TEMA 10°: INTEGRALES PRIMERAS PARA SISTEMAS DIFERENCIALES

1. DEFINICION. PROPIEDADES

Sea $y' = F(x,y)$ un S.D. y D un dominio de unicidad para el S.D., es decir, en D se verifica la condición suficiente de unicidad de soluciones.

DEFINICION: (Integral primera de un S.D.)
Una función $G: D' \subset D \subset \mathbb{R}^{n+1} \longmapsto \mathbb{R}$ se dice una integral primera para el S.D. $y' = F(x,y)$ si se verifican las siguientes condiciones:

i) G es de clase 1 en D'.

ii) $\forall (x,y) \in D'$, $(D_0 G(x,y), D_1 G(x,y), \dots, D_n G(x,y)) \neq 0$ donde
$$D_0 G(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} G(x,y), \quad D_i G(x,y) = \frac{\partial}{\partial y_i} G(x,y) \quad i = 1, \dots, n. \quad (*)$$

iii) Para toda solución del S.D. $f: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ existe K tal que $G(x, f(x)) = K$, $\forall x \in I$

En adelante supondremos que F es de clase 1.

DEFINICION: (Integrales primeras funcionalmente independientes)
Sean $G_1, \dots, G_p$, $p \leq n$, integrales primeras del S.D. $y' = F(x,y)$ definidas en el dominio D'. Se dice que son funcionalmente independientes si
$$\operatorname{rang} (D_i G_j(x,y))_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,p}} = p, \quad \forall (x,y) \in D'.$$

Veamos bajo qué condiciones existen integrales primeras. Antes daremos el siguiente

1.1. LEMA: Dado $(x_0, y_0) \in D$ existen un intervalo I de centro x_0 y una bola B de centro y_0 tal que la solución general
$$f: I \times I \times B \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
es de clase 1 en $I \times I \times B$.

1.2. PROPOSICION: Sea el S.D. $y' = F(x,y)$, $F \in \mathcal{C}^1(D)$. Dado $(x_0, y_0) \in D$ existe un subdominio $D' \subset D$ que contiene a (x_0, y_0) y en el que están definidas n integrales primeras funcionalmente independientes.

Demostr.: Sabemos que existe un intervalo I de centro x_0 y una bola B de centro y_0 tal que la solución general es de clase 1 en $I \times I \times B$.

Sea $a \in I$. Consideremos las funciones

$$G_i : (x,y) \in \mathring{\overline{I \times B}} \longmapsto G_i(x,y) = f_i(a,x,y)$$

donde $f_i(a,x,y)$ es el valor en a de la componente i-ésima de la solución del S.D. que pasa por (x,y). Se verifica los siguiente

i) Las funciones G_i son de clase 1.

ii) Si g es una solución del S.D. definida en I, entonces $G_i(x,g(x)) = f_i(a,x,g(x)) = g_i(a)$, $\forall x \in I$, pues la solución que pasa por $(x,g(x))$ es g.

Se verifica además que $\det\left(D_j f_i(x,x_0,y_0)\right)_{i,j=1,\dots,n} = \exp\int_{x_0}^{x} \mathrm{Tr}\left(D_j F_i(t,f(t,x_0,y_0))\right)dt$

Supuesto probado esto, como este determinante es no nulo, los vectores tangentes $(D_0 G_i(x,y), D_1 G_i(x,y), \dots, D_n G_i(x,y))$ son distintos de cero.

Además $\mathrm{rang}(D_j G_i(x,y)) = n$, y por tanto, las G_i son integrales primeras funcionalmente independientes. csqd.

Supondremos en adelante que las integrales primeras están definidas en el dominio D.

1.3. TEOREMA: (Caracterización de las integrales primeras)

Una función $G : (x,y) \in D \longmapsto G(x,y) \in \mathbb{R}$ verificando las condiciones i) e ii) de la definición de integral primera es integral primera del S.D. si y sólo si para cualquier solución del S.D. $f : x \in I \mapsto f(x) \in \mathbb{R}^n$ se verifica que

$$\forall x \in I,\ D_0 G(x,f(x)) + \sum_{i=1}^{n} D_i G(x,f(x))\, F_i(x,f(x)) = 0.$$

Demostr.: $\Rightarrow$) Sea f una solución del S.D, $f = (f_1,\dots,f_n)$.

Consideremos la función

$$f^* : x \in I \longmapsto f^*(x) = (x, f_1(x), \dots, f_n(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Si G es integral primera para el S.D. entonces

$$(G \circ f^*)(x) = K,\ \forall x \in I$$

y por tanto,

$$(G \circ f^*)'(x) = 0,\ \forall x \in I$$

es decir

$$D_0 G(x,f(x)) + \sum_{i=1}^{n} D_i G(x,f(x)) f_i'(x) = 0,\ \forall x \in I$$

y siendo f solución, $f_i'(x) = F_i(x,f(x))$ queda probada la condición necesaria.

$\Leftarrow$) Basta seguir en sentido inverso los razonamientos anteriores.

1.4. TEOREMA: Si $G_1, \dots, G_n$ son n integrales primeras del S.D. $y' = F(x,y)$, donde $F \in \mathcal{C}^1(D)$, funcionalmente independientes entonces para cada $(x_0, y_0) \in D$ la única solución que pasa por (x_0, y_0) viene definida implícitamente por el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} G_1(x,y) - G_1(x_0,y_0) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ G_n(x,y) - G_n(x_0,y_0) = 0 \end{array}\right. \qquad (\mathrm{I})$$

Demostr.: Probaremos que la solución definida implícitamente por el sistema (I) coincide con la solución en un entorno de x_0.

Consideremos la función

$$G : (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^{n+1} \longmapsto G(x,y) = (G_1(x,y) - G_{01}, \dots, G_n(x,y) - G_{0n}) \in \mathbb{R}^n$$

donde $G_{0i} = G_i(x_0, y_0)$, $i = 1, \dots, n$.

Se verifica entonces que

1) $G \in \mathcal{C}^1(D)$.

2) $\det(D_i G_j(x,y)) \neq 0$ por ser las G_i funcionalmente independientes.

3) $G(x_0, y_0) = 0$.

En virtud del teorema de la función implícita, existirá $\alpha > 0$ y $f :]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

a) $f \in \mathcal{C}^1(]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[)$

b) $f(x_0) = y_0$

c) f es la única solución de la ecuación funcional $G(x,y) = 0$.

Sea $\tilde{f} : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbb{R}^n$ la solución del S.D. tal que $\tilde{f}(x_0) = y_0$.

Si comprobamos que $\tilde{f}$ verifica la ecuación funcional $G(x,y) = 0$, se tendrá que $\tilde{f} \equiv f$ en $]x_0 - \beta, x_0 + \beta[$ donde $\beta = \min(\alpha, \delta)$.

Por ser G_i, $i = 1, \dots, n$ integrales primeras se verifica que

$$G_i(x, \tilde{f}(x)) - G_i(x_0, \tilde{f}(x_0)) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Por tanto, $\tilde{f}$ es solución de la ecuación funcional $G(x,y) = 0$ y en consecuencia f y $\tilde{f}$ coinciden en un entorno de x_0. c.q.d.

Una generalización de este teorema la da el teorema siguiente.

1.5. TEOREMA: Si $G_1, \dots, G_p$, $p < n$, son integrales primeras del S.D. $y' = F(x,y)$ funcionalmente independientes entonces la solución del S.D. se puede obtener a partir de la de un S.D. de orden $n - p$.

Demostr.: Sean $G_1, \dots, G_p$, $p<n$, integrales primeras definidas en D funcionalmente independientes; luego

$$\operatorname{rang}\left(D_i G_j(x,y)\right)_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,p} = p.$$

Supongamos que un menor complementario no nulo de orden p esta colocado en las p primeras filas y p primeras columnas, es decir que

$$\det\left(D_i G_j(x,y)\right)_{i,j=1,\dots,p} \neq 0.$$

Sean $\bar{x} = (x, y_{p+1}, \dots, y_n)$, $\bar{x}_0 = (x_0, y_{0p+1}, \dots, y_{0n})$,

$\tilde{y} = (y_1, \dots, y_p)$, $\tilde{y}_0 = (y_{01}, \dots, y_{0p})$

donde $(x_0, y_{01}, \dots, y_{0n}) \in D$.

Se pretende obtener la solución del S.D. que pasa por este punto a partir de la de otro S.D. de menos ecuaciones.

Definimos

$$G : (x,y) \in D \longmapsto \left(G_1(x,y) - G_{01}, \dots, G_p(x,y) - G_{0p}\right) \in \mathbb{R}^p,$$

donde $G_{0i} = G_i(x_0, y_0)$, $i = 1, 2, \dots, p$

Se verifica que

1) $G \in \mathcal{C}^1(D)$, por ser integrales primeras.
2) $\det\left(D_i G_j(x,y)\right) \neq 0$, $i,j = 1, \dots, p$.
3) $G(x_0, y_0) = 0$.

En virtud del teorema de la función implícita existen $\alpha, \beta > 0$ y existe $f : \{\bar{x} / \|\bar{x} - \bar{x}_0\| < \alpha\} \subset \mathbb{R}^{n-p+1} \longrightarrow \{\tilde{y} / \|\tilde{y} - \tilde{y}_0\| < \beta\} \subset \mathbb{R}^p$ que verifica

i) $f \in \mathcal{C}^1(\{\bar{x} / \|\bar{x} - \bar{x}_0\| < \alpha\})$

ii) $f(\bar{x}_0) = \tilde{y}_0$.

iii) f es la única solución de la ecuación funcional $G(x,y) = 0$.

Consideremos el siguiente S.D.:

$$\left\{\begin{array}{l} y'_{p+1} = F_{p+1}(x, f_1(x, y_{p+1}, \dots, y_n), f_2(x, y_{p+1}, \dots, y_n), \dots, f_p(x, y_{p+1}, \dots, y_n), y_{p+1}, \dots, y_n) \\ \text{— — — — — — — — — — —} \\ y'_n = F_n(x, f_1(x, y_{p+1}, \dots, y_n), f_2(x, y_{p+1}, \dots, y_n), \dots, f_p(x, y_{p+1}, \dots, y_p), y_{p+1}, \dots, y_n) \end{array}\right.$$

es decir, hemos considerado un S.D. del tipo

$$\left\{\begin{array}{l} y'_{p+1} = \Phi_{p+1}(x, y_{p+1}, \dots, y_n) \\ \text{— — — — — — — —} \\ y'_n = \Phi_n(x, y_{p+1}, \dots, y_n) \end{array}\right.$$

Como las componentes de F y f son de clase 1 en un entorno conexo Lo de (x_0, y_0) se puede asegurar que existe una única solución φ para este S.D. que verifica que

$$\varphi(x_0) = (y_{0p+1}, \ldots, y_{0n})$$

donde $\varphi : x \in \{x / |x - x_0| < \delta\} \longmapsto \varphi(x) \in \mathbb{R}^{n-p}$.

Consideramos la función

$$\psi : x \in \{x / |x - x_0| < \delta\} \longrightarrow \psi(x) \in \mathbb{R}^n,$$

que está definida por

$$\psi_i(x) = f_i(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-p}(x)) \qquad i = 1, \ldots, p$$

$$\psi_{p+i}(x) = \varphi_i(x) \qquad , \ i = 1, \ldots, n-p$$

Se verifica que ψ es la única solución del S.D. $y' = F(x, y)$ que pasa por (x_0, y_0). Basta para probarlo aplicar que las G_p son integrales primeras para el S.D.