ Bf(0) + Cf(2\pi) = 0 \end{array}}$$

tiene soluciones de la forma $\phi(x)\cdot\lambda$ donde λ verifica

$M\lambda = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow 2\lambda_1 = 0$, λ_2 arbitrario

Entonces Z^* es isomorfo a $\{(0,\lambda_2) / \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$ y por tanto $\dim Z^* = 1$.

$M\lambda = h \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$

sistema que tiene solución sii $\operatorname{rang}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 2 & 0 & h_1 \\ 0 & 0 & h_2 \end{bmatrix}$.

Como $\operatorname{rang}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$, para que $\operatorname{rang}\begin{bmatrix} 2 & 0 & h_1 \\ 0 & 0 & h_2 \end{bmatrix} = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$

es necesario y suficiente que $h_2 = 0$.

En el caso $h_2 = 0$, las soluciones son de la forma $\phi(x)\lambda$ donde λ es tal que

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{h_1}{2}, \ \lambda_2 \text{ arbitrario.}$$

Para cada valor de λ_2 tenemos una solución del problema de contorno.

Si $h_2 \neq 0$, el problema no tiene solución.

4. Autovalores y autofunciones: Problema de Sturm-Liouville.

A) EJEMPLOS: 1 Al resolver en el apartado 1 el problema de contorno

$$\boxed{\begin{array}{l} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{array}}$$

se obtuvieron soluciones del tipo $y_n(x) = A_n \operatorname{sen} nx$. Existían soluciones para los $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ A los λ_n se les llama autovalores. Para $\lambda_0 = 0$ obtenemos la solución trivial $y_0(x) = 0$. A las soluciones correspondientes $y_n(x)$ se les llama autofunciones. Se tiene que

a) Todos los autovalores son reales.

b) La sucesión de autovalores converge a $+\infty$.

c) Las autofunciones correspondientes a autovalores distintos son ortogonales

les en el sentido de que $\int_0^\pi y_n(x)\,y_m(x) = 0$ si $n \neq m$.

② Consideremos ahora el problema de contorno

$$\boxed{\begin{array}{l} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y'(\pi) = 0 \end{array}}$$

Supuesto $\lambda \neq 0$, la ecuación característica es $r^2 + \lambda = 0$ y sus raíces son $r = \pm\sqrt{\lambda}\, i$.

Sea $\sqrt{\lambda} = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

La solucion general de la E.D. es

$$y(x) = c_1 e^{i\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-i\sqrt{\lambda}x} = c_1 e^{(i\alpha-\beta)x} + c_2 e^{(\beta - i\alpha)x}$$

Entonces

$$y'(x) = (i\alpha - \beta) c_1 e^{(i\alpha-\beta)x} - c_2 (i\alpha - \beta) e^{(\beta-\alpha i)x}$$

$y'(0) = 0 \Rightarrow (i\alpha - \beta)(c_1 - c_2) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2$, pues $\lambda \neq 0$.

$$\left.\begin{array}{l} y'(\pi) = 0 \\ c_1 = c_2 \end{array}\right\} \Rightarrow (i\alpha - \beta)\, c_1 \left[e^{i\alpha\pi - \beta\pi} - e^{-i\alpha\pi + \beta\pi} \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{2i\alpha\pi} = e^{2\beta\pi} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos 2\alpha\pi = e^{2\beta\pi} \\ \operatorname{sen} 2\alpha\pi = 0 \end{array} \right.$$

Si $\operatorname{sen} 2\alpha\pi = 0$, entonces $2\alpha\pi = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, y por tanto $\cos 2\alpha\pi = (-1)^k$. Como $\cos 2\alpha\pi = e^{2\beta\pi} > 0$, debe ser $k = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Por tanto, $2\alpha\pi = 2n\pi$, de donde $\alpha = n$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Entonces, como $\beta = 0$, pues $e^{2\beta\pi} = 1$, se tiene que $\sqrt{\lambda} = n$ y también $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Las soluciones del problema de contorno son de la forma

$$y_n(x) = c_1 \left(e^{inx} + e^{-inx} \right) = 2c_1 \cos nx$$

Los autovalores son los cuadrados de los números naturales y las autofunciones las soluciones $y_n(x)$ correspondientes.

Si $\lambda = 0$ la E.D. queda $y'' = 0$ de donde $y = c_1 x + c_2$.

Entonces, $y'(x) = c_1$ y, puesto que $y'(0) = 0$ debe ser $c_1 = 0$.

Luego $y(x) = cte$, para $\lambda = 0$. Si hacemos $y_0(x) = c_0$, la expresión $y_n(x) = c_n \cos nx$ representa todas las autofunciones.

Observamos en este ejemplo que los autovalores son reales, la sucesión de autovalores tiende a $+\infty$ y que las autofunciones correspondientes a autovalores distintos son ortogonales.

Vamos a generalizar los resultados de estos ejemplos para problemas del tipo Sturm-Liouville.

B) PROBLEMAS DE CONTORNO DEL TIPO STURM-LIOUVILLE:

Consideremos el operador $L[y] = -y''$ y la E.D. $L[y] = \lambda y$. Sean u, v funciones complejas definidas en $[a,b]$. Denotaremos por $\overline{u(x)}$ el conjugado de $u(x)$. Mediante una integración por partes se tiene

$$\int_a^b L[u(x)]\,\overline{v(x)}\,dx = -\int_a^b u''(x)\,\overline{v(x)}\,dx = -u'(x)\overline{v(x)}\Big]_a^b + \int_a^b u'(x)\,\overline{v'(x)}\,dx =$$

$$= \left[u(x)\overline{v'(x)} - u'(x)\overline{v(x)}\right]_a^b - \int_a^b u(x)\,\overline{v''(x)}\,dx = W(u,\bar{v})\Big]_a^b + \int_a^b L[\bar{v}(x)]\,u(x)\,dx.$$

donde $W(u,\bar{v})$ es el wronskiano.

DEFINICION: (Problema de Sturm-Liouville).

Un problema del tipo $L[y] = \lambda y$ donde $L[y] = -y''$ con unas condiciones de contorno tales que para todo u, v (funciones que verifican dichas condiciones) se tiene que

$$W(u,\bar{v})\Big]_a^b = 0$$

se llama problema de Sturm-Liouville.

Para un problema de este tipo se verifica que

$$\int_a^b \left\{ L[u(x)]\,\bar{v}(x) - u(x)\,\overline{L[v(x)]} \right\} dx = 0$$

siempre que u y v verifiquen las condiciones de contorno.

Son ejemplos de este tipo de problemas los siguientes

$$\boxed{\begin{aligned} &y'' + \lambda y = 0 \\ &\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0 \\ &\gamma y(b) + \delta y'(b) = 0 \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} &y'' + \lambda y = 0 \\ &y(a) - y(b) = 0 \\ &y'(a) - y'(b) = 0 \end{aligned}} \quad (*)$$

Damos sin demostración el siguiente

4.1. TEOREMA: Un problema de contorno del tipo Sturm-Liouville tiene todos sus autovalores reales, las autofunciones correspondientes a autovalores distintos son ortogonales y existe una sucesión de autovalores que tiende a $+\infty$.

Este teorema admite una pequeña generalización. Consideremos la E.D

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = \lambda y$$

donde las $a_i(x)$ son funciones continuas en un intervalo $[a,b]$.

(*) Condiciones de contorno del tipo $y(a) - y(b) = 0$, $y'(a) - y'(b) = 0$ se llaman periódicas.

Supuesto que $a_0(x) \neq 0$, multiplicando la E.D por

$$\frac{1}{a_0(x)} e^{\int_a^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt}$$

la podemos transformar en una del tipo

$$(p(x)y')' + q(x)y = \lambda r(x) y \qquad (I)$$

Se tiene para esta E.D. con condiciones de contorno del tipo de Sturm-Liouville el siguiente

4.2. TEOREMA: Consideremos la E.D. $(p(x)y')' + q(x)y = \lambda r(x) y$ donde p, q y r son continuas en $[a,b]$ y $p(x)>0$, $r(x)>0$. Consideremos que tenemos condiciones de contorno de uno de los tipos

$$\begin{cases} \alpha y(a) + \beta y'(a) = 0 \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0 \end{cases} \quad ó \quad \begin{cases} y(a) - y(b) = 0 \\ y'(a) - y'(b) = 0 \end{cases}$$

Para un problema de contorno de este tipo se verifica

1) Los autovalores son todos reales.

2) Las autofunciones correspondientes a autovalores distintos son ortogonales respecto al peso $r(x)$, es decir

$$\int_a^b u(x) v(x) r(x)\, dx = 0$$

si u y v son autofunciones asociadas a autovalores distintos.

3) Existe una sucesión de autovalores que converge a $+\infty$.

OBSERVACION: Como en la E.D. (I) $q - \lambda r$ es función del parámetro λ, en ciertas condiciones, existen valores de dicho parámetro para los que el problema de contorno homogéneo tiene solución no nula. A estos valores de λ les hemos llamado autovalores y las soluciones correspondientes son las llamadas autofunciones.